УДК 512.53

Т. В. Волошина

ЕФЕКТИВНІ ТРАНЗИТИВНІ ЗОБРАЖЕННЯ МОНОГЕННИХ ІНВЕРСНИХ НАПІВГРУП

T. V. Voloshyna. *Effective transitive representations of monogenic inverse semigroups*, Matematychni Studii, **16** (2001) 25–36.

All effective transitive representations of monogenic inverse semigroups in terms of closed inverse subsemigroups are described. In particular, all exact effective transitive representations are described, criteria of equivalence of two representations are obtained.

Т. В. Волошина. *Эффективные транзитивные представления моногенных инверсных полугрупп* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.25–36.

Описаны все эффективные транзитивные представления моногенных инверсных полугрупп в терминах замкнутых инверсных подполугрупп. В частности, дано описание всех точных эффективных транзитивных представлений, получены критерии эквивалентности двух представлений.

1. Вступ. Нехай S — інверсна напівгрупа, a^{-1} — елемент, *інверсний* до $a \in S$, ω — природний частковий порядок на S ([1], [2]), визначений так: $a\omega b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Для зручності іноді будемо вживати і позначення $\leq$. Зокрема, будемо писати $a < b$, якщо $a\omega b$ і $a \neq b$. *Замиканням* $H\omega$ *множини* $H \subseteq S$ називається множина $H\omega := \{h \in S : (\exists \pi \in H)(\pi\omega h)\}$. Якщо $H\omega = H$, то H називається *замкненою*. *Підстановочним зображенням*, або просто зображенням інверсної напівгрупи S називається довільний гомоморфізм S в інверсну симетричну напівгрупу IS_X часткових підстановок на деякій множині X. Для $a \in S$ через $\operatorname{dom} a$ і $\operatorname{ran} a$ позначаються відповідно область визначення та область значень a як часткової підстановки. Зауважимо, що $\pi\omega\tau \Leftrightarrow \operatorname{dom}\pi \subseteq \operatorname{dom}\tau$ і $(\forall x \in \operatorname{dom}\pi) : \pi(x) = \tau(x)$ для часткових підстановок π, $\tau \in IS_X$. Розклад елементів IS_X у добуток незалежних ланцюгів і циклів, аналогічний до розкладу підстановок у добуток циклів, описано в [3] і [4]. Зображення $\varphi\colon S \to IS_X$ називається *ефективним*, якщо $\bigcup_{\pi\in S} \operatorname{dom}\varphi(\pi) = X$, і *транзитивним*, якщо для довільних $x, y \in X$ існує таке $\pi \in S$, що $x^{\varphi(\pi)} = y$. Ін'єктивне зображення інверсної напівгрупи називається *точним*. Поняття, які використовуються без означення, можна знайти в [1] або [2]. Нас будуть цікавити лише транзитивні зображення, позаяк кожне ефективне зображення є підпрямою сумою транзитивних. У статті [5] Шайн довів, що кожне ефективне транзитивне зображення інверсної напівгрупи S еквівалентне до зображення, яке будується у наступний спосіб. Нехай K — замкнена інверсна піднапівгрупа з S. Визначимо на S часткову праву конгруенцію $\pi_K = \{(s,t) \in S \times S | st^{-1} \in K\}$. На

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M18, 20M20, 20M30.

множині X класів еквівалентності конгруенції π_K визначимо дію S за правилом: для $x \in X$ і $s \in S$ $s(x)$ — це той клас із X, який містить елемент xs, зокрема, K — єдиний із π_K-класів, що містить ідемпотенти. Це зображення будемо позначати φ_K і називати *зображенням напівгрупи S на правих ω-класах за K.* Вагнер [6] і Престон [7] побудували точне зображення інверсної напівгрупи S частковими підстановками множини S: $\operatorname{dom} a = Sa^{-1}$ для $a \in S$ і $x^a = xa$ для кожного $x \in \operatorname{dom} a$. Якщо S містить нуль 0, то він є нерухомою точкою для всіх елементів з S. Тому можна перейти до індукованого зображення S частковими підстановками множини $S\{0\}$, яке залишається точним. Таке зображення S частковими підстановками множини S (або $S\{0\}$, якщо S містить нуль 0) будемо називати *зображенням Престона-Вагнера.* Зауважимо, що нулю при цьому зображенні відповідає ніде не визначена часткова підстановка. Інверсна напівгрупа S називається *моногенною з інверсним твірним $a \in S$* (пишемо $S = \langle a \rangle$), якщо найменша інверсна піднапівгрупа з S, яка містить a, збігається з S.

Теорема 1 [8]. *З точністю до ізоморфізму кожна моногенна інверсна напівгрупа належить до одного і тільки до одного з наступних типів (натуральні числа k, l вибираються найменшими з можливих):*

(1) типу (k, l), якщо виконується співвідношення $a^k = a^{k+l}$;

(2) типу (k, ω), якщо виконується співвідношення $a^k a^{-1} = a^{-1} a^k$;

(3) типу (k, ∞), якщо виконується співвідношення $a^k = a^{k+1} a^{-1}$;

(4) вільна, якщо жодне з вищевказаних співвідношень не виконується.

Зауважимо, що скінченними є лише моногенні інверсні напівгрупи типу (k, l).

2. Допоміжні результати. Нехай $E(S)$ — множина всіх ідемпотентів, а $E_{\min}(S)$ (або просто $E_{\min}$) — множина примітивних ідемпотентів напівгрупи S. Якщо $|E_{\min}| = 1$, то єдиний елемент з $E_{\min}$ позначаємо $e_{\min}$. Якщо $S = \langle a \rangle$, то для $k \geq 1$ покладемо $e_k = a^k a^{-k}$, $f_k = a^{-k} a^k$ і $e_0 = f_0 = \Lambda$ — приєднана одиниця напівгрупи. Тоді (див., наприклад, [8]) кожний ідемпотент із $E(\langle a \rangle)$ можна подати у вигляді $e_n f_m$, де $n + m > 0$, і для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$a^k = a^{k+1} a^{-1} \Leftrightarrow e_k = e_{k+1}, \quad a^k = a^{-1} a^{k+1} \Leftrightarrow f_k = f_{k+1}.$$

Лема 1 [9].

a) *Моногенна інверсна напівгрупа S типу (k, l) має скінченну кількість ідемпотентів. $e_k = e_{k+1} = ... = f_k = f_{k+1} = ... = e$ є найменшим елементом в $E(S)$. e є нулем напівгрупи S тоді і тільки тоді, коли $l = 1$. Якщо $l = 1$, то $a^k = e$ і $|E_{\min}| = k$.*

b) *Моногенна інверсна напівгрупа S типу (k, ω) не містить нуля, має скінченну кількість ідемпотентів, і $e_k = e_{k+1} = ... = f_k = f_{k+1} = ... = e$ — єдиний примітивний ідемпотент в S.*

c) *Моногенна інверсна напівгрупа S типу (k, ∞) має нескінченну кількість ідемпотентів. Кожен з них має вигляд $e_n f_m$, де $n + m \leq k$, або f_m, де $m > k$. Усі ці ідемпотенти різні, $e_k > f_k$, $f_1 > f_2 > ... > f_k > f_{k+1} > ...$ і S не містить примітивних ідемпотентів.*

Лема 2 [9]. *Нехай $S = \langle a \rangle$ і $\tau = a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot \dots \cdot a^{i_k}$, де $i_1, i_2, \dots, i_k \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а сусідні показники мають протилежні знаки. Якщо $i_1 + i_2 + \dots + i_k = 0$, то $\tau \in E(S)$, а якщо $i_1 + i_2 + \dots + i_k \neq 0$, то $\tau \omega a^{i_1 + i_2 + \dots + i_k}$.*

Наслідок. *Якщо $S = \langle a\rangle$ — моногенна інверсна напівгрупа і $K \subset S$ — її замкнена інверсна піднапівгрупа, що не лежить в $E(S)$, то $a^n \in K$ для деякого натурального n.*

Розглянемо зображення Престона-Вагнера напівгрупи $S = \langle a\rangle$.

