УДК 519.21

М. С. Герич – асистент Ужгородського національного університету;
Д. В. Гусак – провідний спеціаліст, професор, доктор фізико-математичних наук Інституту математики Національної академії наук України

Генератриси розподілу екстремумів та їхніх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова

Роботу виконано в УНУ

На скінченному регулярному ланцюгу Маркова (ЛМ) розглядається ґратчастий пуассонівський процес, стрибки якого приймають довільні цілі від'ємні значення, а додатні стрибки – лише одиничні. Такі процеси називають напівнеперервними зверху. Для цих процесів установлюються співвідношення для генератрис мінімуму та доповнення до максимуму процесу без застосування операції проектування. Отримані співвідношення для досліджуваних генератирис визначалися в термінах проекцій відповідної компоненти факторизації. Нові співвідношення для цих генератрис установлюються оберненням кумулянти, яка виражається через твірні перетворення функції розподілу від'ємних стрибків.

Ключові слова: екстремум, ланцюг Маркова.

Герич М. С., Гусак Д. В. Генератрисы распределения экстремумов и их дополнений для полунепрерывных сверху решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова. На конечной регулярной цепи Маркова (ЛМ) рассматривается решетчатый пуассоновский процесс, прыжки которого принимают произвольные целые отрицательные значения, а положительные скачки только единичные. Такие процессы называются полунепрерывными сверху. Для этих процессов устанавливаются соотношения для генератрис минимума и дополнения к максимуму процесса без применения операции проектирования. Полученные соотношения для исследуемых генератирис определялись в терминах проекций соответствующей компоненты факторизации. Новые соотношения для этих генератрис устанавливаются обращением кумулянты, которая выражается через образующие преобразования функции распределения отрицательных скачков.

Ключевые слова: экстремум, цепь Маркова.

Gerich M. S, Gusak D. V. Generating the Distribution of Extremes and Their Additions for the Top Semicontinuous Lattice Poisson Processes on Markov Chain. On the finite regular Markov chain it is considered latticed Poisson process, jumps of which take arbitrary targets negative values, and positive jumps are equal 1. Such processes are called upper semi-continuous. For these processes the relations for moment generating funtions (m. g. f.) of minimum and complements to maximum of the process are established without proective operation. Obtained relations for considered m. g. f. were defined in terms of projection of coresponding component of factorization. New relations for these m. g. f. are established by the invertions of the cumulant function, which is represented in terms of generating transformation for distribution function of negative jumps.

Key words: extremum, Markov chain.

Постановка наукової проблеми та її значення. Опису процесів, заданих на ЛМ, присвячені роботи І. І. Єжова, А. В. Скорохода [5]. Граничні задачі для таких процесів із неперервно розподіленими стрибками на ЛМ вивчались у [1; 6], де були отримані матричні аналоги основної факторизаційної тотожності (о. ф. т.) та 2-ї факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних процесів. Для напівнеперервних процесів отримані уточнення деяких результатів у ґратчастому випадку в спільних роботах Д. В. Гусака, А. І. Туреніязової [2, 3] та М. С. Герич [4].

У цій роботі перед нами поставлені такі **завдання**:

– знайти співвідношення для генератрис розподілу мінімуму (у тому числі й абсолютного);

– знайти співвідношення для генератрис розподілу максимуму та його граничного співвідношення при $s \to 0$;

– виразити безпосередньо через генератрису хвоста розподілу від'ємних стрибків процесу.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Для цього спочатку розглянемо двовимірний марківський цілочисловий процес $Z(t)=\{\xi(t),x(t)\}$ $(t \geq 0, \xi(0)=0)$, де $x(t)$ – скінченний регулярний ЛМ зі значеннями в $E=\{1,\dots,m\}$ і твірною матрицею $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})$; $\xi(t)-$ґратчастий пуассонівський процес, заданий на ЛМ $x(t)$ зі значеннями в $\boldsymbol{Z}$. Його генератриса має показникову форму

$$\boldsymbol{g_t}(\boldsymbol{z})=\left\| E\left[z^{\xi(t)}, x(t)=r \mid x(0)=k\right]\right\|=Ez^{\xi(t)}=e^{tK(z)},$$

