

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики
імені А.В. Свідзинського**

На правах рукопису

САХНЮК МИХАЙЛО ІВАНОВИЧ

**ВЕРИФІКАЦІЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ
КОЛИВАНЬ ЗАСОБАМИ СКМ MAPLE**

Спеціальність 104 «Фізика та астрономія»

Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

САХНЮК ВАСИЛЬ ЄВГЕНОВИЧ,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри теоретичної та

комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського

від _____ 2025

Завідувач кафедри

доц. Сахнюк В.Є. _____

ЛУЦЬК – 2025

АНОТАЦІЯ

Сахнюк Михайло Іванович.

Верифікація асимптотичних методів теорії нелінійних коливань засобами СКМ Maple.

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню точності та меж застосовності асимптотичних методів у теорії нелінійних коливань шляхом їх верифікації за допомогою системи комп'ютерної математики Maple.

В роботі розглянуто теоретичні основи виникнення нелінійних коливань та проаналізовано класичні наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь: метод малого параметра (прямого розкладу), метод Лінштедта-Пуанкаре та метод Крилова-Боголюбова. Об'єктами дослідження обрано класичні моделі нелінійної механіки – осцилятор Дуффінга та математичний маятник.

Шляхом порівняння аналітичних розв'язків із точними чисельними результатами, отриманими в середовищі Maple, встановлено, що метод прямого розкладу призводить до появи секулярних членів, що обмежує його застосування малими проміжками часу. Натомість метод Лінштедта-Пуанкаре продемонстрував високу точність та ефективність при врахуванні неізохронності коливань. Також показано, що врахування кубічної нелінійності в рівнянні математичного маятника дозволяє отримати результат, який у 5–8 разів точніший за лінійне наближення, проте похибка зростає зі збільшенням кута початкового відхилення.

Ключові слова: нелінійні коливання, асимптотичні методи, метод малого параметра, метод Лінштедта-Пуанкаре, метод Крилова-Боголюбова, осцилятор Дуффінга, математичний маятник, СКМ Maple.

SUMMARY

Sakhniuk Mykhailo Ivanovych

Verification of asymptotic methods of nonlinear oscillation theory using CAS Maple.

The master's thesis is devoted to studying the accuracy and applicability limits of asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations through their verification using the Computer Algebra System (CAS) Maple.

The work covers the theoretical foundations of nonlinear oscillations and analyzes classical approximate methods for solving differential equations: the small parameter method (direct expansion), the Lindstedt-Poincaré method, and the Krylov-Bogoliubov method. The classical models of nonlinear mechanics—the Duffing oscillator and the mathematical pendulum—were chosen as the objects of study.

By comparing analytical solutions with exact numerical results obtained in the Maple environment, it was established that the direct expansion method leads to the appearance of secular terms, limiting its application to short time intervals. In contrast, the Lindstedt-Poincaré method demonstrated high accuracy and efficiency in accounting for the non-isochronism of oscillations. It is also shown that including cubic nonlinearity in the mathematical pendulum equation yields a result that is 5–8 times more accurate than the linear approximation, although the error increases with the growth of the initial deflection angle.

Keywords: nonlinear oscillations, asymptotic methods, small parameter method, Lindstedt-Poincaré method, Krylov-Bogoliubov method, Duffing oscillator, mathematical pendulum, CAS Maple.

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ.....	9
1.1 Одновимірні нелінійні коливання	9
1.2. Витоки асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань	15
1.3. Асимптотичні методи теорії нелінійних коливань.....	16
1.3.1 Метод малого параметра.....	16
1.3.2 Розклад в ряд по параметру нелінійності	19
1.3.3. Метод Лінштедта-Пуанкаре.....	21
РОЗДІЛ 2 ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДО ОСЦИЛЯТОРА ДУФФІНГА	27
2.2. Розв’язок рівняння осцилятора Дуффінга асимптотичним та точним методом. Порівняння результатів	29
2.2.1.Розв’язок отриманий у СКА Maple	29
2.2.2. Асимптотичні методи розв’язання.....	30
РОЗДІЛ 3 АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ОБРАХУНКУ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА	46
3.1. Знаходження розв’язків рівняння математичного маятника за допомогою СКА Maple	47
3.1.1 Точний розв’язок	47
3.1.2. Результат отриманий, при $\sin x \approx x$	48
3.1.3. Результат одержаний для $\sin x \approx x - x^3!$	49
3.2. Метод малого параметра.....	52

3.3. Метод Боголюбова - Крилова	57
ВИСНОВКИ	61
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	64

ВСТУП

Актуальність теми. Коливальні явища відіграють ключову роль у сучасному природознавстві та технічних науках, слугуючи фундаментом для функціонування найрізноманітніших систем – від механічних конструкцій та гідродинамічних потоків до складних електромагнітних контурів. Глибоке розуміння природи цих процесів, побудова адекватних математичних моделей та вміння проводити їх детальний аналіз є необхідною передумовою як для успішного інженерного проектування, так і для проведення фундаментальних наукових досліджень.[1,2,3]

Окремий і надзвичайно важливий клас складають нелінійні коливання. Вони виникають у тих фізичних системах, де відновлювальна сила має нелінійну залежність від узагальненої координати або швидкості руху. На відміну від лінійних систем, для яких справедливий принцип суперпозиції, нелінійні диференціальні рівняння здебільшого не мають точних аналітичних розв'язків, виражених через елементарні функції. Ця обставина створює суттєві математичні труднощі, оскільки традиційні стандартні методи інтегрування у таких випадках виявляються неефективними.[4]

У ситуаціях, коли знаходження точного розв'язку є неможливим, вирішальну роль відіграють асимптотичні методи, також відомі як методи малого параметра. Саме вони дозволяють отримати наближені аналітичні вирази, які з достатньою для практичних потреб точністю описують поведінку динамічної системи. Сутність цих методів полягає у вдалому синтезі простоти та точності: складна нелінійна задача зводиться до послідовності простіших лінійних задач, розв'язок яких будується у вигляді рядів за степенями певного малого параметра .

