Волинський національний університет імені Лесі Українки
Навчально-науковий фізико-технологічний інститут
Кафедра експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій

**Григорій Кобель, Ніна Головіна, Валентин Савош**

# Загальна фізика (механіка). Практичні заняття
## Практикум

Луцьк
2026

УДК 533/534(07)
К 55

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол №7 від 18.03.2026р.)*

*Рецензент:*

**Павло Шигорін**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А.В.Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки.

К 55 **Кобель Г.П., Головіна Н.А, Савош В.О**. Загальна фізика (механіка). Практичні заняття. Луцьк: ФОП Мажула Ю.М., 2026. 90 с.

У навчальному виданні наведено приклади розв’язання задач з фізики та задачі для самостійного розв’язування за темами, що охоплюють всі розділи курсу класичної механіки. Запропоновані задачі можуть бути використані для самостійної роботи студентів і для контролю знань студентів викладачем. На початку кожної теми подано короткий перелік формул і законів, які стосуються виконання завдань з відповідної теми.

Навчальний посібник призначений для студентів фізичних спеціальностей ВНУ імені Лесі Українки. Практикум може також стати у нагоді вчителям фізики ЗЗСО, які викладають фізику у профільних класах, готують школярів до олімпіад.

УДК 533/534(07)

**ЗМІСТ**

## Вступ

Вміння розв’язувати задачі є одним з головних критеріїв оволодіння ОК — фізика. Крім знання теорії, головним, що сприяє успіхові у виконанні завдань, є оволодіння спеціальними методами і прийомами, які наведені у прикладах розв’язування задач. Практикум сформований за основними темами механіки, відповідно до силабуса. Такі завдання в системі освіти є однією з форм перевірки засвоєння теоретичних знань курсу фізики, а також набуття навичок їх практичного використання при розв’язуванні задач. На початку кожної з них подано короткий перелік формул і законів, які стосуються виконання завдань з відповідної теми. Ці формули дозволяють студенту скласти уявлення про обсяг теоретичного матеріалу, який необхідно опрацювати, і можуть слугувати формальним апаратом для розв'язування задач. Після теоретичного матеріалу подані контрольні запитання. Вони можуть бути використані для проведення фізичного диктанту на початку практичного заняття. До кожної теми подано приклади виконання задач, задачі до теми та задачі для самостійного розв’язування. Для реалізації рівневої диференціації на практичних заняттях запропоновані задачі підвищеної складності. В кінці навчального посібника подано список рекомендованої літератури, яку необхідно опрацювати для самостійного виконання завдань. Запропоновані задачі можуть бути використані для самостійної роботи студентів і для контролю знань студентів викладачем.

## Практичні заняття з механіки

**Тема – 1.** ***Механіка, її предмет та завдання. Матеріальна точка. Система відліку, шлях, переміщення. Прямолінійний рівномірний рух матеріальної точки, графіки цього руху***

### Основні поняття, фізичні величини та формули

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого у цій ситуації можемо нехтувати.

Положення матеріальної точки у просторі задається радіусом-вектором $\vec{r}$:

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти; $x, y, z$ – координати точки.

Кінематичні рівняння руху в координатній формі мають такий вигляд: $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$, де $t$ – час.

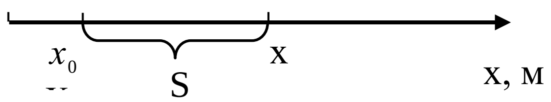
Середня швидкість $<\vec{\upsilon}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, де $\Delta\vec{r}$ - переміщення матеріальної точки за інтервал часу $\Delta t$.

Середня швидкість на шляху $\Delta S$: $<\upsilon> = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, де $\Delta S$– шлях, який пройшла точка за інтервал часу $\Delta t$.

Миттєва швидкість $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\upsilon_x + \vec{j}\,\upsilon_y + \vec{k}\,\upsilon_z$, де $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}; \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}; \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ - проекції вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ на осі координат.

Абсолютне значення швидкості $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}.$

Для опису прямолінійного руху достатньо однієї осі координат, яку проводять у напрямі руху точки:




Кінематичне рівняння рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі $x$ має вигляд $x = x_0 + S = x_0 + \upsilon_x t$, де $x_0$ – початкова координата. При рівномірному русі $\upsilon = const.$.

Подамо графічно залежності координати та швидкості від часу для рівномірного прямолінійного руху:

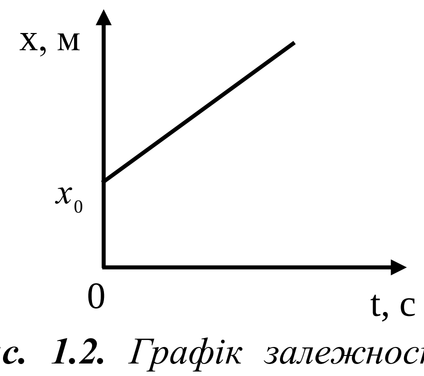



***Рис. 1.2.*** *Графік залежності* $x(t)$ *для рівномірного прямолінійного руху*

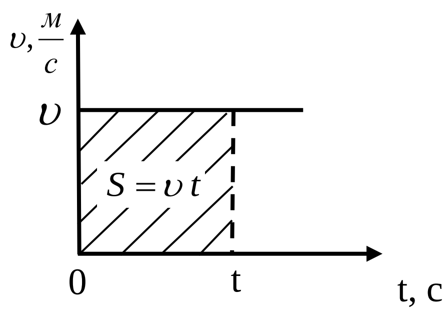



***Рис. 1.3.*** *Графік залежності* $\upsilon(t)$ *для рівномірного прямолінійного руху*

Шлях пройдений тілом на графіку швидкості чисельно рівний площі фігури, яка обмежена графіком швидкості, вертикальними лініями часу та віссю абсцис (вісь часу).

Закон додавання швидкостей Галілея. $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0$ . Швидкість матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку (абсолютна швидкість) дорівнює векторній сумі двох швидкостей: швидкості точки відносно рухомої системи відліку $\vec{\upsilon}'$ (відносної) і швидкості самої рухомої системи відносно нерухомої $\vec{\upsilon}_0$ (переносної).

## Контрольні питання до теми 1

1. З яких частин складається класична механіка?
2. Що таке матеріальна точка?
3. Що таке система відліку? Наведіть приклади.
4. Що таке траєкторія?
5. Що таке шлях?
6. Що таке переміщення?
7. Що таке середня швидкість та миттєва швидкість матеріальної точки?
8. Дайте означення прямолінійного рівномірного руху.
9. Рівняння цього руху. Залежність координати від часу.
10. Відносність руху. Закон додавання швидкостей.

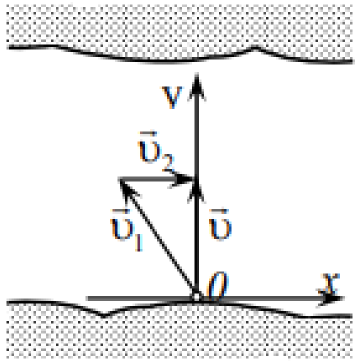
## Приклади задач із розв'язуванням

**Задача 1.** Відстань між двома пунктами на річці $s$ = 150 км. Теплохід за течією пропливе її за $t_1$ = 6 год, а проти течії – за $t_2$ = 15 год. Знайти швидкість течії відносно берега й швидкість теплохода відносно води.

**Розв'язування**. Швидкість теплохода відносно берега за течією буде $\upsilon_1 = \upsilon + u$ , де υ – швидкість теплохода відносно води; $u$ – швидкість течії відносно берега. Швидкість теплохода проти течії відносно берега буде $\upsilon_2 = \upsilon - u$ . Тоді можна записати: $\upsilon + u = \frac{s}{t_1}$ , $\upsilon - u = \frac{s}{t_2}$. Розв'язавши систему двох рівнянь, одержимо: $2\upsilon = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$,

$\upsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}\right)$ $\upsilon = 17{,}5\,\text{км/год}$, $u = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2}\right)$, $u = 7{,}5\,\text{км/год}$.

**Задача 2.** Катер перепливає річку завширшки $l = 250$ м, швидкість течії якої $v_2$ = 1,6 м/с. Керманич катера тримає курс так, що катер рухається перпендикулярно до берега. За який час катер перепливе річку, якщо його швидкість відносно води $v_1$ = 5,25 м/с?




**Розв'язання.** Для того, щоб катер рухався перпендикулярно до берега, його швидкість відносно води  бути напрямлена так, як показано на рисунку. Тоді швидкість катера відносно берега $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}$ . Час, за який катер перепливе річку $t = \dfrac{l}{\upsilon} = \dfrac{l}{\sqrt{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$ .

$$t = \frac{250}{\sqrt{5{,}25^2 - 1{,}6^2}} \approx 50 \text{ с}.$$

**Задачі до теми 1**

1. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 80$ км/год, а другу половину шляху – з швидкістю $\upsilon_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість $\upsilon_c$ руху автомобіля?

*Відповідь*: 53,3 км/год.

2. Пароплав іде річкою з пункту А до пункту В з швидкістю $\upsilon_1 = 10$ км/год, а назад з швидкістю – $\upsilon_2 = 16$ км/год. Визначити середню швидкість пароплава $\upsilon_c$ і швидкість $u$ течії річки.

*Відповідь*: $\upsilon_{ср} = 12{,}3$ км/год, $u = 0{,}83\ м/с$

3. Літак летить із заходу на схід з пункту А в В, відстань між якими 300 км. Знайти тривалість польоту, якщо: а) вітер дме із заходу на схід;  б) із сходу на захід; в) із півдня на північ. Швидкість вітру відносно Землі $u = 20\ м/с$ . Швидкість літака відносно повітря $\vec{\upsilon}_0$ =600 км/год.

*Відповідь*: *а*) $t$ =30 хв; *б*) $t$ =30,2 хв; *в*) $t$ =26,8 хв.

4. Човен рухається перпендикулярно до берега зі швидкістю $\upsilon = 7{,}2$ км/год  відносно води. Течія відносить його на відстань $l$ = 150 м вниз по річці. Знайти швидкість $u$ течії річки і час $t$, витрачений на переправу через ріку. Ширина  річки $L = 500$ м. З якою результуючою швидкістю, човен рухався відносно берега річки.

*Відповідь*: $u = 0{,}6$ м/с, $t$ =250 с, $\upsilon \approx 2{,}1\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

5. **Перед світлофором.** Дорогою рухається колона з $n$ = 10 однакових автомобілів, розташованих один за одним. Швидкість руху кожного автомобіля $\upsilon = 54$ км/год . Довжина кожного автомобіля $L$ = 4,5 м, а відстань між сусідніми автомобілями (дистанція) S=25 м.

перед червоним сигналом світлофора перший автомобіль плавно зупиняється. Водій другого автомобіля розпочинає повторювати дії першого через $\tau = 1{,}6\ c$ після того, як перший водій почав гальмування. Водій кожного наступного автомобіля повторює дії попереднього через такий самий інтервал часу (1,6 с). Якою буде довжина колони $l$, коли всі автомобілі зупиняться?

*Відповідь*: $l_2 = 54$м

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1$ = 80 км/год., а другу половину часу – зі швидкістю $\upsilon_2$ = 40 км/год. Знайти середню швидкість руху автомобіля.

*Відповідь*: 60 км/год.

2. Знайти швидкість $\upsilon$ відносно берега річки: а) човна, що йде за течією; б) човна, що йде проти течією; в) човна, що йде під кутом $90^\circ$ до течії. Швидкість течії річки $u = 1\, м/с$, швидкість човна відносно води $\upsilon_0 = 2\,\frac{м}{с}$.

*Відповідь*: *а*) $\upsilon_1 = 3\, м/с$; *б*) $\upsilon_2 = 1\, м/с$; *в*) $\upsilon_3 = 2{,}24\ м/с$.

3. Літак летить відносно повітря з швидкістю $\upsilon_0 = 800\,\frac{км}{год}$. Вітер дує із заходу на схід зі швидкістю $u = 15\, м/с$. З якою швидкістю $\upsilon$ літак буде рухатися відносно землі і під яким кутом $\alpha$ до меридіану необхідно тримати курс, щоб переміщення відбувалося на: а) південь; б) північ; в) захід; г) схід.

*Відповідь*: *а*) $\upsilon = 798\, км/год$, на південний захід під кутом $\alpha = 3^\circ 52'$; *б*) $\upsilon = 798\, км/год$, на північний захід під кутом $\alpha = 3^\circ 52'$; *в*) $\upsilon = 746\, км/год$, на захід ; *г*) $\upsilon = 854\, км/год$, на схід.

## Задачі підвищеної складності

**Задача 1. «Паркова» фізика.** Друзі Василько та Петрик уранці часто прогулюються в парку. Одного разу Петрик узяв із собою на прогулянку свого пса Спринтера. Василько біжить зі швидкістю $\upsilon$ = 2 м/с, йому назустріч ідуть Петрик та Спринтер зі швидкістю $u$ = 1 м/с. О 12:00:00 Петрик побачив Василька, який у цей момент був на відстані $L$ = 300 м від нього. Петрик одразу ж відпустив Спринтера і собака побіг назустріч Василькові зі швидкістю $\upsilon_c$ = 9 м/с. Спринтер, прибігши до Василька, деякий час іде разом із ним, а потім біжить до свого господаря. Прибігши до нього і пройшовшись певний час поряд із Петриком, пес знову біжить до Василька, й так повторюється кілька разів. За час зближення приятелів Спринтер пробув біля кожного з них однаковий час. Загальна довжина шляху, яку пройшов та пробіг пес, становить $L_c$ = 750 м. Протягом якого інтервалу часу від 12:00:00 до 12:01:40 Спринтер біг зі швидкістю 9 м/с? Швидкості приятелів не змінювались.

**Розв'язування:** Позначимо невідомий проміжок часу через $t_1$, а $\tau$ – інтервал часу, протягом якого пес був біля кожного з приятелів. Загальний час руху Спринтера становить: $t = t_1 + \tau$ (1). Звідси $\tau = \frac{t - t_1}{2}$ (2). Загальну довжину шляху, яку пройшов та пробіг пес, запишемо у вигляді: $L_c = \upsilon_c \cdot t_1 + \tau(u + \upsilon)$ (3). Підставивши (2) в (3), отримаємо:

$L_c = \upsilon_c \cdot t_1 + \frac{t - t_1}{2}(u + \upsilon)$(4). З останньої формули визначимо шуканий час: $t_1 = \frac{2 \cdot L_c - t \cdot (u + \upsilon)}{2 \cdot \upsilon_c - u - \upsilon}$(5). $t_1 = 80$ с.

**Задача 2. Дорога до стадіону.** Відстань від стадіону «Авангард» до будинку юного футболіста Василька становить $L$ = 4 км. Цю відстань Василько долає за $t_0$ = 16 хв. Спочатку він йде пішки до автобусної зупинки, потім їде автобусом із швидкістю $\upsilon$ = 51 км/год, а далі знову йде пішки ще деякий час. Швидкість ходьби Василька становить 20 % від середньої шляхової швидкості. Визначте час, протягом якого юний футболіст їхав автобусом.

**Розв'язування:** Знайдемо середню шляхову швидкість Василька: $\upsilon_c = \frac{L}{t_0}$; $\upsilon_c = \frac{4\,км \cdot 60}{16\,год} = 15\frac{км}{год}$

З іншого боку $\upsilon_c = \frac{l_x + l_a}{t_0}$(1), де $l_x$ та $l_a$ шляхи, які подолав хлопчик під час ходьби та їдучи автобусом відповідно. $l_x = \upsilon_x \cdot (t - t_a)$(2), $l_a = \upsilon \cdot t_a$(3). За умовою задачі $\upsilon_x = 0{,}2\upsilon_c$, тому $l_x = 0{,}2\upsilon_c \cdot (t - t_a)$(4). Підставивши (3) й (4) в (1) отримаємо: $\upsilon_c = \frac{0{,}2\upsilon_c \cdot (t - t_a) + \upsilon \cdot t_a}{t_0}$. Звідси $t_a = \frac{0{,}8 \cdot \upsilon_c \cdot t_0}{\upsilon - 0{,}2\upsilon_c}$ ; $t_a = 4\,хв$

**Задача 3.** Автомобіль рухався спочатку з швидкістю $\upsilon_1 = 20\,\frac{м}{с}$, а потім із швидкістю $\upsilon_2 = 30\,\frac{м}{с}$. Він подолав 45 км за півгодини. Яку частину шляху автомобіль рухався із швидкістю $\upsilon_1 = 20\,\frac{м}{с}$?

**Розв'язування:** 1– спосіб. Середня швидкість руху автомобіля

Дано:

$\upsilon_1 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$\upsilon_2 = 30\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$S = 45\,\text{км}$

$t = 0{,}5\,\text{год}$

$k = \frac{S_1}{S} - ?$

$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\text{S}}{\text{t}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$; $\upsilon_1 = \frac{\text{S}_1}{\text{t}_1} = \frac{kS}{t_1}$; $\upsilon_2 = \frac{\text{S}_2}{\text{t}_2} = \frac{(1-k)S}{t_2}$. Звідси знаходимо $t_1 = \frac{kS}{\upsilon_1}$, $t_2 = \frac{(1-k)S}{\upsilon_2}$.

$\frac{\text{S}}{\text{t}} = \frac{S}{\frac{kS}{\upsilon_1} + \frac{(1-k)S}{\upsilon_2}}$, $\frac{\text{S}}{\text{t}} = \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{k\upsilon_2 + (1-k)\upsilon_1}$. $k\upsilon_2 + \upsilon_1 - k\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1\upsilon_2\text{t}}{\text{S}}$. Звідси

$$k = \frac{\upsilon_1\upsilon_2\text{t}}{\text{S}(\upsilon_2 - \upsilon_1)} - \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1}\left(\frac{\upsilon_2\text{t}}{\text{S}} - 1\right).$$

Виконаємо обчислення в СІ:

$$k = \frac{20}{30-20}\left(\frac{30\cdot 1800}{45000} - 1\right) = 2(1{,}2 - 1) = 0{,}4.$$

2– спосіб. Знайдемо спочатку середню швидкість $\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\text{S}}{\text{t}} = \frac{45000}{1800} = 25\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{kS}{\upsilon_1} + \frac{(1-k)S}{\upsilon_2}} = \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{k\upsilon_2 + (1-k)\upsilon_1}.\quad k = \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_{\text{ср}}(\upsilon_2 - \upsilon_1)} - \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{\upsilon_1(\upsilon_2 - \upsilon_{\text{ср}})}{\upsilon_{\text{ср}}(\upsilon_2 - \upsilon_1)}$$

Виконаємо обчислення в СІ:

$$k = \frac{20(30-25)}{25(30-20)} = 0{,}4.$$

**Задача 4. Туристи.** Із двох пунктів одночасно назустріч одна одній вийшли дві групи туристів, які зустрілися о 12 годині того самого дня, після чого кожна з груп продовжила свій рух з попередньою швидкістю. Визначте, о котрій годині вийшли групи з пунктів, якщо одна з них прийшла в пункт, з якого вийшла друга група, о 16-й годині, а інша група прийшла в пункт, з якого вийшла перша, о 21-й годині. Рух обох груп вважайте прямолінійним рівномірним.

**Розв'язування:** Нехай перша група вийшла з пункту А , друга з пункту В, t – час руху туристів до зустрічі, $\upsilon_A$- швидкість руху першої групи, $\upsilon_B$- швидкість руху другої, $l_1$ – шлях, який пройшла перша група до зустрічі, $l_2$ – шлях, який пройшла друга група до зустрічі.

До зустрічі: $\upsilon_A t = l_1$(1); $\upsilon_B t = l_2$(2)

Після зустрічі: $4\cdot\upsilon_A = l_2$(3); $9\cdot\upsilon_B = l_1$(4)

Прирівнявши (3) і (2) та (1) і (4) отримаємо: $4\cdot\upsilon_A = \upsilon_B t$ (5); $9\cdot\upsilon_B = \upsilon_A t$(6)

Поділивши (5) на (6) отримаємо: $\frac{4\cdot\upsilon_A}{9\cdot\upsilon_B} = \frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}$. З останньої формули :

$\upsilon_A = \frac{3\upsilon_B}{2}$(7)

Підставивши (7) в (5) отримаємо: $4\cdot\frac{3\upsilon_B}{2} = \upsilon_B t$. Звідси t = 6 год.

**Задача 5.** У парних змаганнях на 20 км беруть участь команди з двох учасників, які на двох мають одну пару лиж. Час команди реєструється по останньому учаснику, який дістався фінішу. Швидкості, з якими йдуть без лиж хлопець і дівчина $u_{\text{хл}} = 6\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, $u_{\text{д}} = 5\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкості, з якими вони пересуваються на лижах : $\upsilon_{\text{хл}} = 20\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, $\upsilon_{\text{д}} = 15\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

1. За який найменший час, може фінішувати команда з хлопця і дівчини?
2. Хто з учасників команди і у скільки разів довше їхав на лижах?

Дано:
$S = 20$ км
$u_{\text{хл}} = 6\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$
$u_{\text{д}} = 5\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$
$\upsilon_{\text{хл}} = 20\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$
$\upsilon_{\text{д}} = 15\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$

$t - ?$

**Розв'язування:** Для мінімального часу руху команди хлопець дівчина повинні фінішувати одночасно. Позначимо через $t_{хл}$ і $t_{\text{д}}$ час, протягом якого їхали на лижах хлопець і дівчина, відповідно. Лижі повинні "проїхати" всю відстань $S$: $\upsilon_{\text{хл}} t_{хл} + \upsilon_{\text{д}} t_{\text{д}} = S$ (1). Позначимо $t -$ загальний час руху. Тоді для руху хлопця і дівчини запишемо: $\upsilon_{\text{хл}} t_{хл} + u_{\text{хл}}(t - t_{\text{хл}}) = S$ (2), $\upsilon_{\text{д}} t_{\text{д}} + u_{\text{д}}(t - t_{\text{д}}) = S$ (3). Розв'язуємо рівняння (1), (2), (3) як систему і знаходимо $t$.

Для спрощення процесу розв'язування підставимо у рівняння числові значення відомих величин.

$20t_{хл} + 6(t - t_{\text{хл}}) = 20$. Звідси знаходимо: $t_{хл} = \frac{10-3t}{7}$.

$15t_{\text{д}} + 5(t - t_{\text{д}}) = 20$. Звідси знаходимо: $t_{\text{д}} = \frac{4-t}{2}$.

$20\frac{10-3t}{7} + 15\frac{4-t}{2} = 20$; $4\frac{10-3t}{7} + 3\frac{4-t}{2} = 4$.

$80 - 24t + 84 - 21t = 56$. Звідси, $t = \frac{108}{45} = 2{,}4\,(\text{год}) = 2\text{ год }24\text{ хв}$.

$t_{хл} = \frac{10 - 3\cdot 2{,}4}{7} = \frac{10-7{,}2}{7} = 0{,}4\,(\text{год}) = 24\text{ хв}$.

$t_{\text{д}} = \frac{4-2{,}4}{2} = 0{,}8\,(\text{год}) = 48\text{ хв}$.

$\frac{t_{\text{д}}}{t_{\text{хл}}} = \frac{48}{24} = 2$.

**Задача 6. Екстремальна риболовля.** Рибалки попливли на риболовлю моторним човном вниз за течією річки. Відстань до місця риболовлі *S*=15 км. Запас бензину для мотора човна розрахований на *L*=30 км руху в стоячій воді (наприклад, на 30 км руху по озеру). Чи вистачить бензину рибалкам, щоб повернутися назад моторним човном? Швидкість моторного човна в стоячій воді $\upsilon_ч = 10\,км/год$. Швидкість течії річки $\upsilon_T = 3\,км/год$. Чи зможуть рибалки повернутися назад моторним човном, якщо вони попливуть на риболовлю проти течії річки на відстань $S$ = 15 км?

**Розв'язування:** Максимальний час роботи двигуна моторного човна становить $t = \dfrac{L}{\upsilon_ч} = 3\,год$

Якщо пливти вниз за течією з увімкненим двигуном, то час руху становитиме: $t_{зT} = \dfrac{S}{\upsilon_ч + \upsilon_T} = \dfrac{15}{13}\,год$

Час руху проти течії становитиме: $t_{nT} = \dfrac{S}{\upsilon_ч - \upsilon_T} = \dfrac{15}{7}\,год$

Оскільки $t_{зT} + t_{nT} \approx 3{,}3\,год$ більший за $t$, то бензину не вистачить на зворотний шлях.

## Тема – 2. *Прямолінійний рівнозмінний рух матеріальної точки. Довільно змінний рух*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

Величину, що визначається відношенням зміни швидкості $\Delta\vec{\upsilon}$ до часу $\Delta t$, за який ця зміна відбулась, називають *середнім прискоренням*: $\vec{a}_c = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ (1)

Вводять також поняття миттєвого прискорення, тобто прискорення в даний момент часу або в даній точці траєкторії руху. Миттєве прискорення визначається границею

$$\vec{a}_м = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2)$$

Прискорення можна записати за координатними складовими:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (3)$$

Прискорення є величина векторна. Цей вектор напрямлений у той бік, куди напрямлений вектор зміни швидкості $\Delta\vec{\upsilon}$. Зазначимо, що напрям $\Delta\vec{\upsilon}$ може не співпадати з напрямом вектора швидкості.