де матрична кумулянта $\boldsymbol{K(z)}$ визначається загальним матричним співвідношенням

$$\boldsymbol{K(z)}=\sum_{x\neq 0}\left(\boldsymbol{z}^x-1\right)\left(\boldsymbol{\Lambda p}(x)+\boldsymbol{Nf}(x)\right)+\boldsymbol{Q}. \quad (1)$$

$\Lambda=\left\|\delta_{kr}\lambda_k\right\|$ $(k=1,...,m)$, λ_k- інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ із розподілом стрибків $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\left\|\delta_{kr}P\left\{\xi_1^{(k)}=x\right\}\right\|$, $\boldsymbol{N}-$ інтенсивності стрибків ЛМ $x(t)$. Матриця перехідних імовірностей вкладеного ЛМ $y_n=x(\sigma_n+0)$, де σ_n- момент n-ї зміни станів $x(t):\boldsymbol{P}=\left\|p_{kr}\right\|$, $(k,r=\overline{1,m})$, $\boldsymbol{f}(x)=\left\|p_{kr}P\{\chi_{kr}=x\}\right\|-$ розподіл стрибків на переходах ЛМ $x(t)$.

Для скорочення запису інтегральних перетворень по t введемо показниково розподілену випадкову величину $\theta_s\left(P\{\theta_s>t\}=e^{-st}, s>0\right)$.

Для екстремумів процесу та їхніх доповнень, а також для функціоналів перетину додатного (від'ємного) рівня введемо такі позначення:

$$\xi^{\pm}(t)=\sup_{0\le t'\le t}(\inf)\,\xi(t'),\ \xi^{\pm}(t)=\sup_{0\le t\le\infty}(\inf)\,\xi(t),\ \bar{\xi}(t)=\xi(t)-\xi^{+}(t),\ \check{\xi}(t)=\xi(t)-\xi^{-}(t);$$

$$\tau^+(x)=\inf\{t>0,\xi(t)>x\},\quad \gamma^+(x)=\xi\left(\tau^+(x)\right)-x,\ x\ge 0;$$

$$\tau^-(x)=\inf\{t>0,\xi(t)<x\},\quad \gamma^-(x)=x-\xi\left(\tau^-(x)\right),\ x\le 0.$$

Позначимо (згідно з усередненням по розподілу Θ_S)

$$\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}^{\xi(\Theta_S)}=s\int_0^{+\infty}e^{-st}\,\boldsymbol{g_t}(\boldsymbol{z})\,\boldsymbol{dt}=\boldsymbol{s}(s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z}))^{-1}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{g}_{\pm}(s,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}^{\xi^{\pm}(\Theta_S)}=\left\|E\left[z^{\xi_{\pm}(\Theta_S)}, x(\Theta_S)=r \mid x(0)=k\right]\right\|,\ k,r=\overline{1,m},$$

$$\boldsymbol{g}^{+}(s,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}^{\bar{\xi}(\Theta_S)},\ \boldsymbol{g}^{-}(s,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{E}\boldsymbol{z}^{\check{\xi}(\Theta_S)},$$

$$\boldsymbol{P_S}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{Q})^{-1}. \quad (3)$$

У [6], [3, 4] отримано матричний аналог о. ф. т., що встановлює зв'язок між $\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{z})$ та $\boldsymbol{g}_{+}(s,\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}^{-}(s,\boldsymbol{z})$ ($\boldsymbol{g}_{-}(s,\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{g}^{+}(s,\boldsymbol{z})$).

$$\boldsymbol{g}(s,\boldsymbol{z})=\begin{cases}\boldsymbol{g}_{+}(s,\boldsymbol{z})\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^{-}(s,\boldsymbol{z}),\\ \boldsymbol{g}_{-}(s,\boldsymbol{z})\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^{+}(s,\boldsymbol{z}),\end{cases}\quad |z|=1. \quad (4)$$

При цьому всі наступні ймовірності строго додатні.

$$\boldsymbol{p}_{\pm}(s)=\left\|P\left\{\xi^{\pm}(\Theta_S)=0,x(\Theta_S)=r \mid x(0)=k\right\}\right\|,\ \boldsymbol{q}_{\pm}(s)=\boldsymbol{P_s}-\boldsymbol{p}_{\pm}(s),$$

$$\boldsymbol{p}^{+}(s)=\left\|P\left\{\check{\xi}(\Theta_S)=0\right\}\right\|,\ \boldsymbol{p}^{-}(s)=\left\|P\left\{\bar{\xi}(\Theta_S)=0\right\}\right\|,\ \boldsymbol{q}^{\pm}(s)=\boldsymbol{P_s}-\boldsymbol{p}^{\pm}(s).$$

