

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра загальної математики та методики навчання інформатики

Марія Хомяк

Інна Микитюк

**КОМБІНАТОРИКА: БАЗОВИЙ КУРС ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ В
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ДИСКРЕТНІЙ МАТЕМАТИЦІ**

Методичні рекомендації
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)

Луцьк 2026

УДК 519.1/519.2(072)
Х 76

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол №6 від 18.02.2026 р.)

Рецензент:

С.М. Яцюк, к.пед. н., доц., декан факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Хомяк М.Я., Микитюк І.О.

Х 76 Комбінаторика: базовий курс та прикладні аспекти в теорії ймовірностей і дискретній математиці : методичні рекомендації для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика) [Електронний ресурс] / Марія Ярославівна Хомяк, Інна Олексіївна Микитюк. Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2026. 54 с.

Анотація: методичні рекомендації містять комплекс теоретичних матеріалів та прикладних кейсів з модуля «Комбінаторика та дискретні структури» освітніх компонентів «Теорія ймовірностей» та «Дискретна математика». Матеріал структуровано за тематичними розділами, що охоплюють шлях від базових принципів лічби до складних рекурентних моделей. До кожного розділу наведено відповідні теоретичні обґрунтування та приклади їх практичного застосування в галузі інформаційних технологій. Видання призначене для здобувачів вищої освіти, що навчаються за спеціальністю А4 Середня освіта (Інформатика) першого (бакалаврського) рівня освіти.

УДК 519.1/519.2(072)
© Хомяк М.Я., 2026
© Микитюк І.О., 2026
© Волинський національний
університет імені Лесі Українки, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ТА ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ	7
1.1. Правило суми та правило добутку: фундамент логічного переліку	7
1.2. Поняття факторіала та Гамма-функції: короткий огляд	8
1.3. Принцип Діріхле («ящики та кролі») та його застосування в задачах на існування	11
1.4. Практичний кейс: оцінка потужності алфавітів та кодування повідомлень	12
РОЗДІЛ 2. КЛАСИЧНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ	13
2.1. Розміщення з повтореннями та без повторень	13
2.2. Перестановки: лінійні, циклічні та з повтореннями	15
2.3. Сполуки (комбінації) та властивості біноміальних коефіцієнтів	16
2.4. Трикутник Паскаля та біном Ньютона	19
2.5. Прикладні аспекти: обчислення ймовірностей у класичній моделі (задачі про карти, лотереї та урни)	20
РОЗДІЛ 3. РОЗШИРЕНІ МЕТОДИ ПІДРАХУНКУ	23
3.1. Сполуки з повтореннями (метод «перегородок»)	23
3.2. Принцип включення-виключення	24
3.3. Задача про безлад (derangements)	26
РОЗДІЛ 4. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ТВІРНІ ФУНКЦІЇ	29
4.1. Поняття рекурсії: числа Фібоначчі та Ханойська вежа	29
4.2. Метод розв'язання лінійних однорідних рекурентних співвідношень	30
4.3. Вступ до твірних функцій	33

РОЗДІЛ 5. ПРИКЛАДНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КЕЙСИ	35
5.1. Елементи теорії розбиття чисел	35
5.2. Комбінаторика в задачах теорії графів	37
5.3. Схема Бернуллі: місток від комбінаторики до великих чисел..	39
5.4. Практичний кейс: оцінка стійкості паролів та основи криптографії	40
ПІДСУМКИ	43
ГЛОСАРІЙ	44
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	48
ДОДАТКИ	50

ВСТУП

Вітаємо у світі комбінаторики – розділу математики, який вивчає методи підрахунку кількості варіантів вибору, розташування та комбінування об'єктів у скінченних множинах. Для студента першого курсу технічних та математичних спеціальностей комбінаторика часто стає першим серйозним викликом, адже вона вимагає не просто механічного застосування формул, а особливого «комбінаторного мислення» – здатності бачити структуру задачі та обирати вірну стратегію підрахунку серед тисяч можливих альтернатив.

Комбінаторика як фундамент для ІТ та аналізу даних

У сучасному цифровому світі комбінаторика перестала бути суто теоретичною дисципліною. Вона є «паливом» для комп'ютерних наук:

Алгоритміка: оцінка швидкості роботи програм та складності обробки великих масивів даних.

Кібербезпека: розрахунок стійкості криптографічних ключів та паролів до атак методом перебору.

Машинне навчання: робота з ознаками, підвбірками та комбінаторна оптимізація моделей.

Взаємозв'язок із суміжними курсами

Ці методичні рекомендації розроблені як універсальний інструмент, що пов'язує теорію з двома ключовими дисциплінами вашої професійної підготовки:

Дискретна математика: комбінаторика надає методи для аналізу дискретних структур (графів, дерев, логічних мереж), дозволяючи точно визначати їхню ємність та властивості.

Теорія ймовірностей: ви переконаєтеся, що більшість задач класичної ймовірності зводяться до формули $P(A) = \frac{m}{n}$, де m – чисельник, n – знаменник – це комбінаторні числа. Без вміння правильно рахувати

комбінації неможливо оцінити ризики або ймовірність настання випадкових подій.

Мета та структура посібника

Даний посібник побудований за принципом «від інтуїції до алгоритму». Ми почнемо з базових правил суми та добутку, які здаються очевидними, але є фундаментом для найскладніших обчислень. Далі ми опануємо класичні конфігурації – розміщення, перестановки та сполуки – і навчимося розрізняти їх у реальних задачах.

Для полегшення засвоєння матеріалу в тексті використовуються спеціальні позначення:

«Зв'язок з ТЙ» – блоки, що пояснюють застосування теми в курсі теорії ймовірностей.

«Зв'язок з ДМ» – акценти на дискретних структурах та алгоритмах.

«Кейс» – приклади практичного характеру з реального сектору ІТ, кібербезпеки та розробки програмного забезпечення.

Пам'ятайте: комбінаторика – це не про запам'ятовування символів $n!$ чи C_n^k , а про розуміння того, чому ми обираємо ту чи іншу модель для розв'язання конкретної технічної задачі.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ТА ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ

1.1. Правило суми та правило добутку: фундамент логічного переліку

Будь-яка складна комбінаторна задача – від підрахунку варіантів паролів до аналізу генетичних кодів – базується на двох фундаментальних принципах. Їх розуміння дозволяє розкласти велику проблему на прості елементи.

А. Правило суми (Логічне «АБО»)

Якщо об'єкт A можна вибрати n способами, а об'єкт B можна вибрати m способами, причому ці вибори є взаємовиключними (ми не можемо вибрати A і B одночасно), то вибрати або A , або B можна $n + m$ способами.

Формально: Якщо $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Приклад: У студентській раді є 15 першокурсників та 10 другокурсників. Скількома способами можна обрати одного представника факультету?

Розв'язання: Оскільки представником може бути або студент першого курсу, або другого, ми використовуємо правило суми: $15 + 10 = 25$ способів.

Б. Правило добутку (Логічне «І»)

Якщо об'єкт A можна вибрати n способами, і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати m способами, то пару об'єктів (A, B) у вказаному порядку можна вибрати $n \cdot m$ способами.

Важливо: Вибори мають бути незалежними у сенсі кількості варіантів: скільки б способів ми не обрали для A , кількість варіантів для B має залишатися незмінною.

Приклад: Для доступу до лабораторної роботи студенту потрібно обрати один логін (з 5 варіантів) та один тимчасовий пароль (з 10 варіантів). Скільки існує унікальних комбінацій для входу?

Розв'язання: Для кожного з 5 логінів існує 10 варіантів пароля. Оскільки ми маємо вибрати і логін, і пароль, застосовуємо правило добутку: $5 \cdot 10 = 50$ комбінацій.

Зв'язок з ТЙ

Ці правила безпосередньо трансформуються в аксіоми теорії ймовірностей:

1. Ймовірність суми: Якщо події A та B несумісні, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Ймовірність добутку: Якщо події A та B незалежні, то ймовірність їх сумісної появи $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці ці правила використовуються для підрахунку потужності множин та декартового добутку. Правило добутку лежить в основі розрахунку кількості ребер у повних двочасткових графах та оцінки кількості функцій між скінченними множинами.