В СІ одиницями прискорення є метри на секунду в квадраті $[a] = 1\dfrac{м}{с^2}$. Використовують також одиниці: сантиметр на секунду в квадраті ($1\dfrac{см}{с^2} = 1\,Гал$).

Якщо матеріальна точка рухається із сталим прискоренням, то такий рух називають рівнозмінним. Якщо $a > 0$, то рух є рівноприскореним, а у випадку $a < 0$ - рівносповільнений.

Розглянемо закономірності рівноприскореного прямолінійного руху. Координатну вісь ох напрямимо у напрямі руху точки. Тоді прискорення $a = \frac{d\upsilon_x}{dt}$. Звідки $d\upsilon_x = adt$. Тоді залежність швидкості від часу для прямолінійного рівноприскореного руху:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 + at \quad (4)$$

Враховуючи, що $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, запишемо: $dx = (\upsilon_0 + at)dt$. Інтегруючи останнє рівняння отримуємо закон зміни координати з часом: $x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$ (5)

$x_0$ та $\upsilon_0$ - координата та швидкість точки у момент часу $t_0 = 0$.

Зобразимо графічно залежності (4) та (5).

Враховуючи, що $x = x_0 + S$, із співвідношення (5) маємо формулу

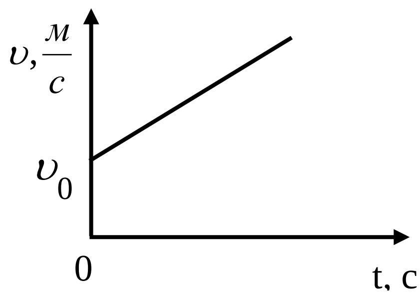



**Рис. 1.4.** Графік залежності $\upsilon(t)$ для рівноприскореного прямолінійного руху

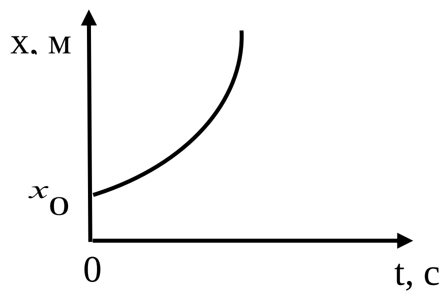



**Рис. 1.5.** Графік залежності $x(t)$ для рівноприскореного прямолінійного руху

шляху для рівноприскореного прямолінійного руху: $S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$ (6)

Підставляючи у (6) час $t$ із (4) знаходимо: $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2aS$ (7)

Прикладом рівноприскореного руху є вільне падіння. При цьому русі прискорення $a = g = 9{,}80665 \frac{м}{с^2}$ і напрямлене вертикально вниз. Формули (4 - 7) набувають вигляду: $\upsilon_y = \upsilon_{0y} + gt$ (4*); $y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{gt^2}{2}$ (5*); $h = \upsilon_{0y} t + \frac{gt^2}{2}$ (6*); $\upsilon_0^2 - \upsilon_{0y}^2 = 2gh$ (7*). Співвідношення (4* – 7*) виражають закономірності руху тіла, яке кинули вертикально вниз із початковою швидкістю $\upsilon_{0y}$ і вісь координат оу напрямлена вертикально вниз.

## <u>Контрольні питання до теми 2.</u>

1. Дати означення прямолінійного рівнозмінного руху.
2. Що називається прискоренням?
3. Який напрям має прискорення?
4. Записати та проаналізувати формулу залежності швидкості у від часу у випадку рівноприскореного руху матеріальної точки.
5. Що є графіком залежності проекції швидкості від часу для рівноприскореного руху?
6. Як визначити пройдений шлях із графіка залежності швидкості від часу?
7. Записати формулу шляху для цього руху з початковою швидкістю.
8. Записати формулу залежності координати від часу для точки, яка рухається рівноприскорено (рівняння руху).
9. Що є графіком залежності координати від часу?
10. Як обчислити швидкість матеріальної точки, коли відоме її прискорення і шлях? Час руху не відомий.

## Приклади задач із розв'язуванням

**Задача 1.** Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с$^3$ . Знайти координату $x$, швидкість $\upsilon_x$ і прискорення $a$ точки в момент часу $t = 2$ с.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^3$
$A = 2$ м
$B = 1$ м/с
$C = -0{,}5$ м/с$^3$
$t = 2$ с

$x$, $v_x$, $a$ –?

*Розв'язування*

Координату $x$ знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів $A$, $B$, $C$ і часу $t$:

$x = (2+1\cdot2-0{,}50\cdot8)$ м $= 0$.

Миттєва швидкість відносно осі $x$ – це перша похідна від координати по часу:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну від швидкості по часу:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 6Ct.$$

В момент часу $t = 2$ с $\upsilon_x = (1 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2)$ м/с;

$$a = 6(-0{,}5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2 .$$

**Задача 2.** З гелікоптера, що знаходиться на висоті 300 м скинуто вантаж. Через який час вантаж досягне землі, якщо вертоліт:
1) нерухомий; 2) опускається зі швидкістю 5 м/с; 3) піднімається зі швидкістю 5 м/с?

Дано:
$h_0 = 300$ м
$\upsilon_0 = 5$ м/с

---

$t - ?$

*Розв'язування*

1) Якщо гелікоптер нерухомий, то відстань по вертикалі, яку проходить вантаж при вільному падінні $h = \frac{gt^2}{2}$. Звідси час падіння вантажу на землю

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9{,}8}} = 7{,}8\ c.$$

2) Якщо гелікоптер опускається зі швидкістю $\upsilon_0$, то і вантаж опускається разом з вертольотом зі швидкістю $\upsilon_0$. Рівняння руху вантажу:

$$h = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Коли вантаж досягне землі, $h = h_0$, $t = t_2$.

Звідси: $t_2^2 + \frac{2\upsilon_0}{g} t_2 - \frac{2h_0}{g} = 0;$ $\quad t_2 = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh_0}}{g}$ ;

$$t_2 = \frac{-5\sqrt{25 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 300}}{9{,}8} = (-0{,}5 \pm 7{,}8)c;$$

Відкинемо $t_2 < 0$ і одержимо $t_2 = 7{,}3$ с.

3) Якщо гелікоптер піднімається зі швидкістю $\upsilon_0$, то і вантаж має таку ж початкову швидкість. Рівняння руху вантажу має вигляд (1). У момент досягнення землі $h = h_0$, $t = t_3$ .

Тоді $h_0 = -\upsilon_0 t_3 + \frac{gt_3^2}{2}$, $\quad t_3 = \frac{\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 300}}{9{,}8} = (0{,}5 \pm 7{,}8)\ c.$

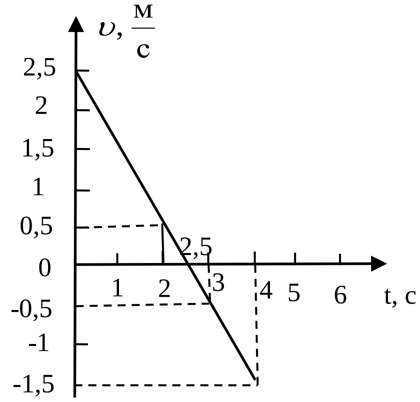
Відкинувши $t_3 < 0$, одержимо $t_3 = 8{,}3$ с.

**Задача 3.** (10 кл. 2016). Тіло рухається зі сталим прискоренням протягом 4 с. За першу секунду спостереження за рухом воно проходить 2 м, за другу – 1 м. Яку відстань проходить тіло за третю та за четверту секунди?

Дано:
$S_1$= 2 м
$S_2$= 1 м
$t_1$= 1 с
$t_2$= 2 с
$a$-const

$S_3$ -?, $S_4$-?

**Розв'язування:** З умови задачі зрозуміло, що тіло рухається рівносповільнено. Закон руху тіла: $x = x_0 + \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}$ . Шлях, пройдений тілом за першу секунду: $S_1 = x_1 - x_0 = \upsilon_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}$ (1). Шлях, пройдений тілом за другу секунду: $S_2 = x_2 - x_1 = \upsilon_0(t_2 - t_1) - \frac{a(t_2^2 - t_1^2)}{2}$ (2). Для спрощення розв'язування підставимо у рівняння (1) та (2) числові значення величин в СІ та знайдемо $\upsilon_0$ та $a$ . $\upsilon_0 - \frac{a}{2} = 2$ ; $\upsilon_0 - \frac{3a}{2} = 1$ . Звідси знаходимо: $a = 1\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$ , $\upsilon_0 = \frac{a}{2} + 2$ . $\upsilon_0 = 2{,}5\,(\text{м/с})$ . Запишемо залежність швидкості від часу: $\upsilon = \upsilon_0 - at = 2{,}5 - t$ . Зобразимо залежність швидкості від часу графічно. З графіка видно, що у момент часу 2,5 с тіло на мить зупиняється, його швидкість рівна нулю і тіло змінює напрям швидкості на протилежний. З графіка знаходимо шлях за третю секунду, як суму площ двох трикутників:




$$S_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25\,(\text{м}).$$

Шлях, пройдений тілом за четверту секунду, знаходимо як площу трапеції:

$$S_4 = \frac{0{,}5 + 1{,}5}{2} \cdot 1 = 1\,(\text{м}).$$

**Задачі до теми 2.**

1. Камінь кинули вертикально вгору на висоту $h$ = 10 м. Через який час він впаде на землю. На яку висоту $H$ підніметься цей камінь, якщо початкову швидкість його збільшити у двічі.

*Відповідь*: $t = 2{,}9$ с, $H = 4h = 40$ м.

2. З гелікоптера, що знаходиться на висоті 300 м скинуто вантаж. Через який час вантаж досягне землі, якщо гелікоптер:
1) нерухомий; 2) опускається зі швидкістю 5 м/с; 3) піднімається зі швидкістю 5 м/с?

*Відповідь*: 1) $t = 7{,}8$ с; 2) $t = 7{,}3$ с; 3) $t = 8{,}4$ с.

3. (В. 1.13.) Тіло падає з висоти $h$=19,6 м без початкової швидкості. За який час тіло пройде перший і останній 1 м свого шляху?

*Відповідь*: $t_1 = 0{,}45\,\text{с}$, $t_n = 0{,}05\,\text{с}$.

4. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A$ = 2 м/с, $B$ = 3 м/с$^2$, $C$ = 4 м/с$^3$. Визначити: а) залежність швидкості $\upsilon$, прискорення $a$ від часу $t$; б) шлях $S$, швидкість $\upsilon$, прискорення $a$ через 2 с після початку руху. Побудувати графік залежності шляху $S$, швидкості $\upsilon$, прискорення $a$ від часу $t$ для інтервалу $0 \le t \le 3\,с$ через 0,5 с.

*Відповідь*: *а*) $\upsilon = (2 - 6t + 12t^2)\,м/с$, $a = (-6 + 24t)\,м/с^2$; *б*) $s = 24\,\text{м}$, $\upsilon = 38\,м/с$, $a = 42\,м/с^2$.

5. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$, де $A$ = 3 м, $B$ = 2 м/с, $C$ = 1 м/с$^2$. Визначити: середню швидкість $\upsilon_c$, середнє прискорення $a_c$ за першу, другу і третю секунди його руху.

*Відповідь*: $\upsilon_{1c} = 3\,м/с$, $\upsilon_{2c} = 5\,м/с$, $\upsilon_{3c} = 7\,м/с$; $a_{1c} = a_{2c} = a_{3c} = 2\,м/с^2$.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Тіло падає з висоти $h = 19{,}6\,м$ без початкової швидкості. Який шлях пройде тіло за першу та останню 0,1 с свого руху?

*Відповідь*: $h_1 = 0{,}049\,м$, $h_n = 1{,}9\,м$.

2. Тіло, яке вільно падає за останню секунду руху проходить половину всього шляху. З якої висоти $h$ падає тіло і який час $t$ його падіння?

*Відповідь*: $h = 57\,м$, $t = 3{,}4\,с$.

3. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2$, де $A$ = 6 м, $B$ = 3 м/с, $C$ = 2 м/с$^2$. Визначити: середню швидкість $\upsilon_c$, середнє прискорення $a_c$ для інтервалу часу $1 \le t \le 4\,с$. Побудувати графіки залежності шляху $S$, швидкості $\upsilon$, прискорення $a$ від часу $t$ для інтервалу $0 \le t \le 5\,с$ через 1 с.

*Відповідь*: $\upsilon_c = 7\,м/с, a_c = 4\,м/с^2$.

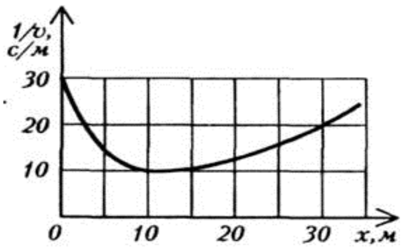
4. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C$ = 0,14 м/с$^2$, $D$ = 0,01 м/с$^3$. Через який час $t$ після початку руху тіло матиме прискорення $a = 1\,м/с^2$? Визначити середнє прискорення тіла $a_c$ за цей інтервал часу.

*Відповідь*: $t = 12\,с,$ $a_c = 0{,}64\,м/с^2$.

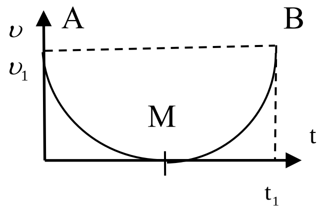
**Задачі підвищеної складності**

**Задача 1. Незвичний графік.** Жук повзе вздовж прямої, і його швидкість весь час змінюється. У вас є незвичайний графік (див. рис.)

- залежності величини, оберненої швидкості жука, тобто 1/υ, від координати жука x. Визначте за графіком час проходження жуком перших 30 м.




**Задача. 2.** Залежність модуля швидкості $\upsilon$ першого тіла від часу зображено дугою півкола АМВ. Упродовж часу $t_1$ це тіло пройшло такий шлях, як і друге тіло, яке рухалося рівномірно з швидкістю $\upsilon_2 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ Знайдіть початкову швидкість $\upsilon_1$ першого тіла.




## Тема – 3. *Кінематика криволінійного руху матеріальної точки*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

Розглянемо випадок, коли траєкторія руху матеріальної точки – плоска крива лінія (рис. 1.). Нехай у момент часу $t_1$ матеріальна точка в точці траєкторії $A$ мала швидкість $\vec{\upsilon}_1$, а в момент часу $t_2$ в точці траєкторії В – швидкість $\overline{\upsilon}_2$ . Зробимо паралельне перенесення вектора $\vec{\upsilon}_1$ у точку В. Знайдемо зміну швидкості $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$. Вектор прискорення $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$. Його напрям визначається напрямом вектора $\Delta\vec{\upsilon}$. Вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ можна розкласти на два складових вектори: $\Delta\vec{\upsilon}_1$ – вздовж вектора $\overline{\upsilon}_2$ який визначає зміну модуля швидкості; $\Delta\vec{\upsilon}_2$ – визначає зміну напряму швидкості.

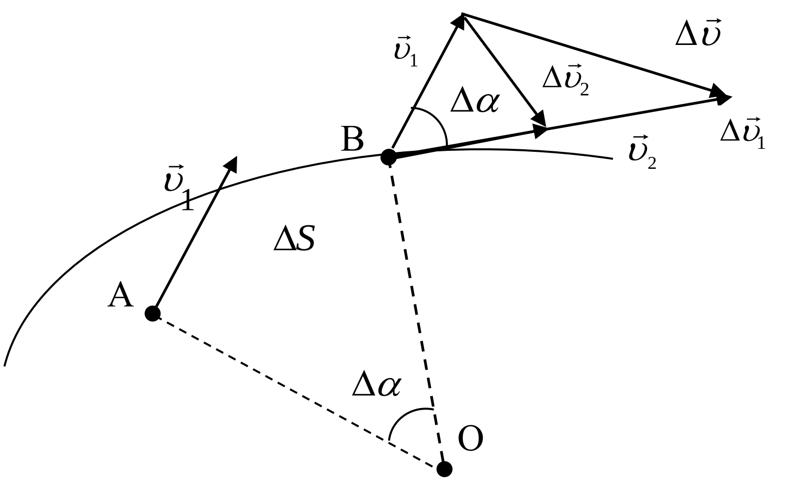



**Рис. 1.** Криволінійний рух матеріальної точки.

Отже, повне прискорення можна виразити як суму двох складових: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_1 + \Delta\vec{\upsilon}_2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_1}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_2}{\Delta t}$ (1).

Перша складова прискорення руху тіла: $\vec{a}_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt}$ (2) – зумовлена зміною модуля швидкості, напрямлена вздовж дотичної до траєкторії у даній точці і називається *тангенціальним прискоренням* $\vec{a}_\tau$

Друга складова прискорення: $\vec{a}_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}_2}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}$ (3) зумовлена зміною напряму швидкості, напрямлена перпендикулярно до вектора швидкості у даній точці, вздовж миттєвого радіуса кривизни до центра і називається *нормальним прискоренням* $\vec{a}_n$. Нормальне прискорення $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \upsilon\omega$ (4).

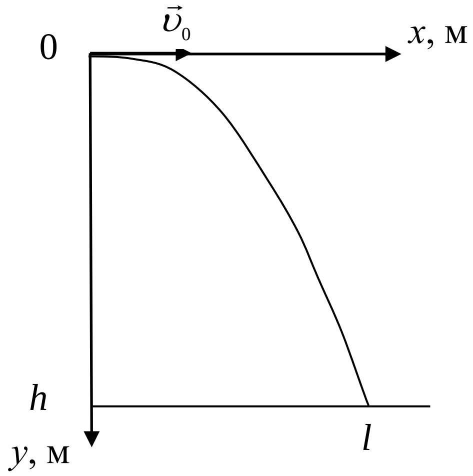



**Рис. 1.6.** Рух тіла, кинутого горизонтально

Повне прискорення: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (5).

Модуль повного прискорення: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ .

## Рух тіла кинутого горизонтально

1. Тіло кинули горизонтально із початковою швидкістю $\upsilon_0$ із невеликої висоти $h$ над поверхнею Землі. Знайдемо час польоту, дальність польоту у горизонтальному напрямі, кінцеву швидкість.

Вибираємо прямокутну систему координат хоу:

Запишемо закон зміни проекцій швидкості та координат відповідно вибраної системи координат:

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0$; $\upsilon_y = gt$ (6).

Тоді швидкість у момент падіння тіла на землю: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2}$ .

Закон зміни координат відповідно вибраної системи координат:

$x = \upsilon_x t = \upsilon_0 t$; $y = \frac{gt^2}{2}$ (7)

У момент падіння тіла його координати: $x = l$; $y = h$. Рівняння (7) набувають вигляду: $l = \upsilon_0 t$ ; $h = \frac{gt^2}{2}$ . Звідки знаходимо час падіння: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ і дальність польоту $l = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

**Рух тіла кинутого під кутом $\alpha$ до горизонту**

2. Тіло кинули із початковою швидкістю $\upsilon_0$ під кутом $\alpha$ до горизонту. Знайти: залежність швидкості та координат від часу, рівняння траєкторії, час польоту, дальність польоту у горизонтальному напрямі, максимальну висоту підняття.

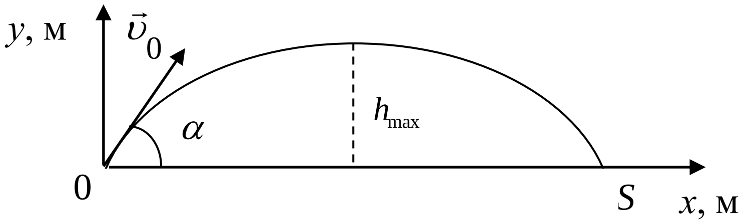



**Рис. 1.7**. Рух тіла кинутого під кутом до горизонту.

Спроектуємо вектор початкової швидкості на координатні осі: $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$.

Рух тіла вздовж горизонтальної осі є рівномірним, а вздовж вертикальної осі – рівнозмінним із прискоренням $\vec{g}$. Запишемо закон зміни складових швидкості:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha\,;\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \quad (8).$$

Тоді швидкість у довільний момент часу:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 gt\sin\alpha + (gt)^2}\,.$$

Знаходимо залежність координат від часу:

$$x = \upsilon_{0x}t = \upsilon_0\cos\alpha \cdot t\,;\quad y = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \quad (9).$$

Із першого з рівнянь (9) знаходимо час $t$ і підставляємо у друге.

$t = \dfrac{x}{\upsilon_0\cos\alpha}$ , $y = \upsilon_0 \sin\alpha \dfrac{x}{\upsilon_0\cos\alpha} - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{\upsilon_0\cos\alpha}\right)^2$ . Отримуємо рівняння траєкторії: $y = tg\alpha\, x - \dfrac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2$.

Час польоту $t_2$ знайдемо з умови, що у момент падіння тіла на землю $y = 0$. $0 = \upsilon_{0y}t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2}$, звідки $t_2 = \dfrac{2\upsilon_{0y}}{g} = \dfrac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}$

Дальність польоту у горизонтальному напрямі $S = x(t_2)$.

$$S = \upsilon_{0x}t_2 = \upsilon_0\cos\alpha \cdot \frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\alpha}{g} \quad (10).$$

Максимальна висота підняття $h_{max} y(t_1) = y\left(\dfrac{t_2}{2}\right)$, $h_{max} \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ (11).

## Контрольні питання до теми 3

1. Який рух матеріальної точки називається криволінійним?
2. Який напрям швидкість точки при криволінійному русі.
3. Чим зумовлене тангенціальне прискорення матеріальної точки.
4. Чим зумовлене нормальне прискорення матеріальної точки.
5. Формула для обчислення тангенціального прискорення матеріальної точки.
6. Формули для обчислення нормального прискорення матеріальної точки.
7. Формула для обчислення повного прискорення матеріальної точки (модуля повного прискорення).
8. Наведіть приклади криволінійного руху матеріальної точки.
9. Дальність польоту тіла, кинутого горизонтально (формула).
10. Під яким кутом до горизонту потрібно кинути тіло, щоб дальність польоту була максимальна?

**Задачі до теми 3**

1. З башти висотою 25 м горизонтально кинули камінь з швидкістю $\upsilon_0 = 15\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити час, протягом якого камінь буде рухатися. З якою швидкістю *v* він впаде на землю? Який кут утворює вектор швидкості з горизонтом у момент падіння?

*Відповідь*: $t = 2{,}26\,c, \upsilon = 26{,}7\,м/c$, $\varphi = 55^\circ 48'$.

2. Камінь кинули горизонтально з деякої висоти $h$. Він упав на землю через 0,5 с на відстані $l = 5\,м$ від основи вишки. З якої висоти кинули камінь? Яка його початкова швидкість? З якою швидкістю він упаде на землю? Який кут із горизонтом матиме його швидкість у момент падіння?

*Відповідь*: $h = 1{,}22\,м,$, $\upsilon_0 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\upsilon = 11{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\varphi = 26^\circ 12'$.

3. Камінь кинули горизонтально з швидкістю 15 м/с. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення каменя через 1 с після початку руху.

*Відповідь*: $a_n = 8{,}2\,м/c^2, a_\tau = 5{,}4\,м/c^2$

4. Камінь кинули горизонтально з швидкістю $\upsilon_0 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначити радіус кривизни траєкторії каменя через $t = 3\,c$ після початку руху. Опором повітря знехтувати.

*Відповідь*: $R = 305\,м.$

5. Камінь кинули з швидкістю 10 м/с під кутом $40^0$ до горизонту. На

яку висоту $h$ підніметься м’ячик? На якій відстані $l$ від точки кидання він упаде на землю? Який час $t$ його руху? Опором повітря знехтувати.

*Відповідь*: $h = 2{,}1\ м$, $l = 10{,}0\ м$, $t = 1{,}3\ с$.

6. Тіло кинули з швидкістю $\upsilon_0 = 14{,}7\ \frac{м}{с}$ під кутом $30^0$ до горизонту. Знайти нормальне $a_n$ і тангенціальне $a_\tau$ прискорення каменя через 1,25 с після початку руху.

*Відповідь*: $a_n = 9{,}15\ м/с^2,\ a_\tau = 3{,}52\ м/с^2$.

**Задачі для самостійного розв’язування**

1. Тіло невеликих розмірів кинули з вежі горизонтально. Виявилось, що дальність польоту дорівнює висоті точки кидання. Яка дальність польоту, якщо початкова швидкість тіла дорівнює 9,8 м/с? Опором повітря знехтувати.

*Відповідь*: $l = 19{,}6\ м$

2. Камінь, який кинули горизонтально, через час $t = 0{,}5\,с$ мав швидкість, модуль якої $\upsilon = 1{,}5\,\upsilon_0$ . Визначити модуль початкової швидкості $\upsilon_0$.

*Відповідь*: $\upsilon_0 = 4{,}4\frac{м}{с}$

3. Камінь кинули з швидкістю $\upsilon_0 = 12\ \frac{м}{с}$ під кутом $45^0$ до горизонту. Він упав на землю на відстані $l$ від точки кидання. З якої висоти $h$ потрібно кинути з тою ж початковою швидкістю $\upsilon_0 = 12\ \frac{м}{с}$ камінь горизонтально, що б він упав у теж місце?