Стрімкий розвиток сучасних систем комп'ютерної математики (СКМ), таких як Maple, відкриває нові широкі можливості для чисельного моделювання фізичних процесів.[5] Однак, попри високу точність, чисельні

методи часто не дають глибокого аналітичного розуміння фізики процесу. Тому актуальним науковим завданням є поєднання потужних обчислювальних можливостей комп'ютерів із класичними аналітичними підходами [14]. У цій роботі реалізовано порівняльний аналіз точності асимптотичних методів шляхом верифікації отриманих результатів засобами СКМ Maple [28].

Фундамент асимптотичної теорії нелінійних коливань було закладено у класичних працях видатних вчених А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова та Б. Ван дер Поля. Подальшого суттєвого розвитку ця теорія набула завдяки роботам М.М. Крилова та М.М. Боголюбова, які фактично створили нову галузь математичної фізики – нелінійну механіку. Ними було розроблено систематичні методи дослідження як періодичних, так і квазіперіодичних процесів, а також теоретично обґрунтовано загальні закономірності побудови асимптотичних наближень [5,6,7].

Мета дослідження полягає у встановленні меж застосовності та оцінці точності наближених аналітичних розв'язків, отриманих за допомогою асимптотичних методів. Досягнення цієї мети реалізується шляхом безпосереднього порівняння наближених результатів із точними чисельними розв'язками, одержаними у середовищі СКА Maple, на прикладі таких систем, як осцилятор Дуффінга, математичний маятник та система зв'язаних маятників.

Для досягнення поставленої мети сформульовано такі **завдання**:

- Провести аналіз теоретичних основ та історичних витоків виникнення асимптотичних методів у теорії нелінійних коливань.
- Детально описати математичний алгоритм застосування методу малого параметра, методу Лінштедта-Пуанкаре та методу Крилова-Боголюбова.
- Отримати наближені аналітичні розв'язки для диференціальних рівнянь осцилятора Дуффінга та математичного маятника.
- Здійснити чисельне моделювання досліджуваних динамічних систем у середовищі СКА Maple та отримати точні розв'язки.

- Провести порівняльний аналіз аналітичних та чисельних результатів, визначити величину похибки асимптотичних методів та встановити допустимі часові інтервали їх коректного використання.

Об’єкт дослідження: нелінійні коливальні системи, зокрема осцилятор Дуффінга, математичний маятник та зв’язані маятники.

Предмет дослідження: точність та ефективність асимптотичних методів (зокрема методів Лінштедта-Пуанкаре та Крилова-Боголюбова) у порівнянні з чисельними методами системи комп’ютерної математики Maple.

Наукова новизна роботи полягає у розробці комплексної схеми верифікації асимптотичних методів із використанням сучасних засобів комп’ютерної математики. У роботі продемонстровано, як можливості символьних обчислень у Maple можуть бути ефективно використані для автоматизації громіздких аналітичних перетворень та миттєвої оцінки похибки наближених методів.

Практичне значення. Результати проведеного дослідження дозволяють обґрунтовано обирати метод розв’язання нелінійних задач залежно від необхідної точності та тривалості часового інтервалу. Матеріали роботи можуть бути використані у навчальному процесі при викладанні дисциплін, що пов’язані з вивченням коливальних процесів.

Структура роботи. Логіка дослідження зумовила структуру дипломної роботи, яка складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної джерел.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИНИКНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ

1.1 Одновимірні нелінійні коливання

Ангармонічні коливання – це періодичні коливання, форма яких відрізняється від гармонічної синусоїди. Якщо гармонічні коливання є монохроматичними (їхній спектр містить лише одну частоту), то ангармонічні коливання, окрім основної частоти (фундаментальної моди), містять ряд вищих гармонік — коливань із кратними частотами.

У загальному випадку всі реальні коливальні процеси в природі та техніці є ангармонічними, оскільки умови ідеальної лінійності системи ніколи не виконуються абсолютно точно.

Класична теорія малих коливань базується на розкладі потенціальної та кінетичної енергії системи в ряд Тейлора за координатами та швидкостями, обмежуючись доданками другого порядку [14,18]. Це призводить до лінійних диференціальних рівнянь руху. Хоча таке наближення є обґрунтованим для малих амплітуд, врахування доданків вищих порядків (ангармонізмів або нелінійностей) дозволяє виявити якісно нові особливості руху, такі як залежність періоду коливань від амплітуди. Фізика нелінійних коливань представляє собою широку та важливу область механіки.

Розглянемо найпростіші особливості нелінійних коливань на прикладі одновимірного руху в потенціальному полі. Розкладемо потенціальну енергію в ряд поблизу положення рівноваги:

$$\begin{aligned}
U(q) = & U(q_0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) \\
& + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 \\
& + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dq^3} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^3 \\
& + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dq^4} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^4, \tag{1.1}
\end{aligned}$$

Оскільки в положенні рівноваги сила дорівнює нулю, $\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0$.

Запровадимо зміщення від положення рівноваги $x = q - q_0$ та наступні позначення для коефіцієнтів:

$$\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} = k, \quad \left. \frac{d^3U}{dq^3} \right|_{q=q_0} = m\alpha, \quad \left. \frac{d^4U}{dq^4} \right|_{q=q_0} = m\beta. \tag{1.2}$$

Запишемо функцію Лагранжа системи:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4}. \tag{1.3}$$

Тут α і β – константи, що характеризують нелінійність системи і вважаються малими.

