

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін-т математики НАН України, Київ)**О. В. Федунік–Яремчук** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)**ОЦІНКИ ОРТОПРОЕКЦІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ
КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\Omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ
ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ
МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ**

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using operators of orthogonal projection as well as linear operators subjected to some conditions.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, в якому норма визначається таким чином

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π -періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

© А. Ф. Конограй, О. В. Федунік–Яремчук, 2014

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, і $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j = \overline{1, d}}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє такі умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;
- 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що Ω задовольняє також умови (S) і (S_l) , які називають умовами Барі–Стечкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l) , якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i, i \neq j$.

Нехай $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$, а Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l . Тоді, згідно з означенням [2]

$$B_{p,\theta}^\Omega = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, \dots, t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1, d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з класами H_p^Ω , які були розглянуті М. М. Пустовойтовим в [3].

Для подальших міркувань будемо використовувати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення класів $B_{p,\theta}^\Omega$.

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f, (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Отже, нехай $1 < p < \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$ і Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови

(S) і (S_l), тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B_{p,\theta}^\Omega$ можна означити наступним чином [2]:

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Наведене означення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ можна поширити і на крайні випадки $p = 1$ і $p = \infty$, дещо змінивши в (1) і (2) "блоки" $\delta_s(f, x)$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f * A_s.$$

У прийнятих позначеннях з точністю до абсолютних сталих класи $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, можна означити наступним чином

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \quad (4)$$

Зазначимо, що рівності (3) і (4) були отримані в роботах [4] і [3] відповідно.

Зауважимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Бесова $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$ та Нікольського $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ (див., наприклад, [5]).

Нижче будемо розглядати класи $B_{p,\theta}^\Omega$, які визначаються функцією Ω деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max \left\{ 1, \log \frac{1}{t_j} \right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r, j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$, а значить для функції Ω вигляду (5) виконуються властивості 1 – 4, а також умови (S) і (S_l).

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ в просторі L_q при $1 \leq p < q < \infty$. Нагадаємо, поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Щоб навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ – ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d_M^\perp(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i(\cdot) \right\|_q \quad (6)$$

називається ортопроекційним поперечником (Фур'є-поперечником) цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

У роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d_M^B(F, L_q)$, розглянуті В. М. Темляковим (див., наприклад, [7]), які визначаються наступним чином:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \quad (7)$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\|Ge^{i(k, \cdot)}\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M , а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультіплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m . Із (6) і (7) легко бачити також, що величини $d_M^\perp(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^\perp(F, L_q). \quad (8)$$

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d_M^\perp(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчалися величини (6) і (7) для класів функцій багатьох змінних $W_{p, \alpha}^r$, H_p^r , $B_{p, \theta}^r$ та H_p^Ω , і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

Зауважимо, що одержані нижче оцінки доповнюють результати, які отримані в роботах [12, 13].

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

У прийнятих позначеннях має місце твердження.

Лема 1 [11]. *Кількість елементів множини $Q(N)$ рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1}.$$

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору \mathbb{R}^d .

Враховуючи (5) множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \prod_{j=1}^d 2^{r s_j} s_j^{b_j} \leq N \right\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^\perp(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

У [14] встановлено, що для кількості елементів множини $\Theta(N)$ має місце порядкова рівність

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Лема 2 [7, с. 25]. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p(\pi_d)$. Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f, \cdot)\|_p 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^q,$$

де $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d, s_j \in \mathbb{N}$.

Лема 3 [11]. Для функції Ω , яка визначена рівністю (5), при $0 < \beta < r$, $0 < p < \infty$ має місце співвідношення

$$\sum_{s \in \chi^+(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta})^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \beta})^p.$$

Лема 4 [11]. Нехай $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d < 1$. Тоді

$$\sum_{s \in \Theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\gamma_j} \asymp (\log N)^{-\gamma_1 - \dots - \gamma_d + d - 1}.$$