*Відповідь*: $h = 7{,}4\ м$

4. Камінь кинули з швидкістю 10 м/с під кутом $45^0$ до горизонту. Знайти радіус кривизни траєкторії каменя через 1 с після початку руху. Опором повітря знехтувати.

*Відповідь*: $R = 6{,}3\ м.$

5. Під яким кутом до горизонту потрібно кинути камінь, щоб дальність його польоту була рівна висоті підйому?

*Відповідь*: $tg\alpha = 4$, $\alpha \approx 76^\circ$.

**Задачі підвищеної складності**

**Задача 1.** Гармату встановлено на відстані 8100 м від вертикальної кручі, глибина якої 105 м. Швидкість вильоту снаряда з дула $\upsilon = 300\frac{м}{с}$.

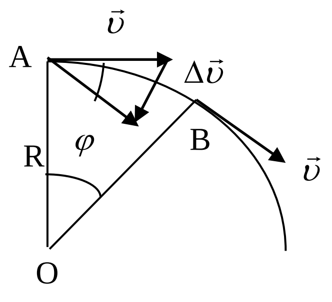
На якій мінімальній горизонтальній відстані від краю кручі може впасти снаряд?

**Задача 2.** Один берег струмка знаходиться на 35 см нижче від іншого. Ширина струмка – 120 см. З якою мінімальною швидкістю має відштовхнутися коник-стрибунець, щоб перестрибнути через струмок? Опором повітря знехтувати.

**Задача 3.** Захисник Київ-Баскета Олександр Мішула (зріст – 190 см), який очолює рейтинг найактивніших снайперів Суперліги, виконує вдалий кидок із лінії три очкової зони. Ця зона обмежена дугою кола радіусом 6,75 м, центр якого перебуває під центром баскетбольного кільця. Це кільце розміщене на висоті 10 футів від рівня підлоги. 1 фут =30,48 см. Якої початкової швидкості надає спортсмен м'ячу, якщо кидок робить з висоти свого зросту під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту? Чи є цей кидок оптимальним (початкова швидкість мінімальною)?

## Тема – 4. *Кінематика обертального руху. Кутова швидкість і кутове прискорення*

### Основні поняття, фізичні величини та формули




Якщо швидкість не змінює модуль, а лише напрям, то тіло *рухається* по коловій траєкторії. Тангенціальне прискорення при цьому дорівнює нулю.

Нехай за малий проміжок часу матеріальна точка перемістилась з точки траєкторії *A* в точку *B*. Трикутник швидкостей і трикутник ОАВ – подібні. Тоді $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{AB}{R}$ ; $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\upsilon \cdot \Delta t}{R}$ . Або $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}$ .

Отже, нормальне прискорення $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ (1). У граничному випадку при $\varphi \to 0$ $a_n$ напрямлене перпендикулярно до вектора швидкості, тобто вздовж радіуса до центра кола, тому його називають *доцентровим прискоренням*.

Отже, при рівномірному русі матеріальної точки по колу тангенціального прискорення немає, а повне прискорення дорівнює доцентровому

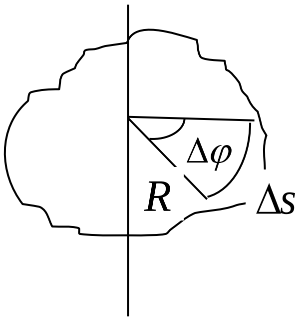
Розглянемо обертальний рух абсолютно твердого тіла. При такому русі всі точки тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій, яка є віссю обертання. Точки, що лежать на осі обертання залишаються нерухомими.

Кут $\varphi$, на який повернеться разом з тілом площина за час $t$, називається кутовим переміщенням тіла. Якщо кутові переміщення тіла $\Delta\varphi$ за будь-які рівні проміжки часу $\Delta t$ однакові, то обертання є рівномірним.

Фізичну величину, що визначається відношенням кутового переміщення до проміжку часу, за який це переміщення відбулося, називають *середньою кутовою швидкістю*: $\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (2).

*Миттєва кутова швидкість* – це фізична величина, що визначається границею, до якої наближається середня кутова швидкість, за умови, коли проміжок часу прямує до нуля: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ (3).

При рівномірному обертанні тіла $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Одиниці кутової швидкості $[\omega] = 1\,\frac{рад}{с}$. Обертання тіла характеризують також періодом обертання $T$ і частотою $n$. *Період* обертання – це час, за який тіло робить повний оберт навколо осі обертання $T = \frac{t}{N}$. *Частота* – це кількість обертів, які здійснює тіло за одиницю часу. $n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$. Оскільки за період тіло повертається на кут $\varphi = 2\pi$ рад, то $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ (4).




Знайдемо зв'язок між $\upsilon$ та $\omega$. $\Delta s = R\Delta\varphi$; $\frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Тоді $\upsilon = \omega R$ (5), $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \cdot \vec{R}]$, $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$.

Враховуючи (5) для нормального прискорення (1) отримуємо такі співвідношення. $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \upsilon\omega$ (6). У векторній формі $\vec{a}_n = [\vec{\omega}[\vec{\omega} \cdot \vec{R}]]$.

У випадку нерівномірного обертання твердого тіла вводять кутове прискорення $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ (7). Тоді тангенціальне прискорення $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \beta R$ (8). У векторній формі $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \cdot \vec{R}]$.

Наведемо аналогію між кінематичними величинами для поступального та обертального рухів.

| **Поступальний рух** | **Обертальний рух** |
|---|---|
| x –координата матеріальної точки | $\varphi$– кут повороту |
| $\Delta\vec{r}$ – вектор переміщення | $\Delta\vec{\varphi}$ - кутове зміщення |
| $\Delta s = R\Delta\varphi$ | |
| $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – швидкість руху | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – кутова швидкість |
| $\upsilon = \omega R$, $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \cdot \vec{R}]$ | |
| $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – прискорення | $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ – кутове прискорення |
| $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \beta R$, $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \cdot \vec{R}]$ | |
| $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$ – залежність швидкості від часу для рівноприскореного руху | $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t$ – залежність кутової швидкості від часу для рівноприскореного обертання |
| $x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$ – залежність координати від часу для рівноприскореного руху | $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$ – залежність кута повороту від часу для рівноприскореного обертання |
| $\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2aS$ | $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\varphi$ |

## <u>Контрольні питання до теми 4</u>

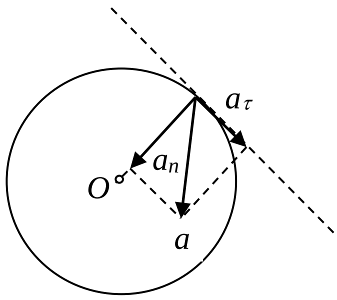
1. Що таке кутове переміщення (його одиниці в СІ)?
2. Означення середньої та миттєвої кутової швидкості.
3. Який зв’язок кутової швидкості з періодом обертання?
4. Як визначити напрям кутової швидкості?
5. Який зв’язок між $\vec{\upsilon}$ та $\vec{\omega}$ у векторній формі?
6. Означення середнього та миттєвого кутового прискорення.
7. Який зв’язок між тангенціальним та кутовим прискоренням у векторній формі?
8. Яка залежність кутової швидкості від часу для рівноприскореного обертання?

9. Яка залежність кутового переміщення від часу для рівноприскореного обертання?
10. Як обчислити кутову швидкість твердого тіла, коли відоме її кутове переміщення і кутове прискорення? Час руху не відомий.

**Приклади задач із розв'язуванням**

**Задача.** Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A$ = 10 рад, $B$ = 20 рад/с, $C$ = –2 рад/$c^2$ (рис.). Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані $r$ = 0,1 м від осі обертання, для моменту часу $t$ = 4 с.

**Розв'язування.** Повне прискорення $a$ точки, що рухається вздовж кривої лінії, може бути знайдене як геометрична сума тангенціального прискорення $a_\tau$, направленого по дотичній до траєкторії, і нормального прискорення $a_n$, направленого до центру кривини траєкторії (рис.): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.




Оскільки вектори $a_\tau$ і $a_n$ взаємно перпендикулярні, то модуль прискорення дорівнює $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Модулі тангенціального і нормального прискорення точки тіла, що обертається, визначаються формулами

$$a_\tau = \beta r, \quad a_n = \omega^2 r,$$

де $\omega$ - модуль кутової швидкості тіла; $\beta$ - модуль його кутового прискорення; $r$ – відстань від точки до осі обертання. Підставляючи співвідношення (10) у формулу (9), одержимо

$$a = \sqrt{\beta^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

Кутову швидкість $\omega$ знайдемо, взявши першу похідну від кута повороту тіла за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

У момент часу $t$ = 4 с модуль кутової швидкості дорівнює $\omega = [20 + 2(-2)4] = 4$ рад/с.

Кутове прискорення знайдемо, узявши першу похідну від кутової швидкості за часом $\beta = d\omega / dt = 2C = -4$ рад/с$^2$.

Підставляючи значення $\omega$, $\beta$ і $r$ у вираз для прискорення, одержимо відповідь

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65\ м/с^2.$$

*Відповідь:* $a$ = 1,65 м/с$^2$.

**Задачі до теми 4**

1. При рівноприскореному обертанні колесо досягло кутової швидкості 20 рад/с через 10 обертів після початку обертання. Визначити кутове прискорення колеса.

*Відповідь*: $\beta = 3{,}2\ рад/с^2$.

2. Точка рухається по колу радіусом $R$ = 10 см з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau$= 5 см/с$^2$. Через який час після початку руху нормальне прискорення точки буде дорівнювати тангенціальному?

*Відповідь*: $t = \sqrt{2}\ c$.

3. Колесо радіусом $R$ = 10 см обертається з кутовим прискоренням $\beta = 3{,}14\ рад/с^2$. Знайти для точок на ободі колеса на кінець першої секунди після початку руху: кутову швидкість $\omega$, лінійну швидкість $\upsilon$, тангенціальне прискорення $a_\tau$, нормальне прискорення $a_n$, повне прискорення $a$, кут $\alpha$, який утворює вектор повного прискорення з радіусом колеса.

*Відповідь*: $\omega = 3{,}14\ рад/с$, $\upsilon = 0{,}314\ м/с$, $a_\tau = 0{,}314\ м/с^2$, $a_n = 0{,}986\ м/с^2$, $a = 1{,}03\ м/с^2$, $\alpha = 17^\circ 46'$.

4. Точка рухається по колу радіуса $R$ = 2 см. Залежність шляху від часу дається рівнянням $S = Ct^3$, де $C$ = 0,1 м/с$^3$. Знайти нормальне $a_n$, тангенціальне $a_\tau$ та повне прискорення точки в момент, коли її лінійна швидкість $\upsilon$ = 0,3 м/с.

*Відповідь*: $a_n = 4{,}5\ м/с^2$, $a_\tau = 0{,}6\ м/с^2$

5. Знайти кутове прискорення обертання колеса, якщо через 2 с після початку руху, повне прискорення точок обода утворювало кут 60$^0$ з лінійною швидкістю.

*Відповідь*: $\beta = 0{,}43\ рад/с^2$

6. Колесо радіусом $R$ = 5 см обертається так, що залежність кута повороту від часу має вигляд: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C$=1 рад/с$^2$, $D$ = 1

рад/с$^3$. Визначити зміну тангенціального прискорення за одиницю часу для точок, які лежать на ободі колеса.

*Відповідь*: $\frac{\Delta a_\tau}{\Delta t} = 0{,}3\ м/с^2$

7. Колесо радіусом 10 см обертається так, що залежність лінійної швидкості точок, які лежать на ободі, від часу дається рівнянням $\upsilon = At + Bt^2$ , де $A$=3 см/с$^2$ і $B$=1 см/с$^3$. Кут, який утворює вектор повного прискорення з радіусом колеса в моменти часу 0,1,2,3,4 і 5 після початку руху.

*Відповідь*:

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| tg$\alpha$ | $\infty$ | 3,13 | 0,7 | 0,278 | 0,14 | 0,081 |
| $\alpha$ | 90$^\bullet$ | $72^\circ 17'$ | $35^\circ$ | $15^\circ 32'$ | $7^\circ 58'$ | $4^\circ 38'$ |

**Задачі для самостійного розв'язування**

**1.** Визначити радіус колеса, якщо відомо, що лінійна швидкість $\upsilon_1$ точки, яка лежить на ободі, в 2,5 рази більша від лінійної швидкості $\upsilon_2$ точки, що лежить на відстані на $r = 5$ см ближче до осі колеса.

*Відповідь*: $R = 8{,}33\ см$

**2.** Колесо обертається рівносповільнено. За час 1 хв воно зменшило частоту обертання від $n_1$ = 300 об/хв до $n_2$ =180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і число обертів $N$, які зробить колесо за цей час.

*Відповідь*: $\beta = -0{,}21\ рад/с^2$, $N = 240\ об$.

**3.** Тіло рухається по колу радіусом $R$=10 см з постійним тангенціальним прискоренням $a_t$. Знайти тангенціальне прискорення $a_\tau$ точки, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху швидкість точки стала $\upsilon$ = 79,2 см/с.

*Відповідь*: $a_\tau = 0{,}1\ м/с^2$

**4.** Колесо радіусом 10 см обертається так, що залежність кута повороту від часу має вигляд: $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $B$=2 рад/с; $C$=1 рад/с$^2$. Знайти для точок обода через 2 с від початку руху: кутову швидкість, лінійну швидкість, кутове прискорення, тангенціальне і нормальне прискорення.

*Відповідь*: $\omega = 14\ рад/с$, $\upsilon = 1{,}4\ м/с$, $\beta = 12\ рад/с^2$, $a_\tau = 1{,}2\ м/с^2$, $a_n = 19{,}6\ м/с^2$.

**5.** Колесо обертається так, що залежність кута повороту від часу має вигляд: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ , де $B$=1 рад/с; $C$=1 рад/с$^2$, $D$=1 рад/с$^3$. Визначити радіус колеса, якщо відомо, що до кінця другої секунди руху для точок, які лежать на ободі колеса, нормальне прискорення $a_n = 346$ м/с$^2$.

*Відповідь*: $R = 1{,}2$ *м*

**Задача підвищеної складності**

**1.** Точка рухається по дузі кола радіуса $R$. її швидкість залежить від пройденого шляху за законом $\upsilon = \beta\sqrt{S}$, де $\beta-$ const. Знайти кут φ між вектором повного прискорення і вектором швидкості в залежності від $S$.

## Тема – 5. *Динаміка матеріальної точки. Закони Ньютона*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

При розгляді різних динамічних задач механіка ставить і розв’язує два питання: 1) за відомим рухом тіл обчислити сили, що діють на них; 2) за відомими силами визначити рух тіл.

Перший закон Ньютона (принцип інерції) точно формулюється так: існують системи відліку, відносно яких усі тіла, що не взаємодіють з іншими тілами, рухаються прямолінійно й рівномірно. Системи відліку, в яких тіла, що не взаємодіють з іншими тілами, рухаються прямолінійно й рівномірно, називаються інерціальними системами. Із першого закону механіки відомо, що сила спричинює зміну руху тіла, обумовлює прискорення.

Інертність – властивість тіл, яка проявляється у тому, що тіло зберігає свою швидкість постійною в інерціальній системі відліку, коли на це тіло інші тіла не діють або їх дія взаємно скомпенсована. Коли ж на тіло діють інші тіла, то властивість інертності проявляється у тому, що зміна його швидкості відбувається не миттєво, а поступово. При цьому чим повільніше змінюється швидкість, тим більша інертність тіла. Мірою інертності тіла є маса. Чим більш інертне тіло, тим більша його маса. Маса тіла є ще мірою гравітації.

Другий закон Ньютона стверджує: зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі і відбувається по прямій, по якій ця сила діє.

З метою конкретизації змісту закону і виходу на експериментальну перевірку, його формулюють у такому вигляді «*тіло, на яке діють сили, рухається з прискоренням, числове значення і напрям якого визначаються відношенням рівнодійної всіх сил до маси тіла.*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1),$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ позначає результуючу зовнішніх сил.

Здебільшого другий закон механіки записують у вигляді

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (2)$$

Вище розглянуто другий закон механіки для випадків, коли маса точки залишається незмінною. У ряді механічних задач, наприклад при розгляді руху ракети, маса не залишається сталою. У таких випадках треба користуватися виразом закону в загальному вигляді, а саме:

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}, \quad (3)$$

де $m\vec{\upsilon} = \vec{p}$ – **імпульс тіла**; $\vec{F}$ – результуюча зовнішня сила.

Інакше, за виразом (3) сила визначається швидкістю зміни імпульсу тіла. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (4)

Ще Декарт (1596 – 1650), досліджуючи взаємодію тіл, дійшов висновку про існування певної міри механічного руху. Цією мірою є $m\vec{\upsilon}$ – імпульс. Імпульс тіла – це вектор однакового напряму з вектором його швидкості.

Рівняння (4) можна записати у вигляді: $d\vec{p} = \vec{F}dt$,

звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від розміру прикладеної сили, а й від часу її дії. Тому та сама зміна імпульсу може бути викликана великою силою за малий час дії і малою силою за великий час дії. Добуток сили на час її дії називають ***імпульсом сили***.

Вирази (2) – (4) називаються рівняннями динаміки матеріальної точки.

Під час розв'язування задач на рух тіла сталої маси, звичайно, спочатку складають рівняння динаміки у векторній формі, а потім виражають його у проекціях на координатні осі:

$$ma_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ;\ ma_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \quad (5)$$

За формулами (5) розв'язують пряму та обернену задачі з механіки. Вираз другого закону Ньютона називають основним рівнянням динаміки матеріальної точки.

Математичний вираз третій закон Ньютона: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Тіла діють одне на одне з силами, які напрямлені вздовж однієї прямої, рівні за модулем, протилежні за напрямком і прикладені до різних тіл. Зазначимо, що сили, які виникають під час взаємодії двох тіл, завжди мають однакову природу.

Застосовуючи третій закон Ньютона, завжди потрібно пам’ятати, що однакові за модулем та протилежні за напрямком сили діють на різні тіла, і тому не можуть урівноважувати одна одну. Закони Ньютона виконуються тільки в інерціальних системах відліку, вони перестають бути правильними для об’єктів дуже малих розмірів, які порівнянні з розмірами атомів, та коли рух відбувається зі швидкостями наближеними до швидкості світла.

## Контрольні питання до теми 5

1. Чим займається динаміка? Основні задачі динаміки.
2. Що таке інертність тіла?
3. Що таке маса.
4. Що таке сила. Види сил?
5. Сформулюйте перший та другий закони І.Ньютона.
6. Що таке інерціальна система відліку?
7. Що таке імпульс тіла?
8. Що таке імпульс сили?
9. Сформулюйте ІІ закон Ньютона через зміну імпульсу тіла та імпульс сили.
10. Сформулюйте третій закони І.Ньютона. Визначте рівнодійну сил у третьому законі Ньютона.

**Задачі до теми 5.**

**1.** Аеростат з баластом масою $m = 1600\ кг$ опускається рівномірно з деякою швидкістю. Піднімальна сила $F_A = 12\ кН$. Сила опору повітря пропорційна швидкості аеростата. Баласт якої маси $m_x$ потрібно скинути, щоб аеростат став рівномірно підніматися із тією ж швидкістю?

*Відповідь:* $m_x = 800$ кг.

**2.** На нитці підвішений вантаж масою $m = 1\,кг$. Знайти силу натягу нитки $F_н$, якщо нитку з вантажем: а) піднімати з прискоренням $a = 5\,м/с^2$; б) опускати з прискоренням $a = 5\,м/с^2$; в) піднімати рівномірно вгору.

*Відповідь:* $F_{н1} = 14{,}8$ Н, $F_{н2} = 4{,}8$ Н, $F_{н3} = 9{,}8$ Н.

**3.** Автомобіль масою $m = 1020\,кг$, рухаючись рівносповільнено, зупиняється через $t = 5\,с$, проїхавши шлях $S = 25\,м$. Визначити початкову швидкість автомобіля $\upsilon_0$ і гальмівну силу.

*Відповідь:* $\upsilon_0 = 36$ км/год, $F = 2{,}04$ кН.

**4.** Яку силу $F$ потрібно прикласти до вагона масою $m = 16000$ кг, щоб він почав рухатися рівноприскорено і за час $t = 30\,с$ пройшов шлях $S = 11\,м$? Під час руху на вагон діє сила опору $F_{оп}$, яка становить 0,05 від сили тяжіння.

*Відповідь:* $F = 8{,}2$ кН.

**5.** Молекула масою $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, яка летить зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, вдаряється в стінку посудини під кутом до $\alpha = 60^\circ$ нормалі. Молекула пружно відбивається від стінки. Визначити імпульс сили $F\Delta t$, який отримує стінка під час удару.

*Відповідь:* $F\Delta t = 2{,}8 \cdot 10^{-23}\ Н \cdot с$.

**Задачі для самостійного розв'язування**

**1.** Стальна дротина витримує силу натягу $F_н = 4{,}4$ кН. З яким максимальним прискоренням $a$ можна піднімати тіло масою $m = 400$ кг, яке підвішене на цій дротині.

*Відповідь:* $a = 1{,}25\,м/с^2$.

**2**. Поїзд масою m = 500 т, рухаючись рівносповільнено протягом часу 1 хв зменшує свою швидкість із 40 км/год до 28 км/год. Знайти силу гальмування $F$ поїзда.

*Відповідь:* $F = 27{,}7$ кН.

**3**. Під дією сили $F = 10\,Н$, тіло рухається прямолінійно за законом $s = A - Bt + Ct^2$, де С=1 м/с$^2$. Знайти масу цього тіла.

*Відповідь:* $m = 5$ кг

**4**. Два вантажі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка перекинута через невагомий блок. Знайти прискорення $a$, з яким рухаються вантажі і силу натягу нитки $F_н$. Тертям в блоці знехтувати.

*Відповідь:* $a = 3{,}27\ м/с^2$, $F_н = 13{,}1$ Н.

**5**. Трамвайний вагон масою $m = 5$ т рухається по заокругленню радіусом $R = 128$ м. Знайти силу бокового тиску коліс вагона на рейки при швидкості руху $\upsilon = 9$ км/год.

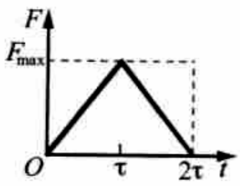
*Відповідь:* $F = 244{,}14\ Н$

**6.** Струмінь води площею перерізу $S = 6\ см^2$ вдаряється в стіну під кутом до $\alpha = 60^\circ$ нормалі і пружно відбивається від неї. Швидкість руху води в потоці рівна $\upsilon = 12$ м/с. З якою силою $F$ тисне вода на стіну під час удару?

*Відповідь:* $F = 86{,}4$ Н.

**Задача підвищеної складності**

Футболіст вдаряє ногою по м'ячу. Залежність сили удару від часу $F = F(t)$ у першому наближенні зображена на рисунку ($\tau$ = 8,0 мс, $F_{\max}$ = 3,5 кН). Якої швидкості внаслідок удару набуває м'яч, якщо його маса дорівнює 500 г?




## Тема – 6. *Сили тертя. Сухе та рідинне тертя*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

Сили, що виникають у процесі руху одних тіл або їх частин по поверхні інших і перешкоджають руху, називаються *силами тертя.* Розрізняють зовнішнє (сухе) і внутрішнє тертя.

Сухим тертям називають взаємодію твердих тіл у місцях їх дотику. Ця взаємодія зводиться до деформацій і молекулярних зчеплень у стичних частинах тіл. Сухе тертя, що виникає між рухомими тілами, називається *кінематичним;* сухе тертя між взаємно нерухомими тілами називається *тертям спокою.* Звертаємо увагу на те, що «сила тертя ковзання діє вздовж поверхні дотику тіл і трохи менша від максимальної сили тертя спокою» (рис. 1).

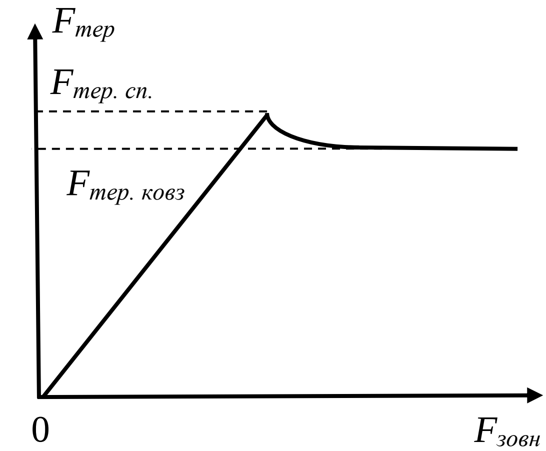



Рис. 1. Залежність сили тертя від прикладеної зовнішньої сили

Сила тертя спокою напрямлена проти передбачуваного руху. У випадку твердих тіл розрізняють тертя ковзання і тертя кочення Силу тертя ковзання виражають так: $F_T = \mu P_n$ (1)

де $\mu$ - коефіцієнт тертя ковзання, безрозмірнісна величина, що залежить від роду тіл; $P_n$ - сила нормального тиску. Сила тертя ковзання не залежить від площі дотику тіл і рівна: $F_{mp} = \mu N$ (2), де $\mu$– коефіцієнт тертя ковзання; $N$ – модуль нормальної складової сили реакції опори, що діє на тіло. (2) виражає закон Амонтона-Кулона. Слід зазначити, що нормальна складова сили реакції опори $N$ разом з силою тертя спокою $F_{\text{терт.сп.}}$ утворюють повну силу реакції опори $R$ : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{терт.сп.}$.