Для одержання рівняння Лагранжа обчислимо необхідні похідні:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4} \right) = m\dot{x}, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial t} (m\dot{x}) = m\ddot{x}, \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\alpha x^3}{3} - \frac{m\beta x^4}{4} \right) = -kx - m\alpha x^2 - m\beta x^3.
\end{aligned}$$

В результаті маємо:

$$m\ddot{x} + kx + m\alpha x^2 + m\beta x^3 = 0. \tag{1.4}$$

Перепишемо рівняння (1.4) залишивши лінійні доданки в лівій стороні, а нелінійні перенесемо в право:

$$m\ddot{x} + kx = -m\alpha x^2 - m\beta x^3. \tag{1.5}$$

Поділимо обидві частини рівняння (1.5) на m та запровадимо позначення $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$, тоді рівняння (1.5) переписеться у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (1.6)$$

Розв'язком цього рівняння є періодична функція часу з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, що залежить від енергії. Хоча точний розв'язок і може бути виражений через емпіричні функції, однак корисним є наближений розв'язок справедливий при малих амплітудах коливань. Для його одержання скористаємося тим, що розв'язок, як періодична функція часу, може бути записаний в вигляді ряду Фур'є:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t).$$

Коефіцієнти розкладу a_n і частота ω можуть бути знайдені із рівнянь руху при заданій початковій частоті, початок відліку вибрано так щоб при $t=0$, відхилення x було максимальне.

Якщо підставити розв'язок у вигляді нескінченного ряду Фур'є в рівняння і виразити всі степені косинуса в його правій частині через більш високі гармоніки, то прирівнявши коефіцієнти в правій і лівій частині рівняння при однакових гармоніках, ми одержимо нескінчену систему нелінійних рівнянь, в кожне з яких входить нескінчене число невідомих коефіцієнтів a_n і невідома частота ω .

Природно очікувати, що при малій нелінійності розв'язок мало відрізняється від гармонічних коливань. Будемо шукати наближений розв'язок цієї системи методом послідовних наближень. В цьому методі розв'язок нелінійної задачі зводиться до послідовного розрахунку поправок більш високого порядку по a .

Обмежимося розрахунком зміщення x , до третього порядку по a включно і зсуву частоти до другого порядку по a . У першому наближенні розв'язок має вигляд гармонічного коливання:

$$x^{(1)} = a \cos \omega t$$

з невідомою частотою ω , яка мало відрізняється від ω_0 і знаходитиметься із наступних наближень.

Отже, розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}, \quad (1.7)$$

де перший доданок це гармонічні коливання.

Підставимо (1.7) в (1.6) для одержання наступного наближення:

$$x^{(2)}: \quad \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t - \beta a^3 \cos^3 \omega t. \quad (1.8)$$

Використаємо формули пониження степеня:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t),$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t.$$

Підставимо ці формули в (1.8):

$$\begin{aligned} x^{(2)}: \quad \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) - \beta a^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отже $x^{(2)}$ представляємо у вигляді суми гармонік:

$$x^{(2)} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \cos \omega t + a_2^{(2)} \cos 2\omega t + a_3^{(2)} \cos 3\omega t. \quad (1.10)$$

Запишемо рівняння (1.9) у вигляді (1.10) тобто відповідно до зростання гармонік:

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{3}{4} \beta a^3 \cos \omega t - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{1}{4} \beta a^3 \cos 3\omega t. \quad (1.11)$$

У рівнянні (1.11) запровадимо наступні позначення:

$$a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2},$$

$$a_1^{(2)} = -\frac{3}{4} \beta a^3,$$

$$a_2^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2},$$

$$a_3^{(2)} = -\frac{1}{4} \beta a^3.$$

Знайдемо $\dot{x}^{(2)}$ та $\ddot{x}^{(2)}$:

$$\dot{x}^{(2)} = -a\omega \sin \omega t - 2a_2^{(2)}\omega \sin 2\omega t - 3a_3^{(2)}\omega \sin 3\omega t,$$

$$\ddot{x}^{(2)} = -a\omega^2 \cos \omega t - 4a_2^{(2)}\omega^2 \cos 2\omega t - 9a_3^{(2)}\omega^2 \cos 3\omega t.$$

Підставимо $\dot{x}^{(2)}$ та $\ddot{x}^{(2)}$ в рівняння (1.11):

$$\begin{aligned} & -a\omega^2 \cos \omega t - 4a_2^{(2)}\omega^2 \cos 2\omega t - 9a_3^{(2)}\omega^2 \cos 3\omega t + \omega_0^2 a_0^{(2)} + a_1^{(2)}\omega_0^2 \cos \omega t \\ & + a_2^{(2)}\omega_0^2 \cos 2\omega t + a_3^{(2)}\omega_0^2 \cos 3\omega t = \\ & = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{3}{4}\beta a^3 \cos \omega t - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{1}{4}\beta a^3 \cos 3\omega t \end{aligned}$$

Згрупуємо доданки в лівій частині рівняння:

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 a_0^{(2)} + a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + a_2^{(2)}(\omega_0^2 - 4\omega^2) \cos 2\omega t + a_3^{(2)}(\omega_0^2 - 9\omega^2) \cos 3\omega t \\ & = \\ & = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{3}{4}\beta a^3 \cos \omega t - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t \\ & - \frac{1}{4}\beta a^3 \cos 3\omega t \quad (1.12) \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових гармоніках одержимо:

$$\omega_0^2 a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2}, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) = \\ & -\frac{3}{4}\beta a^3, \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$a_2^{(2)}(\omega_0^2 - 4\omega^2) = -\frac{\alpha a^2}{2}, \quad (1.15)$$

$$a_3^{(2)}(\omega_0^2 - 9\omega^2) = -\frac{1}{4}\beta a^3. \quad (1.16)$$

В рівняння (1.14) входить тільки невідома частота ω . Вважаючи нелінійний зсув частоти малим, так що $(\omega^2 - \omega_0^2) = 2\omega_0(\omega - \omega_0)$, тоді

$$\delta\omega^{(2)} = \omega - \omega_0 = \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}.$$

Амплітуди гармонік знаходимо із рівнянь (1.13), (1.15) і (1.16):

$$a_0^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2},$$

$$a_2^{(2)} = \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2},$$

$$a_3^{(2)} = \frac{1}{32\omega_0^2}\beta a^3.$$

Таким чином, в другому наближенні ми отримали амплітуди нульової і другої гармоніки, а також поправку до частоти в другому порядку по a і амплітуду третьої гармоніки в третьому порядку по a . [13,28]

Тепер друге наближення можна підставити в нелінійну частину рівняння, щоб отримати третє наближення і так продовжуючи, будемо знаходити амплітуди все більш високих гармонік, які будуть мати більш високі порядки по a .

