РОЗДІЛ ІІ
Теоретична фізика

УДК 530.12

Д. М. Шваліковський – інженер кафедри теоретичної та математичної фізики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Коваріантність тензора Рімана на дотичному просторі де Сіттера

Роботу виконано на кафедрі теоретичної та математичної фізики ВНУ ім. Лесі Українки

Розглянуто можливість побудови коваріантного тензора Рімана на дотичному многовиді до розшарованого простору, де шаром є простір де Сіттера. Побудовано калібрувально-інваріантний лагранжіан гравітаційного поля, де в ролі калібрувальної групи виступає група де Сіттера.

Ключові слова: простір де Сіттера, група де Сіттера, калібрувальна інваріантність, розшаровані простори.

Шваликовский Д. М. Ковариантность тензора Римана на касательном пространстве де Ситтера. Рассматривается возможность построения ковариантного тензора Римана на касательном многообразии к расслоенному пространству, где слоем есть пространство де Ситтера. Сконструирован калибровочно-инвариантный лагранжиан, где в роли калибровочной группы выступает группа де Ситтера.

Ключевые слова: пространство де Ситтера, группа де Ситтера, калибровочная инвариантность, расслоенные пространства.

Shvalikovsky D. M. Covariance of the Riemann Tensor on the Tangent de Sitter Space. Investigated the possibility of construction of covariant Riemman tensor on a tangent manifold to layered space where the ordinary layer is a de Sitter space. The gauge-invariant lagrangian of a gravitational field was construct.

Key words: de Sitter space, de Sitter group, gauge invariance, layered space.

Постановка наукової проблеми та її значення. Кожній локальній внутрішній симетрії можна поставити у відповідність своє калібрувальне поле. Його джерелом є збережена у випадку інваріантності відносно глобальної калібрувальної групи густина векторного або тензорного струму. Внутрішні симетрії можна розуміти як симетрії деякого внутрішнього простору (шару), не пов’язаного з положенням частинки в просторі. Розшарований простір отримується зі звичайного простору–часу, якщо його точки замінити новими просторами (шарами), тобто припустити, що ці «точки» мають внутрішню структуру. Симетрії елементарних частинок стають відповідно симетріями, що діють всередині шарів, а просторово-часові симетрії перетворюють один в одний шари, що відносяться до різних просторово-часових точок. Геометрія розшарованих просторів узагальнює ріманову геометрію і містить її як частинний випадок. Групи перетворень симетрії відносно точок внутрішнього (шар) і зовнішнього (база) просторів ізоморфні між собою, але не збігаються.

Основна мета геометричного підходу до взаємодій – відшукання такого простору, в якому відповідні поля були б стандартними геометричними об’єктами. Це дозволяє застосувати потужні й добре розроблені методи диференціальної геометрії, алгебри і топології для вивчення властивостей класичних рівнянь руху і поля, що часто є нелінійними. Загалом геометризація взаємодій означає перехід до таких просторів, у яких об’єкти рухаються безсиловим способом, тобто по геодезичних. Системи відліку, пов’язані з цими просторами, називаються інерціальними відносно цієї взаємодії. Множина таких систем відліку загалом не утворює єдиного простору–часу. Це проявляється в тому, що в одній інерціальній системі відліку інші системи будуть неінерціальними. Зміну відносної відстані між інерціальними системами відліку можна описати рівняннями відхилення геодезичних базового простору. Відмінність від нуля другої похідної відхилення геодезичних вказує на існування певного фізичного поля, у якому безсиловим способом рухаються інерціальні системи відліку.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Приймемо спочатку для узагальнення, що базовий простір V є d-вимірним многовидом. Кожна точка цього многовиду є дійсним N–вимірним шаром, натягнутим на лінійно незалежні вектори $\mathbf{v}_A$, де $A = 1,2..N$. Припускаючи, що $d \le N$, вектори координатного базису будуть рівні $\mathbf{e}_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$, де $\alpha = 1,2...d$ — індекс d-вимірного простору. Означимо скалярний добуток у шарі таким чином (вважаючи вектори $\mathbf{v}_A$ ортонормованими):