Поради для самоконтролю:

1. Завжди запитуйте себе: «Мені потрібно вибрати лише один елемент із кількох груп чи послідовність елементів?».

2. Якщо вибір другого елемента залежить від першого (наприклад, вибір двох різних людей з однієї групи), пам'ятайте, що кількість варіантів для другого вибору зменшиться на одиницю.

1.2. Поняття факторіала та Гамма-функції: короткий огляд

Для роботи з великими множинами в комбінаториці та теорії ймовірностей необхідно оперувати спеціальними функціями, які описують швидкість зростання кількості можливих комбінацій.

А. Факторіал: добуток послідовних цілих чисел

Факторіалом натурального числа n (позначається $n!$) називається добуток усіх натуральних чисел від 1 до n .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Важливі домовленості та властивості:

1. Нульовий факторіал: приймається, що $0! = 1$. Це логічно випливає з комбінаторного змісту: існує рівно один спосіб впорядкувати порожню множину.

2. Рекурентна властивість: $n! = n \cdot (n - 1)!$. Це дозволяє спрощувати складні дроби з факторіалами.

3. Швидкість зростання: факторіал зростає надзвичайно швидко. Наприклад, $10!$ вже дорівнює 3,628,800. Для оцінки дуже великих факторіалів в алгоритмах використовують формулу Стірлінга: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Б. Гамма-функція: «факторіал» для дійсних чисел

У комбінаториці ми зазвичай працюємо з цілими числами. Проте в теорії ймовірностей (наприклад, при вивченні нормального розподілу або розподілу χ^2) виникає потреба обчислити значення «факторіала» для дробових чисел. Для цього використовується Гамма-функція Леонарда Ейлера, яка позначається $\Gamma(z)$.

Для додатних дійсних чисел z вона визначається через інтеграл:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Ключові властивості для студента:

1. Зв'язок із факторіалом: для будь-якого натурального числа n

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

(Увага: значення Гамма-функції від цілого числа зміщене на одиницю назад).

2. Рекурсія:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Це аналог властивості факторіала для дійсних чисел.

3. Важливе значення:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Це значення часто зустрічається в задачах на знаходження ймовірності в нормальному (гауссовому) розподілі.

Зв'язок з ТЙ

Факторіал є базовим елементом формул Бернуллі та Пуассона. Гамма-функція лежить в основі цілого класу розподілів (Гамма-розподіл, Експоненціальний розподіл), які описують час очікування подій або термін служби обладнання.

Зв'язок з ДМ

Факторіал використовується для оцінки складності алгоритмів перебору. Алгоритми зі складністю $O(n!)$ вважаються практично непридатними для великих даних, оскільки час їх виконання зростає критично швидко.

Порада для розрахунків:

При спрощенні виразів типу $10!/8!$ не обчислюйте великі числа окремо. Використовуйте властивість рекурсії:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

1.3. Принцип Діріхле («ящики та кролі») та його застосування в задачах на існування

У комбінаториці існують задачі, де не потрібно обчислювати точну кількість варіантів, а важливо довести, що *хоча б один* варіант із певною властивістю обов'язково існує. Найпростішим та водночас найпотужнішим інструментом для цього є принцип Діріхле.

А. Класичне формулювання

Якщо ми намагаємося розсадити n кролів у m ящиків, і при цьому кролів більше, ніж ящиків ($n > m$), то хоча б в одному ящику опиниться не менше ніж два кролі.

Б. Узагальнений принцип Діріхле

Якщо кількість об'єктів значно перевищує кількість груп, ми можемо гарантувати ще більшу щільність заповнення. Якщо n кролів розсадити у m ящиків, то знайдеться хоча б один ящик, у якому міститься не менше ніж $\lceil n / m \rceil$ кролів. (Примітка: $\lceil \dots \rceil$ – це символ округлення до найближчого більшого цілого).

Приклад: Якщо в групі навчається 37 студентів, то принаймні четверо з них народилися в один і той самий місяць (оскільки $37/12 = 3.08$, а найближче більше ціле – 4).

Зв'язок з ТЙ

Принцип Діріхле описує ситуації з імовірністю $P(A) = 1$ (достовірна подія). В теорії ймовірностей він допомагає зрозуміти принцип колізій. Наприклад, при випадковому виборі елементів із обмеженої множини (як-от дні народження), ймовірність того, що двоє людей матимуть спільну ознаку, зростає значно швидше, ніж підказує інтуїція (відомий «парадокс днів народження»).

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці цей принцип є фундаментальним для:

1. Теорії графів: доведення того, що в будь-якому графі з $n \geq 2$ вершинами знайдуться принаймні дві вершини з однаковим ступенем.

2. Теорії чисел: доведення існування чисел із певними властивостями подільності.

3. Криптографії: обґрунтування неминучості колізій у хеш-функціях (коли різні вхідні дані дають однаковий хеш-код).

Методична порада для розв'язання задач:

Щоб успішно застосувати принцип Діріхле, студент має чітко ідентифікувати два типи об'єктів:

«Кролі» – елементи, які ми розподіляємо (студенти, числа, вузли мережі).

«Ящики» – властивості або категорії, за якими ми групуємо «кролів» (місяці народження, остачі від ділення, кольори).

Типова ознака задачі на принцип Діріхле: наявність фрази «Доведіть, що знайдеться принаймні...» або «Чи існують двоє...».

1.4. Практичний кейс: оцінка потужності алфавітів та кодування повідомлень

У цифрову епоху будь-яка інформація – від текстового повідомлення до пароля – розглядається як послідовність символів певного алфавіту. Комбінаторика дозволяє точно обчислити обсяг інформаційного простору та оцінити ресурси, необхідні для його опрацювання.

1. Поняття потужності алфавіту

Потужність алфавіту (M) – це кількість унікальних символів, які можуть бути використані на кожній позиції повідомлення.

Двійковий код: $\{0, 1\}$, $M = 2$.

Цифровий код: $\{0, 1, \dots, 9\}$, $M = 10$.

Латиниця (нижній регістр): $\{a, b, \dots, z\}$, $M = 26$.

2. Формування повідомлень (правило добутку)

Якщо повідомлення має довжину n символів, і на кожну позицію ми можемо поставити будь-який символ з алфавіту потужністю M , то загальна кількість можливих комбінацій (N) обчислюється як:

$$N = M \cdot M \cdot \dots \cdot M = M^n$$

Приклад (кейс із кібербезпеки): користувач створює PIN-код довжиною 4 цифри.

Загальна кількість варіантів: $N = 10^4 = 10\,000$. Якщо до алфавіту додати лише одну літеру (наприклад, X для позначення спеціального доступу), потужність стане $M = 11$. Тоді $N = 11^4 = 14\,641$. Стійкість системи зросла майже в півтора рази за рахунок мінімальної зміни алфавіту.

3. Складні системи кодування (правила суми та добутку разом)

Розглянемо систему ідентифікації товарів, де код складається з двох літер латинського алфавіту ($M = 26$), за якими йде або три цифри, або ще дві літери.

Розрахунок:

1. Перша частина: вибір 2 літер $\rightarrow 26 \cdot 26 = 676$ варіантів.

2. Друга частина (вибір «АБО»):

варіант А (3 цифри): $10^3 = 1000$.

варіант Б (2 літери): $26^2 = 676$.

За правилом суми: $1000 + 676 = 1676$ варіантів.

3. Загальний результат: оскільки код містить і першу, і другу частини, застосовуємо правило добутку:

$$N = 676 \cdot 1676 = 1\,132\,976 \text{ унікальних кодів.}$$

Зв'язок з ТЙ

Знаючи загальну кількість комбінацій N , ми можемо обчислити ймовірність випадкового вгадування коду з першої спроби: $P(A) = 1/N$. Це

основа для розрахунку параметрів безпеки банківських систем та протоколів передачі даних.

Зв'язок з ДМ

В теорії інформації та кодування потужність алфавіту визначає кількість бітів, необхідних для кодування одного символу ($i = \log_2 M$). Це дозволяє оцінити швидкість передачі даних через канали зв'язку.

Практичне завдання:

Обчисліть, як зміниться кількість можливих паролів довжиною 8 символів, якщо дозволити використовувати не лише малі латинські літери ($M = 26$), а й великі разом із цифрами ($M = 26 + 26 + 10 = 62$). Порівняйте 26^8 та 62^8 .

