МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського

На правах рукопису

Бойко Василь Степанович

РОЗРАХУНОК ФУНКЦІЙ ГРІНА В ТЕОРІЇ КВАНТОВИХ СИСТЕМ ІЗ ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ

Спеціальність: 104 «Фізика та астрономія»
Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Шигорін Павло Павлович,
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ
Протокол No_________
засідання кафедри теоретичної та комп'ютерної
фізики імені А. В. Свідзинського
від_________________________ 2025 р.

Завідувач кафедри
_____________ Сахнюк В.Є.

ЛУЦЬК 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

У багатьох задачах сучасної теоретичної фізики виявляється надзвичайно ефективною техніка функцій Гріна.

Метод функцій Гріна, вперше був запропонований Річардом Фейнманом [1] у квантовій електродинаміці і уже давно став універсальним у всій теоретичній фізиці. Знання діаграмної техніки і вміння використовувати функції Гріна є невід'ємною частиною освіти фізика-теоретика, незалежно від конкретної області його наукових інтересів.

В теорію конденсованого середовища, що вивчає квантові властивості твердих тіл та інших багаточастинкових систем, техніка функцій Гріна увійшла ще в середині 50-х років минулого століття. Переважна більшість досліджень у цій галузі були виконані за допомогою функцій Гріна. Застосування цих функцій в теорії твердого тіла докладно викладено в монографіях [2, 3, 13, 16].

При обчисленні функцій Гріна в квантовій механіці зазвичай користуються двома методами: методом склеювання та методом розкладу функцій Гріна за власними функціями даної задачі. Найбільшого поширення набув другий із цих методів. Обчислення функції Гріна у цьому методі умовно можна розкласти на два етапи. На першому етапі ми досліджуємо задачу на власні функції ψ_m та власні значення λ_m гамільтоніана. На другому етапі проводиться обчислення функції Гріна за формулою

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';E)=\sum_{\lambda}\frac{\psi_{\lambda}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{\lambda}(\vec{r})}{E-E_{\lambda}}\,.$$

Тут символ $\sum\limits_{\lambda}$ означає сумацію по дискретній частині спектру та інтегрування по його неперервній частині.

Зауважимо, що для більшості моделей, які розглядаються у квантовій механіці, дискретний спектр визначається з трансцендентного рівняння. Очевидно, що точний аналітичний розв'язок такого рівняння знайти неможливо. Тому виникає питання яким чином можна обчислити внесок у функцію Гріна від дискретного спектру. Виявляється, що ця проблема розв'язується автоматично, оскільки така ж сума з протилежним знаком виникає внаслідок сумації по полюсах при застосуванні теореми про рештки при обчисленні контурного інтеграла для "неперервної" складової. Таким чином доданок, що містить дискретний спектр, у кінцевий вираз для функції Гріна не увійде.

Актуальність дослідження: метод функцій Гріна є одним із основних інструментів теоретичного дослідження в теорії конденсованого стану.

Дослідження аспектів побудови функцій Гріна є одним із найважливіших завдань теоретичної та математичної фізики.

Мета і завдання дослідження: метою даної роботи є дослідження особливостей функцій Гріна для систем із дискретним спектром на прикладі потенціальної ями та SNS-контакту.

Об'єкт дослідження: функції Гріна.

Предмет дослідження: внесок складової від дискретного спектру у вираз для функції Гріна.

Наукова новизна: показано, що у виразі для функції Гріна частинки в потенціальній ямі скінченної глибини «дискретна» складова скорочується відповідною частиною «неперервної» складової.

Особистий внесок автора: проведено теоретичний розрахунок функції Гріна для частинки в потенціальній ямі скінченної глибини методом розкладу за власними функціями. Зроблено порівняльний аналіз із моделями δ-функційної потенціальної ями та SNS-контакту в картині квазічастинок.

РОЗДІЛ 1

Методи обчислення функцій Гріна в квантовій механіці

§ 1.1. Метод склеювання

Розпочнемо з способу, що використовується в одновимірному випадку і в інших випадках, які до нього зводяться після розділення змінних. Він ґрунтується на факті аналітичності функції Гріна поза спектром, тобто в площині рівняння Шрьодінґера

$$\left(\hat{H} - E\right)G\left(x, x', E\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Як відомо з теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, у них існують два лінійно незалежних розв'язки, один з яких, $\varphi_1(x)$, задовольняє граничну умову на правому кінці або, якщо інтервал необмежений, являє собою функцію, що прямує до нуля при $x \to +\infty$, другий же розв'язок $\varphi_2(x)$ має такі ж властивості на лівому кінці інтервалу або при $x \to -\infty$. Індекс E при цих розв'язках ми не пишемо заради стислості запису, але пам'ятаємо, що зазначені властивості справедливі для комплексного E.

Функція Гріна може бути представлена як лінійна комбінація цих двох лінійно незалежних розв'язків

$$G\left(x, x\ E\right) = A_1(x')\varphi_1(x) + A_2(x')\varphi_2(x),$$

при цьому коефіцієнти A_1 та A_2 залежать від x'. Якщо $x > x'$, в цьому розкладі слід покласти $A_2 \equiv 0$, оскільки поза спектром функція Гріна має прямувати до нуля при $x \to +\infty$. Таким чином,

$$G\left(x, x\ E\right) = A_1(x')\varphi_1(x),\ \ x > x'. \tag{1.2}$$

Аналогічним чином при $x < x'$ в розкладі слід покласти $B_1(x') \equiv 0$, тобто

$$G\left(x, x', E\right) = B_2(x')\varphi_2(x),\ \ x < x'. \tag{1.3}$$

В подальшому індекси 1 та 2 при $A(x')$ та $B(x')$ відкидаємо. Тепер звернімося до неоднорідного рівняння

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2G(x,x',E)}{dx^2}+V(x)G(x,x',E)-EG(x,x',E)=-\delta(x-x'),$$

і проінтегруємо його по x в границях $x'-\varepsilon, x'+\varepsilon, \varepsilon>0$. Після граничного переходу $\varepsilon\to 0$ отримуємо

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(G'(x'+0,x',E)-G'(x'-0,x',E)\right)=-1.$$

Таким чином, перша похідна функції Гріна при переході через діагональ $x=x'$ має стрибок

$$G'(x+0,x,E)-G'(x-0,x,E)=\frac{2m}{\hbar^2}, \tag{1.4}$$

сама ж функція Гріна неперервна. (Якби функція Гріна була розривна, в правій частині фігурувала δ'-функція). Обидві умови дають рівняння, які мають такий вигляд

$$\begin{cases} A(x)\varphi_1'(x)-B(x)\varphi_2'(x)=\dfrac{2m}{\hbar^2} \\ A(x)\varphi_1(x)-B(x)\varphi_2(x)=0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Звідси

$$A(x)=\frac{2m}{W\hbar^2}\varphi_2(x),\;\; B(x)=\frac{2m}{W\hbar^2}\varphi_1(x),\;\; W=\begin{vmatrix}\varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{vmatrix}.$$

Отже, остаточно отримуємо для функції Гріна формулу

$$G(x,x',E)=\frac{2m}{W\hbar^2}\begin{cases}\varphi_1(x)\varphi_2(x'), & x>x'\\ \varphi_1(x')\varphi_2(x), & x<x'.\end{cases} \tag{1.6}$$

Цей результат показує, що поза спектром функція Гріна скінченна при будь-яких x та x'. Підкреслимо її симетрію по x та x'. Зауважимо також, що вронскіан W фактично від x не залежить. Справді, маємо

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_1''(x)+V(x)\varphi_1(x)=E\varphi_1(x),$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_2''(x)+V(x)\varphi_2(x)=E\varphi_2(x).$$

Домножаючи перше рівняння на $\varphi_2(x)$, друге — на $\varphi_1(x)$ та віднімаючи одне від другого, отримуємо

$$\varphi_2(x)\varphi_1''(x)-\varphi_1(x)\varphi_2''(x)=0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\Big(\varphi_2(x)\varphi_1'(x)-\varphi_1(x)\varphi_2{}'(x)\Big)=0,$$

тобто

$$W=\begin{vmatrix}\varphi_1{}'(x) & \varphi_2{}'(x)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{vmatrix}=const.$$

Цей давно відомий метод побудови функції Гріна з двох лінійно незалежних розв'язків рівняння Шрьодінґера, які мають відповідні аналітичні властивості, називають коротко методом склеювання.
Проілюструємо метод на прикладі вільної частинки.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''=E\varphi,\ \ -\infty<x<\infty.$$

Лінійно незалежні розв'язки даються формулами

$$\varphi_1(x)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right),\ \ \varphi_2(x)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right).$$

Тут $\mathrm{Im}\,E>0$ а $\sqrt{E}$ визначений так, щоб уявна частина була позитивною. Тоді $\varphi_1(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, $\varphi_2(x)\to 0$ при $x\to-\infty$.

Вронскіан

$$W=\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\begin{vmatrix}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right) & -\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right)\\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right) & \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mEx}\right)\end{vmatrix}=2\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}.$$

За формулою (1.6)

$$G(x,x',-|E|)=-\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}|x-x'|\right). \tag{1.7}$$

Зауважимо, що при нашому визначенні кореня для $E=-|E|$ маємо $\sqrt{E}=i\sqrt{|E|}$, отже,

$$G(x,x',-|E|)=-\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}|x-x'|\right),$$

тобто функція Гріна зберігає аналітичність; дійсна ж піввісь $E\geq 0$ являє собою лінію розрізу, заповнену неперервним спектром.

Не слід забувати, що отриманий розв'язок для функції Гріна вільної частинки визначений формулою (1.7) з точністю до розв'язку однорідного рівняння. Підбираючи так чи інакше цей розв'язок, можемо надати іншого вигляду функції Гріна. Покажемо, як отримати вигляд функції Гріна вільної частинки, корисний в теорії розсіяння. Для скорочення позначимо $\sqrt{2mE}=\hbar k$, де k має позитивну уявну частину

$$G(x,x',k)=\frac{m}{i\hbar^2 k}\exp(ik|x-x'|). \tag{1.7а}$$

Подальші дії провадимо з експонентою $\exp(ik|x|)$ змінюючи цей вираз на розв'язок однорідного рівняння, будемо поєднувати вихідну формулу з новою знаком ~. Отже,

$$\exp(ik|x|)=\cos kx+isignx\sin kx \quad isignx\sin kx,$$

$$i(\theta(x)-\theta(-x))\sin kx+i\sin kx=i(\theta(x)-\theta(-x))\sin kx+i(\theta(x)+\theta(-x))\sin kx=2i\theta(x)\sin kx.$$

Остаточний вираз для функції Гріна має наступний вигляд:

$$G(x,x',k)=\begin{cases}\dfrac{2m}{\hbar^2 k}\sin k(x-x'), & x>x',\\ 0, & x<x'.\end{cases} \tag{1.7б}$$

§ 1.2. Метод розкладу за власними функціями

Перейдімо тепер до іншого способу побудови функції Гріна вільної частинки, а саме шляхом розкладу за повною системою власних векторів. Звичайно, у випадку функції Гріна вільної частинки можна для її обчислення скористатися методом Фур'є і шукати розв'язок у вигляді інтеграла Фур'є

$$G_E(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(q) e^{iq(x-x')} dq.$$

Але ми скористаємося вже готовим розкладом за власними функціями, які у випадку вільної частинки мають вигляд

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right).$$

Тому для функції Гріна вільної частинки отримуємо

$$G_E(x) = \frac{m}{\pi\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}}{E-\frac{p^2}{2m}} dp.$$

Після заміни змінної $p \to \hbar q$ та запровадження позначення

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

$$G_E(x) = \frac{m}{\pi\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqx}}{k^2-q^2} dq = \frac{m}{\pi\hbar^2}\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k+q}\right) e^{iqx} dq.$$

Обчислюючи інтеграл за теоремою про рештки, слід мати на увазі, що $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ має уявну частину $\mathrm{Im}\,k > 0$. Тому внесок від першого доданку отримуємо, обходячи полюс $q = k$ через верхню півплощину, а від другого доданку — обходячи полюс $q = -k$ через нижню півплощину. В результаті маємо

$$G_E(x) = \frac{m}{i\hbar^2 k}\left(e^{ikx}\theta(x) + e^{-ikx}\theta(-x)\right) = \frac{m}{i\hbar^2 k} e^{ik|x|}.$$

Повертаючись від k до енергетичної змінної, отримуємо вже відому формулу для функції Гріна.