Лема 5 [8]. Нехай лінійний оператор A заданий рівністю

$$Ae^{i(k,x)} = \sum_{m=1}^{\overline{M}} a_m^k \psi_m(x),$$

де $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\overline{M}}$ — набір функцій, для яких

$$\|\psi_m(\cdot)\|_2 \leq 1, \quad m = 1, \dots, \overline{M}.$$

Тоді для будь-якого тригонометричного полінома t має місце співвідношення

$$\min_{y=x} \operatorname{Re} At(x-y) \leq \operatorname{Re} \sum_k \sum_{m=1}^{\overline{M}} \widehat{t}(k) a_m^k \widehat{\psi}_m(k) \leq \left(\overline{M} \sum_{m=1}^{\overline{M}} \sum_k |a_m^k \widehat{t}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема А (Літлвуда–Пелі) (див., наприклад, [15, с. 65]). Нехай задано $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні сталі $C_3(p)$ і $C_4(p)$ такі, що для кожної функції $f \in L_p(\pi_d)$ виконується співвідношення

$$C_3(p) \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_4(p) \|f\|_p.$$

Теорема Б [16]. Нехай T_n — тригонометричний поліном порядку $n = (n_1, \dots, n_d)$

$$T_n(x) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \dots \sum_{|k_d| \leq n_d} c_{k_1, \dots, k_d} e^{i(k, x)},$$

де $n_j, j = \overline{1, d}$, — натуральні числа, c_{k_1, \dots, k_d} — довільні коефіцієнти. Тоді при $1 \leq p < q \leq \infty$ має місце нерівність

$$\|T_n\|_q \leq 2^d \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_n\|_p. \quad (9)$$

Нерівність (9) була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". В одновимірному випадку при $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [17].

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів покладемо $M = |Q(N)|$. Тоді, згідно з лемою 1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1},$$

$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r (\log M)^{b_1 + \dots + b_d - (d-1)r}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай $1 \leq p < q < \infty, 1 \leq \theta < \infty$, а Ω задана формулою (5). Тоді при $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r < l, b_j < \frac{r}{\frac{q}{p} - 1}$, мають місце співвідношення

$$d_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp$$

$$\asymp M^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + (\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}, \quad (10)$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку в (10) оцінку зверху. З цією метою розглянемо наближення функції $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ її частинною сумою Фур'є з "номерами" гармонік з множини $Q(N)$

$$S_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x).$$

Нехай q_0 — довільне число, яке задовольняє умову $p < q_0 < q$. Використавши для $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ лему 2, а також відоме співвідношення

$$\|\delta_s(f, \cdot)\|_{q_0} \asymp \|A_s(f, \cdot)\|_{q_0}, \quad 1 < q_0 < \infty,$$

будемо мати

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - S_{Q(N)}(\cdot)\|_q &= \left\| \sum_{s \in \chi^+(N)} \delta_s(f, \cdot) \right\|_q \ll \\ &\ll \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \|\delta_s(f, \cdot)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \\ &\asymp \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \|A_s(f, \cdot)\|_{q_0}^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1. \end{aligned}$$

Далі, застосувавши до $A_s(f, x)$ "нерівність різних метрик" Нікольського, продовжимо оцінку

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \|A_s(f, \cdot)\|_p^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}\right) q} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \|A_s(f, \cdot)\|_p^q 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \Omega^q(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) q} \right)^{\frac{1}{q}} = I_2. \end{aligned}$$

Щоб оцінити I_2 , розглянемо окремо два випадки.

Нехай спочатку $q < \theta < \infty$. Застосувавши до I_2 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$, а також лему 3, одержимо

$$I_2 \leq \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \left(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \ll \\
 & \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \left(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \ll \\
 & \ll \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \left(\Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \leq \\
 & \leq N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta q}{\theta - q}} = I_3.
 \end{aligned}$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta(N)$