Сила тертя ковзання напрямлена проти відносного зміщення тертьових поверхонь.

Силу тертя кочення виражають так: $F_T = \mu' \dfrac{P_n}{r}$. (3)

де $r$ - радіус тіла кочення, $\mu'$ - коефіцієнт тертя кочення, що має розмірність довжини і залежить від роду тіл.

Точніші дослідження показують, що сила сухого тертя дещо залежить від швидкості (рис. 2). При малих швидкостях вона майже незмінна, із збільшенням швидкості в деякому інтервалі сила тертя зменшується, а потім зростає.

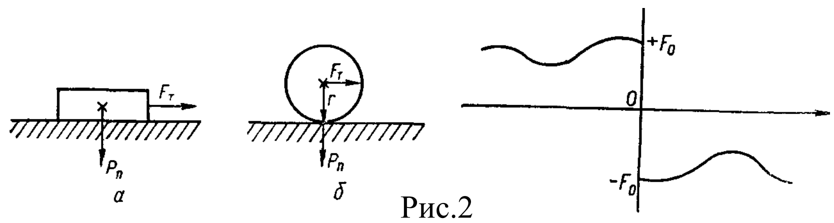



Рис.2

При відносному русі одних тіл по поверхні інших дотикання їх відбувається тільки на окремих виступах, загальна площа яких значно менша від видимої площі дотикання. Для зменшення сили тертя ковзання поверхні тіл намагаються зробити гладенькими. Однак при дуже гладеньких поверхнях тіл сили тертя ковзання не зменшуються, а навпаки, зростають. Це зумовлено тим, що при щільному дотиканні поверхонь тіл виникають міжатомні взаємодії. Ці взаємодії проявляються тільки в тих місцях дотикання поверхонь, де відстань між атомами тіл має порядок розмірів атомів.

Щоб зменшити сухе тертя між деталями машин, ковзання замінюють за допомогою підшипників коченням, а також за допомогою рідких мастил використовують внутрішнє тертя.

*Внутрішнім* називають тертя між шарами рідин і газів. До нього зводиться також тертя на межі твердих тіл з рідинами і газами, бо в такому контакті поверхня твердого тіла вкрита шаром прилипання рідини або газу.

Механізм виникнення внутрішнього тертя такий. Коли рідина протікає по трубці, швидкість шару прилипання до стінок дорівнює нулю, а в міру віддалення від стінок до осі швидкість рідини поступово збільшується (рис. 3). Там одні шари рідини наче ковзають по поверхні інших. Так виникає сила внутрішнього тертя.

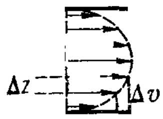


Рис.3

$$F = \eta(\frac{\Delta\upsilon}{\Delta z})S \,, \qquad (4)$$

де $\eta$ — коефіцієнт внутрішнього тертя, або в'язкість.
Градієнт швидкості в цій формулі виражає зміну швидкості, розраховану на одиницю відстані по нормалі між розглядуваними шарами, $\Delta z$ - відстань між шарами (див. рис. 3). Одиниця градієнта швидкості - $c^{-1}$.

В'язкість $\eta$ залежить від роду рідини або газу та їх температури. Встановлено, що з підвищенням температури в'язкість рідин дуже зменшується, а в'язкість газів з підвищенням температури збільшується.

З формули (4) встановлюють одиницю в'язкості - $\left[H\frac{c}{м^2}\right]$.

Розглянемо вплив рідкого або газоподібного середовища на тіло, яке рухається в ньому з постійною швидкістю $\upsilon$. Стокс установив, що при невеликих швидкостях і розмірах тіл, коли опір середовища обумовлений практично тільки силами тертя, модуль сили опору визначається формулою $F = k\eta l\upsilon$, де $\eta$ – динамічна в'язкість середовища; $\upsilon$ – швидкість руху тіла; $l$ – характерний розмір тіла; $k$ – коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла. Цю силу називають силою Стокса. Для кулі, якщо взяти за $l$ її радіус $r$, коефіцієнт пропорційності дорівнює $6\pi$. Отже, сила опору руху в рідинах невеликих кульок при малих швидкостях дорівнює $F = 6\pi\eta r\upsilon$.

## <u>Контрольні питання до теми 6</u>

1. Що таке тертя?
2. Що таке сила тертя спокою, який її напрям?
3. Що таке сила тертя ковзання, який її напрям?

4. Сухе тертя. Закон Амонтона – Кулона для сухого тертя ковзання.
5. Як залежить сила тертя ковзання від площі дотику тіла із поверхнею?
6. Сучасне пояснення причин сухого тертя.
7. Залежність сил сухого тертя від швидкості.
8. Рідинне тертя. Залежність цього виду тертя від швидкості.
9. Сила тертя кочення.
10. Способи збільшення та зменшення сил тертя.

**Задачі до теми 6**

1. Канат лежить на столі так, що частина його звисає зі стола. Він починає ковзати тоді, коли довжина частини, яка звисає становить 0,25 від його довжини. Визначити коефіцієнт тертя ковзання каната об стіл.

*Відповідь:* $\mu = \frac{1}{3}$.

2. Автомобіль масою 1т піднімається похилою дорогою з нахилом 1 м на кожні 25 м шляху зі сталою швидкістю. Коефіцієнт опору 0,1. Визначити силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля?

*Відповідь:* $F = 1370\, H$.

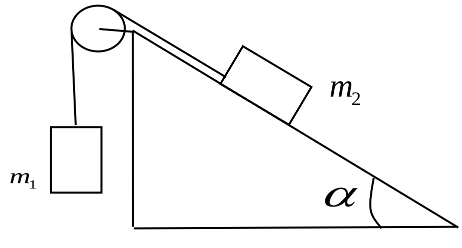
3. Автомобіль масою 1т піднімається похилою дорогою з нахилом 1 м на кожні 25 м шляху з прискоренням 1 м/с$^2$. Коефіцієнт опору 0,1. Визначити силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля?

*Відповідь:* $F = 2370\, H$.

4. Тіло ковзає по похилій площині з кутом нахилу 45$^0$. Пройшовши шлях 36,4 см, воно набуває швидкості 2 м/с. Визначити коефіцієнт тертя тіла по площині. *Відповідь:* $\mu = 0{,}2$.

5. Похила площина утворює кут 30° з горизонтом. На площині рівномірно сповзає тіло, маса якого дорівнює 5,0 кг. Який коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині? Яку мінімальну силу слід прикласти до тіла, щоб рівномірно піднімати його похилою площиною?

*Відповідь:* $\mu = tg30^{\circ} = 0{,}577$, $F = 49\, H$.



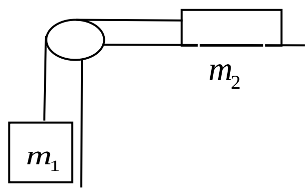

6. Невагомий блок закріплений на вершині похилої площини, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^{\circ}$. Гирі масами $m_1 = m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка

перекинута через блок. Коефіцієнт тертя ковзання другої гирі по похилій площині $\mu = 0{,}1$. Визначити прискорення *a*, з яким рухаються гирі та силу натягу нитки $F_н$. *Відповідь:* $a = 2{,}02$ м/с$^2$, $F_н = 7{,}77$ Н.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Автомобіль масою 1т опускається похилою дорогою з нахилом 1 м на кожні 25 м шляху зі сталою швидкістю. Коефіцієнт опору 0,1. Визначити силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля?
2. *Відповідь:* $F = 590\,H$
3. Тіло лежить на похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 4^\circ$ з горизонтом. При якому граничному коефіцієнті тертя, тіло буде ковзати по похилій площині? З яким прискоренням буде ковзати тіло, якщо коефіцієнт тертя становитиме $\mu = 0{,}03$? За який час тіло пройде при цих умовах шлях 100 м? Яку швидкість воно матиме в кінці шляху? *Відповідь:* $\mu \le 0{,}07$, $a = 0{,}39$ м/с$^2$, $t = 22{,}7$ с, $\upsilon = 8{,}85$ м/с /

4. Невагомий блок закріплений на краю стола. Гирі масами $m_1 = m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Коефіцієнт тертя ковзання другої гирі по столу $\mu = 0{,}1$. Визначити прискорення *a*, з яким рухаються гирі та силу натягу нитки $F_н$.




*Відповідь:* $a = 4{,}4$ м/с$^2$, $F_н = 5{,}4$ Н.

4. Тіло ковзає по похилій площині з кутом нахилу $45^0$. Залежність пройденого тілом шляху від часу задана рівнянням: $S = Ct^2$, де $C = 1{,}73$ м/с$^2$. Визначити коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині.

*Відповідь:* $\mu = 0{,}5$.

## Тема – 7. *Пружні сили. Закон Гука*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

*Сила* - це міра зовнішньої дії на тіло, що виникає в процесі його взаємодії з іншим тілом.

Кожне тіло під дією зовнішньої сили зазнає певної деформації, тобто зміни свого розміру або форми. Залежно від характеру зовнішньої дії можуть здійснюватися деформації різних видів. Найзагальнішими з них є деформації *розтягу, стиску, зсуву,* *кручення, згину, зрізу*. Деформації стиску і розтягу розрізняють таких типів: *лінійного стиску* і *лінійного розтягу, об'ємного стиску* і *об'ємного розтягу*.

У процесі здійснення пружної деформації виникають внутрішні сили, що намагаються надати тілу попередніх розмірів і форми. Ці сили називають повертаючими, або пружними, силами. За законом Гука, *сили, що виникають при пружній деформації і напрямлені в сторону її зменшення:* $F = -kx$ (1),

де $x$ - абсолютна деформація, $k$ - жорсткість тіла.

Для характеристики деформації розтягу за законом Гука можна записати: $\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\sigma_n$ (2)

де $\Delta l$ - абсолютне видовження, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ - відносне видовження; $\sigma_n = \frac{F_n}{S}$ - механічна напруга, яка виникає в пружно деформованому тілі; $\alpha$ - коефіцієнт пружності, що залежить від матеріалу.

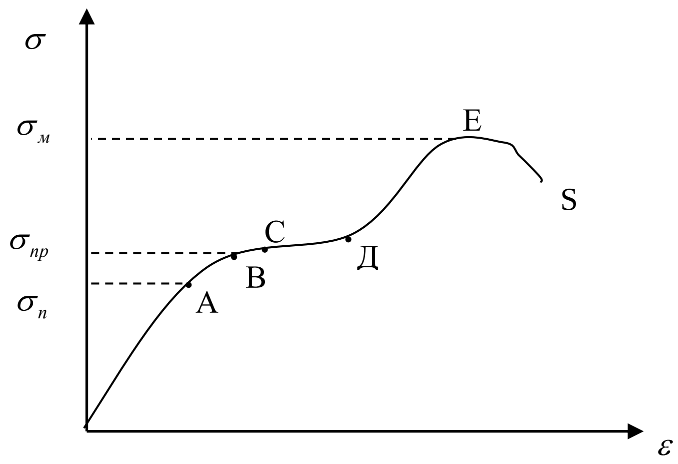
Частіше характеризують деформацію розтягу *модулем пружності* $E = \frac{1}{\alpha}$ (3)

У деформаціях розтягу $E$ називають модулем Юнга. Одиниця в СІ: $\frac{H}{м^2}$. Тоді закон Гука має такий вигляд: $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\sigma_n$ або $\sigma_n = E\frac{\Delta l}{l_0} = E\varepsilon$ (4)

Фізичний зміст модуля Юнга: модуль Юнга чисельно дорівнює механічній напрузі, яка виникає в тілі, при $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = 1$, тобто при подвійному видовженні $l = 2l_0$.

У деформаціях стиску закон Гука записують через відносне потовщення стержня $\frac{\Delta d}{d} = \beta\sigma_n$ (5). де $\frac{\Delta d}{d_0}$ - відносне потовщення стержня; $\beta$ - коефіцієнт одностороннього стиску; $\sigma_n$ - стискуюча напруга.

Зв'язок між деформаціями розтягу і стиску характеризується коефіцієнтом Пуассона $\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta d}{d_0} \cdot \frac{l_0}{\Delta l}$ (6)




Для повнішої характеристики пружних властивостей матеріалів крім модуля пружності треба знати ще мжу пружності й межу міцності.

Графік залежності напруги від відносного видовження називається діаграмою напруг. Лінійна залежність ( $\sigma_n = E\varepsilon$ ) виконується лиш на проміжку ОА. Точці А відповідає напруга, яка називається межею пропорційності ($\sigma_n$). При збільшенні напруги до точки В деформація ще має пружний характер, але залежність $\sigma$ від $\varepsilon$ вже нелінійна. Гранична напруга, при якій ще не виникають залишкові деформації $\sigma_{пр}$ називається межею пружності. Ділянка АВ дуже невелика і часто межі пропорційності та пружності вважають однаковими. В будівництві розмір балок вибирають таким чином, щоб напруга в них не перевищувала $0{,}5\sigma_{пр}$. За межею пружності в тілі виникають деформації, які залишаються і після зняття зовнішньої сили, вони називаються залишковими деформаціями. Напруга при якій з'являється помітна залишкова деформація (0,2%) називається межею текучості (точка С на графіку) $\sigma_m$. В області СД деформація зростає без збільшення навантаження, тіло "тече". Ця область пластичних деформацій. Матеріали, для яких область текучості велика називаються в'язкими (глина, асфальт). Матеріали, у яких ця область практично відсутня, називаються крихкими (цегла, бетон, скло, фарфор). При зміні умов в яких перебуває деформоване тіло, його властивості змінюються.

При подальшому розтязі (за точку Д) тіло знову чинить опір деформації – напруга у ньому зростає. Максимальна напруга, яка виникає в тілі до розриву (точка Е), називається межею міцності $\sigma_м$. При напрузі більшій від межі міцності в одному з перерізів виникає звуження, яке називається шийкою, де і відбувається розрив.

Важливою характеристикою є коефіцієнт запасу міцності $n = \frac{\sigma_м}{\sigma}$, де $\sigma$ робоча механічна напруга.

## <u>**Контрольні питання до теми 7**</u>

1. Що таке деформація? Види пружних деформацій.
2. Дайте означення механічної напруги.
3. Дайте означення відносного видовження.
4. Запишіть закон Гука для пружних деформацій одностороннього розтягу і стиску.
5. Запишіть закон Гука для деформації пружини.
6. Який фізичний зміст модуля пружності – $E$?

7. Встановіть зв'язок між жорсткістю та модулем Юнга. Від чого залежить жорсткість – $k$.
8. Чому дорівнює коефіцієнт Пуассона?
9. Покажіть на графіку межу пропорційності, пружності, текучості та міцності?
10. Що таке коефіцієнт запасу міцності?

**Задачі до теми 7**

**1.** Гиря масою 0,5 кг, прив'язана до гумового шнура довжиною $l_0$, описує коло в горизонтальній площині. Частота обертання 2 об/с. Кут відхилення шнура від вертикалі $30^0$. Жорсткість шнура $k$=0,6 кН/м. Визначити початкову довжину $l_0$ шнура.

*Відповідь:* $l_0 = 6{,}3\,\text{см}$.

**2.** Для вимірювання глибини моря з пароплава опустили невелику гирю на стальному тросі. Масою гирі порівняно з масою троса знехтувати. Густина морської води 1032 кг/м$^3$. Яку найбільшу глибину можна виміряти цим методом? Межа міцності сталі 785 МПа, густина сталі $\rho_c = 7700\ кг/м^3$.

*Відповідь:* $l = 12\,км$.

**3.** До стальної дротини радіусом 1 мм підвісили вантаж масою 100 кг. На який найбільший кут можна відхилити дротину з вантажем, щоб вона не розірвалася при наступних коливаннях? Межа міцності сталі 785 МПа.

*Відповідь:* $\alpha = 75^\circ 30'$.

**4.** Довжина гумового шланга рівна 50 см, а діаметр становить 1 см. Шланг видовжили на 10 см. Визначити діаметр деформованого шланга. Коефіцієнт Пуассона для гуми $\mu = 0{,}5$.

*Відповідь:* $d = d_0 - \Delta d = 9\ мм$.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Вантаж масою 0,5 кг прив'язали до гумового шнура довжиною $l_0$ = 9,5 см, відхилили на кут $90^0$ і відпустили. Визначити довжину шнура в момент проходження вантажем положення рівноваги. Жорсткість шнура $k$=1 кН/м.

*Відповідь:* $l \approx 11\,\text{см}$

2. З даху будинку звисає стальна дротина довжиною 40 м і діаметром 2 мм. Вантаж, якої максимальної ваги може витримати ця дротина? На скільки видовжиться дротина, якщо на ній підвісили

вантаж масою 70 кг? Чи буде спостерігатися залишкова деформація, якщо вантаж відв'язали від дротини? Межа міцності сталі 785 МПа. Межа пружності сталі 294 МПа.

*Відповідь:* $F = 2{,}45\,кН$, $\Delta l = 4$ см, механічна напруга $\sigma = 221\,МПа$ менша за межу пружності 294 МПа тому залишкової деформації не буде.

3. До залізної дротини довжиною $l_0$ = 50 см і діаметром 1 мм підвісили вантаж масою 1 кг. З якою максимальною частотою можна обертати вантаж у вертикальній площині, щоб дротина не розірвалася при цьому? Межа міцності заліза 294 МПа.

*Відповідь:* $n = 3{,}4\,c^{-1}$

4. Залізна дротина довжиною 5 м висить вертикально. На скільки зміниться об'єм дротини, якщо до неї підвісити вантаж масою 10 кг. Коефіцієнт Пуассона для заліза $\mu = 0{,}3$.

*Відповідь:* $\Delta V = 1\,мм^3$

**Задачі підвищеної складності**

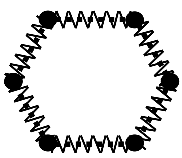


Рис. 1.

**Задача 1.** Шість кульок масою m з'єднані між собою шістьма однаковими невагомими пружинами довжиною L та жорсткістю k так, що утворюють рівносторонній шестикутник (Рис. 1.). З якою частотою має обертатись система так, щоб усі пружини видовжились у 2 рази?

**Задача 2. Куб на пружині.** Важок у формі куба довжина ребра якого *a = 30* см а маса *m = 100* кг приєднано до стелі за допомогою пружини (рис. 2). В початковий момент часу пружина недеформована. Через різке охолодження куб швидко стиснувся так, що всі його сторони зменшились на Δ *a = 5* см. на скільки зміниться тиск куба на підлогу? Жорсткість пружини *k = 2* кН/м. Вважати *g = 9,8* м/с$^2$.

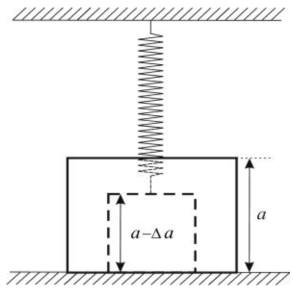



*Рис.* 2

**Задача 3. Блоки й пружини.** Три однакові пружини з коефіцієнтами жорсткості *k* зв'язані між собою кусками невагомої нерозтяжної нитки (рис. 3). Ця нитка проходить через три невагомі блоки, які закріплено до вертикальних стінок за допомогою трьох однакових пружин, з коефіцієнтами жорсткості 3*k*. До кінця нитки

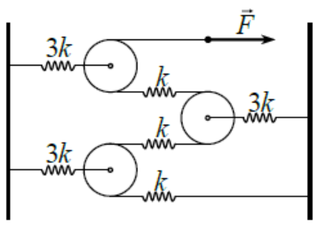
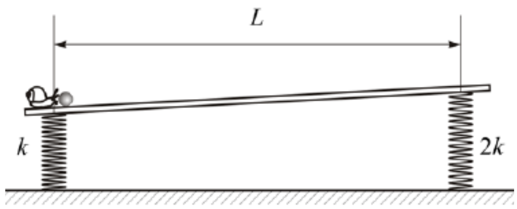



Рис.3

прикладена сила F. На яку відстань зміститься при цьому кінець нитки?




**Задача 4. Равлик і кулька.** По прямій однорідній паличці зліва на право з швидкістю $\upsilon$ повзе маленький равлик і котить перед собою легку маленьку кульку. Маса равлика $m$, маса палички $M$. Паличка лежить на двох вертикальних пружинах, відстань між якими $L$. Коефіцієнт жорсткості лівої пружини $k$, правої $2k$. Довжини пружин в недеформованому стані однакові а їх нижні кінці закріплені на одному горизонтальному рівні. В початковий момент часу равлик знаходиться на лівому кінці палички над лівою пружиною (див. рис.). Визначте, через який час після початку руху равлика кулька почне скочуватися по паличці в напрямку правої пружини. Масою кульки можна знехтувати. Вважати, що жорсткості пружин такі, що кут нахилу палички завжди невеликий.

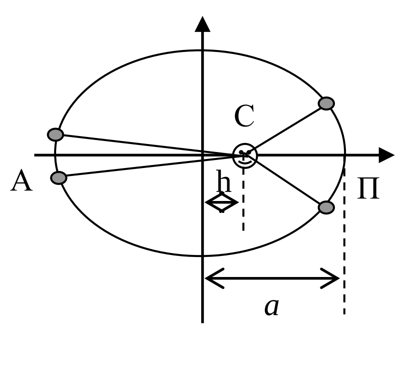
**Задача 5.** До трьох однакових динамометрів, з'єднаних так, як показано на рис.2, підвішений вантаж. Покази верхнього і середнього динамометрів 100 Н і 80 Н, відповідно. Визначте покази нижнього динамометра.

## **Тема – 8.** ***Закон Всесвітнього тяжіння та його застосування***

### Основні поняття, фізичні величини та формули

Аналізуючи результати спостережень Тіхо Браге за рухом планет, Йогану Кеплеру вдалося встановити основні закони руху планет.

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.
2. Радіус-вектор планети за однакові проміжки часу описує однакові площі.
3. Квадрати періодів обертання планет відносяться як куби великих півосей їх еліптичних орбіт $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$.




Точку П орбіти, яка знаходиться найближче до Сонця називають перигелієм, а діаметрально протилежну їй точку А називають афелієм. Швидкість руху планет біля перигелію найбільша, а біля афелію – найменша. Земля рухається навколо Сонця по еліпсу із Заходу на Схід. Ексцентриситет земної орбіти $e = \frac{h}{a}$ становить 0,017. Повний оберт навколо Сонця Земля здійснює за 365 діб 5 год 48 хв 46 с. Першу половини орбіти Земля проходить за 186 діб (з 21 березня по 23 вересня), а другу за 179 діб (з 23 вересня по 23 вересня). Середня швидкість Землі становить 29780 м/с. Відмінність швидкостей у перигелії та афелії складає 950 м/с. Для більшості планет сонячної системи ексцентриситет менший за 0,1. Це вказує на те, що їх орбіти майже колові.

Виходячи із законів Кеплера, Ісаак Ньютон у 1687 році встановив закон всесвітнього тяжіння. $F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$, або $\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$ (1).

Між будь-якими двома матеріальними точками масами $m_1$ та $m_2$ діє сила взаємного притягання, яка прямо пропорційна масам та обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

Коефіцієнт пропорційності $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ називають гравітаційною сталою. Її вперше визначив Кавендіш у 1798 р.

Біля поверхні Землі на тіло діє гравітаційна сила $F_г = G\frac{Mm}{R_З^2}$. Напруженість гравітаційного поля $E_г = \frac{F}{m}$. Для Землі $E_г = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}$, для поверхні Землі $E_г = G\frac{M_З}{R_З^{\ 2}} = g_0$ - прискорення вільного падіння. Перша космічна швидкість – це швидкість колового руху супутника на невеликій відстані від поверхні Землі: $\upsilon_1 = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З}} = \sqrt{R_З g} = 7{,}9\,\frac{км}{с}$.

## Контрольні питання до теми 8

1. *Сформулюйте1-й та 2-й закони Кеплера.*
2. *Сформулюйте 3 закон Кеплера.*
3. Назвіть основні планети Сонячної системи.
4. *Сформулюйте закон Всесвітнього тяжіння.*
5. Запишіть закон Всесвітнього тяжіння для Землі.
6. *Що таке напруженість гравітаційного поля.*
7. Які Вам відомі методи визначення гравітаційної сталої?
8. Як можна визначити масу Землі?
9. *Як можна визначити І космічну швидкість?*

10. Що таке інертна і гравітаційна маса?