Далі розглянемо напівнеперервні зверху ґратчасті пуассонівські процеси на ЛМ із кумулянтою:

$$\boldsymbol{K(z)}=\boldsymbol{\Lambda_1}(\boldsymbol{z}-1)+\sum_{x<0}\left(\boldsymbol{z}^x-1\right)\left(\boldsymbol{\Lambda_2 p_2}(x)+\boldsymbol{Nf}(x)\right)+\boldsymbol{Q}. \quad (5)$$

У [2] показано, що одна з пари компонент о. ф. т. у (4) є матричною дробово-лінійною функцією відносно z, а інша компонента цих пар визначається застосуванням операції проектування до генератриси розподілу самого процесу. Наше завдання полягає в тому, щоб із пар $\{g_{+}(s,z),g^{-}(s,z)\}$ і

$\{g_-(s,z), g^+(s,z)\}$ виразити «непрості» генератриси розподілів без застосування операції проектування. Для цього нам потрібно ввести поняття зворотного ЛМ (див. [7]) і деякі допоміжні твердження про обернення сингулярно збурених матриць із [2] у [8].

Лема 1 **[8].** *Нехай* Q_0 *– вироджена матриця* m*-го порядку,* $\nu \neq 0$. *Тоді обернення збуреної зворотної матриці* $Q_0 + \nu I$ *має розклад*

$$(Q_0 + \nu I)^{-1} = \nu^{-1}\Pi_1 + T_0(I + \nu T_0)^{-1}, \tag{6}$$

де Π_1 *– власний проектор матриці* Q_0, $r = \dim N(Q_0) < m$, $\Pi_1 = \sum_{k=1}^{r} u^{(k)} \otimes \rho^{(k)}$, $u^{(k)}$, $\rho^{(k)}$ *– правий та лівий власні вектори оператора* Q_0, *що відповідають нульовому власному значенню:* $(\rho^{(i)}, u^{(j)}) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,r}$. *Крім того,*

$$T_0 = (I - \Pi_1)\left((\Pi_1 - Q_0)^{-1} - \Pi_1\right)(I - \Pi_1),\ \Pi_1 Q_0 = Q_0 \Pi_1 = 0,\ \Pi_1 T_0 = T_0 \Pi_1 = 0.$$

Позначимо перші два моменти напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1), які надалі вважаємо обмеженими:

$$M_1^0 = E\xi(1) = \sum_{\substack{x \le 1 \\ x \neq 0}} x K_0(x),\ M_2^0 = E[\xi(1)]^2 = \sum_{\substack{x \neq 0 \\ x \le 1}} x^2 K_0(x),\ K_0(x) = \Lambda p(x) + Nf(x).$$

Тоді при $z = 1 + \varepsilon$ має місце наближення

$$K(z) = (1-z)M_1^0 + \frac{1}{2}(1-z)^2 M_2^0 + Q + o(\varepsilon^2). \tag{7}$$

Для ергодичного ЛМ $x(t)$ із твірною матрицею Q позначимо матрицю стаціонарних імовірностей через

$$P_0 = \lim_{s \to 0} P_s = \lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{s \to 0} s(sI - Q)^{-1} = \left\| p_{kr}^0 \right\|,\ p_{kr}^0 = \rho_r > 0,\ k, r = \overline{1,m}$$

і, відповідно, усереднений по стаціонарному розподілу P_0 момент позначимо

$$m_1^0 = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \sum_{r=1}^{n} \left[\delta_{kr} E\xi^{(k)}(1) + \sum_{r \neq k}^{m} n_k\, p_{kr} E\chi_{kr} \right]. \tag{8}$$

На основі (7)–(8) і деяких результатів із [8] справедлива така лема.

Лема 2 **[7].** *Для процесу* $Z(t)$ *із кумулянтою (5) із* $|m_1^0| < \infty$ *має місце таке співвідношення:*

$$\lim_{z \to 1}(1-z)K^{-1}(z) = \lim_{z \to 1}(1-z)\left(Q + (1-z)M_1^0\right)^{-1} = \frac{1}{m_1^0} P_0,\ m_1^0 \neq 0 \tag{9}$$

Для ергодичних ЛМ $x(t)$ у [7] уводиться поняття зворотного ЛМ $\hat{x}(t)$.