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}},$$

а також скориставшись лемою 4, будемо мати

$$\begin{aligned}
 I_3 & \asymp N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} N^{\frac{1}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} = \\
 & = N^{-1 + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \asymp \\
 & \asymp N^{-1 + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} (\log N)^{\left(-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + (d-1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} \asymp \\
 & \asymp \left(M^r (\log M)^{b_1 + \dots + b_d - (d-1)r} \right)^{-1 + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \times \\
 & \times (\log M)^{\left(-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + (d-1) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} =
 \end{aligned}$$

$$= M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $1 \leq \theta \leq q$. Будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \Omega^q(2^{-s}) 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \frac{2^{-rq\|s\|_1}}{\prod_{j=1}^d s_j^{qb_j}} 2^{\|s\|_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \frac{2^{-q\|s\|_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}}{\prod_{j=1}^d s_j^{qb_j}} \right)^{\frac{1}{q}} = I_3. \end{aligned}$$

Якщо $s \in \chi^\perp(N)$, то

$$2^{-\|s\|_1} < N^{-\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^d s_j^{\frac{b_j}{r}}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} I_3 &< \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q N^{-\frac{q}{r}(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \prod_{j=1}^d \frac{s_j^{\frac{b_j}{r}(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}}{s_j^{qb_j}} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= N^{-1+\frac{1}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \prod_{j=1}^d s_j^{-q\frac{b_j}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ &\ll N^{-1+\frac{1}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log N)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\dots-\frac{b_d}{r}\right)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-q}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} = I_4.$$

Далі, використовуючи нерівність [18, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\nu_2} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\nu_1} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty,$$

будемо мати

$$\begin{aligned} I_4 &\leq N^{-1+\frac{1}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log N)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\dots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1+\frac{1}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log N)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\dots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \ll \\ &\ll \left(M^r (\log M)^{b_1+\dots+b_d-(d-1)r} \right)^{-1+\frac{1}{r}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log M)^{\left(-\frac{b_1}{r}-\dots-\frac{b_d}{r}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \\ &= M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка зверху в (10) встановлена.

Перейдемо до встановлення в (10) оцінки знизу. Оскільки має місце нерівність (8), то її достатньо отримати для величини $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$. При цьому розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $q \leq \theta < \infty$. За допомогою міркувань аналогічних тим, що і в [19], можна показати, що існує множина $\Theta'(N) \subset \Theta(N)$ така, що для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \Theta'(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d} \quad \text{і} \quad |\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Позначимо множини $\tilde{Q}(N) = \bigcup_{s \in \Theta(N)} \rho(s)$, $\tilde{Q}'(N) = \bigcup_{s \in \Theta'(N)} \rho(s)$.

Тоді $T(\tilde{Q}(N))$ і $T(\tilde{Q}'(N))$ — відповідно множини тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із множин $\tilde{Q}(N)$ і $\tilde{Q}'(N)$.

Розглянемо функцію, яка аналогічна до функції з прикладу 2 роботи [8].

Нехай K_n — ядро Фейера порядку n , тобто

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2; \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$g(x) = \sum_{s \in \Theta'(N)} \mathcal{K}^s(x),$$

де

$$\mathcal{K}^s(x) = e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_{2^{s_j-2}}(x_j).$$

У роботі [12] встановлено, що при $G \in L_M(B)_\infty$ існує вектор $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*)$ такий, що

$$\|g(x - y^*) - Gg(x - y^*)\|_\infty \gg M. \quad (11)$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_5 N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} g(x), \quad C_5 > 0.$$

Покажемо, що функція g_1 при відповідному виборі сталої C_5 належить до класу $B_{p,\theta}^\Omega$.

Дійсно, скориставшись властивостями ядра Фейера

$$\|\mathcal{K}^s(\cdot)\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

будемо мати

$$\|g_1\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_1, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\begin{aligned} &\ll N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \\ &\asymp \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} 2^{\|s\|_1 (1 - \frac{1}{p}) \theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = I_5. \end{aligned}$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta'(N) \subset \Theta(N)$ виконуються співвідношення

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}} \quad \text{і} \quad s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d}, \quad |\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1},$$

будемо мати

$$\begin{aligned} I_5 &\asymp \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \\ &\quad \times \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{1 - \frac{1}{p}} |\Theta'(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp \\ &\quad \asymp (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} (\log N)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1. \end{aligned}$$

Отже, $g_1 \in B_{p,\theta}^\Omega$, з відповідною сталою $C_5 > 0$.