Лема 3 [9]. *Нехай $S = \langle a\rangle$ — не вільна і $M = \bigcap_{e\in E(S)} \operatorname{dom} e$. Тоді кожна піднапівгрупа вигляду $(e)\omega$, де $e \in E(S)$ і $\operatorname{dom} e \neq M$, міститься в $E(S)$.*

За лемою 1 напівгрупа S типу (k, l), де $l > 1$, або (k, ω) містить єдиний примітивний ідемпотент $e_{\min}$. Нехай $M = \operatorname{dom} e_{\min}$. Зауважимо, що $M = \operatorname{dom} a^k \subseteq \operatorname{dom} a^{k-1} \subseteq ... \subseteq \operatorname{dom} a$ і $M = \operatorname{dom} a^{-k} \subseteq \operatorname{dom} a^{-(k-1)} \subseteq ... \subseteq \operatorname{dom} a^{-1}$. Тому $M \subseteq \operatorname{dom} \tau$ для довільного $\tau \in S$ і $S_M := \{\tau \in S : M^\tau = M\} = S$. Розглянемо ще гомоморфізм $\varphi_M : S_M \to S(M)$, $\tau \mapsto \tau|_M$, де $S(M)$ позначає симетричну групу на множині M.

Теорема 2 [9]. *Нехай S — моногенна інверсна напівгрупа типу (k, l).*

a) *Якщо $l = 1$, то замкнені інверсні піднапівгрупи з S збігаються з піднапівгрупами вигляду $(e)\omega$, де $e \in E(S)$.*
b) *Якщо $l > 1$, то $C_l = \varphi_M(S)$ є циклічною групою порядку l. Для довільних $l_1 | l$ і $H = C_{l_1} \leq C_l$ напівгрупа $K = \varphi_M^{-1}(H)$ є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи S. Кожна замкнена інверсна піднапівгрупа з S має такий вигляд або міститься в $E(S)$.*

Теорема 3 [9]. *Якщо S — моногенна інверсна напівгрупа типу (k, ω), то $\varphi_M(S)$ є нескінченною циклічною групою, і для довільної підгрупи $H \leq \varphi_M(S)$ $K = \varphi_M^{-1}(H)$ є замкненою інверсною піднапівгрупою напівгрупи S. Кожна замкнена інверсна піднапівгрупа напівгрупи S має такий вигляд або міститься в $E(S)$.*

Теорема 4 [9]. *Нехай $S = \langle a\rangle$ має тип (k, ∞). Тоді*

a) *$E(S)$ є замкненою інверсною піднапівгрупою з S;*
b) *для кожного $l \geq 1$ найменша інверсна піднапівгрупа $K_l \subseteq S$, яка містить a^l і $E(S)$, є замкненою, і піднапівгрупами вигляду K_l вичерпуються всі замкнені інверсні піднапівгрупи напівгрупи з S, які не містяться в $E(S)$.*

3. Еквівалентність ефективних транзитивних зображень. Інверсні піднапівгрупи K_1 і K_2 інверсної напівгрупи S називаються *спряженими,* якщо існує такий $a \in S$, що $aa^{-1} \in K_1$, $aa^{-1} \in K_1$ і $a^{-1}K_1a \subseteq K_2$, $aK_2a^{-1} \subseteq K_1$. Шайн у [5] довів, що зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} інверсної напівгрупи на множині правих ω-класів за замкненими інверсними піднапівгрупами K_1 і K_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли K_1 і K_2 — спряжені.

Теорема 5. *Нехай S — інверсна напівгрупа зі скінченною кількістю ідемпотентів, що точно діє на множині $N \neq \varnothing$, M_1 і M_2 — підмножини з N, і зображення напівгрупи S за замкненими інверсними піднапівгрупами $K_1 = \varphi_{M_1}^{-1}(H_1)$ та $K_2 = \varphi_{M_2}^{-1}(H_2)$ — еквівалентні. Тоді H_1 і H_2 — подібні як групи підстановок.*

Доведення. Нехай φ_{K_1} і φ_{K_2} — еквівалентні. Тоді піднапівгрупи K_1 і K_2 — спряжені, тобто існує такий елемент $a \in S$, що $aa^{-1} \in K_1$, $a^{-1}a \in K_2$ і $a^{-1}K_1a \subseteq K_2$, $aK_2a^{-1} \subseteq K_1$. $K_1 \subseteq S_{M_1}, K_2 \subseteq S_{M_2}$, тому $\operatorname{dom}(aa^{-1}) = \operatorname{dom} a \supseteq M_1$ і $\operatorname{dom}(a^{-1}a) = \operatorname{dom} a^{-1} \supseteq M_2$.

Позначимо $\operatorname{dom} a = A_1$, $\operatorname{dom} a^{-1} = A_2$. Нехай e_1 і e_2 — найменші ідемпотенти з K_1 і K_2 відповідно. Очевидно, що $M_2^{a^{-1}} \subseteq A_1$. Припустимо, що $M_2^{a^{-1}} \neq M_1$. Тоді існує таке $i \in M_2$, що $a^{-1}(i) \in A_1 \backslash M_1$. $a^{-1}(i) \notin M_1$, тому для довільного $\tau \in K_1$ існує елемент $\pi = e_1\tau \in K_1$, для якого $\operatorname{dom}\pi = \operatorname{dom}(e_1\tau) = M_1$ і $\pi(a^{-1}(i)) = \varnothing$. Отже, існує $t = a^{-1}\pi a \in a^{-1}K_1 a \subseteq K_2$, для якого $M_2^t \neq M_2$, що неможливо, позаяк $K_2 \subseteq S_{M_2}$. Звідси $M_2^{a^{-1}} = M_1$, $M_1^a = M_2$.

Розглянемо елемент $s = e_1 a \in S$. Тоді $\operatorname{dom} s = M_1$, $M_1^s = M_2$, $ss^{-1} = e_1 \in K_1$, $s^{-1}s = e_2 \in K_2$, $s^{-1}K_1 s = a^{-1}(e_1 K_1 e_1)a \subseteq a^{-1}K_1 a \subseteq K_2$. Подібно отримуємо, що $sK_2 s^{-1} \subseteq aK_2 a^{-1} \subseteq K_1$ і $s^{-1}(e_1 K_1)s \subseteq s^{-1}K_1 s \subseteq K_2$. Враховуючи, що для довільного $\tau \in s^{-1}(e_1 K_1)s$, з одного боку $\operatorname{dom}\tau \subseteq \operatorname{dom} s^{-1} = M_2$, а з іншого $M_2 \subseteq \operatorname{dom}\tau$, бо $\tau \in K_2$, то $\operatorname{dom}\tau = M_2$. $e_2 K_2 = \{\tau \in K_2 \,|\operatorname{dom}\tau = M_2\}$. Тому справедливе включення $s^{-1}(e_1 K_1)s \subseteq e_2 K_2$. Звузимо його на множину M_2 і отримаємо: $s^{-1}|_{M_2} H_1 s|_{M_1} \subseteq H_2$.

Розглядаючи включення $s(e_2 K_2)s^{-1} \subseteq K_1$, подібно можна отримати $s|_{M_1} H_2 s^{-1}|_{M_2} \subseteq H_1$, $H_2 = s^{-1}|_{M_2} (s|_{M_1} H_2 s^{-1}|_{M_2})\, s|_{M_1} \subseteq s^{-1}|_{M_2} H_1 s|_{M_1} \subseteq H_2$. Тому $H_2 = s^{-1}|_{M_2} H_1 s|_{M_1}$. Розглянемо деякий елемент $g \in S(N)$, для якого $s|_{M_1} = g|_{M_1}$. Тоді $s^{-1}|_{M_2} = g^{-1}|_{M_2}$ і підгрупи H_1, H_2 — спряжені в $S(N)$ за допомогою елементу $g \in S(N)$. Побудуємо ізоморфізм $\psi\colon H_1 \to H_2$ у наступний спосіб: $\psi(g_1) = g^{-1}g_1 g \in H_2, g_1 \in H_1$. Елемент $s \in S$ задає бієкцію $\theta\colon M_1 \to M_2$, $i \mapsto i^s$.