Означення 1. Якщо $x(t)$ – ергодичний ЛМ із твірною матрицею $Q = N(P - I)$ з діагонально записаним стаціонарним розподілом $R = \|\delta_{kr}\rho_r\|$, тоді зворотним до ЛМ $x(t)$ називається ЛМ $\hat{x}(t)$, який визначається твірною матрицею $\hat{Q} = SQ^T S^{-1} = N\left(\hat{P} - I\right)$, де $S = NR^{-1}$.

Відповідно, зворотний процес $\hat{\xi}(t)\ (t \ge 0)$ на ЛМ $\hat{x}(t)$ визначається кумулянтою і генератрисою $\hat{\xi}(\theta_S)$: $\hat{K}(z) = S[K(z)]^T S^{-1}$, $\hat{g}(s,z) = Ez^{\hat{\xi}(\theta_S)} = s\left(sI - \hat{K}(z)\right)^{-1}$.

Теорема 1 [3]. *О. ф. т. (4) в термінах генератрис екстремумів зворотного процесу* $\hat{g}_\pm(s,z) = Ez^{\hat{\xi}^\pm(\theta_S)}$ *набуває вигляду:*

$$g(s,z)=\begin{cases} g_+(s,z)\mathrm{P}_S^{-1}S\,\hat{g}_-^{T}(s,z)S^{-1}; \\ g_-(s,z)\mathrm{P}_S^{-1}S\,\hat{g}_+^{T}(s,z)S^{-1}. \end{cases} \quad (10)$$

Зауважимо, що з факторизаційних тотожностей (4) та (10) випливають такі співвідношення між розподілами екстремумів звичайного та зворотного процесів:

$$\boldsymbol{g}^{\pm}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{g}}_{\pm}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1},\ \boldsymbol{P_S}=\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{S}}\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1},\ \boldsymbol{q}^{+}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{S}\left(\hat{\boldsymbol{q}}_{+}(\boldsymbol{s})\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1},\ \hat{\boldsymbol{q}}_{+}(\boldsymbol{s})=\hat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{T}}_{*}^{+}(\boldsymbol{s},0),$$

$$\boldsymbol{q}^{-}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{q}}_{-}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{S}^{-1},\ \hat{\boldsymbol{q}}_{-}(\boldsymbol{s})=\hat{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{T}}_{*}^{-}(\boldsymbol{s},0).$$

У випадку ґратчастих пуассонівських процесів має місце аналогічний результат, як у [6] у випадку неперервно розподілених стрибків процесу.

<u>Лема 3.</u> *Для ґратчастого процесу Пуассона, заданого на ЛМ, мають місце такі представлення матриць:* $\boldsymbol{p}_{*}^{\pm}(\boldsymbol{s})$ *та* $\boldsymbol{p}_{\pm}^{*}(\boldsymbol{s})$*:*

$$\boldsymbol{p}_{\pm}^{*}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{p}_{\pm}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{P_S^{-1}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{e}^{-s\tau^{\pm}(0)},\boldsymbol{\tau}^{\pm}(0)<\infty\right]=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_{*}^{\pm}(\boldsymbol{s},0); \quad (11)$$

$$\boldsymbol{p}_{*}^{\pm}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{P_S^{-1}}\boldsymbol{p}^{\pm}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{e}^{-s\tau^{\pm}(0)},\boldsymbol{\tau}^{\pm}(0)<\infty\right]\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{T}_{*}^{\pm}(\boldsymbol{s},0)\right)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1}. \quad (12)$$

Для напівнеперервних зверху процесів $Z(t)$, згідно із [6], деякі «нескладні» компоненти о. ф. т. у (4) мають такий вигляд:

$$g_+(s,z)=\left(\mathrm{I}-Z_S^{-1}z\right)^{-1}p_+(s),\ p_+(s)=P\left\{\xi^+(\theta_S)=0\right\}=\left(\mathrm{I}-Z_S^{-1}\right)P_s,\ Z_S^{-1}=q_+(s)P_S^{-1}; \quad (13)$$

$$\boldsymbol{g}^{+}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{p}^{+}(\boldsymbol{s})\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q_S^{-1}z}\right)^{-1},\ \boldsymbol{p}^{+}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{P_s}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q_S^{-1}}\right),\boldsymbol{Z_S^{-1}}=\boldsymbol{P_S^{-1}}\boldsymbol{q}^{+}(\boldsymbol{s}). \quad (14)$$

