

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Кафедра геометрії і алгебри

ЗАТВЕРДЖЕНО

Проректор з навчальної роботи,
проф. Гаврилюк С. В. _____

_____ 20__ р.

АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ

ПРОГРАМА

нормативної навчальної дисципліни

підготовки _____ бакалавра _____

напряму _____ 6.040302– інформатика _____

Програма навчальної дисципліни «Алгебра і геометрія» для студентів за напрямом підготовки 6.040301 – інформатика.

«__» _____ 20__ р. – __ с.

Розробник:

доцент, канд. фіз.-мат. наук

Волошина Т.В.

Рецензент:

доцент, канд. фіз.-мат. наук

Філозоф Л.І.

Програма навчальної дисципліни затверджена на засіданні кафедри геометрії і алгебри протокол № __ від __. __. 20__ р.

Завідувач кафедри: _____ (Волошина Т. В.)

Програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною комісією

математичного факультету

протокол № __ від __. __. 20__ р.

Голова науково-методичної

комісії факультету: _____

(Полетило С. А.)

Програма навчальної дисципліни

схвалена науково-методичною радою університету

протокол № __ від __. __. 20__ р.

Вступ

Програма навчальної дисципліни «Алгебра і геометрія» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра напряму «6.040302– інформатика»

Предметом вивчення дисципліни «Алгебра і геометрія» є лінійні векторні простори, кільця многочленів, числові поля, групи, криві та поверхні першого та другого порядку.

Міждисциплінарні зв'язки: з дискретною математикою, обчислювальною математикою, криптографією, математичною логікою, теорією алгоритмів, функціональним аналізом. Алгебраїчними структурами насичені майже всі розділи математики. Поняття групи, кільця, векторного простору є фундаментальними. Методи лінійної алгебри та аналітичної геометрії широко використовуються як у теоретичній та прикладній математиці, так і за її межами, зокрема, у фізиці та механіці.

Програма навчальної дисципліни складається з таких **змістових модулів**:

1. Системи лінійних рівнянь.
2. Аналітична геометрія.
3. Основні алгебраїчні структури.
4. Поля і многочлени.
5. Лінійні векторні простори.

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Алгебра і геометрія» є оволодіння студентами методами аналітичної геометрії, лінійної алгебри та основами загальної алгебри.

1.2. Основним завданням вивчення даної дисципліни є формування у студентів базових понять алгебри та геометрії, розвиток абстрактного мислення та просторового уявлення, озброєння алгебраїчним апаратом та геометричними знаннями, необхідними для подальшого успішного вивчення інших математичних дисциплін та для їх прикладного застосування.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні

знати:

1. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Матричну та векторна форма запису таких системи.
2. Поняття матриці, її визначника, рангу. Дії над матрицями, їх властивості.
3. Властивості та методи обчислення визначника матриці.
4. Поняття оберненої матриці, критерій її існування та методи обчислення.
5. Критерій сумісності та критерій визначеності системи лінійних рівнянь.
6. Формули Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.
7. Декартову прямокутну та полярну системи координат на площині. Зв'язок між прямокутними та полярними координатами.
8. Перетворення декартової прямокутної системи координат при зміні початку і повороті осей.
9. Геометричні вектори, лінійні операції над ними. Координати вектора.
10. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів, їх властивості та застосування.
11. Умови колінеарності та компланарності векторів.
12. Різні види рівняння прямої на площині: загальне, з кутовим коефіцієнтом, нормальне, канонічне. Взаємне розміщення прямих на площині. Кут між

- прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої.
13. Канонічні рівняння кривих другого порядку, ексцентриситет, фокальні радіуси та директриси. Рівняння асимптот для гіперболи.
 14. Загальне та нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення площин. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
 15. Канонічні рівняння прямої у просторі. Задання прямої у просторі як лінії перетину двох площин. Взаємне розміщення прямих у просторі. Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямих і площин.
 16. Канонічні рівняння еліпсоїда, гіперболоїдів та параболоїдів.
 17. Алгебраїчну та тригонометричну форму комплексних чисел. Операції над комплексними числами та їх геометричну інтерпретацію.
 18. Поняття групи, кільця та поля, ізоморфізму та гомоморфізму алгебраїчних структур.
 19. Поняття підгрупи, підкільця, ідеалу кільця. Поняття циклічної групи.
 20. Теорему Лагранжа про порядок підгрупи.
 21. Властивості відношення подільності цілих чисел та многочленів. Поняття найбільшого спільного дільника, найменшого спільного кратного. Алгоритм Евкліда.
 22. Прості та складені числа, їх властивості.
 23. Властивості взаємно простих чисел та многочленів.
 24. Основну теорему арифметики.
 25. Теорему про ділення з остачею для цілих чисел та для многочленів. Схему Горнера.
 26. Поняття незвідного над даним полем многочлена. Теорему про розклад многочлена на незвідні над полем множники.
 27. Поняття кореня многочлена, кратності кореня. Теорему Безу.
 28. Основну теорему алгебри.

29. Теорему про найбільшу кількість коренів многочлена.
30. Незвідні многочлени над полем комплексних та дійсних чисел.
31. Теореми про раціональні корені многочленів з цілими коефіцієнтами.
32. Поняття лінійного векторного простору, базису та розмірності, підпростору. Критерій підпростору.
33. Поняття лінійної залежності системи векторів. Властивості лінійно залежних і лінійно незалежних систем векторів.
34. Поняття координат вектора. Перетворення координат вектора при зміні базису.
35. Поняття лінійного оператора та його задання матрицею. Зв'язок між координатами вектора і його образа при лінійному відображенні.
36. Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису.
37. Поняття ядра, образа, ранга та дефекта лінійного оператора.
38. Поняття власного значення та відповідного власного вектора лінійного оператора. Властивості власних векторів та власних значень лінійного оператора.
39. Поняття характеристичного многочлена матриці та лінійного оператора.
40. Поняття евклідового простору. Скалярне множення та його властивості.
41. Поняття кута між векторами та довжини вектора в евклідовому просторі. Властивості довжини. Нерівність Коші - Буняковського.
42. Теорему про ортогоналізацію системи векторів.
43. Поняття спряженого лінійного оператора. Властивості спряжених операторів та їх матриць.
44. Властивості самоспряжених лінійних операторів та їх матриць.
45. Поняття ортогонального лінійного оператора. Властивості ортогональних лінійних операторів та їх матриць.
46. Поняття білінійної форми. Задання білінійної форми матрицею. Перетворення матриці білінійної форми при зміні базису.
47. Симетричні та кососиметричні білінійні форми.
48. Квадратичні форми, їх канонічний вигляд.

49. Методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду: метод ортогональних перетворень, методи Лагранжа та Якобі.
50. Закон інерції дійсних квадратичних форм.
51. Критерій Сільвестра додатної визначеності квадратичної форми.

Після опанування дисципліни студенти повинні вміти:

- обчислювати визначники матриць;
- виконувати алгебраїчні операції з матрицями;
- знаходити обернену матрицю;
- аналізувати та розв'язувати системи лінійних рівнянь;
- знаходити фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь;
- обчислювати ранг матриці;
- виконувати алгебраїчні операції з векторами;
- визначати лінійну залежність та незалежність векторів;
- розкладати вектор за довільним базисом;
- обчислювати скалярний, векторний та мішаний добуток векторів та застосовувати їх до розв'язання задач;
- складати рівняння прямих і площин;
- обчислювати кути між прямими та площинами, відстань між точками, між точкою і прямою, між точкою і площиною;
- визначати тип ліній другого порядку та зводити її загальне рівняння до канонічного вигляду;
- виконувати дії з комплексними числами;
- знаходити НСД цілих чисел та многочленів за алгоритмом Евкліда;
- знаходити НСК цілих чисел та многочленів;
- знаходити раціональні корені многочленів з цілими коефіцієнтами;
- знаходити межі дійсних коренів та локалізувати їх;
- відокремлювати кратні корені многочлена;
- розпізнавати основні типи алгебраїчних структур;