Розглянемо довільні $g_1 \in H_1$ та $i \in M_1$. Оскільки

$$(\theta(i))^{\psi(g_1)} = (\theta(i))^{g^{-1}g_1 g} = i^{sg^{-1}g_1 g} = i^{g_1 g} = (i^{g_1})^s = \theta(i^{g_1}),$$

то, ізоморфізм ψ і бієкція θ узгоджені. Отже, групи підстановок (H_1, M_1) та (H_2, M_2) подібні. □

Теорема 6. *Якщо K_1 і K_2 — різні не ідемпотентні замкнені інверсні піднапівгрупи моногенної інверсної напівгрупи S, то зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} напівгрупи S на множині правих ω-класів за цими піднапівгрупами не еквівалентні.*

Доведення. За теоремою 2 і лемою 3 замкнені інверсні піднапівгрупи моногенної інверсної напівгрупи типу $(k,1)$ — ідемпотентні.

а) Нехай спочатку S має тип (k,l), $l > 1$. За теоремою 2 $K_1 = \varphi_M^{-1}(C_{l_1})$, $K_2 = \varphi_M^{-1}(C_{l_2})$, де $M = \operatorname{dom} e_{\min}$, а l_1 і l_2 — дільники l. За теоремою 5 з еквівалентності зображень за піднапівгрупами K_1 і K_2 випливає, що (C_{l_1}, M) і (C_{l_2}, M) — подібні як групи підстановок. Тому $l_1 = l_2$. Оскільки $C_{l_1} \leq C_l$ і $C_{l_2} \leq C_l$, то $C_{l_1} = C_{l_2}$ і $K_1 = K_2$, що суперечить умові.

б) Нехай тепер S має тип (k,ω). За теоремою 3 $K_1 = \varphi_M^{-1}(H_1)$, $K_2 = \varphi_M^{-1}(H_2)$, де $H_1 = \langle a^s|_M \rangle \leq \langle a|_M \rangle$, $H_2 = \langle a^t|_M \rangle \leq \langle a|_M \rangle$. Очевидно, що s,t — найменші натуральні числа, для яких $a^s \in K_1$ $a^t \in K_2$.

З еквівалентності зображень напівгрупи S на множині правих ω-класів за K_1, K_2 випливає існування $\tau \in S$, для якого $\tau K_2 \tau^{-1} \subseteq K_1$, $\tau^{-1}K_1\tau \subseteq K_2$. Тому $\tau a^t \tau^{-1} \in K_1$, а $\tau^{-1}a^s\tau \in K_2$. Для $\tau \in E(S)$, очевидно, що $\tau a^t \tau^{-1} \omega a^t$. Для $\tau \in S \backslash E(S)$ за лемою 2 існує таке ціле $r \neq 0$, що $\tau\omega a^r$. Тоді $\tau^{-1}\omega a^{-r}$ і $\tau a^t \tau^{-1} \omega a^r a^t a^{-r} = \begin{cases} a^t e_r \omega a^t, & r > 0 \\ f_{|r|} a^t \omega a^t, & r < 0 \end{cases}$. Подібно отримуємо $\tau^{-1}a^s\tau\omega a^s$. Із замкненості K_1 і K_2 випливає, що $a^t \in K_1$, а $a^s \in K_2$. Тому $s = t$ і $K_1 = K_2$.

в) Для напівгрупи типу (k,∞) доведення подібне до випадку б). □

Теорема 7. *Нехай $S = \langle a \rangle$ — моногенна інверсна напівгрупа типу (k,α), де $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \infty\}$, $g_i = a^{n_i}a^{-n_i-m_i}a^{m_i}$, $i = 1,2$, — два різні ідемпотенти з S, $K_i = (g_i)\omega$. Піднапівгрупи K_1 і K_2 є спряженими (і зображення S на множині правих ω-класів за цими* *піднапівгрупами — еквівалентні) тоді і тільки тоді, коли* $k \le n_i + m_i$, $i \in \{1,2\}$, *або* $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$.

Доведення. а) Нехай спочатку $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$ і $n_1 < n_2$. Позначимо $n_i + m_i = r$, $i \in \{1,2\}$, $t = n_2 - n_1 > 0$. Очевидно, що $t \le n_2$, $t \le r - n_1 = m_1$.

Для $a^t \in S$ справедливо $a^t a^{-t} = e_t \ge e_{n_2} \ge g_2$ і $a^{-t}a^t = f_t \ge f_{m_1} \ge g_1$. Тому $a^t a^{-t} \in (g_2)\omega$ і $a^{-t}a^t \in (g_1)\omega$. Рівності $a^t g_1 a^{-t} = g_2$ і $a^{-t} g_2 a^t = g_1$ перевіряються безпосередньо. Тоді для $\tau = g_2 a^t \in S$ справедливо $\tau = a^t g_1 a^{-t} a^t = a^t g_1$ і

$$\tau((g_1)\omega)\tau^{-1} = a^t g_1((g_1)\omega)g_1 a^{-t} = \tau\tau^{-1} = g_2 \in (g_2)\omega,$$

$$\tau^{-1}((g_2)\omega)\tau = a^{-t}g_2((g_2)\omega)g_2 a^t = \tau^{-1}\tau = g_1 a^{-t}a^t g_1 = g_1 \in (g_1)\omega.$$

Тому $(g_1)\omega$ і $(g_2)\omega$ — спряжені, а зображення напівгрупи S на множині правих ω-класів за цими піднапівгрупами — еквівалентні.

б) Нехай $k \le n_i + m_i$, $i \in \{1,2\}$. Якщо S має тип (k,l) або (k,ω) то за лемою 1 $e_k = f_k$ — мінімальний ідемпотент в $E(S)$. Тому $g_i \ge e_k$, $i = 1,2$. З іншого боку, для $k - n_i \le m_i$ маємо:

$$g_i \le e_{n_i} f_{k-n_i} = e_{n_i} f_{k-n_i} e_{n_i} = a^{n_i}a^{-n_i}a^{-(k-n_i)}a^{k-n_i}a^{n_i}a^{-n_i} =$$

$$= a^{n_i} f_k a^{-n_i} = a^{n_i} e_k a^{-n_i} = e_{k+n_i} = e_k, \quad i = 1,2.$$

Тому $g_1 = g_2 = e_k$, що суперечить умові. Розглянемо тепер напівгрупу S типу (k,∞). За доведеним у пункті а) $(g_1)\omega$ спряжена з $(e_{n_1+m_1})\omega$, а $(g_2)\omega$ — з $(e_{n_2+m_2})\omega$. Оскільки з $k \le n_i + m_i$, $i = \{1,2\}$ випливає, що $e_{n_1+m_1} = e_{n_2+m_2} = e_k$, піднапівгрупи $(g_1)\omega$ і $(g_2)\omega$ будуть спряженими, а відповідні їм зображення на множинах правих ω-класів — еквівалентними.

в) Нехай тепер $n_1 + m_1 < n_2 + m_2 \le k$. Позначимо $r_i = n_i + m_i$, $i \in \{1,2\}$.

Припустимо, що $(g_1)\omega$ і $(g_2)\omega$ спряжені. Тоді за доведеним у пункті а) спряженими є піднапівгрупи $(e_{r_1})\omega$ з $(e_{r_2})\omega$ і $(f_{r_1})\omega$ з $(f_{r_2})\omega$. Із спряженості $(e_{r_1})\omega$ і $(e_{r_2})\omega$ випливає існування такого $s \in S$, що $ss^{-1} \in (e_{r_1})\omega$, $s^{-1}s \in (e_{r_2})\omega$ і $s((e_{r_2})\omega)s^{-1} \subseteq (e_{r_1})\omega$, $s^{-1}((e_{r_1})\omega)s \subseteq (e_{r_2})\omega$. Оскільки тоді $se_{r_2}s^{-1} \ge e_{r_1}$ і $s^{-1}e_{r_1}s \ge e_{r_2}$, то $(\operatorname{dom} e_{r_1})^s \subseteq \operatorname{dom} e_{r_2}$, $(\operatorname{dom} e_{r_2})^{s^{-1}} \subseteq \operatorname{dom} e_{r_1}$, і $(\operatorname{dom} e_{r_1})^s = \operatorname{dom} e_{r_2}$. З $r_1 < r_2$ випливає, що $e_{r_2} < e_{r_1}$. Тому $s \notin E(S)$ і за лемою 2 існує таке ціле $t \ne 0$, що $s\omega a^t$. Тоді $(\operatorname{dom} e_{r_1})^{a^t} = \operatorname{dom} e_{r_2}$. Із замкненості $(e_{r_1})\omega$ і $(e_{r_2})\omega$ випливає, що $a^t a^{-t} \in (e_{r_1})\omega \subset (e_k)\omega$, $a^{-t}a^t \in (e_{r_2})\omega \subseteq (e_k)\omega$. Тому $f_1 \ge f_{|t|} \ge e_k$, звідки $f_1 e_k = e_k \Leftrightarrow a^{-1}aa^k a^{-k} = a^k a^{-k} \Leftrightarrow a^{-1}a^{k+1} = a^k$.