Розглянемо вкладений ЛМ $\left(y_*^1=x(\tau^+(0)),y_*^0=x(0)\right)$ із матрицею перехідних імовірностей $\boldsymbol{P}_*=\left\|P\left\{y_*^1=r\mid y_*^0=k\right\}\right\|$ та твірною матрицею $\boldsymbol{Q}_*=\boldsymbol{P}_*-\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P}_*=\boldsymbol{T}_*^{+}(0,0)$, де $\boldsymbol{T}_*^{+}(\boldsymbol{s},0)=\left\|E\left[e^{-s\tau^+(0)},y_*^1=r\mid y_*^0=k\right]\right\|$, $P\left\{\tau^+(0)>0\right\}=0$. Генератриса $\tau^+(0)$ при $s\to 0$ задовольняє наближення

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}_*(\boldsymbol{s},0)=-\boldsymbol{Q}_*+\boldsymbol{sM}_*+\boldsymbol{o}(\boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{M}_*=\boldsymbol{E\tau}^{+}(0)>0. \quad (15)$$

Позначимо стаціонарний розподіл вкладеного ЛМ із твірною матрицею $\boldsymbol{Q}_*$ через $\boldsymbol{\Pi}_*=\lim_{s\to 0}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{Q}_*)^{-1}=\left\|\pi_{*kr}\right\|,\ \pi_{*kr}=\rho_{*r},\ k,r=\overline{1,m}$, а відповідне усереднення по ньому для $\boldsymbol{M}_*$

$$\mu_*^{+}=\sum_{k=1}^{m}\rho_{*k}\sum_{r=1}^{m}E\left[\tau^+(0),y_*^1=r\mid y_*^0=k\right].$$

Аналогічно введемо поняття зворотного ЛМ до вкладеного з твірною матрицею $\hat{\boldsymbol{Q}}_*=\boldsymbol{SQ}_*^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}^{-1},\hat{\boldsymbol{Q}}_*=\hat{\boldsymbol{P}}_*-\boldsymbol{I},\ \hat{\boldsymbol{T}}_*^{+}(\boldsymbol{s},0)=\boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{e}^{-s\hat{\tau}^{+}(0)},\boldsymbol{\tau}^{+}(0)<\infty\right]=\left\|E\left[e^{-s\hat{\tau}^{+}(0)},\hat{y}_*^1=r\mid\hat{y}_*^0=k\right]\right\|$;

$$\hat{\boldsymbol{P}}_*=\left\|P\left\{\hat{y}_*^1=r\mid\hat{y}_*^0=k\right\}\right\|,\ k,r=\overline{1,m},\ \hat{\boldsymbol{P}}_*=\hat{\boldsymbol{T}}_*(0,0).$$

Генератриса $\hat{\tau}^{+}(0)$ при $s\to 0$ задовольняє наближення

$$\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{T}}_*(\boldsymbol{s},0)=-\hat{\boldsymbol{Q}}_*+\boldsymbol{s}\hat{\boldsymbol{M}}_*+\boldsymbol{o}(\boldsymbol{s}),\ \hat{\boldsymbol{M}}_*=\boldsymbol{E}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}^{+}(0). \quad (16)$$

Введемо такі позначення:

$$\hat{P}_{*S} = S\left(\hat{P}_*\right)^T S^{-1};\ \hat{M}_{*S} = S\left(E\left[\hat{\tau}^+(0)\right]\right)^T S^{-1};\ \hat{Q}_{*S} = S\left(\hat{Q}_*\right)^T S^{-1};$$

$$\hat{T}_{*S}(s,0) = S\left(E\left[e^{-\hat{\tau}^+(0)}, \hat{\tau}^+(0) < 0\right]\right)^T S^{-1}.$$