РОЗДІЛ 2. КЛАСИЧНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

У цьому розділі ми розглянемо три ключові типи вибірок: розміщення, перестановки та сполуки. Головне питання, яке ви маєте поставити собі при розв'язанні будь-якої задачі цього розділу: «Чи важливий порядок елементів у вибірці?».

2.1. Розміщення з повтореннями та без повторень

Розміщеннями називають впорядковані вибірки k елементів із множини потужністю n . Впорядкованість означає, що зміна місць елементів у вибірці створює нову комбінацію (наприклад, коди «12» та «21» є різними розміщеннями).

А. Розміщення без повторень

Використовуються, коли ми вибираємо k різних елементів із n наявних, і кожен елемент можна використати лише один раз.

Формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Приклад: У групі навчається 20 студентів. Скількома способами можна обрати старосту та його заступника?

Розв'язання: Оскільки ролі старости та заступника відрізняються, порядок вибору важливий. Це розміщення з 20 по 2:

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380 \text{ способів.}$$

Б. Розміщення з повтореннями

Використовуються, коли ми вибираємо k елементів із n типів, причому один і той самий тип елемента може бути обраний кілька разів.

Формула:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Приклад: Скільки існує трицифрових паролів, що складаються лише з цифр 1, 3, 5, 7?

Розв'язання: Тут $n = 4$ (кількість цифр на вибір), $k = 3$ (довжина пароля). Оскільки цифри в паролі можуть повторюватися:

$$\bar{A}_4^3 = 4^3 = 64 \text{ варіанти.}$$

Зв'язок з ТЙ

Розміщення є базою для обчислення загальної кількості наслідків у задачах, де об'єкти вибираються послідовно. Наприклад, якщо ми тягнемо три карти з колоди по одній і фіксуємо послідовність, то кількість усіх можливих результатів буде A_{52}^3 . У класичному визначенні ймовірності $P(A) = m/n$ розміщення часто формують знаменник n .

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці розміщення без повторень відповідають кількості ін'єктивних функцій (впорскувань) із множини потужністю k у множину потужністю n . Розміщення з повтореннями – це загальна кількість усіх можливих функцій між такими множинами. Це важливо для аналізу потужності конфігурацій у теорії автоматів та мовах програмування.

Порада для ідентифікації задачі:

Якщо ви бачите у мові задачі слова «впорядкувати», «черговість», «номер», «послідовність» або якщо об'єкти отримують унікальні ролі (президент, віце-президент, секретар) – це сигнал використовувати формули Розміщення.

2.2. Сполуки (комбінації) без повторень

Сполуками (комбінаціями) з n елементів по k називаються такі підмножини, що складаються з k елементів, обраних із даної множини n різних об'єктів, і відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Ключова відмінність

На відміну від розміщень (пункт 2.1), у сполуках порядок елементів не має значення. Наприклад, підмножини $\{1, 2\}$ та $\{2, 1\}$ вважаються однією і тією ж сполукою.

Формула обчислення

Кількість усіх можливих сполук з n по k позначається C_n^k (від лат. *Combinatio*) і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

де

$n!$ – факторіал загальної кількості елементів;

$k!$ – факторіал кількості обраних елементів (виключає вплив порядку);

$(n - k)!$ – факторіал залишку.

Властивості сполук

Симетричність:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Вибрати k об'єктів для включення в групу – це те саме, що вибрати $n - k$ об'єктів для виключення з неї.

Граничні значення:

$$C_n^0 = 1 \text{ та } C_n^n = 1.$$

Рекурентне співвідношення (правило Паскаля):

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Приклад застосування

Приклад: Скількома способами можна вибрати 3 делегати на конференцію з групи у 20 студентів?

Розв'язання: Оскільки ролі делегатів рівноцінні (порядок вибору не важливий), використовуємо формулу сполук:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

Зв'язок з ІТ

В програмуванні сполуки використовуються в алгоритмах грубої сили (brute-force), при генерації всіх можливих підмножин даних (Power Set), а також у задачах оптимізації, де потрібно знайти найкращу комбінацію ресурсів або параметрів без врахування послідовності їх активації.

Зв'язок з ТІ

Сполука є «королем» класичної ймовірності. У переважній більшості задач, де об'єкти вибираються одночасно (наприклад, вибір 5 карт із колоди, 3 деталей із ящика), загальна кількість наслідків обчислюється через C_n^k . Також C_n^k є ключовим компонентом біноміального розподілу ймовірностей (схема Бернуллі).

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці біноміальні коефіцієнти використовуються для:

Підрахунку шляхів: кількість найкоротших шляхів на цілочисловій сітці.

Теорії підмножин: визначення кількості підмножин певної потужності (булеан множини).

Комбінаторних доведень: багато складних алгебраїчних тотожностей доводяться через «подвійний підрахунок» комбінацій.

Порада для ідентифікації задачі:

Шукайте ключові слова: «набір», «група», «підмножина», «одночасно». Якщо заміна двох елементів місцями в межах вашого результату не створює нової ситуації – використовуйте формулу сполук C_n^k .

2.4. Трикутник Паскаля та біном Ньютона

Цей пункт демонструє глибокий зв'язок між арифметикою, алгеброю та комбінаторикою. Ми розглянемо, як комбінаторні числа C_n^k стають коефіцієнтами у розкладі степеня двочлена.

А. Біном Ньютона

Біном Ньютона – це формула для представлення виразу $(a + b)^n$ у вигляді багаточлена. Коефіцієнти цього багаточлена збігаються з кількістю сполук (біноміальними коефіцієнтами).

Загальна формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Комбінаторний зміст: при множенні n однакових дужок $(a + b)(a + b)\dots(a + b)$ ми отримуємо доданок $a^{n-k} b^k$ стільки разів, скількома способами ми можемо вибрати « b » із k дужок (відповідно, « a » вибирається з решти $n-k$ дужок). Це число дорівнює C_n^k .

Б. Трикутник Паскаля

Трикутник Паскаля – це нескінченна трикутна таблиця біноміальних коефіцієнтів, де по краях стоять одиниці, а кожне внутрішнє число дорівнює сумі двох чисел, що стоять над ним.

Основні закономірності:

Сума в рядку: сума всіх коефіцієнтів у n -му рядку дорівнює 2^n .

Симетрія: рядки симетричні відносно центру, що відповідає властивості $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Зв'язок з рекурсією: побудова трикутника базується на тотожності

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Зв'язок з ТЙ

Біном Ньютона є фундаментом для біноміального розподілу. Якщо ми проводимо n незалежних випробувань (схема Бернуллі), то

ймовірність того, що подія з імовірністю p відбудеться рівно k разів, обчислюється як:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Зверніть увагу: це лише один із доданків розкладу бінома $(p + q)^n$, де $q = 1 - p$. Оскільки $(p + q)^n = 1^n = 1$, сума всіх імовірностей біноміального розподілу завжди дорівнює одиниці.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці біноміальні коефіцієнти використовуються для розв'язання задач переліку підмножин та знаходження значень складних сум. Наприклад, за допомогою бінома Ньютона легко довести тотожність для знакозмінної суми:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

Це означає, що в будь-якій скінченній множині кількість підмножин з парною кількістю елементів дорівнює кількості підмножин з непарною кількістю елементів.

Практична порада:

Використовуйте трикутник Паскаля для швидкого знаходження коефіцієнтів при малих n (до 10). Це набагато швидше, ніж обчислювати кожен факторіал окремо за формулою сполук.

2.5. Прикладні аспекти: Обчислення ймовірностей у класичній моделі

Класичне визначення ймовірності базується на припущенні, що всі елементарні наслідки експерименту є рівноможливими. У таких випадках ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

де n – загальна кількість усіх можливих наслідків, а m – кількість наслідків, що сприяють події A . Саме комбінаторика надає інструменти для знаходження цих значень.

А. Задачі про вибір об'єктів (урнова модель)

Це найпоширеніший тип задач, де з множини об'єктів (деталей, куль, карт) вибирається певна підмножина.

Кейс: У ящику міститься 10 деталей, з яких 3 браковані. Студент навмання вибирає 2 деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть якісними?

Знаменник (n): Кількість способів вибрати 2 деталі з 10 (порядок неважливий): $n = C_{10}^2 = 45$.