- знаходити суму і перетин підпросторів лінійного простору, обчислювати їх розмірності і базис;
- знаходити матрицю оператора;
- обчислювати координати вектора під дією лінійного оператора;
- знаходити матрицю лінійного оператора при зміні базису;
- знаходити власні числа і власні вектори лінійного оператора;
- знаходити характеристичний многочлен лінійного оператора;
- знаходити жорданову нормальну форму лінійного оператора;
- проводити процес ортогонолізації та нормування базису;
- досліджувати ортогональні та самоспряжені лінійні оператори, проводити діагоналізацію їх матриць;
- зводити квадратичну форму до канонічного виду за допомогою ортогональних перетворень, методом Лагранжа та Якобі.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Системи лінійних рівнянь

Тема 1. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Системи лінійних рівнянь, їх геометрична інтерпретація. Класифікація систем лінійних рівнянь за кількістю розв'язків. Елементарні перетворення систем лінійних рівнянь. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Тема 2. Поняття матриці. Дії з матрицями. Ранг матриці.

Поняття матриці. Приклади. Дії з матрицями, властивості дій. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Поняття рангу матриці. Способи обчислення рангу матриці.

Тема 3. Визначники матриць. Їх властивості та методи обчислення.

Поняття визначника матриці. Визначники матриць другого та третього порядків. Властивості визначника. Зведення матриці елементарними перетвореннями рядків та стовпців до трикутної форми. Розклад визначника за елементами рядка (стовпчика). Визначник квазітрикутної матриці. Визначник добутку матриць.

Тема 4. Числові векторні простори

Числові вектори. Лінійна залежність (незалежність) системи векторів. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів. Векторний запис системи лінійних рівнянь.

Базис та розмірність числового векторного простору.

Підпростір векторного простору. Лінійна оболонка системи векторів. Ранг системи векторів.

Тема 5. Критерій сумісності та критерій визначеності системи лінійних рівнянь

Теорема Кронекера-Капеллі. Теорема Крамера. Формули Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь.

Тема 6. Розв'язки неоднорідної та відповідної однорідної систем лінійних рівнянь

Підпростір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Тема 7. Обернена матриця

Обернена матриця. Критерій її існування та методи обчислення.

Застосування оберненої матриці до розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема 8. Геометричні вектори, лінійні операції над ними. Колінеарність і компланарність векторів.

Геометричні вектори, лінійні операції над ними. Вільний вектор. Проекція вектора на вісь. Системи колінеарних та компланарних векторів. Критерії колінеарності та компланарності.

Базис та розмірність векторного простору. Розклад вектора за базисом. Координати вектора.

Тема 9. Скалярний, векторний і мішаний добуток векторів

Означення, властивості та застосування скалярного, векторного та мішаного добутків векторів до розв'язання задач.

Тема 10. Декартова прямокутна та полярна системи координат на площині

Декартова прямокутна та полярна системи координат на площині. Зв'язок між прямокутними та полярними координатами. Перетворення декартових координат.

Тема 11. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Поділ відрізка в даному відношенні. Відстань між двома точками. Обчислення площі трикутника.

Тема 12. Пряма у площині

Рівняння лінії. Пряма лінія. Різні види рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

Взаємне розміщення двох прямих, кут між прямими.

Тема 13. Криві другого порядку

Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та парабол. Ексцентриситет. Фокальні радіуси. Оптичні властивості ліній другого порядку.

Загальне рівняння лінії другого порядку. Класифікація кривих другого порядку.

Тема 14. Площина у просторі

Декартова прямокутна система координат у просторі.

Рівняння поверхні у просторі. Площина як поверхня першого порядку. Різні види рівняння площини. Взаємне розміщення площин.

Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Кут між двома площинами.

Тема 15. Пряма у просторі

Рівняння прямої у просторі. Взаємне розміщення прямих у просторі. Кут між прямими у просторі.

Тема 16. Прямі та площини у просторі

Умови паралельності та перпендикулярності прямих і площин. Рівняння площини, що проходить через три дані точки.

Тема 17. Поверхні другого порядку

Поверхні обертання другого порядку. Циліндрична та конічна поверхні.

Класифікація поверхонь другого порядку. Канонічні рівняння еліпсоїда, гіперболоїдів та параболоїдів. Прямолінійні твірні.