Виконавши над (16) операцію транспонування, а потім, домноживши на S зліва та S^{-1} справа і врахувавши попередні позначення, отримаємо таке співвідношення:

$$I - \hat{T}_{*S}(s,0) = -\hat{Q}_{*S} + s\hat{M}_{*S} + o(s). \tag{17}$$

Позначимо стаціонарний розподіл зворотного ЛМ із твірною матрицею $\hat{Q}_*$ через $\Pi_* = \lim\limits_{s\to 0} s\left(sI - \hat{Q}_*\right)^{-1} = \left\|\hat{\pi}_{*kr}\right\|$, $\hat{\pi}_{*kr} = \hat{\rho}_{*r}$, $k,r = \overline{1,m}$, а відповідне усереднення для $\hat{M}_*$ по стаціонарному відповідному розподілу

$$\hat{\mu}_*^+ = \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_{*r} \sum_{r=1}^m E\left[\hat{\tau}^+(0), \hat{y}_*^1 = r \mid \hat{y}_*^0 = k\right].$$

Зауважимо, що для напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ значення Z_S^{-1}, Q_S^{-1} в (13), (14), використовуючи лему 3, виражаються відповідно через

$$Z_S^{-1} = T_*^+(s,0);\quad Q_S^{-1} = \hat{T}_{*S}(s,0). \tag{18}$$

Із леми 2 та співвідношень (15), (17) та (18) випливає така лема.

<u>Лема 4.</u> *Якщо* $Z(t)$ *напівнеперервний зверху зворотний процес і* $m_1^0 > 0$, *тоді* $0 < \mu_+^* < \infty$, $0 < \hat{\mu}_+^* < \infty$ *і мають місце такі співвідношення:*

$$\lim_{s\to 0} s\left(I - Z_S^{-1}\right)^{-1} = \lim_{s\to 0} s\left(I - T_*^+(s,0)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\Pi_*; \tag{19}$$

$$\lim_{s\to 0} s\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1} = \lim_{s\to 0} s\left(I - \hat{T}_{*s}^+(s,0)\right)^{-1} = \frac{1}{\hat{\mu}_*^+}\hat{\Pi}_{*s}. \tag{20}$$

Доведення. Використовуючи співвідношення (18), (15) та (9), отримаємо (19):

$$\lim_{s\to 0} s\left(I - Z_S^{-1}\right)^{-1} = \lim_{s\to 0} s\left(I - T_*^+(s,0)\right)^{-1} = \lim_{s\to 0} s\left(-Q_* + sM_*\right)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\Pi_*.$$

Аналогічно доводимо (20) після використання (18), (17) та врахування результату леми 2.

Розглянемо кумулянту (5) і представимо її у вигляді

$$K(z) = (z-1)\left[\Lambda_1 - z^{-1}\left(\Lambda_2\tilde{F}_2(x) + N\tilde{F}(x)\right)\right] + Q, \tag{21}$$

$$\tilde{F}_2(x) = \sum_{x\le 0} z^x P\left\{\xi_1^{(k)} < x\right\},\qquad \tilde{F}(x) = \sum_{x\le 0} z^x P\left\{f_{kr} < x\right\},\quad |z| \ge 1.$$

Зауважимо, що згідно з (21) $K(z)$ виражається через твірні перетворення функцій розподілу від'ємних стрибків та $K(1) = Q$.

<u>Теорема 2.</u> *Якщо* $x(t)$ *ергодичний ЛМ і момент процесу* $\xi(t)$ *обмежений* $\left|m_1^0\right| < \infty$, *тоді при* $|z| \ge 1$ *генератриса* $\overline{\xi}(\theta_s)$ *задовольняє таким співвідношенням:*

$$g^{-}(s,z)=\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}z\right)s\left(s\mathrm{I}-\mathrm{K}(z)\right)^{-1}=$$
$$=\left[\mathrm{I}+(1-z)\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\right]s\left(s\mathrm{I}-\mathrm{K}(z)\right)^{-1}; \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{p}^{-}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{P}\{\xi(\theta_s)=0\}=(\boldsymbol{Z_S}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}. \qquad (23)$$

Якщо $0<m_1^0<\infty$, *тоді генератриса* $\bar{\xi}=\lim\limits_{s\to 0}\left(\bar{\xi}(\theta_s)-\xi^{+}(\theta_s)\right)$ *визначається такими граничними співвідношеннями при* $s\to 0$:

$$g^{-}(z)=\lim_{s\to 0}g^{-}(s,z)=\frac{1}{\mu_*^{+}}\Pi_*(1-\mathrm{P}_*z)\left(-\mathrm{K}(z)\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\mu_*^{+}}\Pi_*(\mathrm{I}-\mathrm{P}_*z)(1-z)^{-1}\left[\Lambda_1+\left(Q\left(1-z^{-1}\right)^{-1}-\Lambda_2\tilde{F}_2(z)-\mathrm{N}\tilde{F}(z)\right)z^{-1}\right]^{-1}; \qquad (24)$$

$$\boldsymbol{p}^{-}=\frac{1}{\mu_*^{+}}\boldsymbol{\Pi}_*\boldsymbol{P}_*[\boldsymbol{\Lambda}_1]^{-1}. \qquad (25)$$