**Задачі до теми 8**

1. У деякій точці прямої, що з'єднує центри мас Землі та Місяця, деяке тіло буде притягуватися до них з рівними силами. На якій відстані від поверхні Землі знаходиться ця точка. Середня відстань між центрами Землі та Місяця $3{,}844 \cdot 10^{8}$ м. Радіус Землі 6371,1 км. Маса Землі $M_З = 81{,}3 M_М$. *Відповідь:* $l = 3{,}4 \cdot 10^{5}$ км *від поверхні Землі.*

2. Визначити залежність прискорення вільного падіння $g$ від висоти над поверхнею Землі. На якій висоті прискорення вільного падіння складає 0,25 прискорення вільного падіння на поверхні Землі? Радіус Землі 6371,1 км. *Відповідь: на відстані, яка рівна радіусу Землі.*

3. Визначити залежність прискорення вільного падіння $g$ від глибини шахти. Густину Землі вважати постійною. На якій глибині прискорення вільного падіння складає 0,25 прискорення вільного падіння на поверхні Землі? Радіус Землі 6371,1 км. *Відповідь:* $h = 0{,}75 R_З$

4. Із дроту радіусом $r$ і густиною $\rho$ виготовили кільце радіусом $R$. Визначити силу $F$, з якою це кільце притягує матеріальну точку масою $m$. Точка знаходиться на осі кільця на відстані $L$ від його центра. *Відповідь:* $F = \dfrac{2\pi^2 G m \rho r^2 R L}{\left(R^2 + L^2\right)\sqrt{R^2 + L^2}}$

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. З якою лінійною швидкістю буде рухатися штучний супутник Землі по коловій орбіті на висоті 200 км та 7000 км від поверхні Землі? Знайти період обертання супутника для цих випадків. Радіус Землі 6371,1 км. *Відповідь:* $\upsilon_1 = 7{,}79\,\frac{\text{км}}{\text{с}}, T_1 = 88\,хв$, $\upsilon_2 = 5{,}46\,\frac{\text{км}}{\text{с}}, T_2 = 4\,год\,16\,хв$.

2. Період коливань математичного маятника на вершині гори і на дні шахти однаковий. Яке співвідношення між висотою гори $H$ і глибиною шахти $h$? *Відповідь:* $h = 2H$.

3. Мінімальна відстань штучного супутника Землі від її поверхні становить 183 км, а максимальна –244 км. Визначити період обертання супутника навколо Землі. *Відповідь:* $T = 88\,хв$.

4. Із мідного дроту радіусом $r$ = 1 мм виготовили кільце радіусом $R$= 20 см. Матеріальна точка масою $m$=2 г знаходиться на осі кільця на деякій відстані $L$ від його центра. На якій відстані $L_М$ від центра кільця сила $F_{max}$, з якою це кільце притягує матеріальну точку буде

максимальною. Визначити значення цієї сили. *Відповідь:* $L_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 14{,}1\,\text{см}$, $F = 4{,}35 \cdot 10^{-15}\ H$.

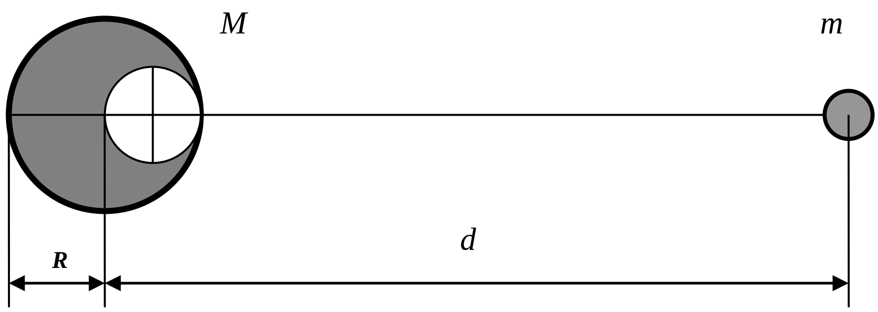
**Задача підвищеної складності**

**Задача 1.** Куля радіусом R і масою M містить кулястий виріз радіусом $\frac{1}{2}R$, центр якого лежить на середині радіуса кулі. На прямій, що проходить через центр кулі і центр вирізаної частини, на відстані d від центра кулі розташована точкова маса m. Обчислити силу взаємного тяжіння між кулею з вирізом і точковою масою m.

Силу взаємного притягання між кулею з вирізом і точковою масою *m*, розташованою на відстані *d* > *R*, можна визначити як різницю сил притягання між суцільною кулею і масою *m* і масою в об'ємі вирізаної частини кулі і масою *m*, тобто застосувавши *метод від'ємної маси*.

Розглянемо випадок, коли маса m розташована з боку вирізу:

Об'єм порожнини дорівнює $\frac{1}{8}$ об'єму кулі. Якщо маса кулі з порожниною *M*, а її об'єм дорівнює $\frac{7}{8}$ об'єму суцільної кулі, то маса $\frac{1}{8}$ об'єму кулі дорівнює $\frac{M}{7}$, звідки маса суцільної кулі (без порожнини) дорівнює $\frac{8}{7}M$.




Сила тяжіння між суцільною кулею та масою *m* визначається так: $F_1 = G\frac{8Mm}{7d^2}$. Сила притягання між „від'ємною" масою порожнини та масою *m* визначається так: $F_2 = G\frac{-Mm}{7\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$. Сила притягання між кулею з порожниною та масою *m* визначається як різниця

$$F_1 + F_2 = G\frac{8Mm}{7d^2} - G\frac{Mm}{7\left(d-\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{1}{7}GMm\left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}\right).$$

## Тема – 9. *Механічна робота, потужність*

## Основні поняття, фізичні величини та формули

*Роботою A*, яку здійснює постійна сила *F*, називається фізична величина, що дорівнює скалярному добутку векторів сили та переміщення: $A=\left(\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}\right)$ (1) або добутку модулів сили і переміщення, помноженому на косинус кута α між векторами сили і переміщення

$$A=F\Delta r\cos\alpha \qquad (2),$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

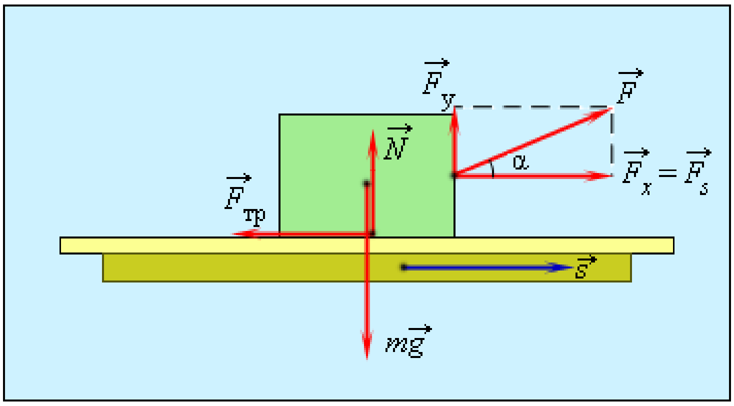



Рис. 1. Робота сили

Робота є скалярною величиною. Вона може бути як позитивною (0≤α <90°), так і негативною (90°<α≤180°). При α=90° робота, що здійснюються силою *F*, дорівнює нулю.

В системі СІ робота вимірюється в *джоулях* (Дж). Джоуль дорівнює роботі, яку здійснює сила в 1Н на переміщенні 1 м у напрямку дії сили: 1Дж = 1Н·1м.

Робота, що здійснюється змінною силою, $A=\int\limits_{L}F(r)\cos\alpha dr$, (3)

або $$A=\int\limits_{L}\left(\vec{F}(r)\cdot d\vec{r}\right) \qquad (4),$$

де інтегрування ведеться уздовж траєкторії, що позначається *L*.

Графічно робота визначається площею криволінійної фігури під графіком $F_s(x)$ (рис. 2).

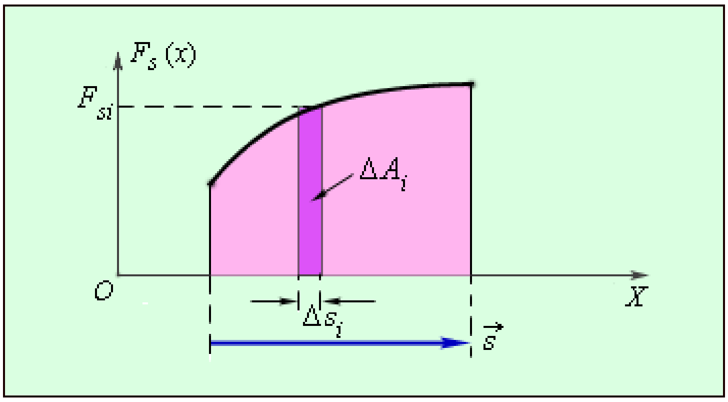



Рис. 2. Графічне визначення роботи

Прикладом сили, модуль якої залежить від координати, може служити сила пружності пружини, що підкоряється закону Гука. Для того, щоб розтягнути пружину, до неї потрібно прикласти зовнішню силу, модуль якої пропорційний подовженню пружини. Залежність модуля зовнішньої сили від координати *x* зображується на графіку прямою лінією (рис. 3).

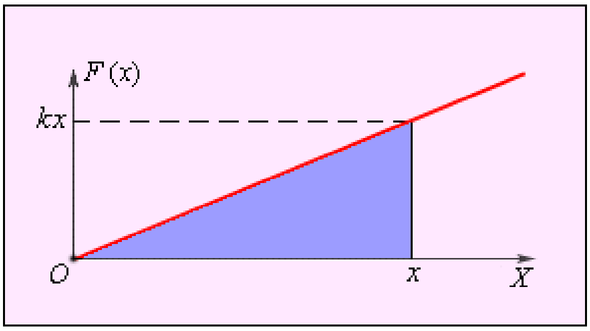



Рис. 3. Залежність модуля зовнішньої сили від координати при розтягуванні пружини

За площею трикутника на рис. 3 можна визначити роботу, яка виконана зовнішньою силою, прикладеною до вільного кінця пружини

$$A = \frac{kx^2}{2} \tag{5}$$

Цією ж формулою виражається робота, здійснена зовнішньою силою при стисненні пружини. В обох випадках робота пружної сили дорівнює по модулю роботі зовнішньої сили і протилежна їй за знаком.

## Потужність. ККД

Щоб характеризувати швидкість здійснення роботи, використовують поняття *потужності*.

*Середня потужність* $N_{ср}$ – фізична величина, що визначається відношенням роботи $\Delta A$, яку здійснюють силою або системою сил протягом кінцевого проміжку часу $\Delta t$, до цього проміжку часу:

$$N_{ср} = \frac{A}{\Delta t}. \qquad (6)$$

*Потужність* (миттєва потужність) $N_м$ – фізична величина, що дорівнює межі, до якої прагне середня потужність при нескінченім зменшенні проміжку часу $\Delta t$

$$N_м = \frac{dA}{dt}, \qquad (7)$$

де $dA$ – елементарна робота, що здійснюються за проміжок часу $dt$.

Важливою є формула, що дає змогу зв’язати потужність, прикладену силу і швидкість тіла

$$N = F\upsilon\cos\alpha. \qquad (8)$$

Одиниця потужності - *ват* (Вт): 1Вт - потужність, при якій за час 1с відбувається робота 1Дж: 1Вт = 1Дж/с.

*Коефіцієнт корисної дії* (ККД) - відношення корисної роботи (потужності) до витраченої, визначається у процентах. $\eta = \frac{A_к}{A_з} \cdot 100\% = \frac{N_к}{N_з} \cdot 100\%$. (9)

## Контрольні питання до теми 9

1. Яка система називається ізольованою?
2. *Як можна знайти імпульс системи?*
3. Закон збереження імпульсу.
4. Що є кількісною мірою будь-якої форми руху матерії?
5. Що є мірою передачі енергії від одного тіла (системи) до іншого тіла (системи)?
6. *Що таке робота, як обчислити роботу відповідної сили?*
7. *Дайте означення середньої потужності.*
8. Які одиниці потужності в СІ?
9. *Дайте означення миттєвої потужності.*
10. *Що таке коефіцієнт корисної дії механізму?*

**Задачі до теми 9**

1. При підніманні вантажу масою 2 кг на висоту 1 м виконується робота 78,5 Дж. З яким прискоренням піднімають вантаж? *Відповідь*: $a = 29{,}4\ м/с^2$.

2. М'яч, який летить із швидкістю 15 м/с, відбивається ударом ракетки у протилежному напрямі зі швидкістю 20 м/с. Визначити зміну імпульсу м'яча, якщо зміна його кінетичної енергії становить 8,75 Дж. *Відповідь*: 3,5 кг·м/с

3. Сила тяги автомобіля змінюється в залежності від пройденого шляху за формулою $F = A + Bs + Cs^2$, де A = 1 кН, B = 0,5 кН/м , C = 0,3 кН/м$^2$ . Визначити роботу сили тяги на ділянці шляху s = 10 м і середню потужність автомобіля, якщо розгін тривав t = 2 с. *Відповідь:A* = 1,35 $10^5$ Дж, *N*= 67,5 кВт.

4. Пружина жорсткістю $k = 500$ Н/м стиснута силою $F = 100\ \text{Н}$ . Визначити роботу *A* зовнішньої сили, що додатково стискує пружину ще на $\Delta l = 2$ см. *Відповідь: A* = 2,1 Дж.

5. Визначити к.к.д. двигуна автомобіля, якщо відомо, що при швидкості руху $\upsilon = 40\ км/год$, двигун споживає 13,5 л бензину на шляху 100 км. Двигун розвиває потужність $N = 12\ \text{кВт}$ . Густина бензину $\rho = 800\ \text{кг/м}^3$, питома теплота згоряння бензину 46 МДж/кг.

*Відповідь*: $\eta = 0{,}22$.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Літак, який піднімається, на висоті $h = 5\ км$ досягає швидкості $\upsilon = 360\ км/год$. У скільки разів робота, виконана проти сили тяжіння при підніманні літака, більша від роботи, яка затрачена на збільшення швидкості літака? *Відповідь*: $A_1/A_2$=10.

2. Яку масу бензину витрачає двигун автомобіля на шляху 100 км, якщо при потужності 11 кВт швидкість його руху становить 30 км/год? К.к.д. двигуна 22%. Питома теплота згоряння бензину 46 МДж/кг. *Відповідь*: *m* = 13 кг

3. Обчислити роботу сили, що залежить від шляху s за формулою $F = a/s^2$, ( *a* = 12 Дж·м) при збільшенні шляху від $s_1$ = 2 м до $s_2$ = 4 м. *Відповідь*: *A*= 3 Дж.

4. Обчислити роботу $A$, здійснену на шляху $S$=12 м лінійно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила $F_1$ = 10 Н, в кінці шляху $F_2$ = 46 Н. *Відповідь*: 336 Дж.

5. При підніманні тіла масою $m = 2\,кг$ протягом 2 с деяка сила F виконує роботу А= 96 Дж. З яким прискоренням піднімають тіло? *Відповідь*: $a$ = 4,4 м/с$^2$

6. Матеріальна точка масою $m$ = 2 кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі $Ox$ згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B$ = - 2 м/с, $C$ = 1 м/с$^2$, $D$ = 0,1 м/с$^3$. Знайти потужність $N$, що розвиває сила в момент часу $t_1$ = 5 с. *Відповідь*: 155 Вт.

7. Автомобіль масою 8 т рухається зі швидкістю 36 км/год. Знайти гальмівний шлях на горизонтальній ділянці шляху, а також на підйомі і на спуску, якщо крутизна ухилу tgα =0,07. Силу опору у всіх випадках вважати рівною 25 кН. *Відповідь*: 16 м; 13 м; 21 м.

**Задача підвищеної складності**

**Задача.** Камінь масою m = 1 кг підняли на деяку висоту і відпустили без початкової швидкості. Через 1 с камінь попав у ящик з піском масою 5 m, який ковзав на гладенькій горизонтальній поверхні з швидкістю $\upsilon = 6\,\frac{м}{с}$.

1) знайти швидкість ящика з каменем;

2) як змінилася сумарна внутрішня енергія каменя, ящика, піску?

### Тема 10. *Енергія. Закон збереження імпульсу та механічної енергії*

#### Основні поняття, фізичні величини та формули

*Енергія* – скалярна величина, що є єдиною мірою різних форм руху матерії і мірою переходу руху матерії з одних форм в інші.

*Механічна енергія* $W$ характеризує рух і взаємодії тіл та є функцією швидкостей і взаємного розташування тіл.

Вона дорівнює сумі кінетичної ($W_К$) і потенціальної ($W_П$) енергій. Одиниця енергії - *джоуль* (Дж).

$$W = W_К + W_П \qquad (1)$$

*Кінетична енергія* матеріальної точки або тіла є мірою їх механічного руху, яка залежить від швидкості їх руху в даній інерційній системі відліку. Кінетична енергія матеріальної точки (або тіла) масою *m*, що рухається поступально зі швидкістю *v*

$$W_K = \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

або

$$W_K = \frac{p^2}{2m}, \qquad (3)$$

де *p* – імпульс тіла.

*Теорема про кінетичну енергію*: зміна кінетичної енергії тіла при його переході з одного стану руху в інше дорівнює роботі всіх сил, діючих на тіло

$$A = \Delta W_K = W_{K2} - W_{K1} \qquad (4)$$

або

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \qquad (5)$$

де *m* - маса тіла; $v_1$ і $v_2$ – відповідно швидкість у стані 1 і у стані 2.

Кінетична енергія тіла масою *m*, що рухається зі швидкістю *v*, дорівнює роботі, яку повинна зробити сила, діюча на тіло, що покоїться, щоб надати йому цю швидкість.

Потенціальна енергія

Механічне взаємодія може здійснюватися як між безпосередньо контактуючими тілами (наприклад, при ударі, терті, тиску один на одного і т. п.), так і між віддаленими тілами. Особлива форма матерії, що зв'язує частинки речовини в єдині системи і передає з кінцевою швидкістю дію одних частинок на інші, називається *фізичним полем* або просто *полем*. Взаємодія між віддаленими тілами здійснюється за допомогою пов'язаних з ними гравітаційних і електромагнітних полів.

Якщо на частинку у кожній точці простору діє деяка сила, то говорять, що ця частинка знаходиться у *силовому полі.* Наприклад, поблизу від поверхні Землі частинка знаходиться у полі сил тяжіння - у кожній точці простору на неї діє сила *mg*.

Поле, діюче на матеріальну точку, називається *стаціонарним* полем, якщо воно не змінюється з плином часу.

Силове поле називається *однорідним,* якщо сили, що діють на тіло в кожній точці поля, однакові за величиною і напрямком.

Силове поле називається *потенціальним*, а діючі у ньому сили - *консервативними*, якщо робота цих сил при переміщенні матеріальної точки залежить тільки від початкового і кінцевого положення точок в просторі і не залежить від форми траєкторії. Консервативними силами є сили тяжіння, пружності. Робота, що здійснюється під дією консервативних сил, у разі руху частинки по замкненому колу дорівнює нулю

$$A = \oint_L F(r)\cos\alpha dr = 0. \tag{6}$$

Усі центральні сили консервативні. Механічні системи, на тіла яких діють лише консервативні сили (внутрішні та зовнішні), називаються консервативними системами.

*Потенціальною енергією* називається частина механічної енергії, що залежить від взаємного розташування частин системи і від положення системи в зовнішньому силовому полі. Потенціальна енергія системи, подібно кінетичній енергії, є функцією стану системи.

Потенціальна енергія тіла в даній точці - скалярна величина, що дорівнює роботі, яку здійснюють консервативні сили при переміщенні тіла з цієї точки в точку, прийняту за нуль відліку потенціальної енергії. Знак потенціальної енергії та її абсолютне значення залежать від вибору нульового рівня. Якщо тіло переходить з точці 1 у точку 2, робота сил поля дорівнює різниці значень потенціальної енергії у цих точках

$$A = -\Delta W_{П} = W_{П1} - W_{П2}. \tag{7}$$

Потенціальна енергія тіла $W_П$ і сила $\vec{F}$, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням

$$\vec{F} = -gradW_П \tag{8}$$

або

$$\vec{F} = -(\vec{i}\,\frac{\partial W_П}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W_П}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W_П}{\partial z}) \tag{9}$$

де - $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні вектори (орти). В окремому випадку, коли поле сил має сферичну симетрію (як, наприклад, гравітаційне поле),

$$F = -\frac{\partial W_П}{\partial r}. \tag{10}$$

Для прикладу отримаємо формулу Потенціальної енергії гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тіл) масами $m_1$ і $m_2$, що знаходяться на відстані $r$ одна від одної.

Сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (11)$$

тоді приріст потенціальної енергії при зміні відстані між частинками від $r_1$ до $r_2$ буде дорівнювати

$$\Delta W_{\text{П}} = W_{\text{П}\,2} - W_{\text{П}\,1} = \int\limits_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2}. \qquad (12)$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами $m_1$ і $m_2$ (або куль з масою, яка розподілена сферично симетрично), що знаходяться на відстані $r$ один від одного

$$W_{\text{П}} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}. \qquad (13)$$

Якщо потенціальну енергію нескінченно віддалених один від одного матеріальних точок прийняти рівною нулю, то $\text{const}=0$.

Потенціальна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння

$$W_{\text{П}} = mgh, \qquad (14)$$

де $h$ – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий для відліку Потенціальної енергії.

Ця формула справедлива за умови $h \ll R$, де $R$ – радіус Землі.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла (стислої або розтягнутої пружини)

$$W_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}, \qquad (15)$$

де $k$ – жорсткість, $x$ – абсолютна деформація.

Потенціальна енергія

Закон збереження енергії в механіці виконується в замкненій системі, в якій діють тільки консервативні сили, і записується у вигляді

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}. \qquad (16)$$

*Повна механічна енергія замкненої системи тіл, що взаємодіють консервативними силами, залишається незмінною.*

Це - фундаментальний закон природи. Він є наслідком однорідності часу - інваріантності фізичних законів щодо вибору початку відліку часу.

Якщо система тіл не замкнена, її повна механічна енергія змінюється на величину роботи зовнішньої сили.

В системі, в якій діють також неконсервативні сили, наприклад, сили тертя, повна механічна енергія системи не зберігається. *Дисипативні* системи - системи, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші (немеханічні) форми енергії.

Однак при "зникненні" механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Таким чином, енергія ніколи на зникає і не з'являється знову, вона лише перетворюється з одного виду в інший. В цьому полягає фізична сутність закону збереження і перетворення енергії - сутність незнищеності матерії та її руху.

## Контрольні питання до теми 10

1. Яка система називається ізольованою?
2. Що є кількісною мірою будь-якої форми руху матерії?
3. Що є мірою передачі енергії від одного тіла (системи) до іншого тіла (системи)?
4. *Наведіть формулу для обчислення кінетичної енергії тіла.*
5. *Як обчислюється потенціальна енергія сил тяжіння?*
6. *Як обчислюється потенціальна енергія пружних сил?*
7. *Де і навіщо вибирають нульовий рівень потенціальної енергії?*
8. *Сформулюйте закон збереження і перетворення механічної енергії для механічної системи.*
9. Як використовується закон збереження енергії для розрахунку космічних швидкостей?
10. Розрахуйте відповідні характеристики при непружному ударі куль, застосувавши закон збереження енергії та закон збереження імпульсу.

**Задачі до теми10.**

1. М’яч, який летить із швидкістю 15 м/с, відбивається ударом ракетки у протилежному напрямі зі швидкістю 20 м/с. Визначити зміну імпульсу м’яча, якщо зміна його кінетичної енергії становить 8,75 Дж.

*Відповідь*: $\Delta p = 3{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м/с}$

2. З башти висотою 25 м горизонтально кидають камінь масою $m = 200\ г$ з швидкістю $\upsilon_0 = 15\ м/с$. Визначити кінетичну та потенціальну енергії каменя через 1 с після початку руху.

*Відповідь*: $W_к = 32{,}2\ \text{Дж}, W_п = 39{,}4\ \text{Дж}$

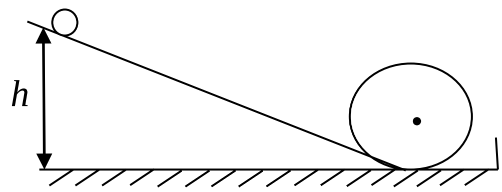
3. Уявімо, що до центра Землі прорили шахту. Яку роботу треба

виконати, щоб тіло масою m=1 кг підняти від центра Землі до поверхні?

*Відповідь*: $A = \frac{mgR}{2}$

4. Яку швидкість потрібно надати тілу, щоб воно покинуло гравітаційне поле Землі? Радіус Землі 6371,1 км. Напруженість гравітаційного поля на поверхні Землі становить 9,80665 Н/кг.

*Відповідь*: $\upsilon_2 = 11{,}2$ км/с




5. Кулька скочується вниз по похилому жолобу, який переходить у мертву петлю радіуса R. З якої мінімальної висоти h треба пустити кульку, щоб вона пройшла цю мертву петлю.

*Відповідь*: $H = \frac{5}{2}R$

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Камінь масою 2 кг падає з деякої висоти протягом 1,43 с. Визначити потенціальну та кінетичну енергії каменя у середній точці шляху.

*Відповідь*: $W_к = W_п = 98{,}1$ Дж.

2. Обчислити роботу *A*, здійснену на шляху *S*=12 м лінійно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила $F_1$ = 10 Н, в кінці шляху $F_2$ = 46 Н.

*Відповідь*: $A = 336$ Дж.