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B = \eta_{AB}, \tag{1}$$

де η_{AB} — метрика узагальненого простору Мінковського. Перетворення де Сіттера

$$\tilde{\mathbf{v}}_A = \Lambda_A{}^B \mathbf{v}_B, \qquad \Lambda_A{}^C \eta_{CD} \Lambda_A{}^D = \eta_{AB} \tag{2}$$

зберігають ортогональність реперу, $\tilde{\mathbf{v}}_A \cdot \tilde{\mathbf{v}}_B = \eta_{AB}$. Скалярний добуток векторів координатного базису індукують метрику на d-вимірному многовиді:

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta}(x^\gamma). \tag{3}$$

Виразивши $\mathbf{e}_\alpha$ в $\mathbf{v}_A$–базисі

$$\mathbf{e}_\alpha = e_\alpha^B \mathbf{v}_B \tag{4}$$

і підставивши отримане в (3), отримаємо такий вираз для метрики $g_{\alpha\beta}$ в компонентних позначеннях:

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha^A e_\beta^B \eta_{AB}. \tag{5}$$

У дотичному просторі операція підняття й опускання індексів здійснюється за допомогою узагальненої метрики Мінковського:

$$e_{A\alpha} = \eta_{AB} e_\alpha^B = (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_\alpha). \tag{6}$$

Розглянемо паралельне перенесення вектора на базовому просторі з одного шару в інший. Афінна зв'язність і зв'язність кручення визначаються законами паралельного переносу векторів координатного базису та репера:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \mathbf{e}_\alpha \equiv \nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\nu, \;\; \nabla_\beta \mathbf{v}_A = -\omega_{\beta A}{}^B \mathbf{v}_B, \tag{7}$$

де ∇_β є похідною, що визначає швидкість зміни векторів уздовж базисних векторів $\mathbf{e}_\beta$. Застосовуючи цю похідну до скалярної функції f, можна знайти її звичайний градієнт $\nabla_\beta f = \partial f/\partial x^\beta$. Зауважимо, що η_{AB} і $g_{\alpha\beta}$, які визначені в (1) і (3), є залежними від скалярних функцій, тому $\nabla_\beta \eta_{AB} = 0$, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma \equiv \partial_\gamma g_{\alpha\beta}$.

Маючи η_{AB}, $g_{\alpha\beta}$ і e_α^A, визначимо умови узгодженості метрики зі зв'язністю, взявши похідну виразів (1), (3) і (6). У висліді маємо:

$$(\nabla_\alpha \mathbf{v}_A)\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_A \cdot (\nabla_\alpha \mathbf{v}_B) = -\omega_{\alpha AB} - \omega_{\alpha BA} = \nabla_\alpha \eta_{AB} = 0, \tag{8}$$

звідки видно, що зв'язність кручення має бути антисиметричною по індексах дотичного простору, $\omega_{\alpha AB} = -\omega_{\alpha BA}$. Застосування похідної ∇_Γ до (3) дає

$$\Gamma^\nu_{\alpha\gamma} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\gamma} g_{\alpha\nu} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Звідси видно, що кручення відсутнє, $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\beta\alpha}$, отже, ці рівняння мають добре відомий розв'язок:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \tag{10}$$

де $g^{\gamma\sigma}$ є оберненим до $g_{\alpha\beta}$ ($g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta$). Наголосимо, що афінна зв'язність не містить індексів дотичного простору, тобто є від нього незалежною, вона є характеристикою базового простору. Нарешті, з (6) маємо:

$$\partial_\beta e_{A\alpha} = -\omega_{\beta A}{}^{B} e_{B\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} e_{A\nu}. \tag{11}$$

Видно, що ці рівняння однозначно розв'язуються для $\omega_{\beta B}{}^{A}$, якщо задані форми зв'язності e^B_α і метрика $g_{\alpha\beta}$. Загальне число компонентів форми e^B_α дорівнює Nd. Задавши метрику $g_{\alpha\beta}$ зі своїми похідними, можна отримати зв'язність $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ із (10), наклавши таким чином $\frac{1}{2}d^2(d+1)$ умов на $\partial_\beta e_{A\alpha}$, і залишивши $d\left(Nd-\frac{1}{2}d(d+1)\right)$ незалежних рівнянь (11), щоб знайти $\frac{1}{2}dN(N-1)$ компонентів зв'язності кручення $\omega_{\beta AB}$. Відзначимо, що для будь-яких N і d число рівнянь ніколи не перевищує число незалежних компонент $\omega_{\beta AB}$, звідки маємо, що для будь-якої розмірності дотичного простору система не має зайвих рівнянь. Зв'язність кручення однозначно визначається кількістю рівнянь, що рівна кількості невідомих компонент:

