УДК 512.535

Т.В. Волошина

ОРБИТЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАГНЕРА-ПРЕСТОНА ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ

В работе доказано, что орбиты представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы совпадают с ее $\mathcal{R}$-классами. Установлена эквивалентность ограничения представления Вагнера–Престона на орбиту, содержащую идемпотент e, подстановочному представлению полугруппы на множестве правых ω-классов по замкнутой инверсной подполугруппе $(e)\omega$.

Вступление

Полугруппа S называется *инверсной*, если для каждого ее элемента $a \in S$ существует такой единственный элемент $b \in S$, что выполняются равенства $aba = a$, $bab = b$. Для $a \in S$ такой элемент обозначают через a^{-1} и называют *инверсным* к *a*.

Элемент e полугруппы S называется *идемпотентом*, если $ee = e$. *Множество идемпотентов полугруппы* S обозначим через $E(S)$. Заметим, что для каждого элемента $a \in S$ инверсной полугруппы S элементы aa^{-1}, $a^{-1}a$ являются идемпотентами. Поэтому произвольная инверсная полугруппа содержит идемпотенты. В частности, инверсная полугруппа с единственным идемпотентом является группой.

Классическим примером инверсной полугруппы служит полугруппа всех частичных взаимно однозначных отображений некоторого множества X в себя, которую будем называть *инверсной симметрической полугруппой на множестве* X, и обозначать $IS(X)$. Элементы $IS(X)$ называют *частичными подстановками множества* X. Поскольку по теореме Вагнера–Престона [1] каждая инверсная полугруппа S изоморфна некоторой инверсной подполугруппе полугруппы $IS(S)$ всех взаимно однозначных частичных отображений множества ее элементов S, инверсная симметрическая полугруппа играет в теории инверсных полугрупп роль, аналогичную роли симметрической группы в теории групп.

Через ω будем обозначать *естественный частичный порядок на S*: $a\omega b :\Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Для удобства иногда будем употреблять для ω обозначение $\leq$. Бинарное отношение ω является частичным порядком на инверсной полугруппе, стабильным относительно умножения и нахождения инверсного элемента [2]. *Замыканием* $H\omega$ *множества* $H \subseteq S$ называется множество $H\omega := \{h \in S : \exists \pi \in H\ \pi\omega\, h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют *замкнутым*.

Подстановочным представлением инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм φ в полугруппу $IS(X)$. Для $a \in S$ через $\mathrm{dom}\, a$ и $\mathrm{ran}\, a$ обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Пусть $\varphi_i : S \to IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. *Прямой сумой представлений* φ_i называется представление $\varphi : S \to IS(X)$, где $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два представления $\varphi: S \to IS(X)$ и $\psi: S \to IS(Y)$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y, что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $\left(\theta(x)\right)^{\psi(s)} = \theta(x')$.

В общем случае гомоморфный образ $\varphi(S)$ инверсной полугруппы является инверсной полугруппой [1]. Для инверсной подполугруппы $\varphi(S)$ из $IS(X)$ отношение $\tau := \{(a,b) \in X \times X \mid \eta(a) = b$ для некоторого $\eta \in \varphi(S)\}$ является частичной эквивалентностью на множестве X [3]. Класс эквивалентности отношения τ, содержащий элемент $a \in X$, при этом будет иметь вид $\{x \in X \mid h(a) = x$ для некоторого $h \in \varphi(S)\}$. Это множество будем называть *орбитой элемента* $a \in X$ *при представлении* $\varphi : S \to IS(X)$ *инверсной полугруппы* S *частичными подстановками* X.

Представление $\varphi : S \to IS(X)$ инверсной полугруппы S называют *транзитивным*, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X, что $h(x_1) = x_2$, и *эффективным*, если $\bigcup\limits_{x \in \varphi(S)} dom\, x = X$. Другими словами, для транзитивного представления $\varphi : S \to IS(X)$ множество X является единственной орбитой, а для эффективного представления $\varphi : S \to IS(X)$ каждый элемент из X содержится в некоторой орбите.