Доведення. Із першого співвідношення в (4) отримаємо $\boldsymbol{g}^{-}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})=\boldsymbol{P_S}(\boldsymbol{g}_{+}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z}))^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})$. Враховуючи (2), (3) і (13), перепишемо $\boldsymbol{g}^{-}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})$ у вигляді

$$\boldsymbol{g}^{-}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{s}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z}))^{-1}.$$

Отже, ми отримали перше співвідношення в (22). Для того, щоб отримати друге співвідношення в (22), розглянемо перші два множники $\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\boldsymbol{z}\right)$ і перетворимо їх до іншого вигляду:

$$\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}z\right)=\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}z\right)=\left(\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\mathrm{Z}_S-\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}z\right)=$$
$$=\left(\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\mathrm{Z}_S+\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\left((1-z)-1\right)\right)=\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)+(1-z)\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}=$$
$$=\mathrm{I}+(1-z)\left(\mathrm{Z}_S-\mathrm{I}\right)^{-1}.$$

Отже, друге співвідношення в (22) також доведено. Щоб отримати (23), перейдемо до границі в першому співвідношенні (22) при $z\to\infty$, але попередньо підставивши в перше співвідношення (22) замість $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z})$ вираз (21):

$$\boldsymbol{g}^{-}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{s}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z}))^{-1}=$$
$$=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{sI}+(1-\boldsymbol{z})\left[\boldsymbol{\Lambda}_1-\boldsymbol{z}^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}_2\tilde{\boldsymbol{F}}_2(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{N}\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{z})\right)\right]-\boldsymbol{Q}\right)^{-1}\xrightarrow[z\to\infty]{}$$
$$=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(-\boldsymbol{Z}_S^{-1}\right)\boldsymbol{s}(-\boldsymbol{\Lambda}_1)^{-1}=\boldsymbol{s}[\boldsymbol{Z_S}-\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}=\boldsymbol{p}^{-}(\boldsymbol{s})$$

(24) визначається із (22) при $s\to 0$ і $0<m_1^0<\infty$

$$g^{-}(z)=\lim_{S\to 0}g^{-}(s,z)=\lim_{S\to 0}s\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}\right)^{-1}\left(\mathrm{I}-\mathrm{Z}_S^{-1}z\right)\left(s\mathrm{I}-\mathrm{K}(z)\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\mu_*^{+}}\Pi_*(\mathrm{I}-\mathrm{P}_*z)\left(-\mathrm{K}(z)\right)^{-1}==\frac{1}{\mu_*^{+}}\Pi_*(\mathrm{I}-\mathrm{P}_*z)\left(-(z-1)\left[\Lambda_1-z^{-1}\left(\Lambda_2\tilde{F}_2(z)+\mathrm{N}\tilde{F}(z)\right)\right]-Q\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\mu_*^{+}}\Pi_*(\mathrm{I}-\mathrm{P}_*z)(1-z)^{-1}\left[\Lambda_1+z^{-1}\left(Q(1-z)^{-1}z-\Lambda_2\tilde{F}_2(z)-\mathrm{N}\tilde{F}(z)\right)\right]^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\boldsymbol{\mu}_*^{+}}\boldsymbol{\Pi}_*(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_*\boldsymbol{z})(1-\boldsymbol{z})^{-1}\left[\boldsymbol{\Lambda}_1+\left(\boldsymbol{Q}\left(1-\boldsymbol{z}^{-1}\right)^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}_2\tilde{\boldsymbol{F}}_2(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{N}\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{z})\right)\boldsymbol{z}^{-1}\right]^{-1}.$$

(25) отримуємо із (24), попередньо застосувавши до нього операцію граничного переходу при $z\to\infty$ $\boldsymbol{p}^{-}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\mu_*^{+}}\boldsymbol{\Pi}_*(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_*\boldsymbol{z})(1-\boldsymbol{z})^{-1}\left[\boldsymbol{\Lambda}_1+\left(\boldsymbol{Q}\left(1-\boldsymbol{z}^{-1}\right)^{-1}-\lambda_2\tilde{\boldsymbol{F}}_2(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{N}\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{z})\right)\boldsymbol{z}^{-1}\right]^{-1}=$

$= \frac{1}{\mu_*^+} \boldsymbol{\Pi}_* \boldsymbol{P}_* \boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}$. Теорему доведено.