Чисельник (m): Кількість способів вибрати 2 якісні деталі з 7 наявних якісних: $m = C_7^2 = 21$.

Результат: $P(A) = \frac{21}{45} \approx 0.467$.

Б. Задачі про карти та лотереї

Тут важливо правильно визначити, чи враховується порядок вибору.

Кейс: Скільки існує способів виграти в лотерею «6 із 45»?

Кількість комбінацій визначається як C_{45}^6 . Ймовірність вгадати всі шість чисел одним квитком дорівнює $1 / C_{45}^6 \approx 1 / 8\,145\,060$.

Розподіл об'єктів (задачі про дні народження та ліфти)

Якщо об'єкти вибираються з можливістю повторення або розподіляються по позиціях, де порядок має значення, використовуються розміщення.

Кейс: У ліфт 7-поверхового будинку на першому поверсі зайшли 3 пасажери. Яка ймовірність того, що всі вони вийдуть на різних поверхах?

Знаменник (n): Кожен пасажир може вийти на будь-якому з 6 поверхів (з 2-го по 7-й). За правилом добутку: $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Чисельник (m): Перший може вибрати будь-який із 6 поверхів, другий – будь-який із 5, третій – будь-який із 4. Це розміщення $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Результат: $P(A) = \frac{120}{216} \approx 0.555$.

Зв'язок з ТЙ

Класична комбінаторика працює ідеально, поки кількість наслідків скінченна. Проте вона стає базою для геометричної ймовірності та розуміння закону великих чисел. Коли ми кажемо, що ймовірність випадання герба 0.5, ми опираємося на комбінаторну рівність шансів двох станів.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці ці ж розрахунки використовуються для аналізу середньої складності алгоритмів. Якщо ми знаємо загальну кількість входів (n) і кількість «важких» випадків (m), ми можемо обчислити ймовірність того, що алгоритм працюватиме довше за певний час.

Алгоритм розв'язання прикладної задачі:

1. Ідентифікація експерименту: Що саме ми вибираємо і звідки?
2. Визначення ролі порядку: Чи зміниться результат, якщо поміняти вибрані елементи місцями?

(Так $\rightarrow A_n^k$, Ні $\rightarrow C_n^k$).

3. Перевірка на повторення: Чи може один і той самий об'єкт бути вибраний двічі?

4. Комбінування: Використовуйте правила суми та добутку для складних подій (наприклад, «вибрано 2 білі ТА 1 чорну кулю»).

РОЗДІЛ 3. РОЗШИРЕНІ МЕТОДИ ПІДРАХУНКУ

У цьому розділі ми виходимо за межі класичних вибірок і розглядаємо ситуації, де об'єкти можуть бути ідентичними, а умови їхнього розподілу – складнішими.

3.1. Сполуки з повтореннями (метод «перегородок»)

Сполуки з повтореннями використовуються у випадках, коли ми вибираємо k об'єктів із множини, що містить n типів об'єктів, причому:

1. Порядок вибору не має значення.
2. Об'єкти одного типу є нерозрізняваними (однаковими).
3. Кожен тип об'єкта можна вибирати багатократно.

А. Формула та метод «перегородок» (Stars and Bars)

Кількість сполук із повтореннями позначається $\bar{C}_n^k$ або H_n^k . Найкращий спосіб зрозуміти цю формулу – уявити k однакових предметів (зірочок), які потрібно розділити на n груп за допомогою $n - 1$ перегородки.

Формула:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Приклад: У магазині продається 4 види тістечок. Скількома способами можна купити 6 тістечок?

Розв'язання: Тут $n = 4$ (типи тістечок), $k = 6$ (кількість, яку купуємо). Порядок у коробці неважливий, тістечка одного виду однакові.

$$\bar{C}_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ способи.}$$

Б. Розподіл ідентичних об'єктів по ящиках

Ця ж модель описує кількість цілочислових невід'ємних розв'язків рівняння:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

де $x_i \geq 0$. Кожне x_i – це кількість об'єктів, що потрапили до i -го ящика.

Зв'язок з ТЙ

Сполуки з повтореннями лежать в основі статистики Бозе-Ейнштейна у фізиці, яка описує поведінку часток, що не розрізняються. У теорії ймовірностей ця модель допомагає обчислювати шанси при розподілі ресурсів, де нас цікавить лише фінальна кількість предметів у кожного отримувача, а не те, який саме предмет кому дістався.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці цей метод є критичним для:

Теорії розбиття: знаходження кількості способів подання числа у вигляді суми доданків.

Генерування комбінаторних об'єктів: побудова алгоритмів, що перераховують мультипідмножини.

Оптимізації: задачі про заповнення рюкзака або розподіл завдань між ідентичними процесорами в паралельних обчисленнях.

Порада для ідентифікації задачі:

Головна ознака – ви обираєте групу предметів, які неможливо відрізнити один від одного (наприклад, однакові монети, кульки одного кольору, однакові ліцензійні ключі), і розкладаєте їх по різних категоріях чи ящиках. Якщо вибір «3 яблука і 2 груші» – це те саме, що «2 груші і 3 яблука», але яблука між собою однакові – використовуйте сполуки з повтореннями.

3.2. Принцип включення-виключення

Принцип включення-виключення (ПВВ) – це потужний метод комбінаторики, який дозволяє знайти потужність об'єднання множин, що мають спільні елементи. Якщо просто додати кількості елементів кожної

множини, ми врахуємо спільні елементи декілька разів. ПВВ коригує цей підрахунок, по чергово додаючи та віднімаючи потужності перетинів.

А. Формулювання для двох та трьох множин

Для двох множин A та B формула має вигляд:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Для трьох множин A , B та C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Б. Загальна формула

Для n множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ принцип стверджує:

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Приклад: У групі 30 студентів. 15 вивчають Python, 12 – Java, 7 – обидві мови. Скільки студентів не вивчають жодної з цих мов?

Розв'язання:

Знайдемо тих, хто вивчає хоча б одну мову: $15 + 12 - 7 = 20$.

Кількість тих, хто не вивчає жодної: $30 - 20 = 10$.

Зв'язок з ТЙ

У теорії ймовірностей ПВВ використовується для знаходження ймовірності суми сумісних подій:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Це критично важливо при аналізі надійності систем, де відмова однієї компоненти не виключає відмову іншої.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці цей принцип є незамінним для розв'язання двох фундаментальних задач:

1. Підрахунок кількості сюр'єктивних функцій: Знаходження кількості способів відобразити множину X на множину Y так, щоб кожен елемент Y мав прообраз.

2. Розфарбовування графів: ПВВ лежить в основі алгоритму обчислення хроматичного полінома $P(G, k)$, який визначає кількість способів розфарбувати граф у k кольорів так, щоб жодні дві суміжні вершини не мали однакового кольору.

3. Функція Ейлера $\phi(n)$: Підрахунок кількості чисел, менших за n і взаємно простих із ним, також виводиться через принцип включення-виключення за простими дільниками числа n .

Порада для ідентифікації задачі:

Якщо в умові задачі є кілька властивостей і фрази «мають хоча б одну властивість», «не мають жодної властивості» або дані про перетини груп (наприклад, «вивчають і те, і інше»), – це прямий сигнал до застосування принципу включення-виключення.

3.3. Задача про безлад (derangements)

Безладом (або суворим переставленням) множини $\{1, 2, \dots, n\}$ називається така перестановка, в якій жоден елемент не залишається на своєму початковому місці. Тобто для кожного елемента i виконується умова $\sigma(i) \neq i$.

А. Формула для підрахунку кількості безладів

Кількість безладів множини з n елементів позначається D_n (або $!n$). Використовуючи принцип включення-виключення, можна вивести загальну формулу:

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Або в компактному вигляді:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Приклад: Чотири студенти залишили свої куртки в гардеробі. Скількома способами гардеробник може повернути їм куртки так, щоб жоден не отримав свою власну?