У роботі [11] встановлено, що для $t \in T(\tilde{Q}'(N))$ має місце співвідношення

$$\|t\|_\infty \ll \|t\|_q \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{q}} (\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, скориставшись оцінкою (11), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|g_1(x - y^*) - Gg_1(x - y^*)\|_q \gg \\ &\gg N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|g(x - y^*) - Gg(x - y^*)\|_q \gg \\
& \gg N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \\
& \times \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{-\frac{1}{q}} (\log N)^{-(d-1)(1-\frac{1}{q})} \|g(x - y^*) - Gg(x - y^*)\|_\infty \gg \\
& \gg N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d-1} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1} (\log N)^{(d-1)(-\frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})} M \asymp \\
& \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1} (\log M)^{(d-1)(-\frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})} M = \\
& = M^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta})}.
\end{aligned}$$

Нехай тепер $1 \leq \theta < q$.

При доведенні оцінки знизу в цьому випадку використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувались у прикладі 4 роботи [8].

Нехай оператор G належить $L_M(B)_q, 1 < q < \infty$. Розглянемо оператор

$$A = (S_{Q(2^l N)} - S_{Q(N)})G,$$

де $S_{Q(N)}$ — оператор знаходження частинної суми Фур'є, що відповідає множині $Q(N)$. Тоді $A \in L_M(B)_q$ і область значень оператора A є підпростір A_M простору $T(\tilde{Q}(N))$, розмірність якого $\dim A_M = \bar{M} \leq M$. Із теореми А випливає, що для $f \in T(\tilde{Q}(N))$ буде виконуватись

$$\|f - Af\|_q = \|(S_{Q(2^l N)} - S_{Q(N)})(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q.$$

Нехай $\{\psi_m(x)\}_{m=1}^{\bar{M}}$ — ортонормований базис в A_M . Розглянемо для $s \in \Theta'(N)$ оператори A_s :

$$A_s e^{i(k,x)} = \sum_{m=1}^{\bar{M}} a_m^k \delta_s(\psi_m, x), \quad k \in \tilde{Q}'(N).$$

Покладемо $g_s(x) = \mathcal{K}^s(x)$ і розглянемо величини

$$I_s = \sup_y \|g_s(x - y) - A_s(g_s(x - y))\|_\infty, \quad s \in \Theta'(N).$$

Позначимо $b_s = \min_{y=x} \operatorname{Re} A_s(g_s(x-y))$. Тоді

$$I_s \geq g_s(0) - b_s. \quad (12)$$

Далі, скориставшись лемою 5, будемо мати

$$b_s \leq \operatorname{Re} \sum_{|k| \in \rho(s)} \sum_{m=1}^{\bar{M}} \hat{g}_s(k) a_m^k \hat{\psi}_m(k), \quad s \in \Theta'(N),$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \Theta'(N)} b_s &\leq \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\bar{M}} \sum_{k \in \tilde{Q}'(N)} \hat{g}_s(k) a_m^k \hat{\psi}_m(k) \leq \\ &\leq \left(\bar{M} \sum_{m=1}^{\bar{M}} \sum_{k \in \tilde{Q}'(N)} |a_m^k \hat{g}_s(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}} B \left(\sum_{k \in \tilde{Q}'(N)} |\hat{g}_s(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll M^{\frac{1}{2}} B |\tilde{Q}'(N)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут через $|\tilde{Q}'(N)|$ позначено кількість елементів множини $\tilde{Q}'(N)$.

Далі, враховуючи, що $|\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$, а також співвідношення

$$|\rho(s)| \asymp 2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}},$$

будемо мати

$$|\tilde{Q}'(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1}. \quad (14)$$

З іншого боку,

$$g(0) \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1} \asymp |\tilde{Q}'(N)|. \quad (15)$$

Враховуючи (13) і (14) можна підібрати таке N , щоб $|\tilde{Q}'(N)| \asymp M$ і права частина в (15) буде хоча б вдвічі більшою, ніж права частина (13).