$$d\left(Nd-\frac{1}{2}d(d+1)\right)=\frac{1}{2}dN(N-1).$$

Є два розв'язки цієї тотожності: $N=d$ і $N=d+1$. Перший випадок добре вивчений, він відповідає ЗТВ. Другий випадок відповідає групі розшарованого простору $SO(1,d)$.. У випадку чотиривимірного многовиду розшарований простір буде п'ятивимірним. Це простір де Сіттера, метрика якого $\eta_{AB}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$.

Щоб сконструювати калібрувально-інваріантний лагранжіан, ми повинні означити операцію підняття й опускання зовнішнього індексу:

$$e^\alpha_A = g^{\alpha\gamma} e_{\gamma A} = g^{\alpha\gamma}\eta_{AB} e^B_\gamma. \tag{12}$$

Переписане в величинах e^{α}_A рівняння (11) набуває вигляду:

$$\partial_\beta e^\alpha_A = -\omega_{\beta A}{}^{B} e^\alpha_B - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} e^\nu_A. \tag{13}$$

Форма переходу e^α_A є оберненою до e^B_β тільки тоді, коли вимірність розшарованого і базового просторів збігаються. У випадку дотичної групи де Сіттера для операції згортання тензорів маємо:

$$e^\alpha_A e^A_\beta = g^{\alpha\gamma}\eta_{AB} e^B_\gamma e^A_\beta = g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta, \tag{14}$$

тоді як згортання по індексах базового простору вже не набуває такого простого вигляду:

$$e^\alpha_A e^B_\alpha \neq \delta^A_B. \tag{15}$$

Щоб показати це, запровадимо одиничний вектор $\mathbf{n}$, ортогональний до всіх $\mathbf{e}_\alpha$, тому $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_\alpha=0$ і $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=-1$ для групи де Сіттера. Вектори $\mathbf{n}$ і $\mathbf{e}_\alpha$ складають повний базис у розшарованому просторі, тому

$$\mathbf{v}_A = v^\alpha_A \mathbf{e}_\alpha + n_A \mathbf{n}. \tag{16}$$

Підставивши в (6), маємо:

$$v^\alpha_A = g^{\alpha\gamma}(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{e}_\gamma) = g^{\alpha\gamma}\eta_{AB}e^B_\gamma = e^\alpha_A, \tag{17}$$

таким чином приєднана форма e^α_A збігається з коефіцієнтами v^α_A в розширенні (16). Отримаємо:

$$\eta_{AB} = \mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_B = v^\alpha_A v^\beta_B g_{\alpha\beta} - n_A n_B = e^\alpha_A e_{\alpha B} - n_A n_B, \tag{18}$$

і після підняття індексів розшарованого простору

$$e^\alpha_A e^B_\alpha = \delta^B_A + n_A n^B \equiv P^A_B, \tag{19}$$

де P^A_B є проективним оператором: $P^A_C P^C_B = P^A_B$.

Компоненти n_A задовольняють такі співвідношення

$$n^A e^\alpha_A = 0,\ n_A n^A = -1. \tag{20}$$

У реперному формалізмі приєднана форма e^α_A є фундаментальним об'єктом, а група симетрії, відносно якої теорія повинна бути інваріантною, є групою локальних п'ятивимірних перетворень де Сіттера (2), де $\Lambda_A{}^B = \Lambda_A{}^B(x)$. Застосувавши перетворення де Сіттера, маємо:

$$\tilde{\mathbf{v}}_A = \Lambda_A{}^B \mathbf{v}_B = \Lambda_A{}^B \left(e^\alpha_B \mathbf{e}_\alpha + n_B \mathbf{n}\right) = \tilde{e}^\alpha_A \mathbf{e}_\alpha + \tilde{n}_A \mathbf{n}, \tag{21}$$

а тому

$$e^\alpha_A \to \tilde{e}^\alpha_A = \Lambda_A{}^B e^\alpha_B. \tag{22}$$

Закон перетворення для зв'язності кручення випливає з її означення:

$$\tilde{\omega}_{\beta A}{}^B \tilde{\mathbf{v}}_B = -\nabla_\beta \tilde{\mathbf{v}}_A.$$