Майже аналогічно встановлюється наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо* $x(t)$ *ергодичний ЛМ і момент процесу* $\xi(t)$ *обмежений* $\left|m_1^0\right| < \infty$*, тоді при* $|z| \geq 1$ *генератриса* $\xi^-(\theta_s)$ *має вигляд:*

$$g_-(s,z) = s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left(I - Q_S^{-1}z\right)\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1} = \\ = s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left[I + (1-z)\left(Q_S - I\right)^{-1}\right]; \tag{26}$$

$$p_-(s) = s\Lambda_1^{-1}\left(Q_S - I\right)^{-1}. \tag{27}$$

Якщо $0 < m_1^0 < \infty$*, тоді генератриса абсолютного мінімуму* ξ^- *має вигляд*

$$g_-(z) = \frac{1}{\hat{\mu}_*^+}\left(-K(z)\right)^{-1}\left(1 - \hat{P}_{*S}\, z\right)\hat{\Pi}_{*S} = \\ = \frac{1}{\hat{\mu}_*^+}\left[\Lambda_1 + \left(Q\left(1 - z^{-1}\right)^{-1} - \Lambda_2 \tilde{F}_2(z) - N\tilde{F}(z)\right)z^{-1}\right]^{-1}(1-z)^{-1}\left(1 - \hat{P}_{*S}\, z\right)\hat{\Pi}_{*S}; \tag{28}$$

$$\boldsymbol{p}_- = \frac{1}{\hat{\mu}_*^+}\left[\boldsymbol{\Lambda}_1\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}_*\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{*S}\,. \tag{29}$$

Доведення. Із другого співвідношення в (4) з урахуванням (14) випливає, що

$$g_-(s,z) = g(s,z)\left(g^+(s,z)\right)^{-1}P_S = s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left[P_S\left(I - Q_S^{-1}\right)\left(I - Q_S^{-1}z\right)^{-1}\right]^{-1}P_S =$$
$$= s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left[\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1} + Q_S^{-1}\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1}\left((1-z) - 1\right)\right] =$$
$$= s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left[\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1} + Q_S^{-1}\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1}(1-z) - Q_S^{-1}\left(I - Q_S^{-1}\right)^{-1}\right] =$$
$$= s\left(sI - K(z)\right)^{-1}\left[I + (1-z)\left[Q_S - I\right]^{-1}\right].$$

Обидва співвідношення у (26) доведено.

Перейшовши до границі у (27) при $z \to \infty$, отримаємо (26), а при $s \to 0$ – (28). Друге співвідношення у (28) отримаємо із першого, підставивши замість $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z})$ вираз (21). (29) випливає із (28) при $z \to \infty$.

Отримані граничні співвідношення (24) та (28) є в певному розумінні матричними аналогами формул Полячека–Хінчина. У скалярному випадку $P\{\ \xi^- = \overline{\xi}\ \} = 1.$

Список використаної літератури

1. Гусак Д. В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ЛМ та для напівмарковських процесів / Д. В. Гусак. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
2. Гусак Д. В. О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова / Д. В. Гусак, А. И. Турениязова // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 6. – С. 707–711.
3. Гусак Д. В. Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова / Д. В. Гусак, А. И. Турениязова // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей : сб. науч. тр. – Киев : Ин-т математики АН УССР, 1967. – С. 21–27.
4. Гусак Д. В. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. : Математика і інформатика. – 2011. – 22, № 2. – С. 54–63.
5. Ежов И. И. Марковские процессы, однородные по второй компоненте / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Теория вероятности и её применения. – 1969. – 14, № 1. – С. 3–14.

6. Карнаух Є. В. Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Є. В. Карнаух. – К., 2007, 18 с.
7. Кемени Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп. – М. : Наука, 1987. – 416 с.
8. Королюк В. С. Полумарковские процессы и их применение / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. – Киев : Наук. думка, 1976. – 182 с.

Стаття надійшла до редколегії
08.10 2012 р.