Проте, важливо, що в третьому наближенні з'являються нові поправки третього порядку по a і їх потрібно врахувати. Дійсно, при підстановці другого наближення в квадратичний член рівняння, з'являють члени пропорційні $a_0^{(2)}: a \cos \omega t$ і $a_2^{(2)}: a \cos \omega t \cos 2\omega t$, порядку a^3 , врахування яких змінить рівності (1.14) і (1.16) і приведе ще до однієї поправки в частоті $\delta\omega^{(3)} = \frac{5\alpha^2 a^2}{12\omega_0^3}$, і доданку до амплітуди третьої гармоніки:

$$a_3^{(3)} = \frac{\alpha^2 a^3}{48\omega_0^4}.$$

Легко переконатися, що ще одне наближення не змінить поправок другого і третього порядку по a .

Запишемо друге наближення, враховуючи амплітуди гармонік:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t + -\frac{\alpha a^3}{48\omega_0^4} \cos 3\omega t + -\frac{\beta a^2}{32\omega_0^2} 3 \cos 3\omega t. \quad (1.17)$$

Підставимо (1.17) і (1.8) в загальний розв'язок рівняння:

$$x = a \cos \omega t - \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} (3 - \cos 2\omega t) \pm \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{3\omega_0^2} \right) \cos 3\omega t. \quad (1.18)$$

Уточнимо тепер умови застосування отриманих формул. Із вимоги малості амплітуд гармонік в порівнянні з a і малості поправки до частоти в порівнянні з ω_0 отримаємо, що повинні виконуватися нерівності $\frac{\alpha a^2}{\omega_0^2} \ll 1, \frac{\beta a^2}{\omega_0^2} \ll 1$.

1.2. Витоки асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань

Асимптотичні методи – це сукупність математичних прийомів, що дозволяють знаходити наближені розв'язки диференціальних рівнянь, які містять малий параметр. Ці методи зародилися в небесній механіці ще у XVIII ст. (теорія збурень) і широко застосовувалися у працях Ж. Лагранжа та У. Левер'є.

Створення асимптотичної теорії власне нелінійних коливань (нелінійної механіки) пов'язане з іменами М.М. Крилова та М.М. Боголюбова. У 30-х роках XX століття вони розробили нові методи розв'язання нелінійних задач, узагальнивши класичні результати А. Пуанкаре та Б. Ван дер Поля.

У 1932 році у монографії «Дослідження поздовжньої стійкості аероплану» та серії доповідей у Паризькій академії наук М.М. Крилов і М.М. Боголюбов виклали основи нового підходу, який дозволяв досліджувати як стаціонарні, так і нестаціонарні коливальні процеси. Фундаментальна праця «Вступ до нелінійної механіки» (1937) завершила формування асимптотичних методів як окремого напрямку математичної фізики. Автори обґрунтували принцип усереднення та метод еквівалентної лінеаризації.

Важливо зазначити, що особливістю нелінійних систем є такі ефекти:

- Неізохронність: залежність частоти коливань від амплітуди;
- Генерація вищих гармонік: спотворення форми коливань;
- Мультистабільність: залежність усталеного режиму від початкових умов (гістерезис);
- Автоколивання: здатність системи підтримувати незатухаючі коливання за рахунок неперіодичного джерела енергії.

Для аналізу таких систем класичні методи теорії збурень виявилися недостатніми через появу так званих *секулярних* (вікових) членів, які необмежено зростають з часом і порушують умову періодичності розв'язку. Подолання цієї проблеми стало головним завданням нових асимптотичних методів.

1.3. Асимптотичні методи теорії нелінійних коливань

1.3.1 Метод малого параметра

Розглянемо осцилятор з квадратичною нелінійністю:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (1.19)$$

Це рівняння можна привести до універсального вигляду, що не містить параметрів. Нехай, відомо деякий характерний масштаб коливань A . Запровадимо безрозмірні змінні час і координату наступним чином:

$$\dot{t} = \omega_0 t, \quad \dot{x} = \frac{x}{A}. \quad (1.20)$$

Опустивши штрихи в безрозмірних змінних, рівняння (1.19) набуде вигляду:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0. \quad (1.21)$$

У цьому рівнянні $\varepsilon = \frac{\alpha A}{\omega_0^2}$. Розглянемо випадок слабкої нелінійності, коли $\varepsilon \ll 1$, тобто рівняння (1.21) містить малий параметр. В загальному необхідно зауважити, що умовою вживання будь-якого асимптотичного методу є наявність малого параметра.

Рівняння (1.21) близьке до рівняння лінійного консервативного осцилятора, а відрізняється від нього малим доданком порядку ε . Тобто, легко бачити, що розв'язок можна представити у вигляді квазігармонічних (близьких до гармонічних) коливань [29]. Побудуємо наближений розв'язок рівняння (1.21). Найбільш простий спосіб очевидно полягає в пошуку розв'язку у вигляді ряду по степенях малого параметра ε :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots \quad (1.22)$$

В літературі цей метод називають методом розкладу по малому параметру або прямим розкладом.

Підставляючи ряд (1.22) в рівняння (1.21), одержимо:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0 \quad (1.23)$$

Прирівнюючи в (1.23) члени при однакових степенях ε приходимо до системи взаємозалежних рівнянь:

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (1.24)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0, \quad (1.25)$$

$$\varepsilon^2: \quad \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0. \quad (1.26)$$

Рівняння (1.24) є рівнянням гармонійного осцилятора і його розв'язок записують у вигляді:

$$x_1 = a \cos(t + \varphi), \quad (1.27)$$

де амплітуда a і початкова фаза φ – сталі, що визначаються з початкових умов.