3. Матеріальна точка масою $m$ = 2 кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі *Ox* згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B$ = - 2 м/с, $C$ = 1 м/с$^2$, $D$ = -0,2 м/с$^3$. Знайти потужність *N*, що розвиває сила в момент часу $t_2$ = 5 с.

*Відповідь*: 56 Вт.

4. Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі. Яку найменшу швидкість *v* він повинен розвинути, щоб, виключивши мотор, проїхати по треку, що має форму «мертвої петлі» радіусом *R* = 4 м? Тертям і опором повітря знехтувати.

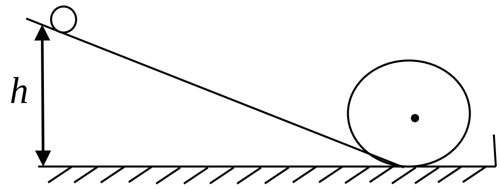
*Відповідь*: 14 м/с.

5. Автомобіль масою 8 т рухається зі швидкістю 36 км/год. Знайти гальмівний шлях на горизонтальній ділянці шляху, а також на підйомі і на спуску, якщо крутизна ухилу tgα =0,07. Силу опору у всіх випадках вважати рівною 25 кН.

*Відповідь*: 16 м; 13 м; 21 м.

6. Дві непружних кулі масами $m_1$ = 2 кг і $m_2$ = 3 кг рухаються зі швидкостями відповідно $\upsilon_1$ = 8 м/с і $\upsilon_2$ = 4 м/с. Визначити збільшення $\Delta U$ внутрішньої енергії куль при їх зіткненні в двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

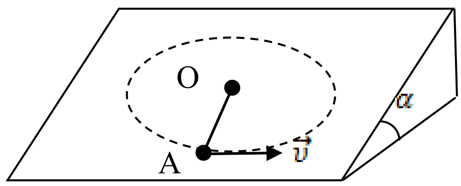
*Відповідь*: 1) 9,6 Дж; 2) 86,4 Дж.




7. Кулька скочується вниз по похилому жолобу, який переходить у мертву петлю радіуса R. У початковий момент кулька перебувала на висоті 2R. На якій висоті кулька відірветься від мертвої петлі?

*Відповідь*: $h = \frac{5}{3}R$

**Задача підвищеної складності**




**Задача.** На гладкій похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45°$ до горизонту в точці О закріплена нитка довжиною $l = 20$ см. До другого кінця нитки прив'язана невелика кулька. В початковий момент кулька знаходиться в положенні рівноваги в точці А. Яку мінімальну швидкість потрібно надати кульці в точці А вздовж похилої площини у горизонтальному напрямі, щоб кулька зробила повний оберт вздовж кола? Яка швидкість кульки у верхній точці траєкторії у цьому випадку? $g$=9,8 м/с$^2$.

**Тема – 11.** ***Динаміка обертального руху абсолютно твердого тіла. Момент сили. Момент інерції різних тіл. Основне рівняння динаміки обертального руху.***

**Основні поняття, фізичні величини та формули**

**Динаміка обертального руху твердого тіла відносно осі. Поняття моменту інерції, моменту сили та моменту імпульсу твердого тіла**

Для опису обертового руху потрібно задати положення осі обертання та кутову швидкість обертання точок тіла в кожний момент часу. При поступальному русі мірою інертних властивостей матеріальної точки (тіла) є маса, а при обертовому русі її аналогом буде момент інерції, який рівний добутку маси матеріальної точки на квадрат віддалі до центра або осі обертання

$$I_i = m_i r_i^2. \qquad (4)$$

У випадку системи матеріальних точок або твердого тіла, що обертається навколо деякої осі OZ, момент інерції буде рівний сумі моментів інерції всіх матеріальних точок, з яких складається дана система

$$I_z = \sum I_{iz} = \sum m_i r_{iz}^2. \qquad (5)$$

де $r_{iz}$ – віддаль і-ої матеріальної точки від осі обертання OZ. Коли ж маса рівномірно розподілена по всьому об'єму тіла, то від суми можна перейти до інтеграла

$$I_z = \int r_z^2 dm. \qquad (6)$$

Шляхом інтегрування можна визначити момент інерції тіл правильної геометричної форми відносно осі, що проходить через центр мас (інерції) даних тіл

Таблиця 1.1

| Тіло | Положення осі обертання | Момент інерції |
|---|---|---|
| Пустотілий тонкостінний циліндр радіусом R | Вісь симетрії | $mR^2$ |
| Суцільний циліндр радіусом R | Вісь симетрії | $1/2mR^2$ |
| Куля радіусом R | Вісь симетрії проходить через центр мас | $2/5mR^2$ |
| Прямий тонкий стержень довжиною *l* | Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його середину | $1/12ml^2$ |
| Прямий тонкий стержень довжиною *l* | Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через один з його кінців | $1/3ml^2$ |

У випадку, коли вісь обертання OZ не проходить через центр інерції С, а віддалена від неї на деяку відстань а (рис.1.), то для визначення моменту інерції тіла I відносно довільної осі OZ використовують **теорему Гюйгенса-Штейнера:** момент інерції тіла *I* відносно довільної осі OZ рівний моменту його інерції $I_0$ відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла С, плюс добуток маси тіла *m* на квадрат віддалі а між осями $I = I_0 + ma^2$. (7)

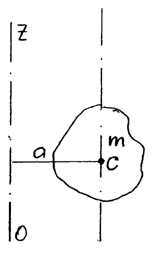



Рис.1

Обертаюча дія сили визначається деякою векторною величиною, яку називають моментом сили. Момент сили $\vec{M}$ відносно центра обертання О рівний векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного від центра обертання до точки прикладання сили, на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\ . \tag{8}$$

Напрям вектора моменту сили $\vec{M}$ (рис.2) визначається за правилом правого гвинта, обертаючи вектор $\vec{r}$ по найкоротшому шляху до суміщення з вектором $\vec{F}$. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$, а його модуль рівний

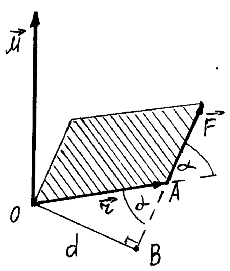



Рис.2.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \cdot \sin\alpha\ . \tag{9}$$

Як видно з (рис.2.) добуток $\mathbf{r} \cdot \sin\alpha = \mathbf{d}$ – це найкоротша віддаль від напрямку дії сили $\vec{F}$ до центра обертання О, яку називають плечем сили d. Моментом сили відносно нерухомої осі OZ (рис.3) є скалярна величина $M_z$, яка рівна проекції вектора $\vec{M}$, відносно точки О на дану вісь.

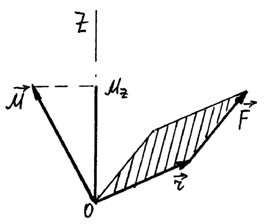



Рис.3.

Нехай точка О є центром обертання деякого тіла (рис.1.10). вона може бути як в самому тілі, так і поза його межами. Запишемо другий закон Ньютона для і-ої точки даного тіла

$$\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{f}_{ik} + \vec{F}_i\ , \tag{10}$$

де $m_i\vec{\upsilon}_i$ – імпульс і-ої точки, $\vec{F}_i$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил, які діють на і-ту точку тіла, $\sum\vec{f}_{ik}$ – сума всіх внутрішніх сил, які діють на і-ту точку тіла з боку всіх інших його точок.

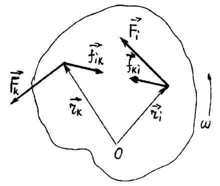



Рис.4.

Після певних перетворень отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i\ , \tag{11}$$

Введемо головний момент зовнішніх сил

твердого тіла відносно точки $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, (12)

а також момент імпульсу твердого тіла відносно точки.

Моментом імпульсу матеріальної точки А відносно нерухомої точки О називається фізична величина, яка знаходиться як векторний добуток: ***L** = [**rp**] = [**r**, m**v**],*

де ***r*** - радіус-вектор, проведений з точки О в точку А; ***p** = m**v*** - імпульс матеріальної точки ( див. рис.); ***L*** - вектор моменту імпульсу.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i . \qquad (13)$$

Тепер маємо $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. (14)

Рівняння (14) - **основний закон динаміки обертального руху тіла відносно центра О:** швидкість зміни моменту імпульсу тіла рівна головному моменту всіх зовнішніх сил відносно центра обертання.

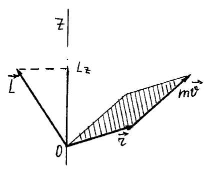


Рис.5

Коли тверде тіло обертається навколо деякої нерухомої осі OZ (рис.5.), що закріплена в двох точках, то основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла запишеться у вигляді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z , \qquad (15)$$

де $L_z$ - момент імпульсу твердого тіла відносно осі

$M_z$ - головний момент сил твердого тіла відносно осі (компоненти $M_x$=$M_y$=0)

При обертанні твердого тіла відносно осі обертання лінійні швидкості $\upsilon_i$ всіх його точок пов'язані з кутовою швидкістю ω співвідношенням

$$\upsilon_i = r_i \cdot \omega . \qquad (16)$$

Тому момент імпульсу можна записати як

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} r_{iz} \cdot m_i \upsilon_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = I_z \omega . \qquad (17)$$

Тоді основний закон динаміки обертового руху відносно осі OZ запишеться у вигляді

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z \quad \text{або} \quad M_x = J\beta_x , \qquad (18)$$

де $\beta_x$ – кутове прискорення при обертовому русі тіла відносно осі OZ.

Таким чином, головний момент зовнішніх сил твердого тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції твердого тіла на його кутове прискорення.

## <u>Контрольні питання до теми 11</u>

1. Який рух називається обертальним?
2. Які основні динамічні характеристики обертального руху твердого тіла?
3. *Що таке момент інерції матеріальної точки?*
4. *Чому дорівнює момент інерції суцільного диска (циліндра) радіусом R?*
5. Чому дорівнює момент інерції обруча радіусом R?
6. Як можна обчислити момент інерції твердого тіла відносно відповідної осі?
7. *Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера.*
8. *Що таке момент імпульсу?*
9. *Запишіть основний закон динаміки для обертального руху?*
10. Назвіть динамічні характеристики поступального руху тіла, які є аналогами до відповідних характеристик обертального руху тіла.

**Задачі до теми 11**

1. Розрахувати моменти інерції: а) для обруча відносно осі, що проходить через його центр; б) для стержня відносно осі, що проходить через його середину; в) для суцільного циліндра відносно його осі; г) для товстостінного циліндра відносно його осі. *Відповідь: г)* $J = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
2. До обода однорідного диска радіусом $R = 20\,\text{см}$ прикладена дотична сила $F = 98{,}1\,\text{Н}$. При обертанні на диск діє момент сили тертя $M_{тр} = 4{,}9\,\text{Н}\cdot\text{м}$. Визначити масу диска, якщо відомо, що він обертається із кутовим прискоренням $\beta = 100\,\text{рад/с}^2$. *Відповідь:* $m = 7{,}36\,\text{кг}$.
3. Дві гирі масами $m_1 = 2\,\text{кг}$ та $m_2 = 1\,\text{кг}$ з'єднані ниткою, яка перекинута через нерухомий блок масою $m = 1\,\text{кг}$. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі, і сили натягу частин нитки, до яких прив'язані гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям знехтувати. *Відповідь:* $a = 2{,}8\,м/с^2$, $F_{н1} = 14\,\text{Н}$, $F_{н2} = 12{,}6\,\text{Н}$
4. Визначити лінійні швидкості центрів мас кулі, суцільного диска та обруча, які скочуються без проковзування з похилої площини.

Висота нахилу площини $h = 50\,\text{см}$. Початкова швидкість усіх тіл $\upsilon_0 = 0$. *Відповідь:* $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + \dfrac{J}{R^2}}}$, $\upsilon_1 = 2{,}65\,м/с$, $\upsilon_1 = 2{,}56\,м/с$, $\upsilon_1 = 2{,}21\,м/с$.

5. Маховик обертається з частотою *n*=8 об/с. Від початку гальмування до повної зупинки маховик зробив *N*=50 обертів. Визначити момент гальмівної сили, якщо момент інерції маховика *I*=10 кг·м$^2$.

*Відповідь:* $M = 40{,}2\,Н \cdot м$

**Задачі для самостійного розв’язування**

1. До обода колеса радіусом 0,5 м і масою 50 кг прикладена дотична сила $F = 98{,}14\,\text{Н}$. Визначити кутове прискорення колеса. Через який час після початку дії сили колесо набуде частоту обертання $n = 100\,об/с$ ? Колесо вважати однорідним диском. *Відповідь:* $\beta = 7{,}8\,рад/с^2$, $t = 80\,с$.

2. На барабан масою $m_0 = 9\,\text{кг}$ намотаний шнур, до кінця якого прив’язаний вантаж масою $m = 2\,\text{кг}$. Визначити прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

*Відповідь:* $a = 3\,м/с^2$.

3. Куля масою $m$ = 10 кг і радіусом $R$ = 20 см обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де B = 4 рад/с$^2$, C = - 1 рад/с$^3$. Знайти закон зміни моменту сил, що діють на кулю. Визначити момент сил $M$ у момент часу $t$ = 2 с. *Відповідь*: -0,64 Н·м.

4. З похилої площини, яка утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом скочується суцільний однорідний диск, обруч. Знайти лінійне прискорення центра мас цих тіл. Порівняти знайдені прискорення із прискоренням тіла, яке зісковзує із цієї площини при відсутності тертя. *Відповідь:* $a_1 = 3{,}27\,м/с^2$, $a_2 = 2{,}44\,м/с^2$, $a = 4{,}9\,м/с^2$.

5. Людина стоїть на лаві Жуковського і ловить рукою м'яч масою $m$ = 0,4 кг, який летить в горизонтальному напрямку з швидкістю $\upsilon$ =20 м/с. Траєкторія м'яча проходить на відстані $r$ = 0,8 м від вертикальної осі обертання лави. З якою кутовою швидкістю почне обертатись лава Жуковського з людиною, яка зловила м'яч, якщо сумарний момент інерції людини і лави рівний 6 кг·м$^2$ ?

6. Вентилятор обертається з частотою *n*=900 об/хв. Після вимкнення двигуна, вентилятор обертається рівносповільнено і від початку гальмування до повної зупинки він зробив *N*=75 обертів.

Робота сил гальмування $A$=44,4 Дж. Визначити момент гальмівної сили та момент інерції вентилятора.

7. Махове колесо починає обертатись з кутовим прискоренням $\beta$ = 0,5 рад/с$^2$ і через $t_1$ = 15 с після початку руху набуває моменту імпульсу $L_1$ = 73,5 кг·м$^2$/с. Знайти кінетичну енергію колеса через час $t_2$ = 20 с після початку руху.

8. Горизонтальна платформа масою $m_2$=100 кг обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $n_1$ =10 об/хв. Людина масою $m_1$ =60 кг стоїть при цьому на краю платформи. Людина переходить від краю платформи до її центра? Платформу вважати однорідним диском, а людину - точковою масою. Яку роботу виконає людина при цьому, якщо радіус платформи $R$ = 3 м?

**Експериментальна задача.** Визначити середній період обертання циліндрика при його русі на горизонтальній площині не надто великих розмірів після скочування з похилої площини.

***Обладнання:*** горизонтальна площина (поверхня столу), похила площина, циліндр (суцільний і порожнистий-трубка), лінійка, штангенциркуль.

**Тема – 12.** ***Робота та енергія при обертальному русі. Закон збереження моменту імпульсу. Закон збереження механічної енергії***

## Основні поняття, фізичні величини та формули

## Робота та енергія при обертальному русі

*Моментом імпульсу* відносно нерухомої точки $O$ називається фізична величина, яка визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \qquad (1)$$

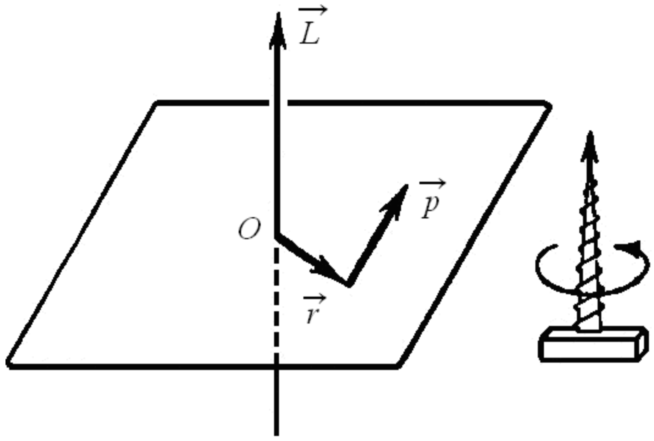



Рис. 1. До визначення моменту імпульсу

*Моментом імпульсу* відносно нерухомої осі $z$ називається скалярна величина $L_z$, що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу, визначеного відносно довільної точки $O$ даної осі. Значення моменту імпульсу $L_z$ не залежить від положення точки $O$ на осі $z$.

При обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі кожна точка тіла рухається по колу постійного радіуса $r$ зі швидкістю, перпендикулярній радіусу (рис. 1.). Момент імпульсу окремої частинки дорівнює $L_i = m_i v_i r_i$ і спрямований по осі в сторону, яка визначається правилом правого гвинта (збігається з напрямком вектора кутової швидкості ω).

Моментом імпульсу твердого тіла відносно якої-небудь осі називається сума моментів імпульсу окремих частинок

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = J_z \omega. \qquad (2)$$

Таким чином, момент імпульсу тіла, що обертається, відносно осі $z$

$$L = J_z \omega. \qquad (3)$$

Одиниці моменту імпульсу в СІ: кг·м$^2$/с.

Основний закон динаміки обертового руху

Якщо взяти похідну від моменту імпульсу (1) за часом, отримуємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r},\vec{p}]}{dt} = [\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}] + [\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{v},\vec{p}] + [\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}]. \qquad (4)$$

З урахуванням того, що $\vec{v} \parallel \vec{p}$, будемо мати $[\vec{v},\vec{p}] = 0$. За другим законом Ньютона $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$, тому маємо:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (5)$$

Це рівняння носить назву *основного рівняння обертального руху*. Воно виконується як для однієї матеріальної точки, так і для будь-якого абсолютно твердого тіла, оскільки таке тіло можна вважати таким, що складається з багатьох матеріальних точок.

У разі постійного моменту інерції основне рівняння динаміки обертового руху приймає вид

$$\vec{M} = J\vec{\beta}, \qquad (6)$$

де $\vec{\beta}$ - кутове прискорення.

Елементарна робота моменту сили *M* при повороті тіла на кут $d\varphi$ може бути обчислена за формулою

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}. \qquad (7)$$

Робота постійного моменту сили *M*, який діє на тіло, що обертається

$$A = M\Delta\varphi, \qquad (8)$$

де $\Delta\varphi$ - кут повороту тіла.

Миттєва потужність *P*, що розвивається при обертанні тіла

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \qquad (9)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (10)$$

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання, складається з енергії поступального і обертального рухів

$$W_к = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \qquad (11)$$

де $\upsilon_c$ - швидкість центру мас тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр мас.

**Закон збереження моменту імпульсу**

У замкнутій системі $\vec{M} = 0$, отже, і $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, тобто $\vec{L} = \text{const}$

*Закон збереження моменту імпульсу*: момент імпульсу замкнутої системи зберігається, тобто не змінюється з часом

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}, \qquad (12)$$

де $\vec{L}_i$ - момент імпульсу $i$ -го тіла що входить до складу системи.

Це - фундаментальний закон природи. Він є наслідком *ізотропності* простору (інваріантності фізичних законів щодо вибору напрямку осей координат системи відліку).

Законом збереження імпульсу пояснюються закони руху планет сонячної системи (закони Кеплера); сплющення планет та Галактик внаслідок їх обертального руху; зміна кутової швидкості тіл внаслідок зміни їх моменту інерції.

Наведемо приклади застосування закону збереження моменту імпульсу:

для двох взаємодіючих тіл

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2', \qquad (13)$$

де $J_1, J_2, \omega_{1,}\ \omega_2$ - моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; $J_1', J_2', \omega_{1,}'\ \omega_2'$- ті ж величини після взаємодії;

для одного тіла, момент інерції якого змінюється

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (14)$$

де $J_1$ і $J_2$- початковий і кінцевий моменти інерції; $\omega_1$ і $\omega_2$ – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

## Контрольні питання до теми 12

1. *Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу?*
2. Наведіть приклади використання закону збереження моменту імпульсу.
3. *Як обчислюється робота при обертальному русі?*
4. Робота постійного моменту сили *M*, який діє на тіло, що обертається.
5. *Миттєва потужність P, що розвивається при обертанні тіла.*
6. *Як обчислюється кінетична енергія при обертальному русі?*
7. *Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання.*
8. Назвіть динамічні характеристики поступального руху тіла, які є аналогами до відповідних характеристик обертального руху тіла.

**Задачі до теми 12**

1. Горизонтальна платформа радіусом $R$ = 2 м та масою $m_2$=100 кг обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $n_1$ =10 об/хв. Людина масою $m_1$ =60 кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою $n_2$ почне обертатись платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Платформу вважати однорідним диском, а людину - точковою масою. *Відповідь*: $n_2$ =22 об/хв.

2. Горизонтальна платформа радіусом $R$ = 1 м та масою $m$= 80 кг обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $n_1$ =20 об/хв. У центрі платформи стоїть людина і тримає у розведених руках гирі. З якою частотою $n_2$ буде

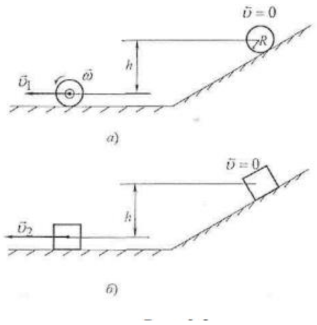
обертатись платформа, якщо людина опустить руки? Момент інерції людини зменшиться від $I_1$=2,94 кг·м$^2$ до $I_2$=0,98 кг·м$^2$. Платформу вважати однорідним диском. *Відповідь*: $n_2$ =21 об/хв.

3. Маховик у вигляді диска масою 50 кг і радіусом 20 см розкрутили до частоти 480 об/хв, потім залишили його самостійно крутитися. Під дією сил тертя маховик зупинився, зробивши 200 обертів. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) кутове прискорення; 3) роботу гальмування; 4) час обертання. ·*Відповідь:* $M$ = -1 Н·м; $A$ = 125,6 Дж; $\beta = -1$ рад/с$^2$; · $t$ =50 с.

4. Маховик обертається за законом, що виражається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , де $A$ = 2 рад; $B$ = 32 рад/с; $C$ = - 4 рад/с$^2$. Знайти середню потужність, яка розвивається діючими на маховик силами при його обертанні до зупинки, якщо момент інерції маховика J = 100 кг· м $^2$ . *Відповідь:* 12,8 кВт.

5. Визначити лінійну швидкість $\upsilon$ центру кулі, що скотилася без ковзання з похилої площини висотою $h$ = 1 м.
*Відповідь*: 3,74 м/с.

6. Визначити швидкість поступального руху центра мас обруча на горизонтальній ділянці шляху, який скочується без ковзання з похилої площини висотою 3 м (рис.). Початкову швидкість обруча вважати такою, що дорівнює нулю. Порівняти обчислену швидкість зі швидкістю обруча, що зісковзує з похилої площини при відсутності тертя.




*Відповідь:* $\upsilon_1$= 5,4м/с; $\upsilon_2$= 7,7м/с.

7. Однорідна мідна куля радіусом 10 см обертається з частотою 2 об/с, навколо осі, яка проходить через її центр. Яку роботу треба виконати, щоб збільшити кутову швидкість обертання кулі вдвічі? Густина міді 8600 кг/м$^3$. *Відповідь:* $A$ = 34,1 Дж.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Колесо, яке обертається рівносповільнено, зменшило частоту обертання з $n_1$ =300 об/хв до $n_2$ =180 об/хв за час 1 хв. Момент інерції колеса $J$=2 кг·м$^2$. Знайти: 1) момент сил гальмування; 2) кутове прискорення; 3) роботу гальмування; 4) число обертів, які зробило колесо за 1 хв. *Відповідь:* $M$ = 0,42 Н·м; $A$ = 630 Дж; $\beta = -0,21$ рад/с$^2$; · $N$ =240 об.

2. Людина стоїть на лаві Жуковського і ловить рукою м'яч масою

$m$ = 0,4 кг, який летить в горизонтальному напрямку з швидкістю $\upsilon$ =20 м/с. Траєкторія м'яча проходить на відстані $r$ = 0,8 м від вертикальної осі обертання лави. З якою кутовою швидкістю почне обертатись лава Жуковського з людиною, яка зловила м'яч, якщо сумарний момент інерції людини і лави рівний 6 кг·м$^2$ ? *Відповідь:* $\omega = 1{,}07\ рад/с$.

3. Вентилятор обертається з частотою $n$=900 об/хв. Після вимкнення двигуна, вентилятор обертається рівносповільнено і від початку гальмування до повної зупинки він зробив $N$=75 обертів. Робота сил гальмування $A$=44,4 Дж. Визначити момент гальмівної сили та момент інерції вентилятора. *Відповідь:* $M$ = 0,094 Н·м; $J$ = 0,01 кг·м$^2$.