Подібно, розглянувши $(f_{r_1})\omega$ і $(f_{r_2})\omega$, отримаємо $a^{k+1}a^{-1} = a^k$. Отже, $a^{k+1}a^{-1} = a^{-1}a^{k+1}$, S — має тип (k,ω) і $0 \notin S$. Зокрема, за лемою 1 b), $|E(S)| < \infty$. Для $\tau = e_{r_1}a^t$ справедливо $\operatorname{ran}\tau = (\operatorname{dom} e_{r_1})^{a^t} = \operatorname{dom} e_{r_2} \subset \operatorname{dom} e_{r_1} = \operatorname{dom}\tau$. Тоді

$$\operatorname{dom}(\tau^{-2}\tau^2) = \operatorname{dom}(\tau^{-2}) = (\operatorname{ran}\tau^{-1} \cap \operatorname{dom}\tau^{-1})^\tau = (\operatorname{dom}\tau \cap \operatorname{ran}\tau)^\tau =$$

$$= (\operatorname{ran}\tau)^\tau \subset (\operatorname{dom}\tau)^\tau = \operatorname{ran}\tau = \operatorname{dom}(\tau^{-1}\tau),$$

тобто $0 \ne \tau^{-2}\tau^2 < \tau^{-1}\tau$. За індукцією можна довести, що $\tau^{-1}\tau > \tau^{-2}\tau^2 > \cdots > \tau^{-p}\tau^p > \cdots$, тобто S містить нескінченний спадний ланцюг ідемпотентів. Одержана суперечність доводить, що $(g_1)\omega$ і $(g_2)\omega$ — не спряжені. Тому зображення S на множинах правих ω-класів за цими піднапівгрупами будуть нееквівалентними. $\square$

Твердження 1. *Нехай* $S = \langle a \rangle$ *— моногенна інверсна напівгрупа.*

a) *Якщо зображення S за різними власними замкненими інверсними піднапівгрупами K_1 і K_2 еквівалентні, то K_1 і K_2 обидві ідемпотентні.*

b) *Якщо інверсна піднапівгрупа $E(S)$ — замкнена, то вона є самоспряженою.*

Доведення. a) За теоремою 6 з еквівалентності зображень напівгрупи S на множині правих ω-класів за неідемпотентними замкненими інверсними піднапівгрупами K_1 і K_2 випливає рівність $K_1 = K_2$, що суперечить умові твердження.

Позначимо $M = \bigcap_{e \in E(S)} \operatorname{dom} e$. Нехай спочатку піднапівгрупа K_1 — скінченна і має вигляд $K_1 = (e)\omega \subseteq E(S)$, а K_2 — неідемпотентна. Припустимо, що зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} напівгрупи S на множині правих ω-класів за K_1 і K_2 — еквівалентні. Тоді існує таке $s \in S$, що $ss^{-1} \in K_1$, $s^{-1}s \in K_2$ і $sK_2s^{-1} \subseteq K_1$, $s^{-1}K_1s \subseteq K_2$. Для $\tau = es \in S$ справедливо $\tau\tau^{-1} = ess^{-1}e = ess^{-1} = e \in K_1$ і $\tau^{-1}\tau = s^{-1}es \in s^{-1}K_1s \subseteq K_2$. Позаяк K_2 — власна, $0 \notin K_2$, бо у протилежному випадку $K_2 = S$. Тому $\tau^{-1}\tau \neq 0$ і $\operatorname{ran}\tau \neq \varnothing$. Із $\tau K_2\tau^{-1} = e(sK_2s^{-1})e \subseteq eK_1e = e = \tau\tau^{-1}$ випливає, що $\operatorname{ran}\tau \subseteq \operatorname{dom} t$ для всіх $t \in K_2$ і $t(i) = i$ для $i \in \operatorname{ran}\tau$.

Для напівгрупи S типу (k, ∞) і неідемпотентної K_2 за теоремою 4b) $E(S) \subseteq K_2$. Тоді $\operatorname{ran}\tau \subseteq \operatorname{dom} f \Leftrightarrow \tau^{-1}\tau\omega f$ для всіх $f \in E(S)$, тобто ідемпотент $\tau^{-1}\tau$ — єдиний примітивний в S, що за лемою 1c) неможливо для напівгрупи S типу (k, ∞).

Нехай тепер S має тип (k, ω) або (k, l), $l \geq 1$. За теоремою 3 і лемою 3 моногенна інверсна напівгрупа типу $(k, 1)$ не має власних неідемпотентних піднапівгруп. Тому $l > 1$ і $M = \operatorname{dom} e_{\min} \neq \varnothing$. За теоремою 2 $K_2 = \varphi_M^{-1}(H)$, де $H \leq S(M)$. Тому $e_{\min} = \varphi_M^{-1}(1) \in K_2$. Оскільки $\operatorname{ran}\tau \subseteq \operatorname{dom} t$ для всіх $t \in K_2$, то $\tau^{-1}\tau\omega e_{\min}$. З мінімальності ідемпотента $e_{\min}$ випливає, що $\tau^{-1}\tau = e_{\min}$ і $\operatorname{ran}\tau = M$. Оскільки $K_2 = \varphi_M^{-1}(H)$, то $H = \varphi_M(K_2) = K_2\,|_M = K_2\,|_{\operatorname{ran}\tau} = 1_M$, і тому $K_2 = (e_{\min})\omega$. Позаяк $M^h = M$ для всіх $h \in S$, $\operatorname{dom} e = \operatorname{dom}\tau = (\operatorname{ran}\tau)^{\tau^{-1}} = M^{\tau^{-1}} = M$ і $e = e_{\min}$. Тоді $K_1 = K_2$, що суперечить їх вибору.

Розглянемо тепер нескінченну замкнену інверсну піднапівгрупу $K_1 \subseteq E(S)$. Тоді за лемою 1 напівгрупа S має тип (k, ∞) і, очевидно, $K_1 = E(S)$. За теоремою 4a) K_1 — замкнена. З еквівалентності зображень φ_{K_1} і φ_{K_2} випливає існування такого $s \in S$, що $sK_2s^{-1} \subseteq K_1 = E(S)$. Тоді $f = sa^ls^{-1} \in E(S)$. Оскільки для ідемпотента $s^{-1}fs$ справедливо $s^{-1}fs = s^{-1}sa^ls^{-1}s \leq a^l$, то $a^l \in (s^{-1}fs)\omega$. Тоді за лемою 3 $a^l \in E(S)$, тобто $a^{2l} = a^l$, що неможливо в напівгрупі S типу (k, ∞).

b) Нехай $K_2 = E(S)$ — замкнена, а K_1 — спряжена до неї замкнена інверсна піднапівгрупа з S. Тоді зображення φ_{K_1} і φ_{K_2} є еквівалентними і за пунктом a) $K_1 \subseteq E(S)$. Припустимо, що $K_1 \neq E(S)$. Тоді $K_1 = (e)\omega$ для деякого $e \in E(S)$. Подібно до фрагменту доведення пункту a), можна показати існування елемента $\tau \in S$, для якого $\tau K_2\tau^{-1} = e(sK_2s^{-1})e \subseteq eK_1e = e = \tau\tau^{-1}$. Тоді $\operatorname{ran}\tau \subseteq \operatorname{dom} t$ для всіх $t \in K_2 = E(S)$ і $t(i) = i$ для $i \in \operatorname{ran}\tau$. Тому $\tau^{-1}\tau$ — єдиний примітивний в S, що неможливо, за лемою 1, для напівгрупи S типу (k, ∞) і $(k, 1)$. Для напівгрупи S типу (k, ω) або (k, l), де $l > 1$, $\operatorname{ran}\tau = \operatorname{dom} e_{\min}$. Неважко перевірити, що $(\operatorname{dom} e_{\min})^h = \operatorname{dom} e_{\min}$ для всіх $h \in S$. Тому $\operatorname{dom} e = \operatorname{dom}\tau = (\operatorname{ran}\tau)^{\tau^{-1}} = (\operatorname{dom} e_{\min})^{\tau^{-1}} = \operatorname{dom} e_{\min}$ і $e = e_{\min}$. Тоді $K_1 = K_2$, що суперечить припущенню. □

4. Точність ефективних транзитивних зображень.