Підставимо розв'язок (1.27) в рівняння (1.25) щоб знайти x_2 :

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi). \quad (1.28)$$

Це рівняння формально збігається з рівнянням лінійного консервативного осцилятора під дією зовнішньої сили, розв'язок якого слід шукати як суму розв'язків однорідного і неоднорідного рівнянь, що записують у вигляді:

$$x_2 = x_2^o + x_2^H, \quad (1.29)$$

$$x_2^o = a_1 \cos(t + \varphi_1). \quad (1.30)$$

Де (1.30) розв'язок однорідного рівняння x_2^o описує власні коливання осцилятора. Його амплітуда a_1 і початкова фаза φ_1 і надалі визначаються з початкових умов. Другий доданок x_2^H – частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який представляє собою вимушені коливання осцилятора, тобто відповідь на зовнішній вплив на систему.

Як відомо з теорії лінійних коливань в спектрі вимушених коливань містяться ті частоти, що присутні в спектрі вимушеної сили. В даному випадку це нульова та друга гармоніка. Виходячи з цього одержуємо що:

$$x_2^H = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (1.31)$$

І в результаті можемо записати:

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi). \quad (1.32)$$

Варто зауважити, що отриманий нами розв'язок містить чотири незалежних сталих (a_1 , φ_1 , a , φ), для визначення яких відомі лише дві початкові умови. Тому дві із цих сталих можна вибрати довільним чином. Найзручніше вважати, що $a_1 = 0$. В подальших розрахунках для простоти у всіх вищих порядках мализни покладатимемо сталі, що відповідають власним коливання рівними нулю.

Таким чином, остаточний вигляд розв'язку з точністю до членів порядку ε^2 матиме вигляд:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right] + \dots \quad (1.33)$$

Як видно із виразу (1.33) в спектрі коливань з'являються вищі гармоніки, нульова та друга амплітуди яких мають порядок εa^2 тобто, набагато менші амплітуди основної складової. Можна продовжити цей процес для одержання і більш високих порядків мализни. Після такого уточнення в розв'язку з'являться й інші гармоніки: третя, четверта і т.д. Проте, їх амплітуди будуть ще менші (порядку $\varepsilon^{n-1} a^n$ де n – номер гармоніки). Дійсно, оскільки нелінійність є слабкою, то амплітуди вищих гармонік повинні швидко зменшуватися із зростанням їх номера.

Залишається тільки обчислити константи a і φ . Нехай початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Тоді використовуючи вираз (1.33) легко знайти, що:

$$\begin{cases} a \cos \varphi - \varepsilon \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right] = x_0 \\ a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi = -y_0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Отримана система (1.35) є системою трансцендентних рівнянь і отримати її точний розв'язок в загальному випадку не вдається. Проте, враховуючи, що в (1.35) міститься малий параметр, то розв'язок можна представити у вигляді ряду:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \varepsilon a_1 + \dots \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

В розкладах (1.36) необхідно враховувати те ж число членів що і в (1.33). Намагатися знайти a і φ з більш високою точності немає сенсу.

Підставимо (1.36) в систему (1.35) і виділимо члени однакових порядків малізми. В нульовому порядку по ε отримаємо:

$$\begin{aligned} a_0 \cos \varphi_0 &= x_0, \\ a_0 \sin \varphi_0 &= -y_0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Звідси легко знайти, що:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \\ \varphi_0 &= -\arctg \frac{y_0}{x_0}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Члени порядку ε в (1.35) дають:

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь (1.39) відносно a_1 , φ_1 , легко знаходиться.

1.3.2 Розклад в ряд по параметру нелінійності

Такий простий підхід, як прямий розклад за ступенями малого параметра, не завжди є успішним. Щоб показати це розглянемо осцилятор Дуффінга (осцилятор з кубічною нелінійністю):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (1.40)$$

Як і в попередньому розділі використаємо заміну змінних, що приведе до рівняння такого вигляду:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (1.41)$$

Де, $\varepsilon = \frac{\beta}{\omega_0^2}$. Знову розглядатимемо випадок слабкої нелінійності тобто $\varepsilon \ll 1$.

Шукаючи розв'язок у вигляді (1.19 замість рівнянь (1.24 – 1.26) отримаємо:

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (1.42)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0. \quad (1.43)$$

В нульовому порядку по ε , як і раніше отримаємо рівняння гармонійного осцилятора, розв'язок якого має вигляд (1.27). Спробуємо знайти x_2 . Після підстановки виразу для x_1 (1.28) рівняння (1.43) набуває вигляду:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3\cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)]. \quad (1.44)$$

Необхідно знайти розв'язок цього рівняння, де варто врахувати відповідні доданки, що містять вимушені коливання в членах вищого порядку. Оскільки нелінійність кубічна, то в цьому випадку в спектрі зовнішнього впливу міститься перша і третя гармоніка.

Розв'язок будемо шукати у вигляді суперпозиції, що одержується в наслідок реакції на цей вплив:

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(3)}. \quad (1.45)$$

Де $x_2^{(1)}$ і $x_2^{(3)}$ задовільняють рівнянням:

$$\ddot{x}_2^{(1)} + x_2^{(1)} = -\frac{3a^3}{4} \cos(t + \varphi), \quad (1.46a)$$

$$\ddot{x}_2^{(3)} + x_2^{(3)} = -\frac{a^3}{4} \cos 3(t + \varphi). \quad (1.46b)$$

Розв'язок рівняння (1.46b) знаходиться легко і має вигляд гармонічних коливань на частоті вимушуючої сили:

$$\ddot{x}_2^{(3)} = -\frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (1.47)$$

Що ж стосується рівняння (1.46a), то в ньому зовнішній вплив має частоту рівну частоті власних коливань осцилятора. Як відомо з теорії лінійних коливань в такому випадку виникає резонанс, що виражається в зростанні амплітуди коливань за лінійним законом. Відповідний розв'язок має вигляд:

$$x_2^{(1)} = -\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi). \quad (1.48)$$

Ми отримали так званий секулярний або віковий член (термін бере своє походження з небесної механіки). Остаточний вигляд розв'язку з точністю до членів другого порядку мализми має вигляд:

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots \quad (1.49)$$

Зауважимо, що з плином часу другий доданок в (1.49) нескінченно зростає та стає більшим за перший. Таким чином справедливність розкладу (1.22) при великих t порушується. І це не є фізичним результатом, адже як відомо рівняння Дуффінга мають вигляд періодичних нелінійних коливань і ніякого приросту амплітуди з часом немає. Причиною такого недоцільного розв'язку є те, що коливання осцилятора Дуффінга є неізохронними, тобто їх період залежить від амплітуди. Розклад (1.22) принципово не враховує неізохронність: в спектрі коливань може з'явитися тільки власна частота лінійних коливань і її гармоніка.