4. Махове колесо починає обертатись з кутовим прискоренням $\beta$ = 0,5 рад/с$^2$ і через $t_1$ = 15 с після початку руху набуває моменту імпульсу $L_1$ = 73,5 кг·м$^2$/с. Знайти кінетичну енергію колеса через час $t_2$ = 20 с після початку руху. *Відповідь:* $W_к = \dfrac{\beta L t_2^2}{2t_1} = 490$ Дж.

5. Горизонтальна платформа масою $m_2$=100 кг обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $n_1$ =10 об/хв. Людина масою $m_1$ =60 кг стоїть при цьому на краю платформи. Людина переходить від краю платформи до її центра? Платформу вважати однорідним диском, а людину - точковою масою. Яку роботу виконає людина при цьому, якщо радіус платформи $R$ = 3 м? *Відповідь:* $A$ = 162 Дж.

## Тема 13. *Власні гармонічні коливання механічних систем (пружинний, математичний та фізичний маятники)*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

### Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань та його розв'язок. Амплітуда, фаза, частота, період коливань

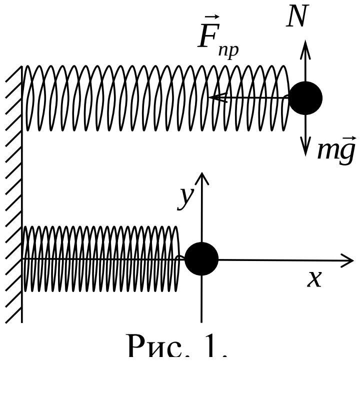


Рис. 1.

Коливаннями називають процеси, які повторюються з певною періодичністю. Розгляд почнемо з власних механічних коливань горизонтального пружинного маятника, який складається з тіла масою $m$, закріпленого до кінця пружини, що жорстко прикріплена до стінки (рис. 1).

Якщо вивести тіло з положення рівноваги, то на нього почне діяти повертаюча сила пружної деформації пружини, яка задається законом Гука $F_{пр} = -kx$. Якщо знехтувати тертям і масою пружини у порівнянні з масою тіла, то при невеликих деформаціях пружини закон руху – II закон Ньютона – запишеться як

$$ma_x = -kx, \tag{1}$$

де $k$ – коефіцієнт пружності (жорсткість пружини), $x$ – зміщення тіла від положення рівноваги, $a_x$ – прискорення вздовж осі $X$. В подальшому усяку силу, пропорційну до зміщення і напрямлену до положення рівноваги, будемо називати квазіпружною, незалежно від її природи. Оскільки прискорення $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, то (1) можна переписати як

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2}$$

У рівнянні (2) $\frac{k}{m} > 0$, тому можна ввести позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{3}$$

де $\omega_0$ називають власною циклічною частотою коливань.

Підставляючи (3) у (2), одержимо ***диференціальне рівняння коливань*** не тільки пружинного маятника, але усякого тіла (матеріальної точки), на яке діє квазіпружна сила:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4}$$

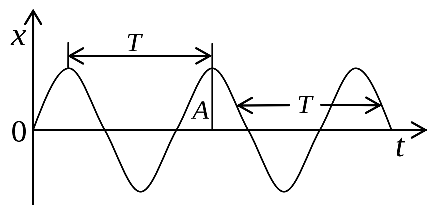


Рис. 2.

Легко показати, що розв'язком цього рівняння є гармонічні функції (рис. 2.)

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ або } x = A\sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{5}$$

Коливання, в яких зміна фізичної величини в залежності від часу відбувається за законом синуса або косинуса, називаються гармонічними. В (5): $A$ – ***амплітуда коливань*** – найбільше значення коливної фізичної величини (у даному випадку, максимальне зміщення від положення рівноваги), $\omega_0$ – власна циклічна частота, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – ***фаза коливань,*** $\varphi_0$ – початкова фаза.

Проміжок часу, протягом якого здійснюється одне повне коливання, називається ***періодом коливань T***. Зрозуміло, що

$[\omega_0(t+T)+\alpha]-[\omega_0 t+\alpha]=\omega_0 T=2\pi$ , оскільки гармонічні функції повторюються через $2\pi$. Звідси ***циклічна частота***

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \tag{6}$$

де $\nu = \frac{1}{T}$ – лінійна частота, як кількість коливань, здійснених за одиницю часу.

Для пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тому ***період коливань***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{7}$$

## Математичний маятник

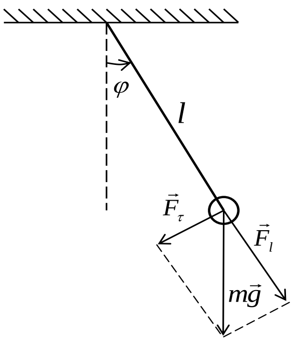



Рис. 3.

Математичний маятник – це підвішена на довгій нерозтяжній невагомій нитці матеріальна точка (тіло, розмірами якого нехтують), що здійснює коливання під дією тангенціальної складової сили тяжіння $\vec{F}_\tau$ (рис. 3) – повертаючої сили

$$F_\tau = -mg\sin\varphi,$$

напрямленої до положення рівноваги. При малих кутах відхилення $\sin\varphi \approx \varphi$ і

$$F_\tau = -mg\varphi, \tag{8}$$

тобто ця сила є квазіпружною Вона забезпечує тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = l\ddot{\varphi}. \tag{9}$$

За II законом Ньютона

$$ma_\tau = F_\tau. \tag{10}$$

Підставляючи (8) і (9) у (10), отримаємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

а ввівши позначення $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, остаточно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \tag{11}$$

Зрозуміло, що це дифрівняння, як і (4), має розв’язки у вигляді гармонічних функцій (5). Отже, при малих кутах відхилень $(\varphi \le 5^\circ)$ математичний маятник здійснює гармонічні коливання з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

## Фізичний маятник

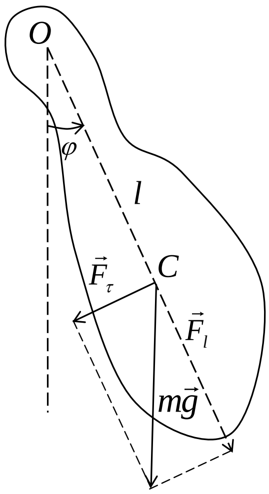



Рис. 4.

Фізичний маятник – це тіло, яке може коливатись навколо осі, що не проходить через його центр мас (рис. 4.), де $O$ – вісь коливання, $OC = l$ – віддаль від осі до центра мас тіла. Повертаючою силою є тангенціальна складова сили тяжіння $F_\tau = -mg\sin\varphi$ , яка при малих кутах відхилення $(\sin\varphi \approx \varphi)$ є квазіпружною:

$$F_\tau = -mg\varphi \,. \qquad (12)$$

Момент цієї сили відносно осі $O$

$$M = F_\tau l = -mgl\varphi \,. \qquad (13)$$

За основним законом динаміки обертального руху

$$M = I\beta = I\ddot{\varphi}\,, \qquad (14)$$

де $I$ – момент інерції фізичного маятника, $\beta = \ddot{\varphi}$ – кутове прискорення. Підставляючи (13) у (14), одержимо

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \,. \qquad (15)$$

Вираз (15) являє собою ***диференціальне рівняння*** гармонічних коливань фізичного маятника з власною циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

або

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\frac{I}{ml}}},$$

де $\frac{I}{ml} = L$ – *зведена довжина фізичного маятника*.

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \,.$$

Зведена довжина фізичного маятника $L$ – це довжина такого математичного маятника, який має такий самий період коливання, як і даний фізичний.

## Енергія гармонічних коливань

Оскільки квазіпружна сила, що є причиною гармонічних коливань, є потенціальна, то у випадку механічних коливань коливне тіло має як кінетичну, так і потенціальну енергію. Повна енергія дорівнює їх сумі

$$W = W_k + W_n.$$

З врахуванням (5) для матеріальної точки отримаємо кінетичну енергію

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m(\dot{x})^2}{2} = \frac{m}{2} A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha). \quad (16)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання,

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{m}{2} A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (17)$$

Додаючи (16) і (17), отримаємо повну енергію

$$W = \frac{m}{2} A^2\omega^2.$$

Отже, енергія гармонічних коливань пропорційна до квадрату амплітуди і не залежить від часу.

**Швидкість і прискорення при гармонічному коливальному русі. Роль початкових умов**

Залежність координати від час при гармонічних коливаннях: $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ (1). Миттєва швидкість: $\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$ (2). Максимальне значення швидкості $\upsilon_{макс} = A\omega$. Миттєве прискорення: $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$ (3). Максимальне значення прискорення $a_{макс} = A\omega^2$. Можемо знайти амплітуду коливань. Із (2) знаходимо . $\frac{\upsilon}{\omega} = -A\sin(\omega t + \alpha)$ (4) . Піднесемо (1) та (4) до квадрату і додамо їх. $x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2\left(\cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha)\right)$ або $x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2$ . Тоді $A = \sqrt{x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2}}$ . Початкову фазу знайдемо з початкових умов: $x_0 = A\cos\alpha$, $\upsilon_0 = -A\omega\sin\alpha$. Поділимо друге рівняння на перше. Тоді $tg\,\alpha = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega}$.

## Контрольні питання до теми 13

1. Який рух називається коливальним?
2. Умови існування коливального руху.
3. *Запишіть диференціальне рівняння для власних коливань пружинного маятника.*
4. Дайте йому повну характеристику.

5. *Запишіть розв'язок цього диференціального рівняння.*

6. *Що таке: зміщення, амплітуда, початкова фаза, фаза, циклічна частота? Формула для періоду коливань пружинного маятника.*

7. Як визначити швидкість та прискорення точки у випадку гармонічних коливань?

8. Що є початковими умовами для цих коливань? Скільки їх? Яка роль початкових умов?

9. *Що таке математичний маятник? Формула для періоду коливань.*

10. *Що таке фізичний маятник? Формула для періоду коливань.*

11. Як обчислити енергію тіла, що здійснює власні гармонічні коливання?

**Приклади задач із розв'язуванням**

Матеріальна точка масою $m$ = 0,002 кг здійснює гармонічні коливання на пружині. В деякий момент часу t зміщення точки x = 5 см, швидкість $\upsilon = 0{,}2$ м/с , прискорення $a = -80$ см/с$^2$. Знайдіть циклічну частоту $\omega$ , період $T$, амплітуду $A$, фазу коливань $\varphi$ в заданий момент часу та повну енергію $E$ точки.

| Дано: |
|---|
| $m$ =0,002 кг<br>$x$ = 5 см<br>$\upsilon = 0{,}2$ м/с<br>$a = 80$ см/с$^2$ |
| $\omega$- ?, $T$ -?, $A$-?,<br>$\varphi$-?, $E$-? |

Рівняння гармонічних коливань: $x = A\sin\omega t$ (1). Закон зміни швидкості $\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$.(2). Прискорення $a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$ (3). Із рівняння (3) знаходимо циклічну частоту $\omega^2 = -\frac{a}{x}$, $\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}}$. .

Період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,(\text{с}) = 1{,}57$ с

Із рівняння (2) знаходимо: $\frac{\upsilon}{\omega} = A\cos\omega t$ (4). Підносимо рівняння (1) та (4) до квадрату і додаємо їх. Маємо $x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2$ . Звідси $A = \sqrt{x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2}}$ . Виконаємо обчислення: $A = \sqrt{0{,}05^2 + \frac{0{,}2^2}{16}} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2} = 0{,}05\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{20}\,(\text{м}) = 0{,}0707$ м.

Фазу коливань $\varphi$ в заданий момент часу знаходимо із рівняння коливань (1): $\sin\omega t = \frac{x}{A}$, $\varphi = \omega t = \arcsin\left(\frac{x}{A}\right)$. $\varphi = \arcsin\frac{0{,}05\cdot 20}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\,(\text{рад})$

Знайдемо повну енергію Е гармонічних коливань. Вона буде рівна сумі кінетичної $E_к$ та потенціальної $E_п$: .

Виконаємо обчислення: $E = \dfrac{2\cdot 10^{-3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{20}\cdot 4\right)^2}{2} = \dfrac{2\cdot 10^{-3}}{25} = 8\cdot 10^{-5}\ (\text{Дж}) = 80\ \text{мкДж}$

**Задачі до теми 13**

1. Точка здійснює гармонічні коливання. У початковий момент часу точка проходить положення рівноваги. Через яку частку періоду швидкість точки становитиме половину від максимальної? *Відповідь:* $t = \dfrac{T}{6}$.

2. Математичний маятник, що має довжину 2,5 м і масу 0,5 кг, коливається з амплітудою 10 см. Написати рівняння руху: X=X(t). У початковий момент часу відхилення маятника є максимальним. Виразити залежність тангенціальної складової сили від часу Fx=Fx(t). Визначити максимальне значення цієї сили та її значення через чверть періоду. *Відповідь:* $x = 0{,}1\cos 2t$ ; $F = -m\omega^2 A\cos\omega t = -0{,}2\cos 2t\ (H)$ ; $F_{\max} = 0{,}2\ H$ ; $F\left(\dfrac{T}{4}\right) = 0$.

3. Написати рівняння гармонічних коливань, якщо максимальне прискорення точки становить 49,3 см/с$^2$, період коливань – 2 с. Зміщення точки від положення рівноваги у початковий момент часу становить 25 мм. *Відповідь:* $x = 5\sin(\pi t + \pi/6)\,\text{см}$.

4. Однорідний диск, радіус якого дорівнює 50 см, підвішують на гвіздку, на якому він може коливатись без тертя. Отвір, у який вставлений гвіздок, пробитий на краю диска перпендикулярно до площини диска. Яка частота власних коливань диска? *Відповідь:*576 мГц.

5. Однорідний стрижень довжиною $l = 0{,}5\ м$ здійснює малі коливання у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, яка проходить через його верхній кінець. Визначити період коливань стрижня. *Відповідь:* *T*=1,16 с.

**Задачі для самостійного розв’язування**

1. Точка здійснює гармонічні коливання. У початковий момент часу відхилення точки є максимальним. Період коливань *T*= 24 с. Через який час від початку коливань зміщення точки становитиме половину від максимального? *Відповідь:* $t = 4\ c$.

2. Точка здійснює гармонічні коливання. Період коливань 2 с, амплітуда – 50 мм. У початковий момент часу точка перебувала у положенні рівноваги. Визначити швидкість точки у момент часу, коли її зміщення від положення рівноваги становило 25 мм. *Відповідь:* $\upsilon = 13{,}6\ см/с$.

3. Повна енергія тіла, яке здійснює гармонічні коливання становить 30 мкДж; максимальна сила, яка діє на тіло рівна 1,5 мН. Написати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань *T*= 2 с, а початкова фаза $\varphi = \frac{\pi}{3}$. *Відповідь:* $x = 0{,}04\sin(\pi t + \pi/3)\,\text{м}$.

4. На кінцях вертикального стрижня закріплені два невеликі вантажі. Центр мас системи вантажів розміщений нижче середини стрижня на відстані $d = 5\ см$. Період малих коливань стрижня з вантажами навколо горизонтальної осі, яка проходить через середину стрижня, $T = 2\ с$. Визначити довжину стрижня. Визначити відношення мас вантажів. Масою стрижня знехтувати порівняно з масами вантажів. *Відповідь:* $l = T\frac{\sqrt{gd}}{\pi} = 0{,}446\ м.$.

Маємо фізичний маятник. Період коливань фізичного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$ $T^2 = 4\pi^2\frac{J}{mgd}$. Маса маятника рівна сумі мас вантажів $m = m_1 + m_2$, момент інерції маятника $J = (m_1 + m_2)\left(\frac{l}{2}\right)^2$. $T^2 = 4\pi^2\frac{(m_1+m_2)l^2}{4(m_1+m_2)gd} = \pi^2\frac{l^2}{gd}$. Тоді $l = \frac{T\sqrt{gd}}{\pi}$. Виконаємо обчислення $l = \frac{2\cdot\sqrt{9{,}8\cdot 0{,}05}}{3{,}14} = 0{,}446\ (\text{м})$

**Задачі підвищеної складності**

1. На кінцях вертикального стрижня закріплені два невеликі вантажі. Центр мас системи вантажів розміщений нижче середини стрижня на відстані $d = 5\ см$. Період малих коливань стрижня з вантажами навколо горизонтальної осі, яка проходить через середину стрижня, $T = 2\ с$. Визначити довжину стрижня. Визначити відношення мас вантажів. Масою стрижня знехтувати порівняно з масами вантажів.

**Розв'язування.** Маємо фізичний маятник. Період коливань фізичного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$ $T^2 = 4\pi^2\frac{J}{mgd}$. Маса маятника рівна сумі

мас вантажів $m = m_1 + m_2$, момент інерції маятника $J = (m_1 + m_2)\left(\frac{l}{2}\right)^2$.
$T^2 = 4\pi^2 \frac{(m_1 + m_2)l^2}{4(m_1 + m_2)gd} = \pi^2 \frac{l^2}{gd}$. Тоді $l = \frac{T\sqrt{gd}}{\pi}$. Виконаємо обчислення

$l = \frac{2 \cdot \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}05}}{3{,}14} = 0{,}446\ (\text{м})$

*Відповідь:* $l = T\frac{\sqrt{gd}}{\pi} = 0{,}446\ м.$.

3. Знайти амплітуду гармонічних коливань частинки, якщо на відстанях $x_1$ і $x_2$ від положення рівноваги її швидкості рівні відповідно $\upsilon_1$ і $\upsilon_2$.

*Розв'язування:* Рівняння гармонічних коливань: $x = A\sin\omega t$ тоді закон зміни швидкості $\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t$. Записуємо ці рівняння для двох станів $x_1 = A\sin\omega t_1$ або $\frac{x_1}{A} = \sin\omega t_1$ (1), $\frac{x_2}{A} = \sin\omega t_2$ (2). Аналогічно для швидкостей: $\frac{\upsilon_1}{A\omega} = \cos\omega t_1$ (3), $\frac{\upsilon_2}{A\omega} = \cos\omega t_2$ (4). Підносимо рівняння до квадрату і додаємо попарно (1) та (3) і (2) та (4). Маємо $\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{\upsilon_1^2}{A^2\omega^2} = 1$ та $\frac{x_2^2}{A^2} + \frac{\upsilon_2^2}{A^2\omega^2} = 1$. $\frac{\upsilon_1^2}{A^2\omega^2} = 1 - \frac{x_1^2}{A^2}$ $\frac{\upsilon_2^2}{A^2\omega^2} = 1 - \frac{x_2^2}{A^2}$ Поділимо два останні рівняння $\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$. 4, $A^2(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) = \upsilon_1^2 x_2^2 - \upsilon_2^2 x_1^2$

$$A = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 x_2^2 - \upsilon_2^2 x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}}$$

## Тема 14. З*гасаючі коливання. Логарифмічний декремент згасання. Вимушені коливання*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

### Згасаючі коливання

Реальні коливання відбуваються в умовах дії сил тертя (опору). І тому реальні коливні системи є дисипативними, в яких механічна енергія частково втрачається, що призводить до поступового зменшення амплітуди, тобто до згасання коливань. Для спрощення обмежимось випадком лінійного коливання матеріальної точки у в'язкому середовищі. Якщо швидкість коливного руху невелика, то сила опору пропорційна до швидкості і напрямлена проти швидкості, тобто

$$f_{on} = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt} = -rx',$$

де $r$ – коефіцієнт опору.

Тоді за другим законом Ньютона

$$mx'' = -kx - rx'. \qquad (1)$$

Розділивши рівність (1) на $m$, отримаємо

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \qquad . \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \frac{r}{m} = 2\beta,$$

$\beta = \dfrac{r}{2m}$ – ***коефіцієнт згасання***.

Рівняння (2) матиме вигляд диференціального рівняння згасаючих коливань:

$$x'' + 2\beta\dot{x}' + \omega_0^2 x = 0. \qquad (3)$$

Підстановкою

$$x = z \cdot e^{-\beta t} \qquad (4)$$

приведемо рівняння (3) до простішого вигляду (тут $e$ – основа натурального логарифму). Заміну змінних у (3) проведемо за допомогою рівнянь

$$\begin{aligned} x' &= e^{-\beta t} \cdot z' - \beta e^{-\beta t} \cdot z, \\ x'' &= e^{-\beta t} \cdot z'' - 2\beta e^{-\beta t} \cdot z' + \beta^2 e^{-\beta t} \cdot z. \end{aligned} \qquad (5)$$

Підставляючи (5) і (4) у (3), отримаємо

$$z'' - 2\beta z' + \beta^2 z + \omega_0^2 z - 2\beta^2 z + 2\beta\dot{z}' = 0$$

або

$$z'' = -(\omega_0^2 - \beta^2)z. \qquad (6)$$

У випадку, коли $\omega_0^2 > \beta^2$, можна ввести заміну $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. (7) Тоді рівняння (6) набуде вигляду

$$z'' + \omega^2 z = 0, \qquad (8)$$

розв'язком якого є

$$z = A_0 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (9)$$

У випадку, коли $\beta^2 > \omega_0^2$, рух матеріальної точки буде неперіодичним (аперіодичним).

Підставляючи (9) у (4), одержимо рівняння руху коливної точки під дією квазіпружної сили та сили опору, тобто ***рівняння згасаючих коливань***:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha). \qquad (10)$$

З (10) видно, що ***амплітуда коливань*** зменшується з часом за експоненціальним законом (рис. 1):

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (11)$$

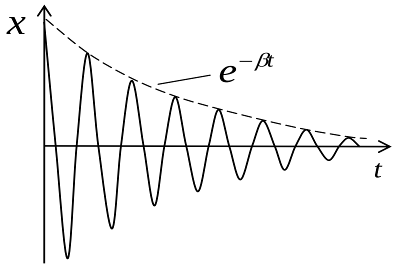


Рис. 1.

Фізично $\beta$ характеризує швидкість зменшення амплітуди і називається коефіцієнтом згасання. Можна показати, що $\beta$ чисельно дорівнює оберненій величині ***часу релаксації*** $\tau$, протягом якого амплітуда зменшується в $e$ раз. Дійсно, якщо $\frac{A_0}{A} = e$, то із (11) слідує, що

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta\tau} = e.$$

Звідси

$$\beta\tau = 1 \quad \text{або} \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Знайдемо відношення двох амплітуд коливань, визначених через період: $\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$

Це відношення є сталою величиною і називається ***декремент згасання***.

Зручно користуватись поняттям ***логарифмічного декременту згасання*** $\lambda$, як натурального логарифму відношення двох послідовних амплітуд (через період $T$):

$$\lambda = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Згасання коливань супроводжується втратами енергії коливного процесу. Відношення двох енергій коливань, визначених через період: $\frac{W(t)}{W(t+T)} = e^{2\beta T}$. Це слідує із того, механічна енергія пропорційна квадрату амплітуди: $W = \frac{m}{2}A^2\omega^2$.

У техніці використовують величину, яка називається добротність: $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T}$

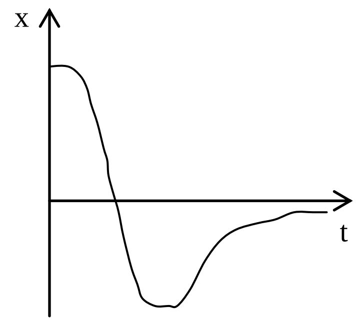
Проаналізуємо співвідношення (7). ***Циклічна частота згасаючих коливань*** $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$.

Період згасаючих коливань: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4mk}}}$.

1) Якщо $r = 0$, то $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2) Згасаючі коливання можливі, якщо $\frac{r^2}{4mk} < 1$ або $r < \sqrt{4mk}$.

3) Якщо $\frac{r^2}{4mk} \geq 1$, то $T \to \infty$. Коливання не виникає, система, виведена з положення рівноваги, повільно повертається до положення рівноваги, але через нього проходити не буде. Такі системи для згасання коливань використовують в техніці, які називають демпферами. Прикладом такої системи є автомобільний амортизатор.




## Вимушені коливання

Для того, щоб в реальній коливній системі забезпечити незгасаючі коливання, необхідно постійно до неї підводити енергію ззовні. І тому розглянемо коливання матеріальної точки, на яку, крім квазіпружної сили $f_{пр} = -kx$ і сили опору $f_{оп} = -rx'$, діє додаткова періодична змушувальна сила

$$F_{вм} = F_0 \cos\omega_1 t,$$

де $\omega_1$ – частота змушувальної сили.