Зауважимо, що при іншому визначенні $\sqrt{E}$, коли знак уявної частини кореня залежить від знаку $\operatorname{Im}E$, можемо отримати функції Гріна, фур'є-образи яких аналітичні або лише у нижній півплощині, або лише у верхній. Самі функції Гріна будуть тоді пропорційні функціям Хевісайда $\theta(-x)$ або $\theta(x)$.

§ 1.3. Обчислення функції Гріна через пропагатор

Розглянемо також третій спосіб обчислення функції Гріна — через пропагатор. На основі виразу для пропагатора вільної частинки та використовуючи зв’язок між пропагатором та оператором резольвенти, отримуємо

$$G(x-x',E)=\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{1/2}\int_0^\infty \exp\left\{i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar t}+\frac{i}{\hbar}Et\right\}\frac{dt}{\sqrt{t}}. \tag{1.8}$$

Покладімо в інтегралі $t=u^2$. Тоді для G отримаємо формулу

$$G(x-x')=\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{2m}{\pi i\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}I(a,b),$$

$$I(a,b)=\int_0^\infty e^{i\left(au^2+\frac{b}{u^2}\right)}du,$$

при цьому

$$a=\frac{E}{\hbar},\ \ b=\frac{m(x-x')^2}{2\hbar}.$$

Для перетворення інтеграла збільшимо масштаб змінної інтегрування в λ разів. Тоді

$$I(a,b)=\lambda\int_0^\infty e^{i\lambda^2 a\left(u^2+\frac{b}{a\lambda^4}\frac{1}{u^2}\right)}du.$$

Бачимо, що вигідно покласти $\lambda^4=\dfrac{b}{a}$. Тоді

$$I(a,b)=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{i\sqrt{ab}\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)}du.$$

Тепер можна покласти $u-\frac{1}{u}=y,$ тоді $u^2+\frac{1}{u^2}=y^2+2.$ У виразі u через y відкидаємо непарну частину по y, яка не дає внеску, оскільки інтеграл по y береться тепер від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином

$$I(a,b)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sqrt{ab}y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi i}}{2\sqrt{a}}e^{2i\sqrt{ab}}.$$

Після підстановки значень для a і b отримуємо знову формулу (1.7).

Зауважимо, що в тривимірному випадку в тих же позначеннях $a=\frac{E}{\hbar},\ b=\frac{mr^{-2}}{(2\hbar)}$ виникає інтеграл

$$\int_0^\infty \exp\left\{i\left(at+\frac{b}{t}\right)\right\}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}},$$

який зворотною підстановкою зводиться до $I(b,a)$. Тому для тривимірної функції Гріна отримуємо одразу

$$G(r,r',E)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}|\vec{r}-\vec{r}'|\right).$$

Проілюструємо метод на прикладі частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі. (Надалі покладаємо $\hbar=1$).

Рівняння Шрьодінґера

$$-\frac{1}{2m}\psi''=E\psi,\ 0\le x\le a.$$

Розв'язок $\psi_1(x)=\sin k(x-a),\ k=\sqrt{2mE}$ задовольняє граничну умову $\psi_1(a)=0$, а розв'язок $\psi_2(x)=\sin kx$ - умову $\psi_2(0)=0.$

Вронскіан

$$W=k\begin{vmatrix}\cos k(x-a) & \cos kx\\ \sin k(x-a) & \sin kx\end{vmatrix}=k\sin ka.$$

На підставі (1.6)

$$G(x,x',E)=\frac{2m}{k\sin ka}\begin{cases}\sin k(x-a)\sin kx', & x>x',\\ \sin kx\sin k(x'-a), & x<x'.\end{cases} \tag{1.9}$$

Функція Гріна має полюси в точках $k_n a = \pi n,$ n=1, 2, … , які визначають дискретний спектр енергії частинки

$E_n = \frac{k_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 n^2}{2ma^2}$ (в звичайних одиницях $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$)

Зауважимо, що в даній задачі розріз по Е відсутній через парність функції Гріна по k.

Розділ 2

Побудова функцій Гріна для систем з дискретним спектром

У попередньому розділі ми розглянули два методи побудови функцій Гріна в квантовій механіці. Більшого поширення набув спосіб їх побудови заснований на розкладі за власними функціями даної системи. Цей розклад має вигляд (2.1, 2.3, 2.4):

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';E)=\sum_{\lambda}\frac{\psi_{\lambda}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{\lambda}(\vec{r})}{E-E_{\lambda}}. \tag{2.1}$$

Тут $\psi_{\lambda}(\vec{r})$ – власні функції, а E_{λ} належить спектру оператора Гамільтона. Символ $\sum\limits_{\lambda}$ означає насправді не лише сумацію по дискретній частині спектра, а й інтегрування по неперервній його частині. Таким чином, вираз для функції Гріна можемо подати в більш розгорнутій формі:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,';E)=\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3}}\frac{\psi_{\vec{k}}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{\vec{k}}(\vec{r})}{E-E(\vec{k})}+\sum_{n}\frac{\psi_{n}^{*}(\vec{r}\,')\psi_{n}(\vec{r})}{E-E_{n}}=G^{c}+G^{d}. \tag{2.1a}$$

де G^{c} і G^{d} – “неперервна” та “дискретна” складові.

§ 2.1. Функція Гріна для частинки в δ - функційній потенціальній ямі

Дивлячись на (2.1а), здавалося б, маючи власні функції і відповідні власні значення гамільтоніана, можна легко побудувати функцію Гріна. Однак в багатьох задачах з обчисленням “дискретної” складової виникає трудність, оскільки при цьому доводиться виконувати сумацію по E_n — коренях, взагалі кажучи, трансцендентного рівняння, що не вдається виконати аналітично. Однак виявляється, що проблема розв’язується автоматично, оскільки така ж сума з протилежним знаком виникає внаслідок сумації по полюсах при застосуванні теореми про рештки при обчисленні контурного інтеграла для “неперервної” складової G^{c}. При цьому G^{c} розпадається на два доданки $G^{c}=G'-G^{d}$, і при підстановці в (2.1а) “дискретна” складова знищується. Таким чином доданок, що містить дискретний спектр, у вихідну функцію Гріна не увійде. Така ситуація має місце в задачі про SNS-контакт. Цю задачу буде розв’язано в третьому розділі. Тут ми проілюструємо описану ситуацію на найпростішому прикладі, коли існує тільки один дискретний енергетичний рівень. Такою виявляється система з одновимірною δ - функційною потенціальною ямою.

Рівняння Шрьодінґера для частинки масою m у такій ямі на осі $x \in (-\infty, \infty)$ виглядає наступним чином:

$$-\frac{1}{2m}\psi''(x) + g\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{2.2}$$

де $g < 0$ – глибина потенціальної ями.

В областях $x > 0$ та $x < 0$ рівняння має вигляд:

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0, \tag{2.2a}$$

де $k = \sqrt{2mE}$. В точці $x = 0$ вимагаємо неперервності хвильової функції, перша ж похідна її має стрибок, наявність якого випливає з (2.2). Таким чином отримуємо дві граничні умови:

$$\begin{cases} \psi(-0) = \psi(+0)\,, \\ \psi'(+0) - \psi'(-0) = 2mg\psi(0). \end{cases} \tag{2.3}$$

Очевидно, можливі дві ситуації, коли $E > 0$ і коли $E < 0$. У першому випадку k дійсне і маємо суперпозицію плоских хвиль:

$$\psi(x) = \theta(-x)(c_1 e^{-ikx} + c_2 e^{ikx}) + \theta(x) c_3 e^{ikx} = \theta(-x)\psi_1(x) + \theta(x)\psi_2(x), \tag{2.4a}$$

у випадку хвиль, що падають зліва, і

$$\tilde{\psi}(x) = \theta(-x)\tilde{c}_1 e^{-ikx} + \theta(x)(\tilde{c}_2 e^{ikx} + \tilde{c}_3 e^{-ikx}) = \theta(-x)\tilde{\psi}_1(x) + \theta(x)\tilde{\psi}_2(x), \tag{2.4б}$$

для хвиль, що падають справа. Відзначимо, що сума $\sum_\lambda \psi_\lambda{}^*(x)\psi_\lambda(x)$ включає в себе також суму по цих двох типах розв’язку, тобто:

$$\sum_\lambda \psi_\lambda^*(x')\psi_\lambda(x) = \sum_k \left(\psi_k^*(x')\psi_k(x) + \tilde{\psi}_k^*(x')\tilde{\psi}_k(x)\right).$$

У випадку ж $E = -|E| < 0$, $k = i\sqrt{2m|E|} = iq$ маємо квадратично інтегровані експоненти:

$$\psi_d(x) = \theta(-x)Ae^{qx} + \theta(x)Be^{-qx}.$$

З граничних умов для хвильової функції одержуємо $A = B$ і $q = m|g|$, звідки $|E| = mg^2/2$, $E = -mg^2/2$. Отже, ми одержали єдиний енергетичний рівень, який відповідає дискретній частині спектру. Далі, з умови нормування на одиницю визначаємо глобальну константу: $|A|^2 = m|g|$. Таким чином маємо все необхідне для побудови “дискретної” складової функції Гріна. Її можна будувати в області *x<0* або *x>0*. Оберемо, наприклад, другу можливість. Внесок, що дає дискретний спектр, має вигляд:

$$G^d(x, x'; E) = \frac{m|g|e^{-m|g|(x+x')}}{E + mg^2/2}, \tag{2.5}$$

Перейдімо до випадку $E > 0$. Використовуючи граничні умови (2.3), а також ліво-праву симетрію ($|c_3|^2 = |\tilde{c}_2|^2$) виражаємо константи c_1 і c_2 через c_3:

$$c_1 = \frac{mg}{ik}c_3, \qquad c_2 = \frac{ik - mg}{ik}c_3, \tag{2.6а}$$

а константи $\tilde{c}_1$ та $\tilde{c}_3$ через $\tilde{c}_2$:

$$\tilde{c}_1 = \frac{ik}{ik + mg}\tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_3 = -\frac{mg}{ik + mg}\tilde{c}_2. \tag{2.6б}$$

Мультиплікативну константу шукаємо з умови повноти:

$$\sum_\lambda \psi_\lambda^*(x)\psi_\lambda(x') = \delta(x - x').$$

Це дає:

$$|c_3|^2 = |\tilde{c}_2|^2 = \frac{k^2}{k^2 + m^2 g^2}.$$

Доданок від неперервного в області *x>0* спектра виражається інтегралом:

$$G^c(x, x'; E) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\psi_2^*(x')\psi_2(x) + \tilde{\psi}_2^*(x')\tilde{\psi}_2(x)}{E - k^2/2m} = \tag{2.7}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-x')}}{E - k^2/(2m)} - \int \frac{dk}{2\pi} \frac{mg}{mg - ik} \frac{e^{ik(x+x')}}{E - k^2/2m} =$$

$$= G^0(x - x'; E) - \int \frac{dk}{2\pi} \frac{mg}{mg - ik} \frac{e^{ik(x+x')}}{E - k^2/2m}.$$

Перший доданок, що залежить від різниці $x - x'$, є просторово-однорідною функцією Гріна вільної частинки:

$$G^0(x - x'; E) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-x')}}{E - k^2/2m} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}} e^{i\sqrt{2mE}(x-x')} .$$

Останній інтеграл обчислюємо контурним інтегруванням:

$$\int \frac{dk}{2\pi} \frac{mg}{mg - ik} \frac{e^{ik(x+x')}}{E - k^2/2m} = \frac{m|g| e^{-m|g|(x+x')}}{E + mg^2/2} + \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{mg e^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg - i\sqrt{2mE}} =$$

$$= G^d(x, x'; E) + \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{mg e^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg - i\sqrt{2mE}} .$$

Отже,

$$G^c(x, x'; E) = G^0(x - x'; E) - G^d(x, x'; E) - \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{mg e^{i\sqrt{2mE}(x+x')}}{mg - i\sqrt{2mE}} .$$

Бачимо, що в виразі для G^c з'являється доданок $-G^d$, який знищує "дискретну" складову у виразі для G. Остаточний результат для повної функції Гріна має вигляд:

$$G(x, x'; E) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}} \left\{ e^{i\sqrt{2mE}(x-x')} + \frac{im|g|}{mg - i\sqrt{2mE}} e^{i\sqrt{2mE}(x+x')} \right\} .$$

Бачимо, що з останнього виразу для функції Гріна внесок від дискретного спектру випав! Фізичний зміст доданків, що залишилися, такий: перший є функцією Гріна для вільної частинки, другий, пропорційний $e^{ik(x+x')}$, зумовлений наявністю ями і обертається на нуль при її відсутності ($g = 0$). Зауважимо, що полюс його знаменника, $mg = i\sqrt{2mE}$, визначає дискретний рівень енергії $E = -mg^2/2$.