1.3.3. Метод Ліншtedта-Пуанкаре

У цьому випадку необхідно модифікувати схему розв'язку таким чином, щоб можна було врахувати неізохронність. Найбільш простий спосіб був запропонований А. Ліншtedтом (1883) і А. Пуанкаре (1892).

Запровадимо в (1.40) нову часову змінну $\tau = \omega t$. Оскільки $\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$ то, отримаємо:

$$\omega^2 \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (1.50)$$

Де штрихами позначили похідну по τ . Будемо шукати розв'язок (1.50) у вигляді розкладу в степеневий ряд як для змінної x так і для частоти ω :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \\ \omega &= 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \end{aligned} \quad (1.51)$$

Перший член в розкладі для ω повинен представляти собою частоту лінійних коливань, яка при нормуванні дасть одиницю. А наступні поправки ω_1 та ω_2 описуватимуть ефекти неізохронності.

Підставимо розклад (1.51) в рівняння (1.50), отримаємо:

$$\begin{aligned} &[1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots][\ddot{x}_1 + \varepsilon\ddot{x}_2 + \dots] + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 \\ &+ 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Виконаємо перетворення для рівняння (1.53), і запишемо його у вигляді:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon(\ddot{x}_2 + x_2 + 2\omega_1 \dot{x}_1 + x_1^3) + \dots = 0. \quad (1.54)$$

Прирівняємо до нуля члени нульового і першого порядку мализни і отримаємо:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad (1.55)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 \dot{x}_1 - x_1^3. \quad (1.56)$$

Розв'язок для рівняння (1.55) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos(\tau + \varphi) \\ &= a \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Підставимо співвідношення (1.57) у праву частину рівняння (1.56) і знайдемо, що:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 &= 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) \\ &- \frac{a^3}{4} [3\cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)]. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Тепер завдання полягає у правильності вибору ω_1 , таким чином щоб знищилися члени пропорційні $\cos(\tau + \varphi)$, які призводять до секулярного зростання розв'язку для x_2 . Очевидно що для цього слід покласти:

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8} \quad (1.59)$$

Тепер згідно (1.59) рівняння (1.58) запишеться у вигляді:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (1.60)$$

Його розв'язок:

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi). \quad (1.61)$$

Отриманий результат (1.61) не містить секулярних складових і розклад залишається правильним при всіх значеннях t .

В кінцевому результаті вигляд знайденого нами розв'язку з точністю до членів порядку ε^2 такий:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi), \quad (1.62)$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}. \quad (1.63)$$

Якщо параметр $\varepsilon > 0$, то частота коливань зростає із зростанням амплітуди, а при $\varepsilon < 0$ частота навпаки зменшується.

Зауважимо, що на відміну від осцилятора з квадратичною нелінійністю в спектрі коливань в першу чергу з'являється не друга, а третя гармоніка. Якщо і надалі продовжувати розклад, то можна переконатися, що в спектрі міститимуться лише непарні гармоніки. Це є наслідком симетрії рівняння Дуффінга відносно заміни $x \rightarrow -x$. Аналогічний результат отримується при розгляді коливань математичного маятника.

1.3.4. Метод Кривола – Боголюбова

Покажемо застосування методу Кривола – Боголюбова на прикладі рівняння, що описує загальну коливальну систему близьку до лінійної консервативної:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}). \quad (1.65)$$

Тут, як і раніше ε – малий параметр, а F – деяка нелінійна функція. Розв’язок рівняння (1.65) очевидно має бути близьким до гармонічних коливань тому шукатимемо його у вигляді:

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (1.66)$$

де амплітуда a і фаза φ задовольняють спрощеним рівнянням, які варто знайти.

Їх також варто шукати у вигляді рядів за степеннями ε :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \dots, \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots, \end{aligned} \quad (1.67)$$

Відносно величин x_n , $n=1, 2, \dots$, в розкладі (1.66) зробимо наступне припущення: оскільки, вони повинні описувати поведінку вищих гармонік, то вважатимемо, що вони є періодичними функціями φ , але при цьому їх спектр не містить основної частоти ω_0 , тобто:

$$\int_0^{2\pi} x_n(t) \cos \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} x_n(t) \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

Відповідно їх можна представити у вигляді рядів Фур’є:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} [v_{nk}(a) \cos(k\varphi) + \mu_{nk}(a) \sin(k\varphi)], \quad (1.68)$$

де $v_{n1} = \mu_{n1} = 0$.