Тоді за другим законом Ньютона маємо

$$mx'' = -rx' - kx + F_0 \cos\omega_1 t. \qquad (12)$$

Перепишемо рівняння (12) у вигляді

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_1 t$$

або

$$x'' + 2\beta\dot{x}' + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega_1 t, \qquad (13)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{r}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати як суму розв'язку однорідного рівняння (3) і часткового розв'язку неоднорідного рівняння: $x = x_{од} + x_{н.од}$. Через деякий проміжок часу $x_{од} \to 0$. І тому

$$x \equiv x_{н.од} = A\cos(\omega_1 t + \alpha). \qquad (14)$$

Отже, вимушені коливання здійснюються з змушувальною частотою $\omega_1$. Для знаходження амплітуди $A$ і початкової фази $\alpha$ продиференціюємо двічі (14):

$$x' = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha), \qquad x'' = -A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \alpha). \qquad (15)$$

Підставляючи (14) і (15) у (13), отримаємо:

$$-A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \alpha) + A\omega_0^2 \cos(\omega_1 t + \alpha) - 2A\beta\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha) = f_0 \cos\omega_1 t,$$

а розкриваючи тригонометричні функції від складного аргументу:

$$\begin{aligned} &-A\omega_1^2(\cos\omega_1 t\cos\alpha - \sin\omega_1 t\sin\alpha) + A\omega_0^2(\cos\omega_1 t\cos\alpha - \sin\omega_1 t\sin\alpha) - \\ &-2A\beta\omega_1(\sin\omega_1 t\cos\alpha + \cos\omega_1 t\sin\alpha) = f_0\cos\omega_1 t. \end{aligned} \qquad (16)$$

об рівняння (16) перетворилося в тотожність, потрібно, щоб суми коефіцієнтів при $\cos\omega_1 t$ в обох частинах рівності були рівні і суми коефіцієнтів при $\sin\omega_1 t$ в обох частинах були також рівні. Це означає, що

$$A(\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos\alpha - 2A\beta\omega_1 \sin\alpha = f_0, \qquad (17)$$

$$A(\omega_1^2 - \omega_0^2)\sin\alpha - 2A\beta\omega_1 \cos\alpha = 0. \qquad (18), \text{ або}$$

$$A(\omega_0^2 - \omega_1^2)\sin\alpha + 2A\beta\omega_1 \cos\alpha = 0 \qquad (18\text{ а})$$

Із рівняння (18) отримаємо вираз для початкової фази вимушених коливань:

$$tg\alpha = -\frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \qquad (19)$$

Підносячи до квадрату рівняння (17) і (18а) та додаючи отримані вирази, одержимо:

$$A^2\left[(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2\right] = f_0^2$$

Звідси амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}}. \qquad (20)$$

Проаналізуємо аналітично і графічно (рис. 2) залежність цієї величини від змушувальної частоти $\omega_1$ при різних значеннях коефіцієнту згасання $\beta$. Зокрема:

1) при $\omega_1 \to 0$ $\quad A \to A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$

2) при $\omega_1 \to \infty$ $\quad A \to 0$

3) при $\omega_1 \to \omega_0$; $\beta = 0$ $\quad A \to \infty$

Досягнення максимального значення амплітуди вимушених коливань, коли змушувальна частота $\omega_1$ наближається до власної частоти $\omega_0$, називається резонансом.

Для знаходження резонансної частоти при $\beta \neq 0$ знайдемо мінімум підкореневого виразу рівняння (20). Для цього прирівняємо до нуля похідну від цього виразу по $\omega_1$:

$$-2\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)\cdot 2\omega_1+8\beta^2\omega_1=0 .$$

Оскільки $\omega_1 \neq 0$, то знаменник (20) досягає мінімуму при

$$\omega_1^2=\omega_0^2-2\beta^2 .$$

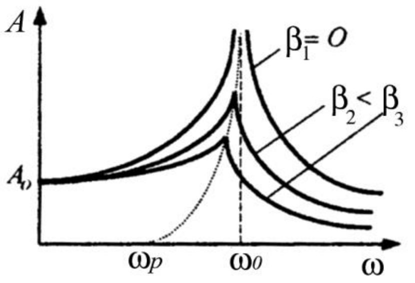



Рис. 2.

Отже, резонансна частота

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} .$$

Резонансна (максимальна) амплітуда досягає значення

$$A_{рез}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} .$$

Зрозуміло, що резонанс тим гостріший, чим менший коефіцієнт *згасання*. На практиці слід враховувати явище резонансу, оскільки в техніці він в одних випадках відіграє позитивну роль, а в інших – негативну.

## Контрольні питання до теми 14

1. Які коливання називаються згасаючими?
2. *Запишіть рівняння згасаючих коливань.*
3. *Чому дорівнює коефіцієнт згасання?*
4. *Формула амплітуди згасаючих коливань.*
5. *Що таке декремент згасання?*
6. *Що таке час релаксації?*
7. *Що таке логарифмічний декремент згасання?*
8. Запишіть формулу для періоду згасаючих коливань
9. *Чому дорівнює циклічна частота у випадку згасаючих коливань?*
10. Які коливання називаються вимушеними?
11. Чому дорівнює амплітуда і початкова фаза вимушених коливань?
12. Що таке резонанс? Який зв’язок резонансної частоти з частотою власних коливань?

**Приклади задач із розв’язуванням**

Математичний маятник здійснює згасаючі коливання. Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 0{,}2$ . У скільки разів зменшиться повне прискорення маятника у його крайньому положенні за одне повне коливання?

**Розв'язування:** Рівняння згасаючих коливань: $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$. Для знаходження прискорення маятника продиференціюємо двічі за часом це рівняння. $\upsilon = \frac{dx}{dt} = A_0 e^{-\beta t}\left(-\beta cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha)\right)$.

$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A_0 e^{-\beta t}\left(\left(\omega^2 - \beta^2\right)\cos(\omega t + \alpha) - 2\beta\omega\sin(\omega t + \alpha)\right)$. Знаходимо значення прискорення у моменти часу: $t_1 = 0$ та $t_2 = T$.

$a_1 = -A_0 e^0\left(\left(\omega^2 - \beta^2\right)\cos\alpha - 2\beta\omega\sin\alpha\right)$,

$a_2 = \frac{d\upsilon}{dt} = -A_0 e^{-\beta T}\left(\left(\omega^2 - \beta^2\right)\cos(2\pi + \alpha) - 2\beta\omega\sin(2\pi + \alpha)\right)$. Тоді відношення прискорень:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-A_0 e^0\left(\left(\omega^2 - \beta^2\right)\cos\alpha - 2\beta\omega\sin\alpha\right)}{-A_0 e^{-\beta T}\left(\left(\omega^2 - \beta^2\right)\cos(2\pi + \alpha) - 2\beta\omega\sin(2\pi + \alpha)\right)} = e^{\beta T} = e^{\lambda} \quad \frac{a_1}{a_2} = e^{0,2} = 1{,}22$$

*Відповідь:* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_1}{A_2} = e^{\lambda} = e^{0,2} = 1{,}22$.

**Задачі до теми 14**

1. Період згасаючих коливань *T*= 4 с, логарифмічний декремент згасання $\lambda = 1{,}6$, початкова фаза $\varphi = 0$. При $t = \frac{T}{4}$ зміщення точки рівне $x = 4{,}5\text{ см}$. Написати рівняння цього коливного руху. *Відповідь*: $x = 6{,}7e^{-0{,}4t}\sin\frac{\pi}{2}t\ (\text{см})$

2. Знайти логарифмічний декремент згасання $\lambda$ математичного маятника, якщо за час 1 хв амплітуда коливань зменшилася у два рази. Довжина маятника 1 м. *Відповідь:* $\lambda = 0{,}023$.

3. Математичний маятник довжиною $l = 24{,}7\text{ см}$ здійснює згасаючі коливання. Через який час енергія коливань маятника зменшиться у 9,4 рази? Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 0{,}01$. *Відповідь*: $t = 120\ c$.

4. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за 1 хв зменшилася у 2 рази. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за час 3 хв? *Відповідь*: у 8 разів.

5. Енергія коливань камертона протягом 5 с зменшилася в 20 разів.

Знайти логарифмічний декремент згасання $\lambda$. Частота коливань камертона 440 Гц. *Відповідь:* $\lambda = \frac{\ln 20}{2\tau\nu} = 0{,}007$

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Рівняння згасаючих коливань має вигляд: $x = 5\, e^{-0{,}25t} \sin \frac{\pi}{2} t\ (\text{м})$. Визначити швидкість точки, яка коливається, у моменти часу: 0, *T*, 2*T*, 3T і 4T. *Відповідь:* $\upsilon = 5\, e^{-0{,}25t} \left( \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t - 0{,}25 \sin \frac{\pi}{2} t \right) (\text{м/с})$ $v_0$=7,85 м/с, $v_1$=2,89 м/с, $v_2$=1,06 м/с, $v_3$=0,39 м/с, $v_4$=0,14 м/с.

2. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника $\lambda = 0{,}2$. У скільки разів зменшилася амплітуда коливань за одне повне коливання маятника? *Відповідь*: $\frac{A_1}{A_2} = e^{\lambda} = e^{0{,}2} = 1{,}22$

3. Математичний маятник довжиною $l = 0{,}5$ м вивели із положення рівноваги та відпустили. При першому коливанні він відхилився на $x_1 = 5$ см, а при другому (в ту ж сторону) – на $x_2 = 4$ см. Визначити час релаксації, тобто час на протязі якого амплітуда зменшилася у *e* разів. *Відповідь:* $\tau = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\ln \frac{x_1}{x_2}}$

## Тема 15. *Хвилі. Рівняння плоскої хвилі*

### Основні поняття, фізичні величини та формули

### Механічні хвилі

Поширення коливань у пружному середовищі зумовлене поширенням деформації середовища під дією джерела хвилі. І тому швидкість поширення хвилі повинна визначатись пружними характеристиками середовища.

Зокрема, швидкість поздовжніх хвиль в твердих тілах $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, (1)

в рідинах і газах $\upsilon = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, (2

де *E* – модуль Юнга, *K* – модуль всебічного стиску.

Швидкість поперечних хвиль в твердих тілах $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$,

(3)

де $G$ – модуль зсуву.
Швидкість звуку в газах

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ – відношення молярних чи питомих теплоємностей при сталих тиску та об'єму, $R$ – універсальна газова постійна, $T$ – термодинамічна температура, $\mu$ – молярна маса газу.

Хвиля – це процес поширення коливань у середовищі. Якщо коливання створити в деякій обмеженій частині середовища, то внаслідок наявності зв'язку між молекулами середовища коливання будуть охоплювати все середовище, тобто будуть поширюватись у середовищі.

Частинки середовища, в якій поширюється хвиля, не переносяться хвилею, вони лише здійснюють коливання навколо положення рівноваги. Хвилі, в яких частинки коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, називаються *поперечними*. Хвилі, в яких частинки коливаються вздовж поширення хвилі, називаються *поздовжніми*. Поперечні хвилі поширюються в середовищах, де має місце деформація зсуву, тобто в твердих тілах. Поздовжні хвилі поширюються в середовищах, де має місце деформацію розтягу (розширення, стиску), тобто в газах, рідинах і твердих тілах.

Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу $t$, називається **фронтом хвилі**. Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, називається хвильовою поверхнею. Фронт хвилі весь час переміщується, а хвильові поверхні залишаються нерухомими (хвильових поверхонь існує безліч). Хвильові поверхні можуть бути довільної форми. Найпростіші хвильові поверхні мають вигляд сфер або площин. Тоді такі хвилі називаються сферичними або плоскими. Сферичні хвилі поширюються від точкових джерел, плоскі – від протяжних джерел.

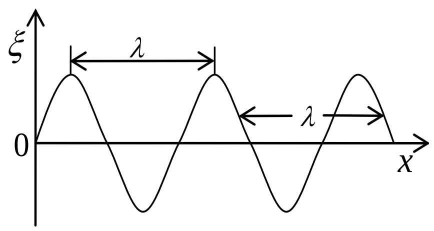


Рис. 1.

Встановимо рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі $x$. Це рівняння повинно виражати залежність змінної фізичної величини $\xi$ (наприклад, зміщення коливної точки) від координати $x$ і часу $t$: $\xi = \xi(x,t)$.

Знайдемо вигляд $\xi$ у випадку плоскої хвилі. Для спрощення вісь координат направимо вздовж напрямку поширення хвилі. Нехай точки джерела, що знаходиться при $x = 0$, коливаються за законом $\xi(0,t) = A\cos\omega t$ . (4)

До точки з координатою $x$ (рис. 1.) коливання прийдуть із запізненням на час $\tau = \dfrac{x}{\upsilon}$,

де $\upsilon$ – фазова швидкість поширення хвилі, тобто швидкість переміщення фази хвилі. Тоді рівняння коливання в точці $x$ буде мати вигляд

$$\xi(x,t) = A\cos\omega(t-\tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \qquad (5)$$

Це і є **рівнянням плоскої хвилі**, яке часто записують у формі

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{T\upsilon}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\cos(\omega t - kx), \qquad (6)$$

де $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, $\lambda = \upsilon T$ – **довжина хвилі**.

Довжина хвилі $\lambda$ – це шлях, який проходить хвиля за час, рівний періоду коливань, або відстань між найближчими точками, що коливаються в однаковій фазі (рис. 1). Відмітимо, що поняття плоскої хвилі передбачає постійність амплітуди, тобто нехтується поглинанням енергії середовищем.

Можна показати, що у випадку довільного напрямку поширення хвилі (наприклад, сферичної) рівняння хвилі має вигляд

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right), \qquad (7)$$

де $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ – хвильовий вектор, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні, $\vec{r}$ – радіус-вектор хвильової поверхні ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти).

У комплексній формі рівняння хвилі (4) можна записати як

$$\xi(\vec{r},t) = Ae^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}, \qquad (8)$$

де $i = \sqrt{-1}$; такий запис полегшує математичні перетворення.

## Стоячі хвилі

Якщо на біжучу хвилю $\xi_1 = A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{\upsilon}\right)$ (9)

накладається відбита від перешкоди хвиля $\xi_2 = A\cos\omega\left(t + \dfrac{x}{\upsilon}\right)$,

(10)

то утворюється стояча хвиля. Рівняння стоячої хвилі можна отримати аналітичним додаванням:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\omega t \cdot \cos\omega\frac{x}{\upsilon} + A\sin\omega t \cdot \sin\omega\frac{x}{\upsilon} + A\cos\omega t \cdot \cos\omega\frac{x}{\upsilon} - \\ - A\sin\omega t \cdot \sin\omega\frac{x}{\upsilon} = 2A\cos\omega\frac{x}{\upsilon} \cdot \cos\omega t. \quad (11)$$

З рівняння (11) видно, що стояча хвиля не «біжить», а її амплітуда залежить від координати *x*:

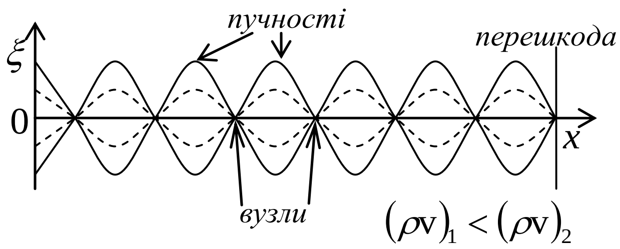



Рис. 2.

$$A_{cm} = A(x) = 2A\cos\omega\frac{x}{\upsilon} = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \quad (12)$$

Точки з максимальною амплітудою називаються пучностями, а точки з нульовою амплітудою – вузлами (рис. 2).

Умовою пучності є

$$\left|\cos\omega\frac{x}{\upsilon}\right| = 1, \quad (13)$$

що можливо, якщо $\omega\frac{x}{\upsilon} = n\pi$, де $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Тоді координати пучностей

$$x_{\max} = n\frac{\pi\upsilon}{\omega} = n\frac{\lambda}{2}. \quad (14)$$

Умовою вузлів є

$$\left|\cos\omega\frac{x}{\upsilon}\right| = 0,$$

що можливо, якщо

$$\omega\frac{x}{\upsilon} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{де } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Тоді координати вузлів

$$x_{\min} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}\cdot\upsilon}{\omega} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}. \quad (15)$$

Із (14) і (15) та з рис. 4 видно, що відстань між сусідніми пучностями і між сусідніми вузлами складає $\frac{\lambda}{2}$, а між сусіднім вузлом і пучністю – $\frac{\lambda}{4}$. На перешкоді формується пучність або вузол, в залежності від величини хвильових опорів $(\rho\upsilon)$ середовища і перешкоди. Якщо $(\rho\upsilon)_1 < (\rho\upsilon_2)$, як на рис. 2, то на перешкоді виникає вузол. Це зумовлене зміною фази відбитої хвилі на *π*. Якщо ж $(\rho\upsilon)_1 > (\rho\upsilon_2)$, то зміна фази відсутня і на перешкоді – пучність.

## Енергія пружної хвилі

Енергія пружної хвилі складається з кінетичної енергії коливного руху частинок і потенціальної енергії, зумовленої деформацією.

Виберемо елементарний циліндр пружного середовища $\Delta V$ настільки малим, щоб відносна деформація $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ і швидкість $\upsilon = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ у всіх точках об'єму, відповідно, були однаковими. Тоді потенціальна енергія елементарного деформованого циліндра

$$\Delta W_n = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta V . \quad (16)$$

Оскільки у відповідності з (1) $E = \rho \upsilon^2$,

то

$$\Delta W_n = \frac{\rho \upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V . \quad (17)$$

Кінетична енергія даного об'єму $\Delta V$ буде

$$\Delta W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V , \quad (18)$$

де $m = \rho \Delta V$ – маса об'єму $\Delta V$.

Повна енергія елемента об'єму хвилі

$$\Delta W = \Delta W_n + \Delta W_k = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V , \quad (19)$$

а густина енергії – енергія одиниці об'єму

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]. \quad (20)$$

Використавши рівняння плоскої хвилі

$$\xi = A\cos(\omega t - kx),$$

отримаємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kx),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = kA\sin(\omega t - kx) = \frac{2\pi}{\lambda}A\sin(\omega t - kx) = \frac{\omega}{\upsilon}A\sin(\omega t - kx).$$

Підставляючи ці похідні в (20), отримаємо для густини енергії

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \quad (21)$$

Із (21) видно, що густина енергії $w$ в кожен момент часу у різних точках простору різна. В деякій точці $x$ густина енергії змінюється з часом за законом квадрату синуса. Оскільки усереднене по часу значення квадрату синуса дорівнює $\frac{1}{2}$, то середнє значення густини енергії в кожній точці буде

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 . \quad (22)$$

Потік енергії $\Phi$ – це фізична величина, чисельно рівна енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через деяку поверхню:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Під густиною потоку розуміють енергію, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну нормальну площадку, тобто

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}. \qquad (23)$$

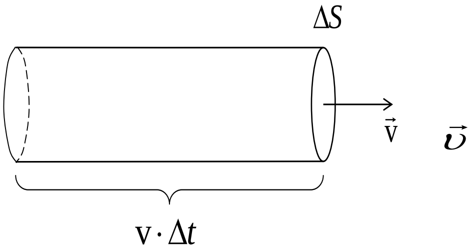


Рис. 3.

Енергія, яка переноситься через нормальну площадку $\Delta S$ за час $\Delta t$, очевидно, рівна енергії, зосередженій в об’ємі циліндра висотою $\upsilon\Delta t$ з основою $\Delta S$ (рис. 3.), тобто

$$\Delta W = w\Delta S \cdot \upsilon\Delta t.$$

Тоді вектор густини потоку енергії $\vec{j}$, який називають вектором Умова, буде рівним

$$\vec{j} = \frac{w\Delta S \cdot \vec{\upsilon}\Delta t}{\Delta S \cdot \Delta t} = w\vec{\upsilon}.$$

Середня енергія, що переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну нормальну площадку, називається інтенсивністю хвилі $I$. Зрозуміло, що

$$I = \langle |\vec{j}| \rangle = \langle |w\vec{\upsilon}| \rangle = \upsilon \langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho\upsilon A^2\omega^2, \qquad (24)$$

тобто інтенсивність хвилі пропорційна до квадрату амплітуди.

## <u>Контрольні питання до теми 15</u>

1. Що таке хвильовий процес?
2. *Швидкість поширення поздовжньої хвилі у твердих тілах.*
3. *Швидкість поширення поперечної хвилі у твердих тілах.*
4. *Що називається довжиною хвилі?*
5. *Запишіть рівняння плоскої хвилі.*
6. В чому полягає принцип Гюйгенса-Френеля.
7. *Який зв’язок різниці фаз з різницею ходу.*
8. Що таке інтерференція хвиль?
9. Що таке дифракція хвиль?
10. Що таке стояча хвиля? Як вона утворюється?
11. Енергія хвилі. Густина енергії, потік енергії, густина потоку енергії.

**Задачі до теми 15**

1. Звукові коливання з частотою 500 Гц та амплітудою 0,25 мм поширюються у повітрі. Довжина хвилі 70 см. Знайти швидкість поширення хвилі та максимальну швидкість руху частинок повітря. *Відповідь:* $c = 350\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\upsilon_{\max} = 0{,}785\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2. Знайти різницю фаз коливань двох точок, які знаходяться від джерела коливань на відстанях 10 м і 16 м. Період коливань становить 0,04 с. Швидкість поширення коливань рівна 300 м/с. *Відповідь:* $\Delta\varphi = \pi$, *точки коливаються у протилежних фазах.*

3. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, яка знаходиться від джерела коливань на відстані $\ell = \frac{\lambda}{12}$, для моменту часу $t = \frac{T}{6}$. Амплітуда коливань рівна 5 см. *Відповідь:x=2,5* см.

4. Плоска синусоїдальна акустична хвиля описується рівнянням $x = 0{,}2\sin(100t - 3y)\,см.$ Визначити: амплітуду коливань кожної частинки; амплітуду коливань швидкості частинки; частоту коливань; швидкість поширення хвилі. *Відповідь: A=0,2* см, $\upsilon_{\max} = \omega A = 0{,}2\cdot 100 = 20\frac{\text{см}}{\text{с}}$, $\frac{\omega}{\upsilon} = 3,\ \upsilon = \frac{\omega}{3} = \frac{100}{3} = 33{,}3\ \text{м/с}$.

**Задачі для самостійного розв'язування**

1. Рівняння незатухаючих коливань має вигляд $x = \sin 2{,}5\pi t$ см. Визначити зміщення $x$ від положення рівноваги, швидкість $v$, прискорення $a$ точки, яка знаходиться на відстані $\ell = 20$ м від джерела коливань, для моменту часу $t = 1$ с після початку коливань. Швидкість поширення коливань $c = 100\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. *Відповідь:* $x = \sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right)$ см, *x=0*, $\upsilon = 7{,}85\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, *a=0.*

2. Визначити різницю фаз коливань двох точок, які знаходяться на промені і перебувають на відстані 2 м одна від одної. Довжина хвилі становить $\lambda = 1$ м. *Відповідь:* $\Delta\varphi = 4\pi$, *точки коливаються в однакових фазах.*

3. Визначити довжину хвилі $\lambda$, якщо відстань між першою та четвертою пучностями стоячої хвилі $\ell = 15$ см. *Відповідь:* $\lambda = 0{,}1\ м$.

## Список використаних джерел

1. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф. Курс фізики: Навч. посібник: у 2 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм К . : Либідь, 2001. 448 с.

2. Ваврух М.В., Смеречинський С.В., Стельмах О.М., Тишко Н.Л. Збірник задач з механіки: Навчальний посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 285 с.

3. Кевшин А. Г.,Галян В. В., Мирончук Г. Л. Фізика: навч. посіб. з розв'язування задач з курсу загал. фізики. Луцьк, 2023. 190 с.

4. Кевшин А. Г., Федосов С. А., Галян В. В. Фізика: задачі. Луцьк: Вежа-Друк, 2020. Рекомендовано НМР ВНУ імені Лесі Українки (протокол №3 від 18.11.2020 р.).

5. (https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/19 589).

6. Кобель Г.П., Савош В.О. Практикум розв'язування олімпіадних задач з фізики. Луцьк: Вежа-Друк, 2023. 112 с.

7. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики: у 3-х т. / Т.1. Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка. К. : Техніка, 2006. 536 с.

8. Механіка. Збірник задач до розділу «Механіка» [Електронний ресурс] : навч. посіб. КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.П. Бригінець, О.В. Дімарова, Л.П. Пономаренко, І.М. Репалов, Н.О. Якуніна. Електронні текстові дані. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 82 с.

9. Трофімчук А.Б., Левшенюк Я.Ф. Задачі фізичних олімпіад та їх розв'язки. Рівне: ППФ „Прінт-Експрес" Фізика для фізиків. Навч. метод. вид. Спецвипуск №2, 2007. 164 с.

10. Фізика. Збірник задач: навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання / Д.А. Захарчук, Л.В. Ящинський, Ю.В. Коваль. Луцьк: Луцький НТУ, 2019. 114 с.

Навчальне видання

**Кобель** Григорій Петрович
**Головіна** Ніна Анатоліївна
**Савош** Валентин Олексійович

**Загальна фізика (механіка). Практичні заняття**

Навчальний посібник
Практикум

Видання друкується в авторській редакції

Формат 60x84 $^1/_{16}$. Папір офс. Гарн. Таймс. Друк цифровий. Обсяг 5,24 ум. друк. арк., 4,84 обл.-вид. арк. Наклад 50 пр. Зам. .
Видавець і виготовлювач ФОП Мажула Ю.М. ( 43021, м. Луцьк, вул. Винниченка,47/35, тел. Моб. 096 6166277, e-mail: y.mazhula@gmail.com
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 7662 від 07 вересня 2022 року