Естественно сначала ограничиться рассмотрением только транзитивных представлений, так как каждое эффективное представление является прямой суммой транзитивных [4]. В 1962 году Шайном [3] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H := \{(s,t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S. Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности H – единственный π_H-класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [3]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$ и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми* ω*-классами по замкнутой инверсной подполугруппе* H. Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H : S \to IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы* S *на правых* ω*-классах по замкнутой инверсной подполугруппе* H.

Постановка задачи

Представление φ инверсной полугруппы S называется *точным*, если оно инъективно. Описание всех таких представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Для каждой инверсной полугруппы S Вагнер [2] и Престон [5] построили точное представление частичными подстановками множества S. Этот факт является аналогом теоремы Кэли. Построенное представление в общем случае нетранзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. Описание орбит представления Вагнера–Престона, его транзитивных составляющих важно для дальнейшего изучения точных представлений инверсных полугрупп.

Основные результаты

Левым (правым) идеалом полугруппы S называется такое непустое подмножество $I \subseteq S$, что $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$). Просто *идеалом* называется подмножество, которое является одновременно и левым, и правым идеалом. Для непустого подмножества $A \subseteq S$ пересечение всех левых (правых) идеалов полугруппы S, содержащих A, является наименьшим левым (правым) идеалом, содержащим A. Будем называть его *левым (правым) идеалом полугруппы* S*, порожденный множеством* A. В частности, если $A = \{a\}$, то такой идеал называют *главным идеалом, порожденным элементом* $a \in S$. Очевидно, что в случае инверсной полугруппы S главный правый (левый) идеал имеет вид aS (Sa).

Элементы $a, b \in S$ полугруппы S называются *$\mathcal{R}$-эквивалентными* (*$\mathcal{L}$-эквивалентными*), если они порождают один и тот же правый (левый) главный идеал, то есть $a\,\mathcal{R}\,b :\Leftrightarrow aS^1 = bS^1$ ($a\,\mathcal{L}\,b :\Leftrightarrow S^1a = S^1b$). Класс эквивалентности отношения $\mathcal{R}$ ($\mathcal{L}$), содержащий $a \in S$, будем обозначать R_a (L_a).

При доказательстве результатов используются следующие теорема и лемма.

Теорема 1. ([6]). Для каждого элемента $a \in S$ инверсной полугруппы S существует такой единственный идемпотент, что главный правый (левый) идеал полугруппы S, порожденный a, порождается этим идемпотентом, то есть каждый $\mathcal{R}$-класс ($\mathcal{L}$-класс) содержит единственный идемпотент.

Лемма. ([6]). В инверсной полугруппе произведение произвольных двух идемпотентов является идемпотентом; любые два идемпотента коммутируют.

Рассмотрим точное представление инверсной полугруппы S частичными подстановками множества S: $S \ni a \mapsto \rho_a : Saa^{-1} \to Sa^{-1}a$, $\rho_a(x) = xa$. Если S содержит нуль 0, то он является неподвижной точкой этого представления для всех элементов S. Поэтому можно перейти к индуцированному точному представлению S частичными подстановками множества $S \setminus \{0\}$. Такое представление полугруппы S частичными подстановками множества S (либо $S \setminus \{0\}$, если S содержит нуль 0) называют *представлением Вагнера-Престона*. Заметим, что нулю при этом соответствует нигде не определенная частичная подстановка. *Орбитой элемента* $a \in S$ при представлении Вагнера-Престона называют множество $O_a := \{s \in S \,|\, \exists x \in S\colon \rho_x(a) = s\}$.

Теорема 2. Орбиты представления Вагнера-Престона инверсной полугруппы совпадают с $\mathcal{R}$-классами, то есть для $a \in S \setminus \{0\}$ $O_a = R_a$ и $R_0 = \{0\}$.