Розв'язання: Нам потрібно знайти D_4 .

$$D_4 = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \left(\frac{12 - 4 + 1}{24} \right) = 9 \text{ способів.}$$

Б. Граничне значення та наближення

Цікавою особливістю є те, що при зростанні n частка безладів серед усіх можливих перестановок стрімко наближається до константи $1/e$ (де $e \approx 2.718$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.3678$$

Зв'язок з ТЙ

Задача про безлад є класичним прикладом парадоксальної ймовірності. Якщо n листів випадковим чином розкласти у n конвертів, то ймовірність того, що жоден лист не потрапить до свого адресата, при великих n майже не залежить від кількості листів і дорівнює приблизно 36.8%. Це контрінтуїтивний результат, оскільки багато хто очікує, що зі збільшенням n ця ймовірність має прямувати до нуля або одиниці.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці безлади важливі для:

1. Криптографії: аналіз стійкості шифрів підстановки. Наприклад, шифр «Енігма» мав властивість, що жодна літера не могла бути зашифрована сама в себе (що фактично є безладом), і саме ця особливість стала однією з вразливостей, яка допомогла Алану Тюрінгу її зламати.

2. Комбінаторики слів: вивчення перестановок із забороненими позиціями.

3. Теорії алгоритмів: генерація випадкових перестановок без нерухомих точок для тестування систем розподілу завдань.

Порада для ідентифікації задачі:

Шукайте ключові умови: «ніхто не на своєму місці», «жоден об'єкт не потрапив у відповідну комірку», «перестановка без нерухомих точок». Якщо задача вимагає повної відсутності збігів – це задача про безлад.

РОЗДІЛ 4. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ТВІРНІ ФУНКЦІЇ

У цьому розділі ми переходимо від статичного підрахунку конфігурацій до динамічного опису систем, де кожен наступний стан залежить від попередніх.

4.1. Поняття рекурсії: числа Фібоначчі та Ханойська вежа

Рекурентним співвідношенням називається формула, яка виражає n -й член послідовності через один або декілька попередніх членів (a_{n-1} , a_{n-2} , ...).

А. Числа Фібоначчі

Послідовність чисел Фібоначчі $\{F_n\}$ визначається рекурентно:

1. Базис: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.
2. Крок рекурсії: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \geq 2$.

Властивості та формула Біне:

Хоча послідовність задана рекурсивно, n -й член можна обчислити безпосередньо за допомогою формули Біне, яка пов'язана з «золотим перетином» ($\phi \approx 1.618$):

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \text{ де } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Приклад: Скількома способами можна піднятися на сходи з n сходинок, якщо за один крок можна переступити або на 1, або на 2 сходинки?

Розв'язання: Нехай a_n – кількість способів. Останній крок був або з $(n-1)$ -ї сходинки (1 крок), або з $(n-2)$ -ї (переступання через одну). Отже, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Це класична послідовність Фібоначчі.

Б. Задача про Ханойську вежу

Це класичний приклад експоненціальної рекурсії. Потрібно перенести піраміду з n дисків з одного стрижня на інший, дотримуючись правила: не можна класти більший диск на менший.

Кількість мінімальних кроків H_n описується рекурсією:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1, \text{ де } H_1 = 1$$

Явна формула:

$$H_n = 2^n - 1.$$

Зв'язок з ТЙ

Рекурентні співвідношення використовуються в теорії ймовірностей для розв'язання задачі про розорення гравця. Ймовірність виграшу в серії ігор часто задовольняє лінійне рекурентне рівняння, аналогічне до тих, що ми вивчаємо в комбінаториці. Також числа Фібоначчі з'являються в моделях розмноження популяцій та аналізі надійності ланцюгових систем.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці рекурсія є основою:

1. Динамічного програмування: метод розв'язання складних задач шляхом їх розбиття на простіші підзадачі (наприклад, задача про рюкзак або пошук найкоротшого шляху).
2. Аналізу алгоритмів: багато швидких алгоритмів (наприклад, *QuickSort* або *MergeSort*) є рекурсивними. Розуміння рекурентних співвідношень дозволяє обчислити їхню часову складність $O(n \log n)$.
3. Структур даних: Дерева (особливо збалансовані дерева пошуку, такі як АВЛ-дерева) мають рекурсивну природу, і їхні параметри (висота, кількість вузлів) описуються через числа Фібоначчі.

Практична порада:

При програмуванні рекурсивних послідовностей (як-от Фібоначчі) уникайте «наївної» рекурсії, яка має складність $O(F_n) \approx O(1.6^n)$. Використовуйте мемоїзацію або ітеративний підхід, щоб знизити складність до лінійної $O(n)$.

4.2. Метод розв'язання лінійних однорідних рекурентних співвідношень

Лінійне однорідне рекурентне співвідношення зі сталими коефіцієнтами степеня k має вигляд:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

де c_i – дійсні числа, $c_k \neq 0$. Розв'язати таке співвідношення означає знайти явну формулу для a_n через та початкові умови.

А. Характеристичне рівняння

Основним методом розв'язання є пошук розв'язку у вигляді $a_n = r^n$. Підстановка цього виразу в рекурентне співвідношення приводить до характеристичного рівняння:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

Б. Алгоритм розв'язання (для степеня $k = 2$)

Розглянемо найпоширеніший випадок:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}.$$

1. Скласти характеристичне рівняння: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$.

2. Знайти корені r_1 та r_2 :

Випадок 1: Корені дійсні та різні ($r_1 \neq r_2$).

Загальний розв'язок: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.

Випадок 2: Корені однакові ($r_1 = r_2 = r$).

Загальний розв'язок: $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$.

3. Знайти константи α_1, α_2 : використати початкові умови (наприклад, значення a_0 та a_1), підставивши їх у загальний розв'язок і розв'язавши систему лінійних рівнянь.

Приклад: Розв'язати $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ при $a_0 = 1, a_1 = 5$.

Розв'язання:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3.$$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n.$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 3.$$

$$a_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n.$$

Зв'язок з ТЙ

У теорії ймовірностей цей метод є основним при аналізі випадкових блукань на прямій. Наприклад, задача про ймовірність того, що частка досягне певної межі раніше, ніж іншої, зводиться саме до лінійного рекурентного рівняння другого порядку. Характеристичні корені в таких задачах часто відображають «шанси» руху в тому чи іншому напрямку.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці метод характеристичних рівнянь дозволяє:

1. Аналізувати рекурсивні структури: знаходити точні формули для кількості вузлів у деревах певного типу.
2. Оцінювати складність: переходити від рекурсивної оцінки часу виконання алгоритму $T(n) = a T(n/b) + f(n)$ до асимптотичних оцінок $O(g(n))$.
3. Комбінаторні тотожності: Доводити складні рівності, розглядаючи їх як розв'язки однієї і тієї ж рекурсії.

Практична порада:

Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені, загальний розв'язок все одно матиме вигляд $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Проте за допомогою формули Муавра його часто зручніше записати через тригонометричні функції ($\sin$, $\cos$), що вказує на осцилюючий (циклічний) характер послідовності.

4.3. Вступ до твірних функцій

Твірна функція – це формальний степеневий ряд, коефіцієнти якого відповідають послідовності чисел a_n . Замість того, щоб працювати з числами окремо, ми «пакуємо» всю послідовність в одну функцію $A(x)$.

А. Основне визначення

Для послідовності $a_0, a_1, a_2, \dots$ твірна функція має вигляд:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Чому це важливо?

Операції над послідовностями (додавання, зсув, згортка) відповідають простим алгебраїчним операціям над функціями. Наприклад, якщо ми знаємо закриту форму $A(x)$, ми можемо знайти будь-який член послідовності a_n , обчисливши n -ту похідну функції в нулі або розклавши її в ряд Тейлора.

Б. Класичні приклади твірних функцій

1. Геометрична прогресія (одинична послідовність):

Для послідовності $1, 1, 1, \dots$ твірна функція: $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

2. Біноміальна послідовність:

Для вибору k елементів із n (C_n^k): $A(x) = (1+x)^n$. Коефіцієнт при x^k дає нам C_n^k .

3. Послідовність Фібоначчі:

Для F_n твірна функція має вигляд: $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Зв'язок з ТЙ

У теорії ймовірностей твірні функції називаються твірними функціями моментів або характеристичними функціями.

1. Вони дозволяють легко знаходити математичне сподівання та дисперсію через похідні функції.