Знайдемо розв’язок з точністю до членів порядку ε . Продиференціюємо рівняння (1.66) і обчислимо $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi + \varepsilon \left(\dot{x} \frac{\partial x_1}{\partial a} + \dot{\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right) + \dots$$

Підставимо сюди $\dot{a}$ і $\dot{\varphi}$ із співвідношення (1.67):

$$\dot{x} = -\omega_0 a \sin \varphi + \varepsilon \left(f_1 \cos \varphi - \omega_1 a \sin \varphi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \right) + \dots \quad (1.69)$$

Продиференціюємо вираз (1.69), в результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\omega_0 \dot{a} \sin \varphi - \omega_0 a \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ & + \varepsilon \left[a \frac{\partial f_1}{\partial a} \cos \varphi - \dot{\varphi} f_1 \sin \varphi - \dot{a} \left(\omega_1 + a \frac{\partial \omega_1}{\partial a} \right) \sin \varphi - \omega_1 a \dot{\varphi} \cos \varphi \right. \\ & \left. + \omega_0 \dot{a} \frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial \varphi} + \omega_0 \dot{\varphi} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.70)$$

Оскільки, ми шукаємо розв'язок з точністю до членів порядку ε , то в квадратній дужці можна покласти, що $\dot{a} \approx 0$, $\dot{\varphi} \approx \omega_0$ і ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\omega_0^2 a \sin \varphi + \varepsilon \left[-2\omega_0 f_1 \sin \varphi - \omega_1 \omega_0 a \cos \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (1.71)$$

Підставимо вирази (1.70) і (1.71) у вихідне рівняння (1.65). При цьому з точністю до порядку ε в правій частині можна припустити, що:

$$F(x, \dot{x}) \approx F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi).$$

Як результат наше рівняння матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + x_1 \right) = & 2\omega_0 (f_1 \sin \varphi + \omega_1 a \cos \varphi) + F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Представимо $F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi)$ у вигляді ряду Фур'є:

$$F(a \cos \varphi, -\omega_0 a \sin \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [\beta_k(a) \cos k\varphi + \alpha_k(a) \sin k\varphi], \quad (1.73)$$

де α_k і β_k можна знайти задавши конкретний вигляд функції F .

Підставимо розклад (1.69) і (1.73) в рівняння (1.72):

$$\begin{aligned}
& \omega_0^2(v_{10} + \sum_{k=2}^{\infty} [(1-k^2)v_{1k} \cos(k\varphi) + (1-k^2)\mu_{1k} \sin(k\varphi)]) = \\
& = 2\omega_0(f_1 \sin \varphi + \omega_1 a \cos \varphi) + \beta_0 + \beta_1 \cos \varphi + \alpha_1 \sin \varphi + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} [\beta_k(a) \cos k\varphi + \alpha_k(a) \sin k\varphi] .
\end{aligned}$$

В цьому рівнянні прирівнюємо коефіцієнти при однакових:

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 v_{10} &= \beta_0, & f_1 &= -\frac{\alpha_1}{2\omega_0}, & \omega_1 &= -\frac{\beta_1}{2\omega_0 a}, \\
v_{1k} &= \frac{\beta_k}{\omega_0^2(1-k^2)}, & \mu_{1k} &= \frac{\alpha_k}{\omega_0^2(1-k^2)}, & k &= 2, 3, \dots .
\end{aligned}$$

Підстановка отриманих співвідношень в вираз (1.66) дає результат:

$$\begin{aligned}
x &\approx a \cos \varphi + \varepsilon \left[\frac{\beta_0(a)}{\omega_0^2} \right. \\
&+ \left. \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\beta_k(a)}{\omega_0^2(1-k^2)} \cos k\varphi + \frac{\alpha_k(a)}{\omega_0^2(1-k^2)} \sin k\varphi \right) \right], \quad (1.74)
\end{aligned}$$

де a і φ знаходяться із спрощених рівнянь (1.67), які відповідно приймають вигляд:

$$\dot{a} \approx -\frac{\varepsilon \alpha_1(a)}{2\omega_0}, \quad \dot{\varphi} \approx \omega_0 - \frac{\varepsilon \beta_1(a)}{2a\omega_0}. \quad (1.75)$$

Очевидно, що описаний алгоритм дій дозволяє отримати результат з точністю до будь-якого порядку щодо малого параметра ε .

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДО ОСЦИЛЯТОРА ДУФФІНГА

2.1. Модель осцилятора в фізиці: суть та практичне значення

У сучасній теоретичній та математичній фізиці, поряд із фундаментальними рівняннями поля та варіаційними принципами, ключову роль відіграють базові динамічні моделі. Однією з таких моделей є гармонічний осцилятор, універсальність якого дозволяє описувати широкий клас фізичних процесів різної природи: від механічних вібрацій та акустичних явищ до електромагнітних коливань та квантово-польових ефектів.

Еволюція уявлень про коливальні процеси демонструє перехід від спрощених лінійних моделей до складніших нелінійних. На ранніх етапах розвитку механіки (М.В. Остроградський, Г. Гельмгольц, Дж. Релей) дослідження нелінійних коливань здійснювалося переважно прямими методами, без використання процедури лінеаризації в околі положення рівноваги.

Вже у XIX столітті було сформовано математичний апарат, потенційно придатний для аналізу квазілінійних систем — систем, динаміка яких описується нелінійними диференціальними рівняннями, що містять малий параметр ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ такі системи асимптотично наближаються до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Слід зазначити, що коректне застосування цього апарату вимагає виконання умови малості параметра $\varepsilon \ll 1$.

Основою для аналізу таких систем стала теорія збурень, спочатку розроблена в рамках небесної механіки для розрахунку ефемерид планет. Класична постановка задачі передбачала вивчення руху, що описується диференціальними рівняннями з малим параметром, які при його нульовому

значенні допускають точне інтегрування (наприклад, задача двох тіл). Однак при спробі застосування прямих розкладів за степенями малого параметра до складніших задач (зокрема, задачі трьох тіл) було виявлено принципові труднощі, пов'язані з розбіжністю рядів на великих часових інтервалах.

Математичний маятник є класичним прикладом нелінійної системи, рівняння руху якої $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ містить трансцендентну нелінійність. Дана модель є еталонною для тестування наближених методів. Аналітичний розв'язок цього рівняння виражається через еліптичні функції Якобі, теорія яких була розроблена математиками XVIII–XIX ст. (Л. Ейлер, Н. Абель, К. Якобі, К. Вейєрштрасс). У сучасних умовах, незважаючи на розвиток чисельних методів, аналітичний підхід залишається актуальним, особливо у поєднанні з можливостями систем комп'ютерної математики (Wolfram Mathematica, Maple).