Доказательство. Для произвольного $a \in S \setminus \{0\}$ рассмотрим частичную подстановку $\rho_{a^{-1}} \in IS(S)$. Поскольку $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a = dom(\rho_{a^{-1}})$ и $\rho_{a^{-1}}(a) = aa^{-1} \in E(S)$, то орбита элемента O_a содержит идемпотент aa^{-1}.

Произвольный элемент $b \in O_a$ можно представить в виде $b = ax$. Тогда $bb^{-1} = axx^{-1}a^{-1} \omega\, aa^{-1}$. Поскольку $aa^{-1} \in O_a = O_b$, то для некоторого $y \in S$ $aa^{-1} = by$. Отсюда $aa^{-1} = byy^{-1}b^{-1} \omega\, bb^{-1}$. Следовательно, $aa^{-1} = bb^{-1}$. Поэтому $aS = (aa^{-1})S = (bb^{-1})S = bS \Leftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b$.

Пусть теперь $a\,\mathcal{R}\,b$. Тогда $(aa^{-1})S = aS = bS = (bb^{-1})S$. Поскольку для инверсной полугруппы каждый $\mathcal{R}$-класс содержит единственный идемпотент (по теореме 1), то $aa^{-1} = bb^{-1}$. Так как область определения частичной подстановки $\rho_{a^{-1}b}$ имеет вид

$S(a^{-1}b)(b^{-1}a) = S(a^{-1}(bb^{-1})a) = S(a^{-1}(aa^{-1})a) = Sa^{-1}a$ и $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a$, то $\rho_{a^{-1}b}(a) = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b$. Следовательно, $b \in O_a$.

Пусть $a\,\mathcal{R}0$. Тогда $aS = 0S = 0$. Следовательно, $a = 0$ и $R_0 = \{0\}$.■

<u>Следствие 1.</u> Количество орбит представления Вагнера–Престона инверсной полугруппы S равно количеству ненулевых идемпотентов полугруппы.

<u>Следствие 2.</u> Представление Вагнера–Престона инверсной полугруппы S транзитивно тогда и только тогда, когда S является группой.

<u>Теорема 3.</u> Пусть O_e – орбита представления Вагнера-Престона инверсной полугруппы S, содержащая идемпотент e. Тогда ограничение представления Вагнера-Престона на орбиту O_e эквивалентно представлению φ_e полугруппы S на множестве правых ω-классов по замкнутой инверсной подполугруппе $(e)\omega$.

<u>Доказательство.</u> Обозначим $H = (e)\omega$. Пусть $a \in O_e$. Поскольку в случае $0 \in S$ представление Вагнера–Престона рассматривается на множестве $S \setminus \{0\}$, то $a \neq 0$. Из $a = aa^{-1}a \in Sa^{-1}a = dom(\rho_{a^{-1}})$ и $\rho_{a^{-1}}(a) = aa^{-1} \in E(S)$ следует, что орбита O_e содержит идемпотент aa^{-1}. Так как по теореме 2, $O_e = R_e$, а каждый $\mathcal{R}$-класс содержит единственный идемпотент, то $aa^{-1} = e$. Тогда $aa^{-1} \in (e)\omega = H \iff (Ha)\omega \neq \varnothing$. Следовательно, каждый элемент орбиты O_e содержится в некотором правом ω-классе по замкнутой инверсной подполугруппе H.

Рассмотрим теперь произвольный правый ω-класс $(Hs)\omega$. Тогда $a = es$ содержится в $(Hs)\omega$. Докажем, что $a \in O_e$. Для частичной подстановки $\rho_s \in IS(S)$ выполняется равенство $dom(\rho_s) = Sss^{-1}$. Из $(Hs)\omega \neq \varnothing$, следует $ss^{-1} \in H$, что равносильно $ss^{-1} \geq e$. Отсюда $e = ess^{-1} \in Sss^{-1} = dom(\rho_s)$. Так как $\rho_s(e) = es = a$, то $a \in O_e$.