2. Твірна функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх твірних функцій. Це значно спрощує аналіз сумарного результату великої кількості випробувань.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці твірні функції є «універсальним ключем» для:

1. Розв'язання рекурентних співвідношень: перетворення рекурентного рівняння на алгебраїчне рівняння відносно $A(x)$.

2. Задачі про розбиття (Partitions): знаходження кількості способів подання числа n у вигляді суми додатних цілих чисел. Твірна функція для цієї задачі була вперше знайдена Леонардом Ейлером.

3. Підрахунку комбінаторних об'єктів: метод твірних функцій дозволяє автоматизувати підрахунок дерев, графів та інших структур із певними властивостями.

Практична порада:

Твірні функції – це як «алгебраїчний рентген» для послідовностей. Якщо вам потрібно знайти суму a_n або довести комбінаторну тотожність, спробуйте записати твірні функції для обох частин рівняння. Якщо функції ідентичні – тотожність доведена.

РОЗДІЛ 5. ПРИКЛАДНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КЕЙСИ

Останній розділ присвячений синтезу отриманих знань та їх застосуванню у складніших математичних структурах та реальних інженерних задачах.

5.1. Елементи теорії розбиття чисел

Розбиттям натурального числа n називається його подання у вигляді суми додатних цілих доданків, де порядок доданків не має значення. Традиційно доданки записують у порядку незростання.

А. Функція розбиття $p(n)$

Кількість способів розбити число n на доданки позначається $p(n)$.

Наприклад, для $n = 4$:

1. 4
2. $3 + 1$
3. $2 + 2$
4. $2 + 1 + 1$
5. $1 + 1 + 1 + 1$

Отже, $p(4) = 5$.

На відміну від багатьох комбінаторних конфігурацій, для $p(n)$ не існує простої закритої формули (через факторіали), тому для її знаходження використовують рекурентні співвідношення або твірні функції.

Б. Діаграми Юнга (Феррерса)

Для візуалізації розбиттів використовують діаграми Юнга – набори клітинок, де кількість клітинок у рядках відповідає значенням доданків.

Важлива властивість (принцип спряженості):

Кількість розбиттів числа n на k доданків дорівнює кількості розбиттів числа n , де найбільший доданок дорівнює k . Це доводиться шляхом «транспонування» діаграми Юнга (заміна рядків стовпчиками).

Зв'язок з ТЙ

Теорія розбиття чисел є фундаментом для статистики Бозе-Ейнштейна (яку ми вже згадували в контексті сполук із повтореннями). У фізиці та теорії ймовірностей розбиття описують стани енергії систем, де частки є ідентичними. Розрахунок ймовірності перебування системи у певному енергетичному стані зводиться до аналізу кількості розбиттів загальної енергії E на кванти.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці розбиття чисел використовуються для:

1. Аналізу структур даних: визначення кількості можливих конфігурацій стеків або черг при розподілі пам'яті.
2. Твірних функцій: твірна функція для $p(n)$ має вигляд нескінченного добутку:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

Це один із класичних прикладів того, як складний перебір перетворюється на елегантну алгебраїчну формулу.

3. Алгоритмів динамічного програмування: задача про розмінування грошей (Change-making problem) є прикладом задачі на розбиття числа з певними обмеженнями на доданки.

Практична порада:

Не плутайте розбиття (partitions) з композиціями (compositions). У композиціях порядок доданків має значення ($3 + 1 \neq 1 + 3$). Кількість композицій числа n знайти набагато легше – вона завжди дорівнює 2^{n-1} . Якщо ж порядок неважливий – готуйтеся до роботи з числами розбиття $p(n)$.

5.2. Комбінаторика в задачах теорії графів

Теорія графів та комбінаторика є нерозривно пов'язаними дисциплінами. Граф – це комбінаторний об'єкт, що складається з множини вершин V та множини ребер E , які є парами елементів з V . Комбінаторні методи дозволяють нам підраховувати кількість можливих структур та шляхів у мережах.

А. Підрахунок кількості графів

Для множини з n розрізняваних вершин кількість усіх можливих простих графів дорівнює кількості підмножин множини всіх можливих ребер.

Максимальна кількість ребер у повному графі K_n дорівнює $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Оскільки кожне з цих ребер може або бути присутнім у графі, або ні, то загальна кількість різних графів на n вершинах дорівнює:

$$N = 2^{C_n^2}$$

Б. Дерева та формула Келі

Дерево – це зв'язний граф без циклів. Одним із найвідоміших результатів на перетині комбінаторики та теорії графів є формула Келі:

Кількість різних занумерованих дерев на n вершинах дорівнює n^{n-2} .

Цей результат отримується за допомогою кодів Прюфера, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між деревами та послідовностями довжини $n - 2$.

В. Шляхи та цикли

Комбінаторика дозволяє обчислити кількість маршрутів у графі. Наприклад, у повному графі K_n :

1. Кількість шляхів довжиною k (що проходять через різні вершини) дорівнює $\frac{A_n^{k+1}}{2}$.

2. Кількість Гамільтонових циклів (що проходять через усі вершини рівно один раз) дорівнює $(n - 1)! / 2$.

Зв'язок з ТЙ

У теорії ймовірностей вивчаються випадкові графи (модель Ердеша-Реньї). Ми розглядаємо ймовірність p появи кожного ребра і аналізуємо, при яких значеннях p граф з великою ймовірністю стає зв'язним або містить певні підграфи (наприклад, кліки). Це лежить в основі моделювання соціальних мереж та розповсюдження вірусів.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці комбінаторний аналіз графів є ключовим для:

1. Хроматичних поліномів: ви використовували ПБВ у пункті 3.2 для підрахунку способів розфарбування вершин графа.
2. Аналізу мереж: обчислення пропускну здатності та надійності мереж передачі даних.
3. Оптимізації: задача комівояжера (пошук найкоротшого Гамільтонового циклу) базується на аналізі простору всіх можливих перестановок вершин.

Практична порада:

При роботі з графами завжди розрізняйте занумеровані (labeled) та ізоморфні (unlabeled) графи. Формула $2^{C_n^2}$ працює для занумерованих вершин. Якщо вершини однакові, кількість неізоморфних графів значно менша, і для її підрахунку потрібні складніші інструменти, такі як теорема Переліку Пойа.

5.3. Схема Бернуллі: Місток від комбінаторики до великих чисел

Схема Бернуллі (або схема незалежних випробувань) – це ідеальна математична модель для опису процесів, де один і той самий експеримент повторюється багатократно в однакових умовах. Ця тема демонструє, як комбінаторні сполуки C_n^k стають ваговими коефіцієнтами для розрахунку імовірнісних прогнозів.

А. Ознаки схеми Бернуллі

Експеримент відповідає схемі Бернуллі, якщо:

1. Кількість випробувань n фіксована заздалегідь.
2. Кожне випробування має лише два наслідки: «успіх» (подія A) або «невдача» ($\bar{A}$).
3. Ймовірність успіху p однакова для кожного випробування.
4. Випробування є незалежними (результат одного не впливає на інші).

Б. Формула Бернуллі

Ймовірність того, що у серії з n випробувань «успіх» настане рівно k разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Комбінаторний зміст:

Множник $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ визначає ймовірність однієї конкретної послідовності, де є k успіхів та $n - k$ невдач.

Множник C_n^k (кількість сполук) визначає, скількома способами можна розмістити ці k успіхів на n наявних позиціях.

Приклад: Ймовірність того, що сервер обробить запит без помилок, дорівнює 0.9. Яка ймовірність того, що з 5 запитів рівно 4 будуть успішними?

Розв’язання: $n = 5, k = 4, p = 0.9$.

$$P_5(4) = C_5^4 0.9^4 \cdot (1 - 0.9)^1 = 0.32805$$

Зв'язок з ТЙ

Схема Бернуллі породжує біноміальний розподіл. Це фундамент для розуміння того, як випадковість структурується при великій кількості повторів. На основі цієї схеми виводяться граничні теореми (Муавра-Лапласа та Пуассона), які дозволяють працювати з вибірками у тисячі та мільйони елементів, що є основою сучасної статистики.