§ 2.2. Функції Гріна для частинки в потенціальній ямі скінченної глибини

У попередньому підрозділі на прикладі нескінченно глибокої потенціальної ями було проілюстровано, що у виразі для функції Гріна доданки “дискретної” складової випадають. У даному параграфі розглянемо складніший випадок – потенціальну яму скінченої ширини. У цьому випадку дискретний спектр є багаторівневий. Тоді вираз для G^d являє собою суму по цих рівнях, які визначаються трансцендентним рівнянням (її очевидно, точно підрахувати неможливо). Аналогічна сума, але з протилежним знаком, виникає внаслідок сумації по полюсах у виразі для G^c. В результаті складова G^d функції Гріна G знищиться.

Розглянемо модель ями скінченої глибини, у якої потенціальна енергія задається виразом

$$U(z) = \begin{cases} -U_0, & |z \leq a| \\ 0, & |z| > a, \end{cases}$$

Запишемо рівняння Шрьодінґера

$$H\psi_\lambda(z) = E_\lambda \psi_\lambda(z). \tag{2.8}$$

Тут E_λ - спектр задачі.

Гамільтоніан нашої моделі має вигляд

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dt^2} + U(z).$$

Відповідно функція Гріна:

$$G_E(z,z') = \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda(z)\psi_\lambda^*(z')}{E - E_\lambda}, \tag{2.9}$$

Розглянемо розв’язки рівняння Шрьодінґера в різних областях.

При $z < -a$ маємо

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_\lambda''(z) = E_\lambda \psi_\lambda(z),$$

або

$$\psi_\lambda'' + k^2\psi_\lambda = 0.$$

Звідси

$$\psi_\lambda(z) = Ae^{ik_\lambda x} + Be^{-ik_\lambda x} \quad , \qquad k_\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E_\lambda ,$$

В області $|z| \le a$ рівняння Шрьодінґера має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_\lambda''(z) - U_0\psi_\lambda(z) = E_\lambda\psi_\lambda(z).$$

$$\psi_\lambda'' + x^2\psi_\lambda = 0,$$

$$\psi_\lambda(z) = Ce^{ix} + De^{-ix}, \qquad\qquad x^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 + E_\lambda),$$

Аналогічно в області $z > a$ розв’язок має вигляд

$$\psi_\lambda(z) = A'e^{ikx} + Be^{-ikz}.$$

Таким чином загальний розв’язок рівняння Шрьодінґера в трьох областях дається формулою:

$$\psi_\lambda(z) = \begin{cases} Ae^{ik_\lambda z} + Be^{-ik_\lambda z} & , z < -a \\ Ce^{ix_\lambda z} + De^{-ix_\lambda z} & , |z| \le a \\ A'e^{ik_\lambda z} + B'e^{-ik_\lambda z} & , z > a \end{cases}$$

Будемо розглядати два типи розв’язків:

$$\psi_\lambda^I(z) = \begin{cases} Ae^{ik_\lambda z} & , z < -a \\ Ce^{ix_\lambda z} + De^{-ix_\lambda z} & , |z| \le a \\ A'e^{ik_\lambda z} + B'e^{-ik_\lambda z} & , z > a \end{cases}$$

$$\psi_\lambda^{II}(z) = \begin{cases} \tilde{A}e^{ik_\lambda z} + \tilde{B}e^{-ik_\lambda z} & , z < -a \\ \tilde{C}e^{ix_\lambda z} + \tilde{D}e^{-ix_\lambda z} & , |z| \le a \\ \tilde{B}'e^{-ik_\lambda z} & , z > a \end{cases}$$

Для відшукання невідомих коефіцієнтів в лінійних комбінаціях виконаємо процедуру зшивання розв’язків на границях областей.

Для першого типу розв’язку маємо

$$Ae^{-ika} = Ce^{-ixa} + De^{ixa},$$

$$Aike^{-ika} = Cixe^{-ixa} + Dixe^{ixa},$$

$$Ce^{ixa} + De^{-ixa} = A'e^{-ika} + B'e^{-ika},$$

$$Cixe^{ixa} - Dixe^{-ixa} = A'ike^{ika} - B'ike^{-ika},$$

$$2Cxe^{-ixa} = A(k+x)e^{-ika},$$

$$C = A\frac{k+x}{2x}e^{-i(k-x)a},$$

$$2Dxe^{ixa} = A(x-k)e^{-ika},$$

$$D = A\frac{x-k}{2x}e^{-i(k+x)a},$$

$$C(k+x)e^{ixa} + D(k-x)e^{-ixa} = 2A'ke^{ika},$$

$$A'2ke^{ika} = A\left(\frac{(k+x)^2}{2x}e^{-i(k-2x)a} - \frac{(k-x)^2}{2x}e^{-i(k+2x)a}\right),$$

$$A' = A\left[\frac{(k+x)^2}{4kx}e^{-2i(k-x)a} - \frac{(k-x)^2}{4kx}e^{-2i(k+x)a}\right] = A\left[i\frac{k^2+x^2}{2kx}\sin 2xa + \cos 2xa\right]e^{-2ika},$$

$$C(k-x)e^{ixa} + D(x+k)e^{-ixa} = B'2ke^{-ika},$$

$$B'2k = A\left[\frac{k^2-x^2}{2x}e^{2ixa} - \frac{k^2-x^2}{2x}e^{-2ixa}\right],$$

$$B' = Ai\frac{k^2-x^2}{2xk}\sin 2xa\,.$$

Аналогічно для другого типу розв'язку

$$\tilde{B}'e^{-ika} = \tilde{C}e^{ixa} + \tilde{D}e^{-ixa},$$

$$-\tilde{B}'ke^{-ika} = \tilde{C}xe^{ixa} - \tilde{D}xe^{-ixa},$$

$$2\tilde{C}xe^{ixa} = \tilde{B}'(x-k)e^{-ika},$$

$$\tilde{C} = \tilde{B}'\frac{x-k}{2x}e^{-i(k+x)a},$$

$$2\tilde{D}xe^{-ixa} = \tilde{B}'(k+x)e^{-ika},$$

$$\tilde{D} = \tilde{B}'\frac{k+x}{2x}e^{-i(k-x)a},$$

$$\tilde{A}e^{-ika} + \tilde{B}e^{ika} = \tilde{C}e^{ixa} + \tilde{D}e^{ixa},$$

$$\tilde{A}ke^{-ika} - \tilde{B}ke^{ika} = \tilde{C}xe^{-ixa} - \tilde{D}xe^{ixa},$$

$$2\tilde{A}ke^{-ika}=\tilde{C}(k+x)e^{-ixa}+\tilde{D}(k-x)e^{ixa},$$

$$\tilde{A}=\frac{\tilde{B}'}{2k}\left[\frac{x^2-k^2}{2x}e^{-i(k+x)a}e^{-ixa}+\frac{k^2-x^2}{2x}e^{-i(k-x)a+ixa}\right]e^{ika}\ ,\qquad \tilde{A}=\tilde{B}'\left[i\frac{k^2-x^2}{2kx}\sin 2xa\right],$$

$$2\tilde{B}ke^{ika}=\tilde{C}(k-x)e^{-ixa}+\tilde{D}(k+x)e^{ixa}=\tilde{B}'\left[-\frac{(k-x)^2}{2x}e^{-ixa-i(k+x)a}+\frac{(k+x)^2}{2x}e^{ixa-i(k-x)a}\right],$$

$$\tilde{B}=\tilde{B}'\left[-\frac{(k+x)^2}{4xk}e^{2ixa}\,\frac{(k-x)^2}{4kx}e^{-2ixa}\right]e^{-2ika},$$

$$\tilde{B}=\tilde{B}'\left[i\frac{k^2+x^2}{2kx}\sin 2xa+\cos 2xa\right]e^{-2ika}.$$

Досі ми розглядали неперервний спектр $E_\lambda>0$. У випадку $E<0$, $|E|\le U_0$ маємо дискретний спектр.

Покладемо $k=iq=i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$, $x=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0-|E|)}$ - дійсне. В цьому випадку одержимо наступні розв'язки

$$\psi_\lambda(z)=\begin{cases}\beta_\lambda e^{q_\lambda z} & ,z<-a\\ \mu_\lambda e^{ixz}+\nu_\lambda e^{-ixz} & ,|z|\le a\\ \alpha_\lambda e^{q_\lambda z} & ,z>a\end{cases}$$

Зшивка дає наступні рівняння

$$\beta_\lambda e^{-qa}=\mu_\lambda e^{-ixa}+\nu_\lambda e^{ixa},$$

$$q\beta_\lambda e^{-qa}=i\mu_\lambda xe^{-ixa}-i\nu_\lambda xe^{ixa},\ \beta_\lambda(ix+q)e^{-qa}=2ix\mu_\lambda e^{-ixa},$$

$$\mu_\lambda=\beta_\lambda\frac{ix+q}{2ix}e^{ixa-qa},$$

$$|\mu_\lambda|^2=|\beta_\lambda|^2\frac{q^2+x^2}{4x^2}e^{-2qa},$$

$$\beta_\lambda(ix-q)e^{-qa}=2ix\nu_\lambda e^{ixa},$$

$$\nu_\lambda=\beta_\lambda\frac{ix-q}{2ix}e^{-ixa-qa},$$

$$|\nu_\lambda|^2=|\beta_\lambda|^2\frac{q^2+x^2}{4x^2}e^{-2qa},$$

$$\left|\mu_\lambda\right|^2 = \left|\nu_\lambda\right|^2,$$

$$\mu_\lambda e^{ixa} + \nu_\lambda e^{-ixa} = \alpha_\lambda e^{-qa},$$

$$ix\mu_\lambda e^{ixa} - ix\nu_\lambda e^{-ixa} = -q\alpha_\lambda e^{-qa},$$

$$2ix\mu_\lambda e^{ixa} = \alpha_\lambda (ix-q)e^{-qa},$$

$$\mu_\lambda = \alpha_\lambda \frac{ix-q}{2x} e^{-qa-ixa},$$

$$\mu_\lambda = \alpha_\lambda \frac{x+iq}{2x} e^{-ixa-qa},$$

$$\left|\mu_\lambda\right|^2 = \left|\alpha_\lambda\right|^2 \frac{x^2+q^2}{4x^2} e^{-2qa},$$

Отже,

$$\left|\mu_\lambda\right|^2 = \left|\nu_\lambda\right|^2,\ \left|\alpha_\lambda\right|^2 = \left|\beta_\lambda\right|^2,$$

$$\left|\mu_\lambda\right|^2 = \left|\beta_\lambda\right|^2 \frac{q^2+x^2}{4x^2} e^{-2qa}.$$