Змістовий модуль 3. Основні алгебраїчні структури

Тема 18. Основні алгебраїчні структури

Поняття бінарної операції, властивості бінарних операцій. Група, напівгрупа. Кільце, поле. Числові поля.

Тема 19. Групи. Ізоморфізми та гомоморфізми груп.

Приклади груп. Поняття підгрупи. Критерій підгрупи.

Порядок елемента. Циклічні групи.

Розклад групи на суміжні класи за підгрупою. Теорема Лагранжа. Нормальні підгрупи. Фактор-група.

Ізоморфізми та гомоморфізми груп. Приклади. Основна теорема про гомоморфізми груп.

Тема 20. Кільця. Ізоморфізми та гомоморфізми кілець.

Приклади кілець. Поняття підкілець, ідеалу.

Ізоморфізми та гомоморфізми кілець. Основна теорема про гомоморфізми кілець.

Змістовий модуль 4. Поля і многочлени

Тема 21. Комплексні числа

Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна та тригонометрична форми комплексних чисел. Дії з комплексними числами та їх геометрична інтерпретація. Формула Муавра.

Тема 22. Добування коренів з комплексного числа

Добування коренів з комплексного числа. Корені n -ого степеня з одиниці.

Тема 23. Елементи теорії подільності цілих чисел

Відношення подільності на множині цілих чисел, його властивості. Ділення з остачею. Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда. Найменше спільне кратне. Прості числа, їх властивості. Основна теорема арифметики.

Тема 24. Елементи теорії подільності многочленів від однієї змінної

Поняття многочлена від однієї змінної. Операції над многочленами. Кільце многочленів від однієї змінної над полем.

Відношення подільності у кільці многочленів. Ділення многочленів з остачею. Схема Горнера.

Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда. Взаємно прості многочлени. Найменше спільне кратне многочленів.

Поняття незвідного многочлена над полем. Теорема про розклад многочлена на незвідні множники над полем.

Тема 25. Корені многочлена

Корені многочлена. Теорема Безу та наслідок з неї. Кратні корені многочлена і його похідної. Відокремлення кратних коренів.

Многочлени над полем комплексних чисел. Основна теорема алгебри. Незвідні многочлени над полем комплексних та дійсних чисел.

Теорема Вієта.

Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

Межі дійсних коренів многочлена. Відокремлення дійсних коренів многочлена методом Штурма.

Змістовий модуль 5. Лінійні векторні простори

Тема 26. Лінійні векторні простори

Означення векторного простору. Приклади. Розмірність і базис. Координати вектора. Перетворення координат вектора при зміні базису.

Підпростір. Критерій підпростору. Приклади підпросторів.

Сума і перетин двох підпросторів. Теорема Грасмана. Пряма сума підпросторів. Поняття фактор-простору.

Тема 27. Лінійні оператори, їх матриці. Алгебра лінійних операторів.

Поняття лінійного оператора. Матриця лінійного оператора. Зв'язок між координатами вектора і його образа при лінійному перетворенні.

Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базису. Класи подібних матриць.

Дії над лінійними операторами. Алгебра лінійних операторів.

Тема 28. Власні значення та власні вектори лінійного оператора

Власні значення і власні вектори лінійного оператора, їх властивості. Знаходження власних значень і власних векторів. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Достатня умова діагоналізації матриці лінійного оператора.

Тема 29. Евклідів простір

Скалярне множення. Поняття евклідового простору. Норма вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами в евклідовому просторі.

Ортогональні вектори. Процес ортогонолізації. Скалярний добуток векторів, заданих в ортонормованому базисі. Ортогональне доповнення до підпростору.

Ортогональні лінійні оператори та їх матриці. Спряжений оператор. Самоспряжені оператори та їх матриці.

Тема 30. Білінійні та квадратичні форми

Поняття білінійної та квадратичної форми. Матриця білінійної форми. Симетрична та кососиметрична білінійні форми.

Квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду за допомогою ортогональних перетворень, методом Лагранжа та Якобі. Закон інерції дійсних квадратичних форм.

Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сільвестра.

Тема 31. Застосування квадратичних форм

Зведення рівнянь кривих та поверхонь другого порядку із застосуванням квадратичних форм.

3. Форма підсумкового контролю успішності навчання

У кінці кожного з двох семестрів передбачено іспит.