Лема 4. *Нехай φ_H — точне зображення інверсної напівгрупи S з нулем 0 на множині правих ω-класів за деякою замкненою інверсною піднапівгрупою H, а $D_H :=$*

$\{s \in S \,|\, ss^{-1} \in H\}$ — *область визначення головної часткової правої конгруенції, визначеної за допомогою* H *[1]. Якщо* $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \varnothing$ *для всіх* $s \in D_H$*, то* $x = 0$.

Доведення. Розглянемо довільний $t \in S$. Тоді для всіх $s \in D_H$ виконується

$$((Hs)\omega)^{\varphi_H(tx)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)\varphi_H(x)} = (((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)})^{\varphi_H(x)} = \varnothing.$$

Крім того $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \varnothing$ для всіх $s \in D_H$. З точності зображення φ_H випливає, що $tx = x$. Отже, x є правим нулем в S. Тому $x = 0$. □

Лема 5. *Нехай* φ_H — *зображення інверсної напівгрупи* S *на множині правих* ω*-класів за деякою замкненою інверсною піднапівгрупою* H *і* $e \in E(S)$*. Тоді елемент* $\varphi_H(e)$ *діє на своїй області визначення тотожно.*

Доведення. Для довільного правого ω-класу $(Hs)\omega$ за теоремою 7.10 з [1] елемент $s \in (Hs)\omega$ і $(Hs)\omega^{\varphi_H(e)} = \begin{cases} (Hse)\omega, & \text{якщо } ses^{-1} \in H \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$.

Оскільки, за лемою 7.11 з [1], кожний правий ω-клас — замкнений, то з $se\omega s$ і $se \in (Hse)\omega$ випливає, що $s \in (Hse)\omega$. Тому $(Hs)\omega = (Hse)\omega$. □

Лема 6. *Якщо* $S = S^0$ *інверсна напівгрупа і* H — *її власна замкнена інверсна піднапівгрупа, то* $\varphi_H(0)$ — *ніде не визначена підстановка.*

Доведення. Якщо $0 \in H$, то із замкненості H випливає, що $H = S$, бо $0\omega s$ для $s \in S$. Тому $0 \notin H$. Для довільного $s \in S$ виконується $s0s^{-1} = 0 \notin H$. Отже, $(Hs)\omega^{\varphi_H(0)} = \varnothing$ для всіх правих ω-класів. □

Лема 7. *Нехай* S — *інверсна напівгрупа зі скінченною кількістю ідемпотентів, а* φ_H — *її точне зображення на множині правих* ω*-класів за замкненою інверсною піднапівгрупою* H*. Тоді найменший ідемпотент піднапівгрупи* H *є примітивним для напівгрупи* S*.*

Доведення. Очевидно, що $|E(H)| < \infty$. Тому $e_H = \prod_{e \in E(H)} e \in H$ — найменший ідемпотент в H. Позаяк при $H = S$ зображення φ_H не точне і $0 \notin H$, то $e_H \neq 0$.

Розглянемо зображення Престона-Вагнера інверсної напівгрупи S. Нехай $\operatorname{dom} e_H = M$. $E_{\min}(S) \neq \varnothing$, бо в протилежному випадку для довільного ненульового ідемпотента ε знайшовся б такий ненульовий ідемпотент f, що $f < \varepsilon$, що суперечило б умові скінченності множини $E(S)$. Тому для $e_H \neq 0$ існує такий $e \in E_{\min}(S)$, що $e\omega e_H$. З точності зображення φ_H і лем 4 та 6 випливає, що для $e \neq 0$ існує такий $s \in S$, що $ss^{-1} \in H$ і $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} \neq \varnothing$. Тоді за лемою 5 $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega$, звідки $ses^{-1} \in H$.

Легко переконатися, що M — максимальна відносно включення множина, для якої $M^\tau = M$ для всіх $\tau \in H$. Тому $M \subseteq \operatorname{dom} ss^{-1} = \operatorname{dom} s$ і $M \subseteq \operatorname{dom}(ses^{-1}) = \operatorname{dom}(se)$.

Розглянемо $s^* = e_H s \in (Hs)\omega$. Очевидно, що $\operatorname{dom} s^* = M$ і за теоремою 7.10 з [1] $(Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Тому $((Hs^*)\omega)^{\varphi_H(e)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Отже, $s^*e(s^*)^{-1} \in H$. Позаяк $M \subseteq \operatorname{dom}(s^*e(s^*)^{-1})$ і $\operatorname{dom} s^* = M$, то $\operatorname{ran} s^* \subseteq \operatorname{dom} e$. Проте $e \in E_{\min}(S)$, тому $\operatorname{ran} s^* = \operatorname{dom} e$ і $(s^*)^{-1}s^* = e$. Тоді із $e\omega e_H$ випливає, що для $s^* = e_H s$ справедливе включення $\operatorname{ran} s^* \subseteq \operatorname{dom} s^* = M$.

Для $\tau = (s^*)^{-1} \cdot (s^*)^{-1}$, $\operatorname{dom} \tau \subseteq \operatorname{dom}(s^*)^{-1} = \operatorname{dom} e$. Із $\operatorname{ran} s^* \cap \operatorname{dom} s^* = \operatorname{ran} s^* = \operatorname{dom} e \neq \varnothing$ випливає, що $\tau \neq 0$. Позаяк $e \in E_{\min}(S)$, $e = \tau\tau^{-1}$. Припустимо тепер, що $M \setminus \operatorname{ran} s^* \neq \varnothing$ і нехай $i \in M \setminus \operatorname{ran} s^*$. Тоді $s^*(i) \in \operatorname{ran} s^* = \operatorname{dom} e = \operatorname{dom} \tau$. Проте $\tau(s^*(i)) = (s^*)^{-1}\left((s^*)^{-1}(s^*(i))\right) = (s^*)^{-1}(i) = \varnothing$. Отже, припущення невірне і $\operatorname{dom} s^* = \operatorname{ran} s^*$, звідки $e_H = e \in E_{\min}$. □

Твердження 2. *Інверсна напівгрупа S зі скінченною кількістю ідемпотентів і єдиним примітивним ідемпотентом має точне ефективне транзитивне зображення, тоді й лише тоді, коли S є групою або групою з нулем.*

Доведення. Точним ефективним транзитивним зображенням групи або групи з нулем буде зображення Келі, еквівалентне до зображення на правих класах суміжності за підгрупою $H = \{1\}$.

Нехай тепер S не є групою або групою з нулем. Припустимо, що точне ефективне транзитивне зображення цієї напівгрупи існує. Тоді воно еквівалентне до зображення напівгрупи φ_H на правих ω-класах за деякою замкненою інверсною піднапівгрупою H, яке, очевидно, також точне. Тоді H — власна, звідки отримуємо, що $0 \notin H$, бо в протилежному випадку $H = S$. Тому із скінченності $E(S)$ випливає, що $e_H = \prod_{e \in E(H)} e \in H$ — найменший ідемпотент піднапівгрупи H. За лемою 7, $e_H \in E_{\min}(S)$.