Умова сумісності системи має вигляд:

$$\begin{vmatrix} e^{-qa} & e^{-xa} & e^{ixa} & 0 \\ qe^{-qa} & ixe^{-ixa} & -ixe^{ixa} & 0 \\ 0 & e^{ixa} & e^{-ixa} & e^{-qa} \\ 0 & ixe^{ixa} & -ixe^{-ixa} & -qe^{-qa} \end{vmatrix} = 0,$$

$$e^{-qa}\begin{vmatrix} ixe^{-ixa} & -ixe^{ixa} & 0 \\ e^{ixa} & e^{-ixa} & e^{-qa} \\ ixe^{ixa} & -ixe^{-ixa} & -qe^{-qa} \end{vmatrix} - qe^{-qa}\begin{vmatrix} e^{-ixa} & e^{ixa} & 0 \\ e^{ixa} & e^{-ixa} & e^{-qa} \\ ixe^{ixa} & -ixe^{-ixa} & -qe^{-qa} \end{vmatrix} = ixe^{-qa}e^{-ixa}(-qe^{-qa}e^{-ixa} + ixe^{-ixa}e^{-qa}) +$$

$$+ ixe^{-qa}e^{ixa}(-qe^{ixa}e^{-qa} - ixe^{-qa}e^{ixa}) - qe^{-qa}e^{-ixa}(-qe^{-ixa}e^{-qa} + ixe^{-ixa}e^{-qa}) + qe^{-qa}e^{ixa}(-qe^{ixa}e^{-qa} +$$
$$- ixe^{ixa}e^{-qa}) = 0,$$

$$tg 2xa = \frac{2xq}{x^2-q^2}.$$

Розглянемо нормування розв’язків, що відповідають дискретному спектру

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\lambda^*(z)\psi_\lambda(z)dz=\int_{-\infty}^{-a}|\beta_\lambda|^2e^{2qz}dz+\int_{-a}^{a}(\mu_\lambda^*e^{-ixz}+\nu_\lambda^*e^{ixz})(\mu_\lambda e^{ixz}+\nu_\lambda e^{-ixz})dz+$$

$$+\int_{a}^{+\infty}|\alpha_\lambda|^2e^{-2qz}dz=|\beta_\lambda|^2\frac{e^{-2qa}}{2q}+|\alpha_\lambda|^2\frac{e^{-2qa}}{2q}+2a(|\mu_\lambda|^2+|\nu_\lambda|^2)+\int_{-a}^{a}dz(\mu_\lambda^*\nu_\lambda e^{-2ixz}+\mu_\lambda\nu_\lambda^*e^{2ixz})=$$

$$=|\alpha_\lambda|^2\left(\frac{e^{-2qa}}{q}+4ae^{-2qa}\right)+\mu_\lambda^*\nu_\lambda\left(\frac{1}{-2ix}\left[e^{-2ixa}-e^{2ixa}\right]\right)+\mu_\lambda\nu_\lambda^*\left(\frac{1}{2ix}\left[e^{2ixa}-e^{-2ixa}\right]\right)=$$

$$=|\alpha_\lambda|^2\frac{e^{-2qa}}{q}(1+4aq)+\frac{\sin 2xa}{x}\left(\mu_\lambda^*\nu_\lambda+\mu_\lambda\nu_\lambda^*\right).$$

Запишемо, що:

$$\mu_\lambda^*\nu_\lambda=|\alpha_\lambda|^2\frac{(x-iq)^2}{4x^2}e^{-2qa+2ixa},$$

$$\mu_\lambda\nu_\lambda^*=|\alpha_\lambda|^2\frac{(x+iq)^2}{4x^2}e^{-2qa-2ixa},$$

$$1=|\alpha_\lambda|^2e^{-2qa}\left[\frac{1}{q}(1+4aq)+\frac{\sin 2xa}{4x^3}\left((x-iq)^2e^{2ixa}+(x+iq)^2e^{-2ixa}\right)\right]$$

$$1=|\alpha_\lambda|^2e^{-2qa}\left\{\frac{1}{q}\left[1+4aq\right]+\frac{\sin 2xa}{4x^3}\left[(x^2-q^2)(e^{2ixa}+e^{-2ixa})-2ixq(e^{2ixa}-e^{-2ixa})\right]\right\}=$$

$$=|\alpha_\lambda|^2e^{-2qa}\left\{\frac{1}{q}\left[1+4aq\right]+\frac{\sin 2xa}{4x^3}\left[2(x^2-q^2)\cos 2xa+4xq\sin 2xq\right]\right\}=|\alpha_\lambda|^2e^{-2qa}\times$$

$$\times\frac{1}{q}\left\{1+4aq\frac{x^2+q^2}{4x^2}+\frac{q^2}{x^2}\sin 2xa\left[\frac{x^2-q^2}{2xq}\cos 2xa+\sin 2xq\right]\right\}.$$

Звідси

$$|\alpha_\lambda|^2=\frac{qe^{2qa}}{1+4aq\frac{x^2+q^2}{4x^2}+\frac{q^2}{x^2}\sin 2xa\left[\frac{x^2-q^2}{2xq}\cos 2xa+\sin 2xq\right]}=$$

$$=\frac{qe^{2qa}}{1+\frac{x^2+q^2}{x^2}aq+\frac{q^2}{x^2}\sin 2xa\left[\frac{x^2-q^2}{2xq}Ag\,2xa+1\right]}=\frac{qe^{2qa}}{1+\frac{q^2}{x^2}+\frac{x^2+q^2}{x^2}aq}=\frac{qx^2e^{2qa}}{(x^2+q^2)(1+aq)}.$$

Таким чином ми отримали, що:

$$|\alpha_\lambda|^2=\frac{qx^2e^{2qa}}{(x^2+q^2)(1+aq)}.$$

Повертаємось до неперервного спектра. Знайдемо глобальну константу з умови повноти

$$\sum_{\lambda}\psi_{\lambda}(t)\psi_{\lambda}^{*}(t')=\delta(t-t').$$

Будемо розглядати $t>>a$, $t'>>a$, тоді дискретним спектром знехтуємо. Маємо

$$\sum_{\lambda}\psi_{\lambda}(t)\psi_{\lambda}^{*}(t')=\sum_{\lambda}\psi_{\lambda}^{I}(t)\psi_{\lambda}^{I*}(t')+\sum_{\lambda}\psi_{\lambda}^{II}(t)\psi_{\lambda}^{II*}(t')=\sum_{\lambda}\left(A'e^{ikz}+B'e^{-ikz}\right)\left(A'^{*}e^{-ikz'}+B'^{*}e^{-ikz'}\right)+$$

$$+\sum_{\lambda}\left|\widetilde{B}'\right|^{2}e^{-ik(z-z')}=\sum_{\lambda}\left|A'\right|^{2}\left(e^{ik(z-z')}+^{2}\left|B'\right|^{2}e^{-ik(z-z')}+\left|\widetilde{B}'\right|^{2}e^{-ik(z-z')}\right).$$

$$\left|A_{\lambda}'\right|^{2}=\left|A_{\lambda}\right|^{2}\left[\frac{(k^{2}+x^{2})^{2}}{4k^{2}x^{2}}\sin^{2}2xa+\cos^{2}2xa\right],$$

$$\left|B_{\lambda}'\right|^{2}=\left|A_{\lambda}\right|^{2}\frac{(k^{2}+x^{2})^{2}}{4k^{2}x^{2}}\sin^{2}2xa,$$

Отже, маємо (врахувавши, що $\left|A_{\lambda}\right|^{2}=\left|\widetilde{B}_{\lambda}'\right|^{2}$)

$$\sum_{\lambda}\left|A_{\lambda}\right|^{2}\left(\left[\frac{(k^{2}+x^{2})^{2}}{4k^{2}x^{2}}\sin^{2}2xa+\cos^{2}2xa\right]e^{ik(z-z')}+\left[\frac{(k^{2}-x^{2})^{2}}{4k^{2}x^{2}}\sin^{2}2xa+1\right]e^{-ik(z-z')}\right).$$

Поклавши

$$\left|A_{\lambda}\right|^{2}=\left[\frac{(k^{2}+x^{2})^{2}}{4k^{2}x^{2}}\sin^{2}2xa+\cos^{2}2xa\right]^{-1},$$

одержимо

$$\sum_{\lambda}(e^{ik(z-z')}+e^{-ik(z-z')})\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(z-z')}dk=\delta(z-z').$$

Перейдемо до побудови функції Гріна. Розглянемо спочатку континуальний внесок

$$G_{E}^{C}(z,z')=\sum_{\lambda}\frac{\psi_{\lambda}(z)\psi_{\lambda}^{*}(z')}{E-E_{\lambda}};$$

Нехай $z\geq a$, $z'\geq a$

$$G_E^C(z,z')=\sum_\lambda \frac{\left(A'_\lambda e^{ikz}+B'_\lambda e^{-ikz}\right)\left(A^{*'}_\lambda e^{-ikz'}+B'^{*'}_\lambda e^{ikz'}\right)}{E-E_\lambda}+\sum_\lambda \frac{\left|\tilde{B}'\right|^2 e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}=$$

$$=\sum_\lambda\left\{\frac{\left|A'_\lambda\right|^2 e^{ik(z-z')}+\left|B'_\lambda\right|^2 e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}+\frac{\left|\tilde{B}'\right|^2 e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}+\frac{A'_\lambda B'^*_\lambda e^{ik(z+z')}+A'^*_\lambda B'_\lambda e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}\right\}=$$

$$=\sum_\lambda \frac{e^{ik(z-z')}+e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}+\left\{\frac{\left|A'_\lambda\right|^2 e^{ik(z-z')}+\left|B'_\lambda\right|^2 e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}+\frac{\left|\tilde{B}'\right|^2 e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}+\frac{A'_\lambda B'^*_\lambda e^{ik(z+z')}+A'^*_\lambda B'_\lambda e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{e^{ik(z-z')}+e^{-ik(z-z')}}{E-\frac{1}{2m}k^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ik(z-z')}dk}{2mE-k^2}=\frac{m}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ik(z-z')}}{a^2-k^2}dk=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}e^{i\sqrt{2mE}(z-z')}.$$

$$\oint_\gamma \frac{e^{ik(z-z')}}{a^2-k^2}dk=2\pi i\sum \mathrm{Res}\; f(k),$$

Таким чином перший доданок дав внесок в функцію Гріна, який має вигляд

$$\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}e^{i\sqrt{2mE}(z-z')}.$$

Розглянемо другий доданок:

$$\sum_\lambda \frac{A'_\lambda B'^*_\lambda e^{ik(z+z')}+A'^*_\lambda B'_\lambda e^{-ik(z-z')}}{E-E_\lambda}=\sum_\lambda \frac{\left|A_\lambda\right|^2}{E-E_\lambda}\left\{\left[i\frac{k^2+x^2}{2kx}\sin 2xa+\cos 2xa\right]\left(-i\frac{k^2-x^2}{2kx}\sin 2xa\right)e^{-2ika}\times\right.$$

$$\left.\times e^{ik(z+z')}+\left[i\frac{k^2+x^2}{2kx}\sin 2xa+\cos 2xa\right]\left(i\frac{k^2-x^2}{2kx}\sin 2xa\right)e^{2ika}e^{-ik(z+z')}\right\}=$$

$$=\sum_\lambda i\frac{\left|A_\lambda\right|^2}{E-E_\lambda}\frac{(k^2-x^2)\sin 2xa}{4k^2x^2}\left(\left[2kx\cos 2xa-i(k^2+x^2)\sin 2xa\right]e^{-ik(z+z'-2a)}-\right.$$

$$\left.-\left[2kx\cos 2xa+i(k^2+x^2)\sin 2xa\right]e^{ik(z+z'-2a)}\right)=i\sum_\lambda \frac{(k^2-x^2)\sin 2xa}{E-E_\lambda}\left\{\frac{e^{-ik(z+z'-2a)}}{2kx\cos 2xa+i(k^2+x^2)\sin 2xa}-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{ik(z+z'-2a)}}{2kx\cos 2xa-i(k^2+x^2)\sin 2xa}\right\}\to\frac{im}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{(k^2-x^2)\sin 2xa}{2mE-k^2}\left\{\frac{e^{-ik(z+z'-2a)}}{2kx\cos xa-i(k^2+x^2)\sin 2xa}\right\}.$$

Обчислимо інтеграл

$$-\frac{im}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{(k^2-x^2)\sin 2xa}{2mE-k^2}\,\frac{e^{ik(z+z'-2a)}}{2kx\cos 2xa-i(k^2+x^2)\sin 2xa}.$$

Його можна обчислити за допомогою теореми про рештки. Внески дають полюси, які визначаються нулями знаменника

$$2kx\cos xa + i(k^2 + x^2)\sin 2xa\,,$$

тобто власними значеннями дискретного спектру, а також нулями виразу

$$2mE - k^2\,,$$

тобто, при значеннях $k = \pm\sqrt{2mE}$ полюс $k = +\sqrt{2mE}$ дає наступний внесок

$$\frac{im}{\pi}2\pi i\frac{-2mU_0}{2\sqrt{2mE}}\sin 2\sqrt{2mU_0 + 2mEa}\,\frac{e^{i\sqrt{2mE}(z-z'-2a)}}{2\sqrt{2m(U_0+E)}\cos 2\sqrt{2m(U_0+E)}a - i(2m(U_0+2E))\sin 2xa} =$$

$$= -\frac{2m^2U_0}{\sqrt{2mE}}\frac{\sin 2xae^{-ik(z+z'-2a)}}{2xk\cos 2xa - i(k^2+x^2)\sin 2xa}.$$