Пусть $a, b \in O_e$ и $(Ha)\omega = (Hb)\omega$. Тогда $ab^{-1} \in H$ и $ab^{-1} \geq e$. Отсюда $e = e^{-1}e = e^{-1}(ab^{-1}) = eab^{-1}$. Из $a, b \in O_e$ по доказанному выше следует, что $aa^{-1} = bb^{-1} = e$. Потому $aa^{-1} = aa^{-1}ab^{-1} = ab^{-1}$ и, следовательно, $a\omega b$. С другой стороны, из $ba^{-1} = e^{-1} = e = bb^{-1}$ получаем $b\omega a$. Таким образом, $a = b$. Следовательно, между элементами орбиты O_e и правыми ω-классами существует взаимно однозначное соответствие $\theta: O_e \to X$, определяемое правилом: $a \mapsto (Ha)\omega \in X$, $a \in O_e$.

Пусть $s \in S$, а правый ω-класс $(Ht)\omega$ – такой, что частичная подстановка $\varphi_e(s)$ на нем определена, то есть $[(Ht)\omega]^{\varphi_e(s)} = (Hts)\omega$. Тогда $tss^{-1}t^{-1} \in H$, $tt^{-1} \in H$ и, следовательно, $tss^{-1}t^{-1} \geq e$ и $tt^{-1} \geq e$. Отсюда $e = etss^{-1}t^{-1}$ и $a := et = etss^{-1}t^{-1}t = ett^{-1}tss^{-1} = (et)ss^{-1} \in Sss^{-1} = dom\,\rho_s$. По доказанному выше, $a = et \in O_e$, $\rho_s(a) = as = ets \in O_e$. Поскольку $at^{-1} = ett^{-1} = e \in H$, $(as)(ts)^{-1} = etss^{-1}t^{-1} = e \in H$, то $\theta(a) = (Ha)\omega = (Ht)\omega$, $\theta(as) = (Has)\omega = (Hts)\omega$. Тогда $\theta(a)^{\varphi_e(s)} = [(Ha)\omega]^{\varphi_e(s)} = (Has)\omega = \theta(as) = \theta(\rho_s(a))$. Отсюда $\rho_s(\theta^{-1}((Ht)\omega)) = \theta^{-1}([(Ht)\omega]^{\varphi_e(s)})$. Следовательно, представление φ_e эквивалентно ограничению представления Вагнера–Престона на орбиту O_e. ■

Так как для идемпотентов e и f равенство $(e)\omega = (f)\omega$ возможно тогда и только тогда, когда $e = f$ [1], а прямая сумма семейства $\{\varphi_e \mid e \in E(S)\}$ представлений полугруппы S является точным [3], возникает естественный вопрос о существовании точного представления инверсной полугруппы с минимальным количеством орбит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : пер. с англ.: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972. – Т.1, 2. – 283 с., 422 с.
2. Вагнер, В.В. Обобщенные группы / В.В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – №84. – С.1119–1122.
3. Шайн, Б.М. Представление обобщенных групп / Б.М. Шайн // Изв. вузов. «Математика». – 1962. – Т.28, № 3. – С. 164–176.
4. Понизовский, И.С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И.С. Понизовский // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1964. – Т.28. – С. 989–1002.
5. Preston, G.B. Representations of inverse semigroups / G.B. Preston // J.London Math.Soc. – 1954. – №29. – P.411–419.
6. Либер, А.Е. К теории обобщенных групп / А.Е. Либер // ДАН СССР. – 1954. – № 97. – С. 25–28.

T.V. Voloshyna. **Orbits of Wagner-Preston Representation of an Inverse Semigroup**

It is proved in the article that the orbits of Wagner-Preston representation of an inverse semigroup coincide with its $\mathcal{R}$-classes. The equivalence of a contraction of representation on an orbit containing an idempotent e, to permutational representation of a semigroup on a set of the right ω-classes on the closed inverse subsemigroup $(e)\omega$ is received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.03.2011 г.