Оскільки $g(0) = \sum_{s \in \Theta'(N)} g_s(0)$, то із (13) і (15) одержимо, що для деякого $s^* \in \Theta'(N)$ буде

$$g_{s^*}(0) - b_{s^*} \geq \frac{B(M|\tilde{Q}'(N)|)^{\frac{1}{2}}}{|\Theta'(N)|} \asymp M(\log N)^{-(d-1)}.$$

Тоді із (12), користуючись "нерівністю різних метрик" Нікольського, одержимо, що для деякого y^* виконується

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*) - A_{s^*}(\mathcal{K}^{s^*}(x-y^*))\|_q &= \|g_{s^*}(x-y^*) - A_{s^*}(g_{s^*}(x-y^*))\|_q \gg \\ &\gg 2^{-\frac{1}{q}\|s\|_1} \|g_{s^*}(x-y^*) - A_{s^*}(g_{s^*}(x-y^*))\|_\infty \asymp \\ &\asymp 2^{-\frac{1}{q}\|s\|_1} M(\log N)^{-(d-1)} \asymp M^{1-\frac{1}{q}} (\log M)^{-(d-1)(1-\frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_6 N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \mathcal{K}^{s^*}(x), \quad C_6 > 0.$$

Покажемо, що функція g_2 при відповідному виборі сталої C_6 належить до класу $B_{p,\theta}^\Omega$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \|A_{s^*}(g_2, \cdot)\|_p &\ll N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \|\mathcal{K}^{s^*}(\cdot)\|_p \asymp \\ &\asymp N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} 2^{\|s^*\|_1(1-\frac{1}{p})} \asymp \\ &\asymp N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p}-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{1-\frac{1}{p}} = N^{-1}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{B_{p,\theta}^\Omega} &= \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(g_2, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \\ &= \Omega^{-1}(2^{-s^*}) \|A_{s^*}(g_2, \cdot)\|_p \ll \Omega^{-1}(2^{-s^*}) N^{-1} \asymp 1. \end{aligned}$$

Таким чином, робимо висновок, що $g_2 \in B_{p,\theta}^\Omega$, з відповідною сталою $C_6 > 0$.

Оскільки

$$\|g_2 - Gg_2\|_q \gg \|g_2 - A_{s^*}g_2\|_q,$$

будемо мати

$$\begin{aligned} & \|g_2(x - y^*) - Gg_2(x - y^*)\|_q \gg \\ & \gg N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{\frac{1}{p} - 1} \| \mathcal{K}^{s^*}(x - y^*) - A_{s^*}(\mathcal{K}^{s^*}(x - y^*)) \|_q \gg \\ & \gg M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} M^{\frac{1}{p} - 1} M^{1 - \frac{1}{q}} (\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{p}) - (d-1)(1 - \frac{1}{q})} = \\ & = M^{-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему доведено.

Зауваження 1. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r$, результати теореми (для класів $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$) отримані А. С. Романюком в [10].

Зауваження 2. Точні за порядком оцінки величин $d_M^{\frac{1}{p}}(H_p^\Omega, L_q)$ та $d_M^B(H_p^\Omega, L_q)$ при значеннях параметрів p і q , які задовольняють умову теореми, отримані М. М. Пустовойтовим в [11].

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.
4. *Стасюк С. А., Федунік О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 69–704.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1989. — **187**. — С. 143–161.
6. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, № 2. — С. 314–317.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

8. Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138–168.
9. Романюк А. С. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008. — **199**, № 2. — С. 93–114.
10. Романюк А. С. Поперечники и наилучшие приближения классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**. — С. 181–213.
11. Пустовойтов Н. Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. — 2008. — **34**. — С. 187–224.
12. Конограй А. Ф. Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^\Omega$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 2014. — **95**, № 5. — С. 734–749.
13. Конограй А. Ф., Федункич-Яремчук О. В. Оцінки апроксимативних характеристик класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 148–160.
14. Пустовойтов Н. Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 1999. — **65**, № 1. — С. 107–117.
15. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
16. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
17. Jackson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P. 889–906.
18. Харди Г., Литтлвуд Д., Полли Г. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
19. Пустовойтов Н. Н. О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — **29**. — С. 201–218.