Таким чином внесок у функцію Гріна становить:

$$\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}R\ e^{i\sqrt{2mE}(z+z')},$$

Де $\quad R = \dfrac{i(x^2-k^2)\sin 2xae^{-2ik}}{2xk\cos 2xa - i(k^2+x^2)\sin 2xa}.$

Розглянемо внесок від полюсів дискретного спектру, які визначаються рівнянням

$$2xk\cos 2xa - i(k^2+x^2)\sin 2xa = 0,$$

або

$$tg2xa = \frac{2xq}{x^2-q^2}\,, \qquad k = iq,$$

маємо

$$-\frac{i}{2\pi}2\pi i\sum_{\mu}\frac{(k^2-x^2)}{E-E_\mu}\frac{e^{ik(z+z'-2a)}}{\frac{d}{dk}(2kxctg2xa - i(k^2+x^2))}\Bigg|_{k=q},$$

$$\frac{d}{dk}(2kxctg2xa - i(k^2+x^2)) = \frac{d}{dk}(2kxctg2xa - i(2k^2+2mU_0) =$$

$$\times 2kxctg2xa + \frac{2k^2}{x}ctg2xa - 2kx\frac{1}{\sin^2 2xa}\times$$

$$\times 2a\frac{k}{x} - 4ki = \frac{2}{x}(x^2+k^2)ctg2xa - 4ak^2\frac{1}{\sin^2 2xa} - 4ki,$$

$$\frac{d}{dk}(2kxctg2xa - i(k^2 + x^2))\Bigg|_{k=iq} = \frac{2}{x}(x^2 - q^2)ctg2xa + 4aq^2\frac{1}{\sin^2 2xa} + 4iq = \left|\begin{matrix}(x^2 - q^2) = 2xqctg2xa \\ \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1\end{matrix}\right| =$$

$$= 4qctg^2 2xa + 4aq^2\frac{1}{\sin^2 2xa} + 4q = 4qctg^2 2xa + 4aq^2(ctg^2\alpha + 1) + 4q = 4q(ctg^2 2xa(1 + aq) + (1 + aq)) =$$

$$= 4q(ctg^2 2xa + 1)(1 + aq) = 4q\left(\frac{(x^2 - q^2)^2}{4x^2q^2} + 1\right)(1 + aq) = \frac{1}{x^2q}(x^4 - 2x^2q^2 + q^4 + 4x^2q^2)(1 + aq) =$$

$$= \frac{1}{x^2q}(x^2 + q^2)(1 + aq)(x^2 + q^2).$$

Таким чином, внесок від полюсів, що визначають дискретний спектр має вигляд

$$-\sum_{\mu}\frac{qx^2e^{-q(z+z')}e^{2qa}}{(x^2 + q^2)(1 + aq)(E - E_{\mu})}, \tag{2.10}$$

Перейдемо до обчислення внеску від дискретного спектру:

$$G^d(z, z', E) = \sum_{\mu}\frac{|\alpha_{\lambda}|^2 e^{-q(z+z')}}{E - E_{\mu}}.$$

Оскільки

$$|\alpha_{\lambda}|^2 = \frac{qx^2e^{2qa}}{(x^2 + q^2)(1 + aq)},$$

то

$$G^d(z, z', E) = \sum_{\mu}\frac{qx^2e^{-q(z+z')}e^{2qa}}{(x^2 + q^2)(1 + aq)(E - E_{\mu})}.$$

Таким чином сумарна функція Гріна:

$$G(z, z', E) = G^d(z, z', E) + G^C(z, z', E) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(e^{i\sqrt{2mE}(z-z')} + \mathrm{Re}^{i\sqrt{2mE}(z+z')}\right).$$

$$R = \frac{i(x^2 - k^2)\sin 2xae^{-2ika}}{2xk\cos 2xa - i(x^2 + k^2)\sin 2xa},$$

В границі, коли яма зникає $U_0 \to 0$, $x \to k$, $R \to 0$, одержуємо функцію Гріна вільної частинки.

Таким чином ми знову одержали результат, що дискретний спектр не дає внеску в функцію Гріна.

РОЗДІЛ 3

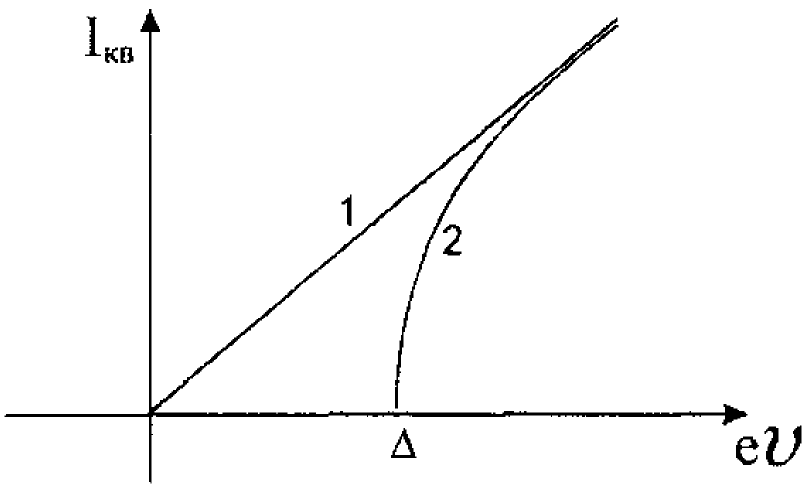
Функції Гріна в теорії SNS контакту

У цьому розділі ми застосуємо метод обчислення функції Гріна на основі розкладу за власними функціями для розрахунку струму Джозефсона в SNS контакті. Для цього використаємо квазікласичне наближення рівнянь теорії надпровідності, яке було розроблене в роботі А. Свідзинського [5].

§3.1. Тунельний ефект в надпровідниках

Явище тунелювання електронів, тобто проходження їх через потенціальні бар'єри при повній енергії, меншій за максимальну висоту потенціалу, добре відоме з квантової механіки. Якщо маємо нормальний метал, дві частини якого розділені достатньо тонким прошарком ізолятора, в такій системі за наявності різниці потенціалів може спостерігатися електричний струм, пропорційний вказаній різниці потенціалів. Ефективний опір пов'язаний з коефіцієнтом тунельного проходження зворотно пропорційною залежністю. Цей ефект був досліджений досить скоро після побудови квантової механіки; в 1930 р. була запропонована його теорія.

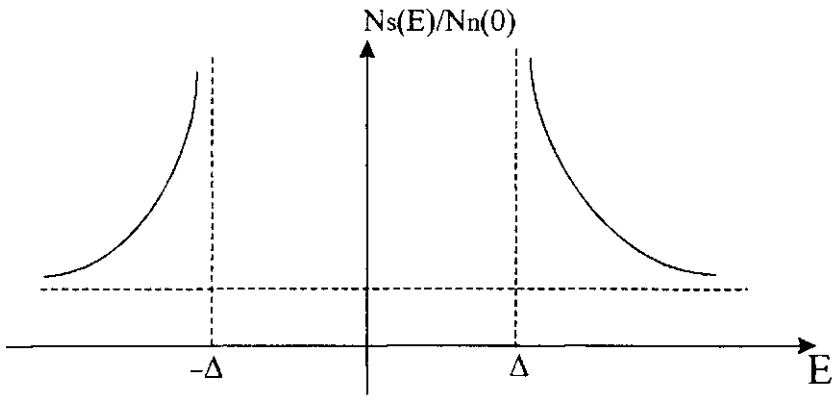
Якщо один або обидва метали знаходяться в надпровідному стані, проста лінійна вольт-амперна характеристика суттєво ускладнюється, як видно із порівняння відповідних графіків. Тут 1 стосується випадку контакту



Креслення 1. Вольт-амперна характеристика тунельного струму. Крива 1) стосується контакту з двох нормальних металів; 2) для NIS-контакта.

NIN (I - символ ізолятора, N - нормального металу), 2 - випадку NIS-контакту (S - символ надпровідника). Бачимо, що ефект має поріг, коли один з металів знаходиться у надпровідному стані: струм починається з напруг $v > \Delta/e$, а вольт-амперна характеристика нелінійна. Така особливість кривої 2 пов'язана з тим, що за наявності куперівського спарювання енергетичний спектр надпровідника має щілину 2Δ. Останній факт зумовлений формуванням у надпровіднику квазічастинкових збуджень із законом дисперсії $\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$. Відповідно в густині станів надпровідника виникає заборонена зона товщиною 2Δ. Графік густини станів у цьому випадку має вигляд, зображений на кр.2. Поріг по ev, рівний Δ, виникає через те, що станів з енергією нижче Δ не існує.

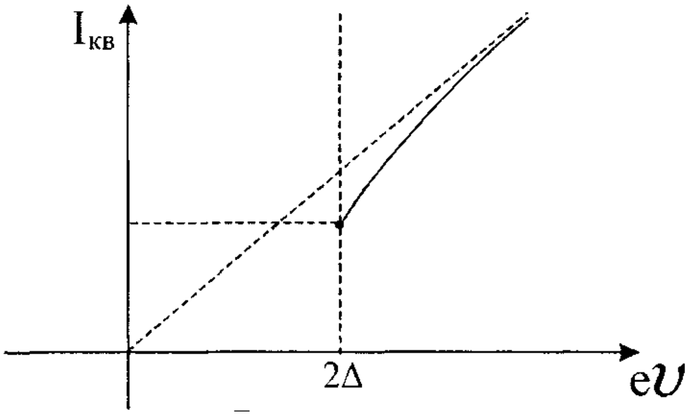
Очевидно, що вимірюючи струм як функцію ev, можна визначити експериментально щілину 2Δ, що й було вперше здійснено Івером Гівером.



Креслення 2. Густина станів в надпровіднику. Ширина забороненої ділянки дорівнює 2Δ.

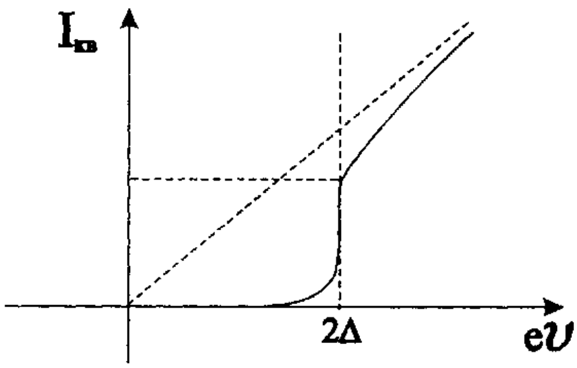
Тунелювання квазічастинок з одного надпровідника в другий через тунельний бар'єр в контакті, що позначається SIS, при температурі T=0 описується такою вольт-амперною характеристикою(кр.3).

У цьому випадку для однакових надпровідників ліворуч і праворуч бар'єра маємо поріг при напрузі, рівній $2\Delta/e$, а вольт-амперна характеристика нелінійна. Зрозуміло, що знімаючи цю вольт-амперну характеристику, можемо також виміряти щілину в енергетичному спектрі надпровідника.



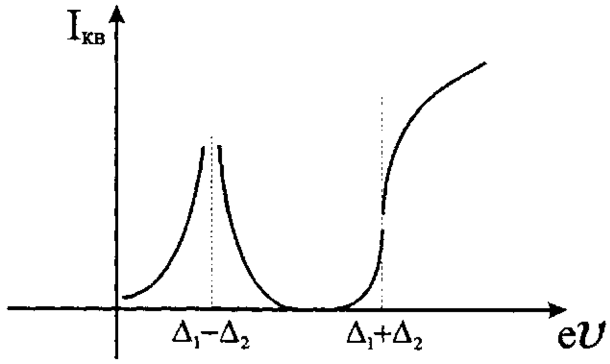
Креслення 3. Вольт-амперна характеристика квазічастинкового тунельного струму в *SIS*-контакті з двох однакових надпровідників. Поріг дорівнює 2Δ. Температура $T = 0$.