Розглянемо довільний правий ω-клас $(Hs)\omega$ за замкненою інверсною піднапівгрупою H і довільний ненульовий ідемпотент f напівгрупи S. Враховуючи, що при цьому $ss^{-1} \in H$ і $0 \notin H$, то $s \neq 0$. Оскільки $|E_{\min}(S)| = 1$, то $E_{\min}(S) = \{e_H\}$ і $e_H \omega f$, тобто $\operatorname{dom} e_H \subseteq \operatorname{dom} f$. Крім цього $\operatorname{dom} e_H \subseteq \operatorname{dom} ss^{-1} = \operatorname{dom} s$ і $\operatorname{dom} e_H \subseteq \operatorname{dom} s^{-1}s = \operatorname{dom} s^{-1}$ для ненульового $s \in S$. Тому $\operatorname{dom} e_H \subseteq \operatorname{dom} sfs^{-1}$ для ідемпотента sfs^{-1}, тобто $e_H \omega sfs^{-1}$. Із замкненості H випливає, що $sfs^{-1} \in H$. Тому $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} \neq \varnothing$ і за лемою 5 $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} = (Hs)\omega$. Отже, всі ненульові ідемпотенти напівгрупи S діють на множині правих ω-класів за H тотожно. Якщо S не є групою або групою з нулем, то знайдеться принаймні два різних ненульових ідемпотенти e_1 і e_2, для яких $\varphi_H(e_1) = \varphi_H(e_2)$, що суперечить припущенню про точність зображення φ_H. □

Теорема 8. *Моногенні інверсні напівгрупи типу (k, ω) і (k, l), $l > 1$, мають точне ефективне транзитивне зображення тоді й лише тоді, коли $k = 1$.*

Доведення. Моногенні інверсні напівгрупи типу $(1, \omega)$ і $(1, l)$, $l > 1$, очевидно, є циклічними групами нескінченого порядку і порядку l відповідно. За твердженням 2 вони мають точне ефективне транзитивне зображення.

Нехай тепер S — моногенна інверсна напівгрупа типу (k, ω) або (k, l), $l > 1$, і $k > 1$. Тоді $f_k \leq f_1$, $e_k \leq e_1$. Припустимо, що $f_k = f_1$. Оскільки за лемою 1a,b) $e_k = f_k$, то $f_1 = e_k \leq e_1$. Тоді $f_1 e_1 = f_1 \Leftrightarrow a^{-1}aaa^{-1} = a^{-1}a$. Звідси $a^2a^{-1} = a$, тобто напівгрупа S має тип $(1, \infty)$, що суперечить умові. Отже, $f_k < f_1$. Оскільки за лемою 1 a,b) $0 \notin S$, то S не є групою чи групою з нулем, бо містить більше одного ненульового ідемпотента. Крім того, за лемою 1 a,b) $|E(S)| < \infty$ і $|E_{\min}| = 1$. Тоді за твердженням 2, S не має точного ефективного транзитивного зображення. □

Лема 8. *Нехай S — моногенна інверсна напівгрупа типу (k, l) чи (k, ω). Якщо $n + m \geq k$, то $e_n f_m = e_k$.*

Доведення. За лемою 1, $e_k = f_k$ — найменший ідемпотент в S. Тому $e_n f_m \geq e_k$. З іншого боку, для $k - n \leq m$ маємо

$$e_n f_m \leq e_n f_{k-n} = e_n f_{k-n} e_n = a^n(a^{-k}a^k)a^{-n} = a^n f_k a^{-n} = a^n e_k a^{-n} = e_{k+n} = e_k.$$

Отже, $e_n f_m = e_k$. □

Лема 9. *Нехай S — моногенна інверсна напівгрупа типу $(k, 1)$. Тоді*

$$E_{\min}(S) = \{e_{k-1}, e_{k-2}f_1, \cdots, e_{k-i-1}f_i, \cdots, e_1 f_{k-2}, f_{k-1}\}.$$

Доведення. Розглянемо довільний $e_{k-i-1}f_i \in E(S)$, де $0 \le i \le k-1$. $e_{k-i-1}f_i \ne 0$, бо інакше $0 = a^i(e_{k-i-1}f_i)a^{-i} = e_{k-1}$ і $a^{k-1} = a^k = 0$, тобто S має тип $(k-1, 1)$, що суперечить умові.

Тоді $(e_{k-i-1}f_i)(e_nf_m) = (e_{k-i-1}e_n)(f_if_m) = e_{k-i-1}f_i$ для $e_nf_m \in E(S)$, якщо $n \le k-i-1$ і $m \le i$. Якщо $n > k-i-1$, то $(e_{k-i-1}f_i)(e_nf_m) = (e_{k-i-1}e_n)(f_if_m) = e_nf_i$. Оскільки тоді $n+i \ge k$, то за лемою 8 $e_nf_i = e_k = 0$. Отже, $(e_{k-i-1}f_i)(e_nf_m) = 0$, якщо $n > k-i-1$. Подібно $(e_{k-i-1}f_i)(e_nf_m) = 0$, якщо $m > i$. Тому, $e_{k-i-1}f_i \in E_{\min}(S)$.

Розглянемо довільний $e_nf_m \ne 0$. Тоді за лемою 8 $n+m < k$. Якщо при цьому $e_nf_m \notin \{e_{k-1}, e_{k-2}f_1, \cdots, e_{k-i-1}f_i, \cdots, e_1f_{k-2}, f_{k-1}\}$, то, очевидно, $n+m < k-1$. Тому $m < k-n-1$ і $e_nf_m > e_nf_{k-n-1} \in \{e_{k-1}, e_{k-2}f_1, \cdots, e_{k-i-1}f_i, \cdots, e_1f_{k-2}, f_{k-1}\}$. Отже, $e_nf_m \notin E_{\min}(S)$ і $E_{\min}(S) = \{e_{k-1}, e_{k-2}f_1, \cdots, e_{k-i-1}f_i, \cdots, e_1f_{k-2}, f_{k-1}\}$. □

Наслідок. *Для моногенної інверсної напівгрупи $S = \langle a\rangle$ типу $(k, 1)$ зображення на множинах правих ω-класів за піднапівгрупами $(e)\omega$, де $e \in E_{\min}$, є еквівалентними.*

Доведення випливає з теореми 7.

Множина $\ker\varphi = \{A_i | i \in I\}$ ідемпотентів інверсної напівгрупи $S/(\varphi \circ \varphi^{-1})$ називається *ядром гомоморфізму* φ.

Лема 10 [10]. *Нехай $\varphi : S \to S'$ — гомоморфізм інверсної напівгрупи S на S' з ядром* $\ker\varphi = \{A_i | i \in I\}$. *Тоді:*

a) A_i є інверсною піднапівгрупою з S для кожного $i \in I$;

b) кожний ідемпотент з S міститься в деякому $A_i \in \ker\varphi$;

c) $\varphi \circ \varphi^{-1} = \{(a, b) \in S \times S | aa^{-1}, bb^{-1}, ab^{-1} \in A_i \text{для деякого} i \in I\}$.

Теорема 9. *Для моногенної інверсної напівгрупи $S = \langle a\rangle$ типу $(k, 1)$ та ідемпотента $e \in S$ зображення S на множині правих ω-класів за піднапівгрупою $(e)\omega$ є точним тоді і тільки тоді, коли e — примітивний ідемпотент.*

Доведення. За лемою 9, $e_{k-1} \in E_{\min}(S)$. Нехай $H = (e_{k-1})\omega$. За лемою 3 $H \subseteq E(S)$. Очевидно, що $e_{k-1} \le e_{k-2} \le \cdots \le e_2 \le e_1$. Тому $e_i \in H$ для $1 \le i \le k-1$. Для $n+m \ge k$ за лемою 8 $e_nf_m = 0$ і тому $e_nf_m \notin H$. Нехай тепер $n+m < k$ і $m > 0$. Оскільки при цьому $n < k$, $k+m-1 \ge k$, за лемою 8 $e_{k-1}(e_nf_m) = e_{k-1}f_m = 0$. Тому $e_nf_m \notin (e_{k-1})\omega = H$. Отже, $H = \{e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}\}$.