Зв'язок з ДМ

У дискретній математиці схема Бернуллі та біноміальні коефіцієнти використовуються для:

1. Аналізу надійності: розрахунок ймовірності того, що надлишкова система (наприклад, RAID-масив із n дисків) залишиться працездатною, якщо для цього потрібно мінімум k справних елементів.
2. Теорії кодів: оцінка ймовірності виникнення помилок при передачі бітових рядків через зашумлений канал зв'язку.
3. Рандомізованих алгоритмів: оцінка ймовірності успішного завершення алгоритму, який використовує випадковий вибір на кожному кроці.

Практична порада:

Якщо ви бачите задачу, де щось повторюється « n разів» і нас цікавить кількість успішних спроб – це схема Бернуллі. Пам'ятайте, що сума ймовірностей для всіх можливих k (від 0 до n) завжди дорівнює 1, що відповідає розкладу бінома Ньютона для $(p + q)^n$.

5.4. Практичний кейс: оцінка стійкості паролів та основи криптографії

У сучасному світі кібербезпеки комбінаторика є основним інструментом для розрахунку стійкості систем до атак типу «brute-force»

(повний перебір). У цьому кейсі ми розглянемо, як потужність алфавіту та довжина ключа впливають на безпеку даних.

А. Комбінаторний простір паролів

Нехай пароль складається з L символів, обраних з алфавіту потужністю M . Як ми з'ясували в розділі 1.4, загальна кількість можливих паролів (N) обчислюється як розміщення з повтореннями:

$$N = M^L$$

Кейс для порівняння:

1. Слабкий пароль: 6 цифр ($M = 10$, $L = 6$), $N = 10^6 = 1\,000\,000$. Сучасний ПК перебере такий простір за частки секунди.

2. Надійний пароль: 8 символів (малі, великі літери та цифри: $M = 62$, $L = 8$).

$$N = 62^8 \approx 2.18 \times 10^{14}$$

Це понад 218 трильйонів варіантів. Навіть при швидкості перебору 1 мільярд паролів на секунду, атака триватиме близько 60 годин.

Б. Ентропія та ймовірність зламу

В інформаційній безпеці використовується поняття ентропії пароля (H), яка вимірюється в бітах:

$$H = \log_2(M^L) = L \cdot \log_2 M$$

Що вища ентропія, то складніше зламати систему. Додавання одного символу до довжини пароля ($L + 1$) збільшує стійкість експоненціально, тоді як розширення алфавіту (M) — лише лінійно в логарифмічній шкалі.

Зв'язок з ТЙ

Якщо зловмисник має право на n спроб, ймовірність того, що він вгадає пароль хоча б один раз, описується через заперечення події «жодного вгадування»:

$$P(\text{Success}) = 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^n$$

Для дуже великих N це наближено дорівнює n/N . Це пояснює, чому банківські системи блокують картку після 3 невдач ($n = 3$): при $N = 10\,000$ (PIN-код) ймовірність успіху становить лише 0.0003, що робить перебір неефективним.

Зв'язок з ДМ

У криптографії комбінаторні принципи використовуються для побудови:

1. S-блоків (S-boxes): у шифрах типу AES вони працюють як нелінійні підстановки, що є перестановками (пункт 2.2) елементів скінченних полів.

2. Хеш-функцій: розуміння принципу Діріхле (пункт 1.3) дозволяє оцінювати ймовірність колізій (ситуацій, коли різні паролі мають однаковий хеш).

3. Генераторів псевдовипадкових чисел (ГПВЧ): аналіз циклічних перестановок допомагає гарантувати, що послідовність чисел не почне повторюватися занадто швидко.

Практичний висновок для розробника:

При проектуванні систем аутентифікації:

Пріоритет довжині: збільшення довжини пароля на 2 символи часто ефективніше, ніж вимога використовувати спеціальні знаки.

Сіль (Salting): додавання випадкових даних до пароля перед хешуванням штучно збільшує комбінаторну складність для злоумисника, оскільки кожен пароль тепер «живе» у власному унікальному просторі перебору.

ПІДСУМКИ

Цей розділ призначений для швидкого повторення матеріалу та систематизації знань. Основна мета комбінаторики – навчитися правильно класифікувати задачу, перш ніж застосовувати формули.

Алгоритм вибору комбінаторної формули

Щоб обрати правильну модель, дайте відповідь на два ключові запитання:

1. Чи важливий порядок розташування елементів?
2. Чи можуть елементи повторюватися у вибірці?

Алгоритм вибору формули: таблиця-шпаргалка для студента

Тип вибірки	Порядок	Повторення	Назва конфігурації	Формула
Вибір k з n	Так	Ні	Розміщення без повторень	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Вибір k з n	Так	Так	Розміщення з повтореннями	$\bar{A}_n^k = n^k$
Вибір підмножини k з n	Ні	Ні	Сполуки (комбінації)	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Вибір підмножини k з n	Ні	Так	Сполуки з повтореннями	$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Впорядкування n об'єктів	Так	Ні	Перестановки	$P_n = n!$
Впорядкування n об'єктів	Так	Так	Перестановки з повтореннями	$P_n(n_1, \dots) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$

ГЛОСАРІЙ

Цей глосарій містить ключові поняття та терміни, що зустрічаються в курсах комбінаторики, дискретної математики та теорії ймовірностей.

Алфавіт (в комбінаториці) – скінченна множина символів або об'єктів, з яких формуються послідовності (слова, паролі, коди).

Асимптотична оцінка – опис поведінки функції при прямуванні її аргументу до нескінченності (наприклад, O -нотація).

Безлад (Derangement) – перестановка елементів множини, в якій жоден елемент не залишається на своєму початковому місці.

Біноміальний коефіцієнт (C_n^k) – число способів вибрати k елементів із n без урахування порядку.

Біном Ньютона – формула для розкладу виразу $(a + b)^n$ у суму доданків.

Бієкція – взаємно однозначна відповідність між елементами двох множин.

Булеан множини – множина всіх підмножин даної множини. Її потужність дорівнює 2^n .

Варіація (розміщення) – впорядкована вибірка k елементів із множини потужністю n .

Випадкове блукання – математичний об'єкт, що описує шлях, який складається з послідовності випадкових кроків.

Гамма-функція (Γ) – математична функція, що узагальнює поняття факторіал на область комплексних та дійсних чисел.

Генеральна сукупність – множина всіх об'єктів, з яких здійснюється вибірка.

Граф – сукупність вершин та ребер, що з'єднують пари вершин.

Дерево – зв'язний граф без циклів.

Декартів добуток множин – множина всіх можливих упорядкованих пар елементів цих множин.

Дискретна структура – математична модель об'єкта, що складається з окремих, розділених частин.

Динамічне програмування – метод розв'язання складних задач шляхом їх розбиття на простіші підзадачі з використанням рекурсії.

Достовірна подія – подія, ймовірність якої дорівнює 1.

Експоненціальне зростання – зростання величини, швидкість якого пропорційна значенню самої величини (наприклад, 2^n).

Ентропія пароля – міра неочевидності або випадковості пароля.

Зв'язність графа – властивість графа, що означає наявність шляху між будь-якими двома його вершинами.

Ізоморфізм графів – відповідність між вершинами двох графів, яка зберігає суміжність.

Інваріант – величина або властивість, яка не змінюється при певних перетвореннях.

Ітерація – повторне застосування певної математичної операції.

Колізія (в хешуванні) – ситуація, коли два різні вхідні набори даних дають однаковий хеш-код.

Комбінаторна оптимізація – пошук оптимального об'єкта серед скінченної кількості варіантів.

Комбінація (сполука) – неупорядкована вибірка елементів.

Лексикографічний порядок – спосіб упорядкування за принципом словника.

Метод «перегородок» (Stars and Bars) – техніка обчислення кількості сполук із повтореннями.

Множина (Set) – сукупність певних об'єктів.

Мультимножина – множина, в якій елементи можуть повторюватися.

Нерухома точка – елемент, який при перестановці залишається на своєму місці.

Несумісні події – події, які не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні.

Перестановка (Permutation) – впорядкована послідовність з усіх елементів множини.

Потужність множини – кількість елементів у множині.

Правило добутку – комбінаторний принцип для вибору послідовності об'єктів (логічне «І»).

Правило суми – комбінаторний принцип для вибору одного об'єкта з декількох груп (логічне «АБО»).

Принцип включення-виключення – формула для підрахунку потужності об'єднання множин, що перетинаються.