Температура розмиває особливість цієї кривої. Вольт-амперна характеристика квазічастинкового струму для контакту SIS при $T \neq 0$ має вигляд



Креслення 4. Вольт-амперна характеристика SIS контакту при $T \neq 0$

Ще цікавіше виглядає вольт-амперна характеристика квазічастинкового тунельного струму, коли обидва метали є різними надпровідниками (контакт SIS’). Нехай надпровідники, розташовані ліворуч і праворуч прошарку діелектрика, характеризуються щілинами Δ_1 та Δ_2 відповідно. Для такого випадку маємо таку вольт-амперну характеристику



Креслення 5. Вольт-амперна характеристика квазічастинкового струму в контакті з двох різних надпровідників при відмінних від нуля температурах. Видно логарифмічну особливість в точці $\Delta_1 - \Delta_2$.

З цього графіка можна знайти окремо Δ_1 та Δ_2.

Надзвичайно важливою виявляється та обставина, що квазічастинковий струм у випадку SIS' контакту не вичерпує повного струму в такій системі. Виявилося (Брайан Джозефсон, 1962), що навіть при $\nu = 0$ в системі *SIS'* може існувати стаціонарний струм, величина якого може мати довільні значення між нулем і максимальним значенням, по перевищенні якого стаціонарне протікання міняється на нестаціонарне [9].

З'ясувалося, що густина цього струму Джозефсона має вигляд для випадку однакових надпровідників по обидві сторони (контакт SIS)

$$j = j_{\max} \sin\varphi,$$

де $j_{\max} = \frac{\pi\Delta}{2eR_N} th \frac{\Delta}{2T}$. Параметр φ пробігає довільні значення від нуля до $\pi/2$ і є квантовим числом, що визначає струмовий стан в системі. Решта позначень у формулі для $j_{\max}$ такі: Δ - щілина, e - заряд електрона, R_N - опір контакту в нормальному стані, T - темпратура. Легко бачити, що при $T = T_c$ максимальний струм обертається на нуль. Слід підкреслити, що критичний струм Джозефсона значно менший термодинамічного критичного. Оцінка, отримана за допомогою мікроскопічної теорії, показує, що $j_{\max} \sim en\vartheta_0 \frac{T_c}{E_F} D$, де

$en\vartheta_0 \frac{T_c}{E_F} D$ за порядком величини є термодинамічна критична густина струму, а D - прозорість тунельного контакту. Інші величини: e - заряд електрона, n - число вільних електронів в одиниці об'єму метала, ϑ_0 - фермі-швидкість, E_F - фермі-енергія, T_c - критична температура.

Згідно з мікроскопічною теорією, струм Джозефсона зумовлений когерентним тунелюванням куперівських пар.

Коли струм у тунельному контакті перевищує максимальне значення j_{maax} на контакті з'являється напруга, струм періодично змінюється, а контакт випромінює електромагнітні кванти частотою

$$\omega = 2e\nu / \hbar .$$

Оскільки струм Джозефсона пропорційний синусу коректної різниці фаз, появи коливань з частотою Джозефсона означає, що фаза φ стає тепер змінною

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t , \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega = 2e\nu / \hbar .$$

Наведена рівність називається співвідношенням частот Джозефсона. За її допомогою вдалося визначити заряд електрона з точністю, суттєво вищою, ніж це робилося раніше.

Слід підкреслити, що величина критичного струму Джозефсона дуже чутлива до магнітного поля (магнітного потоку Φ через контакт) [5, 7, 8, 9].

§ 3.2. Функції Гріна в теорії SNS контакту

Функцію Гріна задачі про SNS контакт в прийнятій моделі щодо $\nabla(z)$ можна побудувати, знаючи повну систему власних функцій рівнянь Боголюбова на спектрі. Зараз ми скористаємося представленням функцій Гріна у вигляді розкладів по власних функціях

$$G_{\omega n}(t, t') = \sum_{\lambda} \frac{u_\lambda(t) u_\lambda^{*}(t')}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} , \qquad (3.1)$$

$$F_{\omega n}(t, t') = \sum_{\lambda} \frac{u_\lambda(t) u_\lambda^{*}(t')}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} , \qquad (3.2)$$

де $u_\lambda(t)$ та $\upsilon_\lambda(t)$ задовольняють рівняння Боголюбова

$$\begin{cases} i\dfrac{du_\lambda(t)}{dt} + \Delta(\upsilon_0 xt)\upsilon_\lambda(t) = -\varepsilon_\lambda u_\lambda(t) \\ i\dfrac{d\upsilon_\lambda(t)}{dt} - \overset{*}{\Delta}(\upsilon_0 xt)u_\lambda(t) = \varepsilon_\lambda u_\lambda(t), \qquad t = \dfrac{z}{\upsilon_0 x}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Розглядаємо квазікласичні рівняння, сукупність ε_λ становить спектр задачі, λ - квантові числа, які фіксують "вектор стану" - двокомпонентний стовпчик $\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix}$; $\Delta(z) = \Delta \exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\sin z\right)$ при $|z| > d/2$ в нормальному прошарку $(|z| < d/2, \Delta(z) = 0.$

При розгляді рівнянь (3.3) в надпровідних областях $|z| > d/2$ (або $|t| > a = \dfrac{d}{2\upsilon_0 x}$) корисно скомпенсувати фазу параметра порядку, поклавши $\upsilon_\lambda(t) = \exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2} signz\right)\tilde{\upsilon}_\lambda(t).$ Розв'язок системи для $u_\lambda(t), \tilde{\upsilon}_\lambda(t)$, в яку входить дійсна стала Δ, будемо шукати у вигляді

$$u_\lambda(t) = a_\lambda \exp(i\xi_\lambda t), \qquad \tilde{\upsilon}_\lambda(t) = b_\lambda \exp(i\xi_\lambda t).$$

Сталі a_λ та b_λ задовольняють лінійні однорідні алгебричні рівняння

$$(\varepsilon_\lambda - \xi_\lambda)a_\lambda + \Delta b_\lambda = 0,$$
$$\Delta a_\lambda + (\varepsilon_\lambda + \xi_\lambda)b_\lambda = 0.$$

Для існування нетривіальних розв'язків цієї системи має виконуватися співвідношення

$$\varepsilon_\lambda^2 - \xi_\lambda^2 - \Delta^2 = 0,$$

тобто $\xi_\lambda = \pm\sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}.$

Для $\varepsilon_\lambda^2 > \Delta^2$ маємо дві можливості вибору знаку кореня, спектр є неперервний, а власні функції обмежені. Випадок дискретного спектра, для якого $\varepsilon_\lambda^2 < \Delta^2$, розглянемо згодом.

Фіксуючи знак + перед коренем у виразі для ξ_λ, маємо

$$\left(\varepsilon_\lambda - \sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}\right)a_\lambda = -\Delta b_\lambda,$$

звідки $a_\lambda = -\Delta / N_{\lambda,}$ $\; b_\lambda = \left(\varepsilon_\lambda - \sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}\right) / N_\lambda$, множник нормування N_λ знаходимо з умови $a_\lambda^2 + b_\lambda^2 = 1$, що дає $N_\lambda^2 = 2\varepsilon_\lambda \left(\varepsilon_\lambda - \sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}\right)$. Звертаємо увагу на те, що ε_λ може бути як позитивне, так і негативне, формули (3.1) передбачають сумацію по квантовому числу $sign\varepsilon(\lambda = (\nu, sign\varepsilon))$. Тому

$$a_\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}}{\varepsilon_\lambda}} \equiv u_\lambda, \qquad b_\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}}{\varepsilon_\lambda}} sign\varepsilon_\lambda \equiv \upsilon_\lambda sign\varepsilon_\lambda .$$

зауважимо, що $u_\lambda \upsilon_\lambda = -\dfrac{\Delta}{2|\varepsilon_\lambda|}$. При виборі негативного значення кореня у виразі для ξ_λ,

$$N_\lambda^2 = 2\varepsilon_\lambda \left(\varepsilon_\lambda + \sqrt{\varepsilon_\lambda^2 + \Delta^2}\right), \qquad a_\lambda = \upsilon_\lambda, \qquad b_\lambda = u_\lambda sign\varepsilon_\lambda .$$

Таким чином, в області $t \le -a$ розв'язок є лінійною комбінацією двох частинних розв'язків

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = A_\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda \\ \upsilon_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} e^{i\xi_\lambda t} + B_\lambda \begin{pmatrix} \upsilon_\lambda \\ u_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} e^{-i\xi_\lambda t}, \quad t \le -a. \qquad (3.4)$$

При цьому в обох доданках $\xi_\lambda = \sqrt{\varepsilon_\lambda^2 - \Delta^2}$.

Аналогічно виглядають розв'язки при $t \ge -a$, лише знак перед фазою змінюється на протилежний. Отже, при $t \le -a$ маємо

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = C_\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda \\ \upsilon_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} e^{i\xi_\lambda t} + D_\lambda \begin{pmatrix} \upsilon_\lambda \\ u_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} e^{-i\xi_\lambda t}. \qquad (3.5)$$

В нормальному прошарку рівняння для $u_\lambda(t)$ та $\upsilon_\lambda(t)$ стають незалежними, довільний розв'язок виглядає так

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = \mu_\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\varepsilon_\lambda t} + \nu_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon_\lambda t}, \qquad |t| \le a. \qquad (3.6)$$

Наша задача має спільні риси з добре вивченою задачею квантової механіки про частинку в полі одновимірної потенціальної ями. В обох випадках крім неперервного спектра, який відповідає станам з енергією вище ями з розв'язками, що описується обмеженими, але квадратично не інтегрованими функціями, є дискретний спектр, власні функції якого квадратично інтегровані. У нашому випадку дискретним є спектр збуджень нижче Δ, тобто $\varepsilon_\lambda^2 < \Delta^2$. В цьому випадку при $t > a$ маємо розв'язок

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = \alpha_\lambda \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_\lambda + i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}{\Delta} \\ -\exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix} \exp\left\{-\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2 t}\right\}, \tag{3.7}$$

який експоненціально спадає при $t \to \infty$, а при $t \le -a$

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = \beta_\lambda \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_\lambda - i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}{\Delta} \\ -\exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix} \exp\left\{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2 t}\right\}, \tag{3.8}$$

розв'язок зникає при $t \to -\infty$.

В області $|t| \le a$ розв'язок збігається з (3.6).

Розв'язки всіх типів мають бути зшиті за неперервністю в точках $t = \pm a$. Розгляньмо цю процедуру спочатку для неперервного спектра. Зшив у точці $t = -a$ з розв'язком (3.6) дає для коефіцієнтів μ_λ та ν_λ значення

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &= A_\lambda u_\lambda \exp\{i(\varepsilon_\lambda - \xi_\lambda)a\}, \\ \nu_\lambda &= A_\lambda \upsilon_\lambda \exp\{-i(\varepsilon_\lambda + \xi_\lambda)a + i\varphi/2\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Після підстановки (3.9) в (3.1) знаходимо, отже, такий розв'язок рівнянь в нормальному прошарку

$$A_\lambda \begin{pmatrix} u_\lambda \exp\{i\varepsilon_\lambda(a+t) - i\xi_\lambda a\} \\ \upsilon_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp\{-i\varepsilon_\lambda(a+t) - i\xi_\lambda a + i\varphi/2\} \end{pmatrix}.$$

Цікаво, що при відбитті хвилі квазічастинка електронного типу перетворюється на квазічастинку діркового типу. Це специфічне відбиття отримало назву андріївського: воно було виявлено вперше при розгляді проміжного стану надпровідників I роду. Внаслідок впливу на нормальний прошарок надпровідників зліва і справа, вага збуджень електронного чи дірочного типу виявляється вже не 1 та 0, а дається величинами u_λ та υ_λ. що є виявом ефекту близькості.