4. Методи та засоби діагностики успішності навчання

Контроль знань студентів здійснюється шляхом:

- опитування;
- письмового контролю;
- виконання та перевірки ІНДЗ;
- підсумкового контролю у формі іспиту.

5. Список джерел

1. Атанасян Л.С. Геометрія / Атанасян Л.С. — К. : Вища школа, 1976. — 455 с.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. — М. : Наука, 1979. — 511 с.
3. Білоусова В.П. Аналітична геометрія / В.П. Білоусова, І.Г. Ільїн та ін. — К. : Вища школа, 1973. — 327 с.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. / Гельфанд И. М. — М.: Наука, 1971. — 271 с.
5. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розенфорд. — М. : Наука, 1970. — 527 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. — М. : Наука, 1980. — 228 с.
7. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Е.Г. Позняк Е.Г. — М. : Наука, 1988. — 223 с.
8. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Е.Г. Позняк Е.Г. — М. : Наука, 1974. — 296 с.
9. Завало С.Т. Курс алгебри / Завало С. Т. — К. : Вища школа, 1985. — 503 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / Курош А.Г. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
11. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / Мальцев А.И. — М. : Наука, 1985. — 336 с.
12. Калужнін Л.А. Лінійні простори / Л.А. Калужнін, В.А. Вишенський, Ц.О. Шуб. — К.: Вища школа, 1971. — 344 с.
13. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Головина Л.И. — М. : Наука, 1985. — 407 с.
14. Кострикин А.И. Введение в алгебру / Кострикин А.И. — М. : Наука, 1977. — 632 с.

15. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / Лейхтвейс К. — М. : Наука, 1985. — 336 с.
16. Чарин В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества / Чарин В.С. — К. : Вища школа, 1978. — 191 с.
17. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру / Калужнин Л.А. — М. : Наука, 1973. — 448 с.
18. Каргаполов М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — М. : Наука, 1977. — 240 с.
19. Дубовик В.П. Вища математика. навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. — К. : АСК, 2001. — 648 с.
20. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підр. / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Х.П. Луник, Д.В. Уханська. — Львів: Бескид Біт, 2002. — 262 с.
21. Чарін В.С. Лінійна алгебра / Чарін В.С. — К. : Техніка, 2004. — 416 с.
22. Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. для студ. спец. «Інформатика» / Волошина Т. В. — Луцьк : Вол. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2010. — 116 с.
23. Ілляшенко В.Я. Аналітична геометрія та лінійна алгебра : навч.-метод. Ппосіб. / В.Я. Ілляшенко, В.М. Кремінь. — Ч. 1. — Луцьк : РВВ «Вежа» Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки, 2010. — 152 с.
24. Ілляшенко В.Я. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Навчально-методичний посібник / В.Я. Ілляшенко, В.М. Кремінь. — Ч.2. Комплексні числа і многочлени. — Луцьк : РВВ «Вежа» Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки, 2010. — 95с.

Збірники задач

1. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: Практикум. — Ч. 1. — К : Вища школа, 1983. — 232 с.
2. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: Практикум. — Ч. 2. — К : Вища школа, 1986. — 264 с.
3. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре / Икрамов Х.Д. — М. : Наука, 1975. — 320 с.
4. Клетеник А.Е. Сборник задач по аналитической геометрии / Клетеник А.Е. — М. : Наука, 1967. — 200 с.
5. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре / Окунев Л.Я. — М. : Просвещение, 1975. — 320 с.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И.В. — М. : Наука, 1984. — 336 с.
7. Маркович Е.С. Сборник задач по высшей математике / Маркович Е.С. — М. : Нацна, 1967. — 480 с.
8. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. — Издание 13, стереот. — СПб. : Лань, 1999. — 288 с.
9. Крутицкая Н.Ч. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Н.Ч. Крутицкая, А.А. Шишкин — М. : Высшая школа, 1985. — 120 с.
10. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Рудавський Ю.К. — Львів : Бескид Біт, 2002. — 256 с.
11. Дубовик В.П. Вища математика: Збірник задач / В. П. Дубовик, І.І. Юрик. — К. : АКС, 2001. — 648 с.