Підставивши $\tilde{\mathbf{v}}_B = \Lambda_A{}^C \mathbf{v}_C$ у рівняння (7), маємо:

$$\omega_{\mu A}{}^B \to \tilde{\omega}_{\mu A}{}^B = \left(\Lambda \omega_\mu \Lambda^{-1}\right)_A{}^B + \left(\Lambda \partial_\mu \Lambda^{-1}\right)_A{}^B, \tag{23}$$

де Λ і Λ^{-1} є прямими та оберненими матрицями п'ятивимірного перетворення де Сіттера. У загальному випадку

$$\Lambda = \exp\left(\varepsilon^{AB} J_{AB}\right), \tag{24}$$

де J_{AB} – генератори алгебри Лі групи де Сіттера, що задовольняють комутаційні співвідношення

$$\left[J_{AB}, J_{CD}\right] = \eta_{BC} J_{AD} - \eta_{AC} J_{BD} - \eta_{BD} J_{AC} + \eta_{AD} J_{BC}. \tag{25}$$

Універсальним накриттям групи $SO(1,4)$ є спінорна група $Spin_+(1,4)$. Тому запровадимо спінори ψ, які перетворюються за законом

$$\psi \to \exp\left(\varepsilon^{AB} \Gamma_{AB}\right)\psi, \tag{26}$$

де $\Gamma_{AB} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_A \Gamma_B - \Gamma_B \Gamma_A\right)$ є генераторами алгебри Лі в спінорному представленні і Γ_A є $d+1$ матрицями Дірака:

$$\left\{\Gamma^A, \Gamma^B\right\} = 2\eta^{AB}, \quad \Gamma^{\dagger A} = \Gamma^0 \Gamma^A \Gamma^0. \tag{27}$$

Діраківський вираз для дії

$$\int d^4 x \sqrt{g}\, \bar{\psi} i \Gamma^C e^\alpha_C D_\alpha \psi \tag{28}$$

є інваріантним відносно калібрувальних перетворень (22), (23) і (26).

У вираз (28) входить величина D_α. Це не що інше, як коваріантна похідна

$$D_\alpha \equiv \partial_\alpha + \frac{1}{4}\omega_\alpha{}^{AB}\Gamma_{AB}, \tag{29}$$

Наступним кроком буде конструювання кривизни зв'язності, асоційованої з коваріантною похідною D_μ:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}{}^{AB}\Gamma_{AB}, \tag{30}$$

де

$$R_{\mu\nu}{}^{AB}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{AB} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{AB} + \omega_\mu{}^{AC}\omega_{\nu C}{}^B - \omega_\nu{}^{AC}\omega_{\mu C}{}^B. \tag{31}$$

Кривизна в калібровці групи де Сіттера перетворюється за законом

$$\left(R_{\mu\nu}\right)_A{}^B \to \left(\Lambda R \Lambda^{-1}\right)_A{}^B, \tag{32}$$

звідки маємо:

$$R(\omega) = e^\mu_A R_{\mu\nu}{}^{AB}(\omega)\, e^\nu_B, \tag{33}$$

що є інваріантним відносно локальних калібрувальних перетворень.

Калібрувально-інваріантну дію візьмемо у вигляді класичної дії Айнштайна–Гільберта

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{g}R(\omega). \tag{34}$$

Доведемо, що дія в такому вигляді є калібрувально-інваріантною відносно групи де Сіттера. Це значить, що вона не повинна залежати від індексів дотичного простору.

Щоб це довести, запровадимо вектор на розшарованому просторі $\mathbf{l} = l^C\mathbf{v}_C$ і розглянемо, як діє на нього коваріантна похідна D_ν. Використаємо спінорне представлення:

$$D_\nu(l^D\Gamma_D) = \partial_\nu l^D\Gamma_D + \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{BC}[\Gamma_{BC},\Gamma_D]l^D. \tag{35}$$

Комутаційні співвідношення для спінорів:

$$[\Gamma_{BC},\Gamma_D] = 2(\eta_{CD}\Gamma_B - \eta_{BD}\Gamma_C).$$

Тоді маємо:

$$D_\nu(l^D\Gamma_D) = (\partial_\nu l^D + \omega_\nu{}^D{}_C l^C)\Gamma_D, \tag{36}$$