Нарешті, зшив у точці $t = a$ дає значення коефіцієнтів C_λ та D_λ:

$$C_\lambda = A_\lambda \left(\cos\gamma\lambda + i\frac{\varepsilon_\lambda}{\xi_\lambda}\sin\gamma\lambda \right) \exp\{-2i\xi_\lambda + i\varphi/2\}$$
$$D_\lambda = A_\lambda \frac{i\Delta e^{i\varphi/2}}{\xi_\lambda}\sin\gamma\lambda sign\varepsilon_\lambda. \tag{3.10}$$

Другий лінійно незалежний розв'язок для неперервного спектра отримаємо, беручи в області $t \geq a$ тільки експоненту зі знаком мінус. Будемо позначати коефіцієнти в такому розв'язку тими ж літерами, але з позначкою тільда. Отже, покладаємо $\tilde{C} = 0$, тобто

$$\begin{pmatrix} u_\lambda(t) \\ \upsilon_\lambda(t) \end{pmatrix} = \tilde{D}_\lambda \begin{pmatrix} \upsilon_\lambda \\ u_\lambda sign\varepsilon_\lambda \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} e^{-i\xi_\lambda t}. \qquad t \geq a \tag{3.11}$$

і виконуємо зшив з функціями в інших областях. Отримуємо

$$\tilde{\mu}_\lambda = \tilde{D}_\lambda \upsilon_\lambda e^{-i(\varepsilon_\lambda + \xi_\lambda)a}, \qquad \tilde{\nu}_\lambda = \tilde{D}_\lambda u_\lambda sign\varepsilon_\lambda e^{i(\varepsilon_\lambda - \xi_\lambda)a - i\varphi/2},$$

а також

$$\tilde{A}_\lambda = \tilde{D}_\lambda \frac{i\Delta e^{-i\varphi/2}}{\xi_\lambda}\sin\gamma\lambda sign\varepsilon_\lambda.$$
$$\tilde{B}_\lambda = \tilde{D}_\lambda \left(\cos\gamma\lambda + i\frac{\varepsilon_\lambda}{\xi_\lambda}\sin\gamma \right) \exp\{-2i\xi_\lambda a - i\varphi/2\}. \tag{3.12}$$

Займемося тепер зшивом розв'язків, які відповідають дискретному спектру. З умов неперервності в точках $\pm a$ випливають такі рівняння

$$\begin{aligned} &\alpha_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda + i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}{\Delta} \exp\left\{-\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}a\right\} = \mu_\lambda e^{i\varepsilon_\lambda a}, \\ &-\alpha_\lambda \exp(-i\varphi/2)\exp\left\{-\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}a\right\} = \nu_\lambda e^{-i\varepsilon_\lambda a}, \\ &\beta_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda - i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}{\Delta} \exp\left\{-\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}a\right\} = \mu_\lambda e^{-i\varepsilon_\lambda a}, \\ &-\beta_\lambda \exp(i\varphi/2)\exp\left\{-\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}a\right\} = \nu_\lambda e^{i\varepsilon_\lambda a}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ця система є сумісною, якщо виконується рівняння

$$tg(2a\varepsilon_\lambda - \varphi/2) = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}{\varepsilon_\lambda}. \tag{3.14}$$

Трансцендентне рівняння (3.14) визначає дискретний спектр задачі.

Зауважимо, що з рівнянь (3.13) випливають такі рівності

$$|\nu_\lambda|^2 = |\mu_\lambda|^2, \qquad |\beta_\lambda|^2 = |\alpha_\lambda|^2, \qquad |\mu_\lambda|^2 = |\alpha_\lambda|^2 \exp\left\{-2a\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}\right\} \tag{3.15}$$

Маючи їх, легко знайти віднормований розв’язок, що відповідає дискретному спектру. Обчислимо інтеграл нормування

$$2|\alpha_\lambda|^2 \int_a^\infty \exp\left\{-2t\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}\right\} + dt - 2|\beta_\lambda|^2 + 2|\beta_\lambda|^2 \int_{-\infty}^a \exp\left\{2t\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}\right\} dt + 2a(|C_\lambda|^2 + |D_\lambda|^2) = 1,$$

або

$$\frac{|\alpha_\lambda|^2 + |\beta_\lambda|^2}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}} \exp\left\{-2a\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}\right\} + 2a(|\mu_\lambda|^2 + |\nu_\lambda|^2) = 1.$$

Беручи до уваги (3.15), отримуємо

$$|\mu_\lambda|^2 = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}}\right)^{-1}. \tag{3.16}$$

Визначимо також глобальну константу $|A_\lambda|^2$, яка фігурує у розв'язках неперервного спектра. (Зауважимо, що $|\tilde{D}_\lambda|^2 = |A_\lambda|^2$ з міркувань симетрії). Для її обчислення можна скористатися умовою повноти

$$\sum_\lambda u_\lambda(t) u_\lambda^*(t') = \delta(t - t'). \tag{3.17}$$

Це тим доречніше, що перевірка повноти - важливий контроль правильності розв’язку задачі. Достатньо розглянути асимптотичну форму рівності (3.17) при великих за модулем t та t'. Це дозволяє не брати до уваги розв'язків, які відповідають дискретному спектру, оскільки останні при $|t| \geq a$ експоненціально спадають на нескінченності.

Нагадуємо, що сумація по λ означає: 1) додавання внесків від розв'язків обох типів, 2) сумацію по двох значеннях $sign\varepsilon$, 3) сумацію по ξ, а власне, інтеграцію:

$$\sum_{\xi > 0} \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \ldots.$$

Нехай $t >> a, t' >> a$. Внесок від розв'язку першого типу в цій області дорівнює

$$\sum_\lambda \left(C_\lambda u_\lambda e^{i\xi_\lambda t} + D_\lambda \upsilon_\lambda e^{-i\xi_\lambda t}\right)\left(\overset{*}{C}_\lambda u_\lambda e^{-i\xi_\lambda t'} + \overset{*}{D}_\lambda \upsilon_\lambda e^{i\xi_\lambda t'}\right) \tag{3.18}$$

а внесок від розв’язку другого типу

$$\sum_{\lambda}\left|\widetilde{D}_{\lambda}\right|^{2}\upsilon_{\lambda}^{2}e^{-i\xi(t-t')}. \tag{3.19}$$

Врахуємо, що при розкритті дужок в (3.18) достатньо зберегти члени, в яких експоненти мають різницю аргументів $t-t'$ — члени з сумою $t+t'$ можуть бути відкинуті як такі, що не ведуть до особливості δ-функцій. Отже, маємо

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda}\left\{\left|C_{\lambda}\right|^{2}u_{\lambda}^{2}e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}+\left|D_{\lambda}\right|^{2}e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}\right\}=\\&=\sum_{\lambda}\left|A_{\lambda}\right|^{2}\left\{u_{\lambda}^{2}\left(\cos^{2}\gamma\lambda+\frac{\varepsilon_{\lambda}^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda\right)e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}+\upsilon_{\lambda}^{2}\frac{\Delta^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}\right\},\end{aligned} \tag{3.20}$$

а також

$$\sum_{\lambda}\left|\widetilde{D}_{\lambda}\right|^{2}\upsilon_{\lambda}^{2}e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}.$$

Як вже зазначалося, з міркувань ліво-правої симетрії $\left|\widetilde{D}_{\lambda}\right|^{2}=\left|A_{\lambda}\right|^{2}$, внаслідок чого обидва внески об'єднуються вельми просто. Оскільки $\cos^{2}\gamma\lambda+\frac{\varepsilon_{\lambda}^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda=1+\frac{\Delta^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda$, отримуємо такий вираз для суми обох внесків

$$\sum_{\lambda}\left|A_{\lambda}\right|^{2}\left(1+\frac{\Delta^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda\right)\left(u_{\lambda}^{2}e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}+\upsilon_{\lambda}^{2}e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}\right).$$

Покладімо

$$\left|A_{\lambda}\right|^{2}=\left(1+\frac{\Delta^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sin^{2}\gamma\lambda\right)^{-1}=\frac{\xi_{\lambda}^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}\cos^{2}\gamma+\varepsilon_{\lambda}^{2}\sin^{2}\gamma\lambda}. \tag{3.21}$$

Тоді матимемо

$$\sum_{\lambda}\left(u_{\lambda}^{2}e^{i\xi(t-t')}+\upsilon_{\lambda}^{2}e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}\right). \tag{3.22}$$

Проведемо сумацію по $sign\varepsilon$. Тоді залишиться єдиним параметр сумації $\xi>0$. Розкриваючи суму по знаку енергії, по знаку енергії, у такому вигляді

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi>0}\left[\left(u^{2}(\xi)+\upsilon^{2}(\xi)\right)e^{i\xi(t-t')})+\left(\upsilon^{2}(\xi)+u^{2}(\xi)\right)e^{-i\xi(t-t')})\right]=\\&=\sum_{\xi>0}\left(e^{i\xi(t-t')}+e^{-i\xi(t-t')}\right)\rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi(t-t')}d\xi=\delta(t-t').\end{aligned}$$

Ми перевірили повноту системи знайдених розв'язків, а заразом визначили коефіцієнт нормування $|A_\lambda|^2$.

Займемося тепер побудовою функції Гріна. Розглянемо область $t \ge a, t' \ge a$. Обчислимо спершу внесок станів неперервного спектра $G^C_{\omega_n}(t,t')$. За визначенням

$$G^C_{\omega_n}(t,t') = \sum_\lambda \frac{u_\lambda(t) u^*_\lambda(t')}{i\omega - \varepsilon_\lambda},$$

де сума береться тільки за неперервним спектром, при цьому слід врахувати як розв'язок першого типу

$$u^I_\lambda(t) = C_\lambda u_\lambda e^{i\xi_\lambda t} + D_\lambda \upsilon_\lambda e^{-i\xi_\lambda t},$$

так і другого типу:

$$u^{II}_\lambda(t) = \tilde{D}_\lambda \upsilon_\lambda e^{-i\xi_\lambda t}.$$

Отже

$$\begin{aligned} G^C_{\omega_n}(t,t') &= \sum_\lambda \frac{\left(C_\lambda u_\lambda e^{i\xi_\lambda t} + D_\lambda \upsilon_\lambda e^{-i\xi_\lambda t}\right)\left(C^*_\lambda u_\lambda e^{-i\xi_\lambda t'} + D^*_\lambda \upsilon_\lambda e^{i\xi_\lambda t'}\right)}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} + \\ &+ \sum_\lambda \frac{\left|\tilde{D}_\lambda\right|^2 \upsilon^2_\lambda e^{-i\xi_\lambda (t-t')}}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} = \\ &= \sum_\lambda \frac{\left|C_\lambda\right|^2 u^2_\lambda e^{i\xi_\lambda (t-t')} + \left|D_\lambda\right|^2 \upsilon^2_\lambda e^{-i\xi_\lambda (t-t')} + \left|\tilde{D}_\lambda\right|^2 \upsilon^2_\lambda e^{-i\xi_\lambda (t-t')}}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} + \\ &+ \sum_\lambda u_\lambda u_\lambda \frac{C_\lambda D^*_\lambda e^{i\xi_\lambda (t+t')} + D_\lambda C^*_\lambda e^{-i\xi_\lambda (t+t')}}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Як легко переконатися, перша сума в (3.23), що є функцією різниці аргументів $t - t'$, збігається з функцією Гріна просторово однорідного надпровідника.