Принцип Діріхле – твердження про розподіл об'єктів по контейнерах (ящики та кролі).

Рекурентне співвідношення – формула, що виражає n -й член через попередні.

Розбиття числа – подання натурального числа у вигляді суми натуральних доданків.

Схема Бернуллі – послідовність незалежних випробувань з двома наслідками.

Твірна функція – степеневий ряд, коефіцієнти якого є членами певної послідовності.

Трикутник Паскаля – таблиця біноміальних коефіцієнтів.

Факторіал ($n!$) – добуток чисел від 1 до n .

Формула Біне – явна формула для обчислення n -го числа Фібоначчі.

Формула Стірлінга – асимптотична формула для наближеного обчислення факторіала.

Хроматичне число – мінімальна кількість кольорів, необхідна для розфарбовування вершин графа.

Числа Белла (B_n) – кількість усіх можливих розбиттів множини на підмножини.

Числа Фібоначчі – послідовність, де кожен член є сумою двох попередніх.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас О. Г. Дискретна математика : підручник. 2-ге вид., переробл. і доповн. Харків : ТОВ «Компанія СМІТ», 2022. 532 с.
2. Гаврилків В. М. Комбінаторика : навч. посіб. Івано-Франківськ : Голіней, 2023. 164 с.
3. Глибовець М. М. Алгоритми та структури даних : підручник. Київ : НаУКМА, 2024. 380 с. (Містить розділи про рекурсивні алгоритми та комбінаторну складність).
4. Журавльов В. М. Дискретна математика : теорія, приклади, задачі : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2023. 256 с.
5. Кузнєцов М. Ю., Мелешко Є. В. Дискретні структури в комп'ютерних науках : навч. посіб. Кропивницький : ЦНТУ, 2021. 210 с.
6. Матвієнко О. М. Теорія ймовірностей та математична статистика для системного аналізу : навч. посіб. Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2022. 284 с. (Акцент на комбінаторних методах у ТІ).
7. Трохимчук П. П. Дискретна математика : навч. посіб. Луцьк : Вежа-Друк, 2021. 340 с.
8. Applegate D. L., Cook W. J. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton University Press, 2023. 600 p. (Прикладне застосування комбінаторної оптимізації).
9. Bona M. A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration, Graph Theory, and Selected Other Topics. 5th ed. World Scientific Publishing Co, 2024. 612 p.
10. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. (Reissued). Addison-Wesley, 2022. 672 p. (Класика, перевидана для сучасних курсів CS).

11. Guichard D. An Introduction to Combinatorics and Graph Theory. 3rd ed. Whitman College, 2023. 180 p.

12. Knuth D. E. The Art of Computer Programming, Volume 4A: Combinatorial Algorithms, Part 1. Addison-Wesley Professional, 2021. 912 p.

13. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 9th ed. McGraw Hill, 2024. 1120 p. (Світовий стандарт підручника з дискретної математики).

14. Van Lint J. H., Wilson R. M. A Course in Combinatorics. Cambridge University Press, 2023. 620 p.

Електронні ресурси

15. Combinatorics : Wolfram MathWorld. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Combinatorics.html> (дата звернення: 28.12.2025).

16. Discrete Mathematics for Computer Science : Coursera Specialization / UC San Diego. 2024. URL: <https://www.coursera.org/specializations/discrete-mathematics> (дата звернення: 28.12.2025).

ДОДАТКИ

Додаток 1. Реалізація комбінаторних алгоритмів на Python

Для автоматизації підрахунків та генерації варіантів у Python використовується бібліотека `itertools`. Нижче наведено приклади коду для кожної класичної конфігурації.

Приклади використання `itertools`

```
import itertools

# 1. Перестановки (Permutations)
data = ['A', 'B', 'C']
perms = list(itertools.permutations(data))
print(f"Перестановки: {perms}") # [('A', 'B', 'C'), ('A', 'C', 'B'), ...]

# 2. Сполуки (Combinations)
combos = list(itertools.combinations(data, 2))
print(f"Сполуки по 2: {combos}") # [('A', 'B'), ('A', 'C'), ('B', 'C')]

# 3. Розміщення з повтореннями (Cartesian Product)
# Аналог пароля з 2 символів (0 або 1)
product = list(itertools.product([0, 1], repeat=2))
print(f"Розміщення з повторенням: {product}") # [(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)]
```

Додаток 2. Типові задачі для самопідготовки

Блок А. Базова комбінаторика

1. Задача про шифр: скільки 4-цифрових кодів можна скласти, якщо цифри не можуть повторюватися і код не може починатися з нуля?

Вказівка: Використовуйте правило добутку: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

2. Задача про комітет: з 10 ІТ-спеціалістів та 6 тестувальників треба обрати команду з 3 розробників та 2 тестувальників.

Вказівка: $C_{10}^3 \cdot C_6^2$.

Блок Б. Рекурсія та графи

3. Сходинок: Скількома способами можна подолати 10 сходинок, якщо можна стрибати через одну?

Вказівка: Обчисліть 10-те число Фібоначчі.

4. Мережа: скільки ребер у повному графі з 12 вузлами?

Вказівка: C_{12}^2

Блок В. Ймовірність та схеми

5. Помилки: ймовірність збою на одному вузлі мережі $p = 0.05$. У мережі 100 вузлів. Яка ймовірність того, що рівно 2 вузли вийдуть з ладу?

Вказівка: схема Бернуллі $P_{100}(2) = C_{100}^{2k} \cdot (0.05)^2 \cdot (0.95)^{98}$.

Додаток 3. Комплексна діагностична карта «комбінаторний лабіринт»

Цей додаток розроблений як інструмент швидкої навігації для вибору адекватної математичної моделі при розв'язанні прикладних задач.

1. Матриця прийняття рішень (Алгоритм вибору)

При аналізі умови задачі студент має послідовно відповісти на три запитання:

Запитання	Варіант відповіді	Наслідок для моделі
1. Чи важливий порядок?	ТАК	Шукаємо серед Перестановок або Розміщень
	НІ	Шукаємо серед Сполук (комбінацій)
2. Чи є повторення?	ТАК	Використовуємо формули з повтореннями ($\bar{A}, \bar{P}, \bar{C}$)
	НІ	Використовуємо класичні формули (A, P, C)
3. Використовуємо всі елементи?	ТАК	Це модель Перестановок (P_n)
	НІ	Це модель Розміщень (A_n^k) або Сполук (C_n^k)

2. Робочий лист «Стратегія аналізу нестандартної задачі»

Якщо задача не підпадає під класичну формулу безпосередньо, використовуйте наступний алгоритм:

1. Декомпозиція: розбийте складну подію на елементарні дії.
2. Логічні зв'язки: якщо дії поєднуються сполучником «І» – застосовуйте правило добутку; якщо дії поєднуються сполучником «АБО» – застосовуйте правило суми.
3. Обмеження: окремо виділіть «жорсткі» умови (наприклад, «дві особи не можуть стояти поруч» або «перша цифра не може бути нулем»).
4. Метод доповнення: іноді легше обчислити загальну кількість варіантів і відняти від неї кількість «заборонених» комбінацій.

3. Кейс-стаді: «Від моделі до коду»

Задача: Сформувати унікальний ідентифікатор транзакції, що складається з 3-х різних літер (з 26-ти) та 2-х цифр (з 10-ти), причому порядок літер і цифр зафіксований (спочатку літери, потім цифри).

Аналіз: Літери: порядок важливий, повторення заборонені $\rightarrow A_{26}^3$.

Цифри: порядок важливий, повторення дозволені (за замовчуванням у кодах) $\rightarrow \bar{A}_{26}^3$.

Зв'язок: Літери ТА Цифри $\rightarrow$ правило добутку.

Математична модель: $N = A_{26}^3 \cdot 10^2 = 15600 \cdot 100 = 1\,560\,000$.

Програмний еквівалент (Python):

```
len(list(itertools.permutations(letters, 3))) * (10**2) .
```

Електронне мережне методичне видання

Марія Хомяк

Інна Микитюк

КОМБІНАТОРИКА: БАЗОВИЙ КУРС ТА ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ В
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ДИСКРЕТНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Методичні рекомендації

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня

вищої освіти за предметною спеціальністю

А4.09 Середня освіта (Інформатика)

Друкується в авторській редакції