звідки

$$D_\nu l^D = \partial_\nu l^D + \omega_\nu{}^D{}_C l^C. \tag{37}$$

Для базисних векторів ця рівність перетворюється на

$$D_\nu e^{\rho A} = \partial_\nu e^{\rho A} + \omega_\nu{}^A{}_B e^{\rho B}, \tag{38}$$

звідки

$$[D_\mu, D_\nu]e^{\rho A} = R_{\mu\nu}{}^{AB}(\omega)e^\rho_B. \tag{39}$$

З іншого боку, використовуючи умову метричності (13), маємо:

$$D_\nu e^{\rho A} = -\Gamma^\rho_{\nu\sigma}e^{\sigma A}, \tag{40}$$

І, нарешті,

$$\begin{aligned} D_\mu(D_\nu e^{\rho A}) &= -D_\mu(\Gamma^\rho_{\nu\sigma}e^{\sigma A}) = -(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma})e^{\sigma A} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}(D_\mu e^{\sigma A}) \\ &= -\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma}e^{\sigma A} + \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}e^{\kappa A}. \end{aligned} \tag{41}$$

Обчисливши комутатор, отримаємо:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]e^{\rho A} &= -(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\sigma})e^{\sigma A} \\ &= -R^\rho_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)e^{\sigma A}. \end{aligned} \tag{42}$$

Порівнюючи результат із (39), отримаємо співвідношення

$$R_{\mu\nu}{}^{AB}(\omega)e^\rho_B = -R^\rho_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)e^{\sigma A}, \tag{43}$$

що у свою чергу приводить до

$$\begin{aligned} R(\omega) &= e^\mu_A R_{\mu\nu}{}^{AB}(\omega)e^\nu_B = -R^\nu_{\sigma\mu\nu}(\Gamma)e^{\sigma A}e^\mu_A \\ &= R^\nu_{\sigma\nu\mu}(\Gamma)g^{\sigma\mu} = R(\Gamma). \end{aligned} \tag{44}$$

Отже, (34) є калібрувально-інваріантною дією. У певному сенсі вона еквівалентна дії Айнштайна–Гільберта, але, на відміну від останньої, дозволяє тільки такі комбінації e^μ_A, які редукуються до метрики $g_{\mu\nu}$. Інші $\frac{1}{2}d(d+1)$ незалежні комбінації e^μ_A компонент представляють $\frac{1}{2}d(d+1)$ калібрувальні ступені свободи, асоційовані із $SO(1,d)$.

Висновки. Отже, в роботі сформульовано цілком життєздатну теорію гравітації на розшарованому многовиді V, яка буде калібрувально-інваріантною відносно групи де Сіттера. Однак необхідне чітке розуміння величин Γ та ω, що входять у вираз для тензора кривизни. У термінах загальної теорії відносності ці величини є еквівалентами відповідно до символів Крістоффеля та тензора кручення, хоча в п’ятивимірних теоріях їх роль цим не вичерпується.

Використання спінорної групи як групи накриття дає нам чітко видну калібрувальну інваріантність виписаного лагранжіана, і в цьому її значна перевага. Але при безпосередніх обчисленнях динамічних інваріантів з'являються громіздкі вирази, що важко піддаються аналізові, тому зазвичай використовують значно простішу групу конформних претворень, яка проектує простір де Сіттера на простір Мінковського, при цьому всі величини залежать від конформного фактору.

Список використаної літератури

1. Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации / Ю. С. Владимиров. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 256 с.
2. Картан Э. Ж. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения / Э. Ж. Картан. – М. : Изд–во МГУ, 1962. – 326 с.
3. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств (с добавлением Г. С. Асанова) / Х. Рунд. – М. : Наука, 1981. – 504 с.
4. Varlamov V. V. Functions of representations of the class 1 on the homogeneous spaces of the de Sitter group / V. V. Varlamov. – arXiv:0708.1555v1 [math-ph]. – 2 p.
5. Varlamov V. V. Spherical functions on the de Sitter group / V. V. Varlamov. – arXiv:math-ph/0604026v2. – 40 p.

Статтю подано до редколегії
10.11.2011 р.