Справді, ця сума дорівнює

$$\sum_\lambda \frac{|A_\lambda|^2}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} \left\{ \left(\cos^2\gamma_\lambda + \frac{\varepsilon_\lambda}{\xi^2_\lambda} \sin^2\gamma_\lambda \right) u^2_\lambda e^{i\xi_\lambda (t-t')} + \left(\frac{\Delta^2}{\xi^2_\lambda} \sin^2\gamma_\lambda + 1 \right) \upsilon^2_\lambda e^{-i\xi_\lambda (t-t')} \right\} =$$

$$=\sum_{\lambda}\frac{u_{\lambda}^{2}e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}+\upsilon_{\lambda}^{2}e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}}{i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda}}=$$

$$=\sum_{\xi>0}\left(\frac{u_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda}}+\frac{\upsilon_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}+\varepsilon_{\lambda}}\right)e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}+\left(+\frac{\upsilon_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda}}+\frac{u_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}+\varepsilon_{\lambda}}\right)e^{-i\xi_{\lambda}(t-t')}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left(\frac{u_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda}}+\frac{\upsilon_{\lambda}^{2}}{i\omega_{n}+\varepsilon_{\lambda}}\right)e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}=-\frac{i\omega_{n}}{2\pi}d\xi\,\frac{e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}}{\omega_{n}^{2}+\Delta^{2}+\xi^{2}}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\xi\,\frac{e^{i\xi_{\lambda}(t-t')}}{\omega_{n}^{2}+\Delta^{2}+\xi^{2}}=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{\omega_{n}}{\tilde{\omega}_{n}}+sign(t-t')\right)e^{-\tilde{\omega}_{n}|t-t'|},\qquad\tilde{\omega}_{n}=\sqrt{\omega_{n}^{2}+\Delta^{2}}.$$

Доданок в (3.23), який залежить від суми $t+t'$, обчислимо з урахуванням того, що

$$C_{\lambda}D_{\lambda}^{*}=-\frac{i\Delta}{\xi_{\lambda}^{2}}|A_{\lambda}|^{2}\left(\xi_{\lambda}\cos\gamma_{\lambda}+i\varepsilon_{\lambda}\sin\gamma_{\lambda}\right)\sin\gamma_{\lambda}e^{-2i\xi_{\lambda}a}sign\varepsilon_{\lambda}.$$

Після підстановки значень всіх коефіцієнтів відповідний внесок дорівнюватиме

$$\frac{i\Delta^{2}}{\xi_{\lambda}^{2}}\sum_{\lambda}\frac{1}{\varepsilon_{\lambda}(i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda})}\left(\frac{\sin\gamma_{\lambda}}{\xi_{\lambda}\cos\gamma_{\lambda}-i\varepsilon_{\lambda}\sin\gamma_{\lambda}}e^{i\xi_{\lambda}(t+t'-2a)}-\frac{\sin\gamma_{\lambda}}{\xi_{\lambda}\cos\gamma_{\lambda}+i\varepsilon_{\lambda}\sin\gamma_{\lambda}}e^{-i\xi_{\lambda}(t+t'-2a)}\right).$$

Заміною $\xi\to-\xi$ обидва доданки об'єднуються. Переходячи до інтегрування по ξ, маємо

$$\begin{aligned}&\frac{i\Delta^{2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sum_{sign\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon_{\lambda}(i\omega_{n}-\varepsilon_{\lambda})}\cdot\frac{\sin\gamma_{\lambda}}{\xi_{\lambda}\cos\gamma_{\lambda}-i\varepsilon_{\lambda}sign\gamma_{\lambda}}e^{i\xi_{\lambda}(t+t'-2a)}=\\&=\frac{i\Delta^{2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{i\omega_{n}-\varepsilon}\cdot\frac{\sin\gamma_{-}}{\xi\cos\gamma_{-}-i\varepsilon\;sign\gamma_{-}}+\frac{1}{i\omega_{n}+\varepsilon}\cdot\frac{\sin\gamma_{+}}{\xi\cos\gamma_{+}-i\varepsilon\;sign\gamma_{+}}\right\}e^{i\xi_{\lambda}(t+t'-2a)}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Як наслідок внесок в функцію Гріна від станів неперервного спектра має такий вираз.

$$\begin{aligned}&G_{\omega_{n}}^{C}(t,t')=\frac{1}{2i}\left(\frac{\omega_{n}}{\tilde{\omega}_{n}}+sign(t-t')\right)e^{-\tilde{\omega}_{n}|t-t'|}+\\&+\frac{i\Delta^{2}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\varepsilon}\left\{\frac{1}{i\omega_{n}+\varepsilon}\cdot\frac{\sin\gamma_{+}}{\xi\cos\gamma_{+}-i\varepsilon\;sign\gamma_{+}}+\frac{1}{i\omega_{n}-\varepsilon}\cdot\frac{\sin\gamma_{-}}{\xi\cos\gamma_{-}-i\varepsilon\;sign\gamma_{-}}\right\}e^{i\xi_{\lambda}(t+t'-2a)}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

В цьому виразі можна спрямувати $t\to a, t'\to a$ і отримати функцію Гріна також в нормальному прошарку.

Тепер побудуємо внесок до функції Гріна від станів дискретного спектра, взявши функцію $u_\lambda(t)$ при $t \ge a$. На основі формул (3.7), (3.15) та (3.16) отримуємо

$$G^d_{\omega_n}(t,t') = \frac{1}{2}\sum_\lambda \frac{\exp\left\{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2}\,(2a - t - t')\right\}}{(i\omega_n - \varepsilon_\lambda)(2a + (\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2)^{-1/2})}. \tag{3.26}$$

Тут сумація ведеться по $sign\ \varepsilon_\lambda$ та по всіх коренях трансцендентного рівняння (3.14).

Залишається обчислити інтеграл в (3.25). Це робиться за допомогою теореми про рештки. Внески дають полюси, які визначаються нулями знаменників $\xi\cos(2a\varepsilon \pm \varphi/2) - i\varepsilon\sin(2a\varepsilon \pm \varphi/2)$, тобто власними значеннями дискретного спектра, а також нулями виразів $i\omega_n \pm \varepsilon$ тобто, при значеннях $\xi = i\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$. Зауважимо також, що оскільки підінтегральна. функція в (3.23) парна, ніяких розрізів вона не має.

Можемо застосувати звичайну теорему про рештки, замикаючи контур в верхній або нижній півплощині комплексної змінної ξ.

Надалі покладімо $t = a, t' = a$, оскільки хочемо отримати функцію Гріна на границі нормального прошарку та надпровідника. За теоремою про рештки в полюсі, який відповідає мацубарівським частотам у верхній півплощині $(i\omega_n - \varepsilon, \omega_n > 0)$, знаходимо внесок

$$\begin{aligned} & i\frac{\Delta^2}{4\pi}2\pi i\frac{1}{i\omega_n}\cdot\frac{-i\omega_n}{i\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\frac{\sin(2i\omega_n - \varphi/2)}{i\tilde{\omega}_n\cos(2i\omega_n - \varphi/2) + \omega_n\sin(2i\omega_n - \varphi/2)} = \\ & = \frac{\Delta^2}{i\tilde{\omega}_n}\cdot\frac{sh\ k_n}{\tilde{\omega}_n ch\ k_n + \omega_n sh\ k_n}, \qquad k_n = 2\omega_n a + \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Якщо об'єднати його з членом $\frac{\omega_n}{2i\tilde{\omega}_n}$, який залишається від просторово однорідної функції Гріна при $t = t'$, отримаємо

$$\cdot\frac{1}{2}\frac{\omega_n ch\ k_n + \tilde{\omega}_n sh\ k_n}{\omega_n sh\ k_n + \tilde{\omega}_n ch\ k_n}, \tag{3.28}$$

Виникає питання, де ж внески в інтеграл (3.25) від полюсів, що відповідають точкам дискретного спектра, а також вираз (3.26) для внеску в функцію Гріна від дискретного спектра. Виявляється, що обидва ці внески в сумі дають нуль, отже, вираз (3.28) є остаточним, як і має бути. В цьому неважко переконатися, обчислюючи інтеграл (3.25) до кінця. Справді, обчислимо рештки в полюсах, що визначаються рівняннями для спектра енергій ε_ν.

$$\xi \cos\gamma_- - i\varepsilon \ \sin\gamma_- = 0.$$

Розгляньмо другий інтеграл в (3.25). Сума рештків, що відповідає полюсам дискретного спектра дорівнює

$$\frac{i\Delta^2}{4\pi} 2\pi i \sum_\nu \frac{1}{(i\omega_n - \varepsilon_\nu)\varepsilon_\nu} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{d}{d\xi}(\xi \ ctg\gamma_- - i\varepsilon) \right\}\Big|_{\xi_\nu = i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\nu^2}}}. \qquad (3.29)$$

Похідна знаменника у зазначеній точці дорівнює

$$\left\{ \frac{d}{d\xi}(\xi \ ctg\gamma_- - i\varepsilon) \right\}\Big|_{\xi_\nu = i\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\nu^2}} = \frac{\Delta^2}{\varepsilon_\nu} \left(2a + \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - \varepsilon_\nu^2}} \right),$$

отже, (3.29) дорівнює

$$-\frac{1}{2} \sum_\nu \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_\nu} \cdot \frac{1}{2a + (\Delta^2 - \varepsilon_\nu^2)^{-1/2}}.$$

Перший інтеграл в (3.25) дає такий самий вираз, але з протилежним знаком при ε_ν. Запроваджуючи знову індекс $\lambda = (\varepsilon_\nu, sign\ \varepsilon_\nu)$, остаточно отримуємо внесок

$$-\frac{1}{2} \sum_\lambda \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_\lambda} \cdot \frac{1}{2a + (\Delta^2 - \varepsilon_\lambda^2)^{-1/2}}.$$

який дорівнює з протилежним знаком $G^d_{\omega_n}(a,a)$.

Отже, справді відбувається знищення сум по коренях трансцендентного рівняння, і ми отримуємо для функції Гріна простий вираз.[2, 15]

ВИСНОВКИ

У роботі описано метод склеювання та метод розкладу за власними функціями для побудови функцій Гріна в квантовій механіці.

Досліджено особливості методу розкладу за власними функціями для систем із дискретним спектром. Ці особливості були розглянуті на прикладі трьох моделей: δ-функційної потенціальної ями, потенціальної ями скінченної глибини та SNS-контакту.

Теоретичний розрахунок показав, що у виразі для функції Гріна системи з дискретним спектром «дискретна» складова скорочується відповідною частиною «неперервної» складової.

Проведений аналіз дає підстави висунути гіпотезу, що знищення «дискретної» складової є загальною закономірністю, а саме для певного класу потенціалів, які дають неперервний і дискретний спектр енергії, у виразі для функції Гріна доданки «дискретної» складової випадають. Формулювання і доведення загальної теореми про це може бути цікавим для сучасної математичної фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Feynman R. P. Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction / R. P. Feynman / Physical Review, 1950, 440 p.
2. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики : Підручник. □ Вид. 4-те, доповн. і перероб. у 2-х томах. Т 2. / А. В. Свідзинський / Київ : 2009, 435 с.
3. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике / А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский /Москва. Гос. изд-во физ.-мат. Литературы, 1963, 584 с.
4. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики : Підручник. – Вид. 4-те, доповн. і перероб. у 2-х томах. Т 1. / А. В. Свідзинський / Київ : 2009, 394 с.
5. Свідзинський А. В. Мікроскопічна теорія надпровідності : монографія / А. В. Свідзинський / Луцьк : Волин. нац. ун-т. ім. Лесі Українки, 2011, 420 с.
6. Садовский М. В. Лекции по статистической физике. / М. В. Садовський / Екатеринбург.:ИЭ УрО РАН, 1999, 262 с.
7. Каданов Л. Ф Квантова статестическая механика / Л. Ф. Каданов / Москва : Мир, 1964, 294 с.
8. Schulten K. Notes on Quantum Mechanics / K. Schulten / Department of Physics and Beckman Institute University of Illinois at Urbana, 2000, 390 p.
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах / Москва : ИЛ, 1958, 931 с.
10. Каданов Л., Бейм Г. Методы функции Грина: учеб. пособие / Л. Каданов , Г. Бейм / Москва : Мир, 1964, 127 с.
11. Левитов Л. С., Шитов А. В. Функции Грина в задачах: учеб. пособие / Л. С. Левитов, А. В. Шитов / Москва : Московский физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), 1997, 265 с.

12. Lenssen K.-M. ., Harmans C.J.P.M. Influence of gate voltage on the transport properties of superconductor / K.-M. . Lenssen, C. J. P. M. Harmans / 2DEG systems Phys. Rev., 1991, 17 p.
13. Bouchiat V., Vion D., Joyez P., Esteve D., Devoret M.H. Quantum Coherence with a single Cooper pair /V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, M.H. Devoret / Physica Scripta, 1998, 16p.
14. Kulik I. O. Observation of Intermediate Quantum-Resistance States of Type-I Superconducting Films in Parallel Magnetic Fields / I. O. Kulik / Phys. Sov. JETP, 1970, 24 p.
15. Hammer J.C., Cuevas J.C., Bergeret F.S., Belzig W. Density of states and supercurrent in diffusive SNS junctions: role of nonideal interfaces and spin-flip scattering / J.C. Hammer, J.C. Cuevas, F.S. Bergeret, W. Belzig / Phys Rev., 2007, 11 p.
16. Virtanen P., Heikkila T. T. Peltier effects in Andreev interferometers. Physical Review / P.Virtanen, T. T. Heikkila / Phys. Rev. 2007, 75 p.