За лемою 7.11 з [1] довільний правий ω-клас $(Hs)\omega$, відмінний від H, не містить ідемпотентів. Оскільки, за теоремою 7.10 з [1], $s \in (Hs)\omega$, то $s \notin E(S)$ і за лемою 2 існує таке $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, що $s\omega a^n$. Із замкненості $(Hs)\omega$ випливає, що $a^n \in (Hs)\omega$. Тоді $(Ha^n)\omega = (Hs)\omega$ і $a^na^{-n} \in H$. Позаяк $H = \{e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}\}$, то $1 \le n \le k-1$. Крім того, $a^na^{-n} \in H$ для довільного $1 \le n \le k-1$, і тому $(Ha^n)\omega \ne \varnothing$.

Розглянемо довільні s і t, $1 \le s < t \le k-1$. Очевидно, тоді $0 < t-s \le k-2$ і $a^ta^{-s} = a^{t-s}(a^sa^{-s}) \le a^{t-s}$. Якщо $a^ta^{-s} \in H$, то із замкненості H випливає, що і $a^{t-s} \in H \subset E(S)$. Тому $a^{t-s}a^{t-s} = a^{t-s}$ і, позаяк напівгрупа S має тип $(k, 1)$, то $t-s \ge k$, що суперечить вибору чисел s і t. Отже, $a^ta^{-s} \notin H \Leftrightarrow (Ha^s)\omega \ne (Ha^t)\omega$. Звідси, множина правих ω-класів за піднапівгрупою H має вигляд $\{H, (Ha)\omega, \cdots, (Ha^{k-1})\omega\}$.

Очевидно, що $((Ha^t)\omega)^{\varphi_H(0)} = \varnothing$ для всіх $1 \le t \le k-1$. Нехай тепер $1 \le n + m \le k-1$. Безпосередньо перевіряється, що $a^t(f_me_n)a^{-t} \in H \Leftrightarrow m \le t \le k-1-n$

і $e_{k-1}(f_m e_n)e_{k-1} \in H \Leftrightarrow m = 0$. Позначимо $(Ha^0)\omega = H$. Тоді $((Ha^t)\omega)^{\varphi_H(e_n f_m)} = \begin{cases}(Ha^t)\omega, & m \le t \le k-1-n;\\ \varnothing, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$

Отже, для $e, f \in E(S)$ з $e \neq f$ випливає, що $\varphi_H(e) \neq \varphi_H(f)$.

Гомоморфізм φ_H задає на множині елементів напівгрупи S конгруенцію $\varphi_H \circ \varphi_H^{-1} = \{(x,y)|\varphi_H(x) = \varphi_H(y)\}$. За лемою 10, кожна $A_i \in \ker\varphi_H = \{A_i\,|i \in I\}$ є інверсною піднапівгрупою з S, і тому містить принаймні один ідемпотент. Крім цього, кожен ідемпотент з S міститься в деякій $A_i \in \ker\varphi_H$. За доведеним вище для різних $e, f \in E(S)$ $\varphi_H(e) \neq \varphi_H(f) \Leftrightarrow (e,f) \notin \varphi_H \circ \varphi_H^{-1}$. Отже, кожна A_i — підгрупа напівгрупи S, бо містить єдиний ідемпотент.

Нехай для деякого $i \in I$ існує таке $s \in S\backslash E(S)$, що $s \in A_i$. Нехай e — одиниця групи A_i. Тоді $s^{-1} \in A_i$ і $e = ss^{-1} = s^{-1}s$. Тому $\operatorname{dom} s = \operatorname{ran} s = \operatorname{dom} e$. Очевидно, якщо $e = 0$, то і $s = 0$ і $A_i = \{0\}$. Нехай $e \neq 0$. Тоді $s^n \in A_i$ і $e = s^n s^{-n}$ для всіх натуральних n. Тому $s^n \neq 0$. За лемою 3, для $s \notin E(S)$ існує таке $t \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$, що $s\omega a^t$. Виберемо натуральне n так, щоб виконувалась нерівність $k \le nt$. Тоді $s^n \le (a^t)^n = a^{tn} = 0$, що суперечить доведеному. Тому для кожного $i \in I$ існує такий $g_i \in E(S)$, що $A_i = \{g_i\}$.

За лемою 10, $\varphi_H \circ \varphi_H^{-1} = \{(a,b) \in S \times S\,|aa^{-1}, bb^{-1}, ab^{-1} \in A_i \text{для деякого } i \in I\}$. Оскільки $A_i = \{g_i\}$ для кожного $i \in I$, де $g_i \in E(S)$, із $(a,b) \in \varphi_H \circ \varphi_H^{-1}$ випливає, що $aa^{-1} = bb^{-1} = ab^{-1}$, $\operatorname{dom} a = \operatorname{dom} b$ і $a\omega b$, тобто $a = b$. Отже, зображення φ_H — точне.

За наслідком з леми 9 для різних $e \in E_{\min}(S)$ зображення напівгрупи S на множині правих ω-класів за замкненими інверсними піднапівгрупами вигляду $(e)\omega$ еквівалентні. Тому, очевидно, що усі такі зображення точні.

Доведення теореми в інший бік випливає з леми 7. □

Теорема 10. *Моногенна інверсна напівгрупа $S = \langle a \rangle$ типу (k,i) має точне ефективне транзитивне зображення тоді і тільки тоді, коли $k = 1$. Зображення моногенної інверсної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ типу $(1,i)$ на множині правих ω-класів за замкненою інверсною піднапівгрупою H є точним тоді і тільки тоді, коли $H = (e)\omega$, де $e \in E(S)$. Для різних ідемпотентів такі зображення є еквівалентними.*

Доведення. 1) Нехай спочатку H — не ідемпотентна власна замкнена інверсна піднапівгрупа з S, а φ_H — зображення S на множині правих ω-класів за H. Для довільних ідемпотента $e \in E(S)$ і правого ω-класу $(Hs)\omega$ напівгрупи S за H $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} \neq \varnothing$, бо, за теоремою 4b), $E(S) \subseteq H$. Зокрема в H міститься ідемпотент ses^{-1}. Тому за лемою 5, $((Hs)\omega)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega$. Отже, $\varphi_H(e)$ для всіх $e \in E(S)$ діє тотожно на множині правих ω-класів. Тому $\varphi_H(e) = \varphi_H(f)$ для довільних $e, f \in E(S)$. За лемою 1c), напівгрупа S має нескінченну кількість ідемпотентів, тому зображення φ_H не є точним.

2) Нехай тепер $H \subseteq E(S)$. Якщо $H = E(S)$, то подібно, як і в пункті 1) можна довести, що зображення φ_H не точне.

3) За теоремою 7 для кожного $e \in E(S)$ зображення φ_H напівгрупи S за піднапівгрупою $H = (e)\omega$ еквівалентне до одного з наступних: $\varphi_{(e_1)\omega}, \varphi_{(e_2)\omega}, \dots, \varphi_{(e_k)\omega}$.

Нехай $H = (e_i)\omega$, де $i < k$. За лемою 7.11 із [1] довільний правий ω-клас $(Hs)\omega$, відмінний від H, не містить ідемпотентів. Оскільки за теоремою 7.10 із [1] $s \in (Hs)\omega$, то $s \notin E(S)$ і за лемою 2 існує таке $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, що $s\omega a^n$. Із замкненості $(Hs)\omega$ випливає, що $a^n \in (Hs)\omega$. Тоді $(Ha^n)\omega = (Hs)\omega$ і $a^n a^{-n} \in H$. Позаяк $H = (e_i)\omega$, то $a^n a^{-n} \ge e_i$. З $i < k$ і леми 1c) випливає, що $e_i > e_k > f_k$. Тому $|n| < k$ і множина X правих ω-класів за піднапівгрупою H скінченна. Оскільки за лемою 5 для кожного $e \in E(S)$ елемент

$\varphi_H(e)$ на тих точках з X, де він визначений, діє тотожно, то $|\varphi_H(E(S))| \leq 2^{|X|} < \infty$. Враховуючи, що за лемою 1c) напівгрупа S має нескінченну кількість ідемпотентів, зображення φ_H не буде точним.

Нехай тепер $H = (e_k)\omega$. Подібно можна довести, що для довільного правого ω-класу $(Hs)\omega$, відмінного від H, існує таке $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, що $(Ha^n)\omega = (Hs)\omega$ і $a^n a^{-n} \in H$, тобто $a^n a^{-n} \geq e_k$. Зауважимо, що $a^n a^{-n} = e_n \geq e_k$ для довільного натурального n. Отже, $(Ha^n)\omega \neq \varnothing$ для всіх натуральних n. $e_k \geq f_1 e_k = a^{-1}a^{k+1}a^{-k} = a^{-1}a^k a^{-(k-1)} = f_1 e_{k-1}$. Оскільки за лемою 1c) e_k і $f_1 e_{k-1}$ — різні, то $e_k > f_1 e_k$. Звідси випливає, що $f_1 \notin (e_k)\omega$. Позаяк за лемою 1c), $f_i < f_1$ для всіх натуральних i, то і $f_i \notin (e_k)\omega$ для всіх натуральних i. Отже, правих ω-класів за піднапівгрупою H, відмінних від $H, (Ha)\omega, \cdots, (Ha^n)\omega, \cdots$, не існує. Розглянемо тепер натуральні числа $s < t$. Очевидно, тоді $t - s > 0$ і $a^t a^{-s} = a^{t-s}(a^s a^{-s}) \leq a^{t-s}$. Якщо $a^t a^{-s} \in H$, то із замкненості H випливає, що і $a^{t-s} \in H$. Оскільки за лемою 3 $H \subseteq E(S)$, то $a^{t-s} \in E(S)$ і $a^{t-s}a^{t-s} = a^{t-s}$. Звідси $e_{t-s} = e_{2(t-s)}$ і $f_{t-s} = f_{2(t-s)}$, що суперечить лемі 1c). Отже, $a^t a^{-s} \notin H \Leftrightarrow (Ha^s)\omega \neq (Ha^t)\omega$. Тому, множина правих ω-класів за піднапівгрупою H має вигляд $\{H, (Ha)\omega, \cdots, (Ha^n)\omega, \cdots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що $e_k(e_1 f_1)e_k = e_k f_1 e_k$ і $a^n(f_1 e_1)a^{-n} = e_{n+1} \in H$, $a^n f_1 a^{-n} = e_n \in H$ для довільного $n \geq 1$. Тому $\varphi_H(f_1) = \varphi_H(f_1 e_1)$. Якщо зображення φ_H — точне, то $f_1 = f_1 e_1 \Rightarrow a = a^2 a^{-1}$, тобто напівгрупа S має тип $(1, \infty)$.

4) Доведемо тепер точність зображення φ_H напівгрупи S типу $(1, \infty)$, якщо $H = (e_1)\omega$. Позаяк за лемою 1c) $e_1 > f_1 > f_2 > \cdots > f_n > \cdots$, то e_1 є максимальним ідемпотентом в $E(S)$. За лемою 3, $H = (e_1)\omega \subseteq E(S)$. Тому $H = \{e_1\}$. Множина правих ω-класів за піднапівгрупою H має вигляд $\{H, (Ha)\omega, \cdots, (Ha^n)\omega, \cdots\}$, де $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $(Ha^0)\omega = H$.

Очевидно, що $a^n e_1 a^{-n} = e_1 \in H$, для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тому $((Ha^n)\omega)^{\varphi_H(e_1)} = (Ha^n)\omega$, для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Оскільки $e_1 f_t = f_t \notin H$ для $t \geq 1$ і для натурального n

$$a^n f_t a^{-n} = \begin{cases} a^{n-t}(a^t a^{-t} a^t a^{-t})a^{-(n-t)} = a^{n-t}e_t a^{-(n-t)} = e_n = e_1 \in H, & \text{якщо } n \geq t; \\ a^n a^{-n} f_{t-n} a^n a^{-n} = e_n f_{t-n} = f_{t-n} \notin H, & \text{якщо } n < t, \end{cases}$$

то $((Ha^n)\omega)^{\varphi_H(f_t)} = \begin{cases} (Ha^n)\omega, & \text{якщо } n \geq t; \\ \varnothing, & \text{якщо } . \end{cases}$

Отже, для $e, f \in E(S)$ із $e \neq f$ випливає $\varphi_H(e) \neq \varphi_H(f)$.

Подальше доведення точності зображення φ_H повторює подібний фрагмент із доведення теореми 9, за винятком встановлення того, що для кожного $i \in I$ існує такий $g_i \in E(S)$, для якого група A_i із $\ker \varphi_H$ має вигляд $A_i = \{g_i\}$. Доведемо це.

Припустимо, що для деякого $i \in I$ існує таке $s \in S\setminus E(S)$, що $s \in A_i$. Нехай e — одиниця групи A_i. Тоді $s^{-1} \in A_i$ і $e = ss^{-1} = s^{-1}s$. Тому $\operatorname{dom} s = \operatorname{ran} s = \operatorname{dom} e$. Крім того, $s^n, s^{-n} \in A_i$ і $e = s^n s^{-n} = s^{-n}s^n$ для всіх натуральних n. За лемою 3, для $s \notin E(S)$ існує таке $t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, що $s\omega a^t$. Тоді $s^{-1}\omega a^{-t}$. Звідси $s = a^t(s^{-1}s) = a^t e$ і $s^{-1} = a^{-t}(ss^{-1}) = a^{-t}e$. Нехай $\tau = a^{-|t|}e$ і r — довільне натуральне число. Виберемо натуральне n так, щоб виконувалась нерівність $r < n\,|t|$. Тоді $e = \tau^n \tau^{-n} \leq a^{-n|t|}a^{n|t|} = f_{n|t|} < f_r$. Отже, e — найменший ідемпотент в S, що за лемою 1c) неможливо. Тому для кожного $i \in I$ існує такий $g_i \in E(S)$, для якого $A_i = \{g_i\}$.

5) У напівгрупі S типу $(1, \infty)$ за лемою 1c) довільний ідемпотент має вигляд f_i, $i \geq 1$ або e_1. Тому за теоремою 7 для різних $e \in E(S)$ зображення напівгрупи S на множині

правих ω-класів за замкненими інверсними піднапівгрупами вигляду $(e)\omega$ еквівалентні. Оскільки зображення $\varphi_{(e_1)\omega}$ точне, то, очевидно, усі такі зображення також точні. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2-х томах, – М.: Мир, 1972. – Т.1,2.- 672 с.
2. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А. и др. Общая алгебра: В 2-х томах.- М.: Наука, 1991.- Т.2.- 395 с.
3. Ганюшкін О. Г., Кормишева Т. В. *Ланцюговий розклад часткових підстановок та класи спряжених елементів напівгрупи IS_n* // Вісник Київського ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 1993. – Вип.2. – С.10–18.
4. Lipscomb S. L. *Cyclic subsemigroups of symetric inverse semigroup* // Semigroup Forum. – 1986. – V.34. – P.243–248.
5. Шайн Б. М. *Представление обобщенных групп* // Изв. вузов. Математика. – 1962. – Т.28, №3. – С.164–176.
6. Вагнер В. В. *Обобщённые группы* // ДАН СССР. – 1952. – Т.84. – С.1119–1122.
7. Preston G. B. *Representations of inverse semigroups* // J. Lond. Math. Soc. – 1954. – V.29. – P.411–419.
8. Petrich M. Inverse semigroups. – John Wiley&Sons, 1984. – 500 p.
9. Волошина Т. В. *Замкнені інверсні піднапівгрупи моногенних інверсних напівгруп* // Вісник Київського ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип.3.
10. Preston G.B. *Inverse semigroups* // J. Lond. Math. Soc. – 1954. – V. 29. – P.396–403.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
кафедра алгебри та математичної логіки,
03163, м.Київ, просп. Глушкова, 6.

geodep@lab.univer.lutsk.ua

Надійшло 8.09.2000