Ключовою особливістю нелінійних коливальних систем є вплив малих нелінійностей на довготривалу динаміку процесу. Навіть якщо на періоді коливань рух близький до гармонічного, на великих часових інтервалах малі збурення призводять до кумулятивних ефектів: зміни амплітуди (внаслідок дисипації або підкачки енергії) та дрейфу фази (внаслідок неізохронності коливань).

Принциповою відмінністю нелінійних систем є порушення принципу суперпозиції. Це призводить до взаємодії нормальних мод, генерації вищих гармонік та комбінаційних частот, що унеможливорює незалежний аналіз гармонічних складових спектру.

Дослідження сильно нелінійних систем є складною математичною проблемою, що часто вимагає індивідуального підходу. Натомість для квазілінійних систем розроблено універсальні асимптотичні алгоритми. У даній роботі об'єктом дослідження обрано осцилятор Дуффінга, динаміка якого описується рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon * x^3 = 0$$

Для аналізу даного рівняння будуть застосовані та порівняні такі методи:

1. Метод прямого розкладу за параметром нелінійності.
2. Метод Лінштедта-Пуанкаре.
3. Метод Крилова-Боголюбова (метод усереднення).

Метою цього етапу дослідження є верифікація асимптотичних розв'язків шляхом їх зіставлення з еталонним чисельним розв'язком, отриманим засобами СКА Maple, та оцінка області їхньої застосовності.

2.2. Розв'язок рівняння осцилятора Дуффінга асимптотичним та точним методом. Порівняння результатів

Для верифікації ефективності асимптотичних методів розглянемо модельне рівняння осцилятора Дуффінга з кубічною нелінійністю, яке є класичним прикладом консервативної системи з неізохронними коливаннями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon * x^3 = 0, \quad (2.1)$$

та побудуємо розв'язок для даного рівняння у СКА Maple, використовуючи початкові умови у вигляді:

$$\begin{cases} x(0) = 0.8 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

та умову, що $\varepsilon \ll 1$.

Використовуючи аналогічні дані, знайдемо $x(t)$ асимптотичними методами. За одержаними результатами побудуємо графіки одержаних результатів, та проаналізуємо відмінності між ними.

2.2.1. Розв'язок отриманий у СКА Maple

Запишемо рівняння Дуффінга (2.1):

```
>ode:=diff(x(t),t,t)+x(t)+epsilon*x(t)^3=0;
```

$$\text{ode} := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + x(t) + \varepsilon x(t)^3 = 0$$

Присвоємо малозмінному параметру *epsilon* значення 0.1:

```
> epsilon:=0.1;
```

```
ε := 0.1
```

Задаємо початкові умови у вигляді (2.2):

```
>ics := x(0)=0.8, D(x)(0)=0;
```

```
ics := x(0) = 0.8, D(x)(0) = 0
```

Знаходимо розв'язок диференціального рівняння за його виглядом та початковими умовами [17,23,28]:

```
>dsolve({ode,ics});
```

$$x(t) = -\frac{1}{175} \sqrt{301} \operatorname{JacobiSN}\left(\frac{2}{25} \left(\frac{1}{210} \sqrt{105} t - \frac{1}{168} \operatorname{InverseJacobiSN}\left(\frac{1}{4515} \sqrt{301} \sqrt{-4} \sqrt{525}, -\frac{1}{14} \cdot I \sqrt{301} \sqrt{21}\right) \sqrt{-4} \sqrt{525}\right) \sqrt{-4} \sqrt{525}, \frac{1}{14} \cdot I \sqrt{301} \sqrt{21}\right) \sqrt{-4} \sqrt{525}$$

Ототожнимо ліву і праву частину:

```
>assign(%);
```

За одержаними результатами побудуємо графік:

```
>plot(x(t));
```

2.2.2. Асимптотичні методи розв'язання

2.2.2.1. Розклад в ряд по параметру нелінійності.

Після розкладу за малим параметром нелінійності, та розв'язання системи диференціальних рівнянь для осцилятора Дуффінга отримують наближений розв'язок у вигляді:

$$asx := t \rightarrow a \cdot \cos(t + \phi) + \epsilon \cdot \left(-\frac{3 \cdot a \cdot 3 \cdot t}{8} \cdot \sin(t + \phi) + \frac{a \cdot 3}{32} \cdot \cos(3 \cdot (t + \phi)) \right);$$

В одержаному результаті для наближеного розв'язку константи a та φ визначають з початкових умов, які записують у вигляді (2.2)

Знайдемо вигляд асимптотичного значення, та його першої похідної підставивши початкові умови:

```
> asx(t);
```

$$(a_0 + 0.1 a_1) \cos(t + \phi_0 + 0.1 \phi_1) - 0.03750000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 t \sin(t + \phi_0 + 0.1 \phi_1) + 0.003125000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \cos(3 t + 3 \phi_0 + 0.3 \phi_1)$$

```
> D(asx)(t);
```

$$-(a_0 + 0.1 a_1) \sin(t + \phi_0 + 0.1 \phi_1) - 0.03750000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \sin(t + \phi_0 + 0.1 \phi_1) - 0.03750000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 t \cos(t + \phi_0 + 0.1 \phi_1) - 0.009375000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \sin(3 t + 3 \phi_0 + 0.3 \phi_1)$$

Знайдемо значення для $asx(t)$ та $D(asx)(t)$ в момент часу $t = 0$:

```
asx(0);
D(asx)(0);
```

$$0.7984095239 \cos(t)(0) + 0.001590476103 \cos(3 t)(0)$$

$$0.7984095239 D(\cos(t))(0) + 0.001590476103 D(\cos(3 t))(0)$$

Присвоємо малому параметру ε значення 0,1:

```
> epsilon := 0.1;
```

```
ε:=0.1
```

```
> a := a0 + epsilon·a1; phi := phi0 + epsilon·phi1;
```

```
a := a0 + 0.1 a1
```

```
φ := φ0 + 0.1 φ1
```

Використовуючи початкові умови, (2.2) отримаємо:

```
> ics := asx(0) = 0.8, D(asx)(0) = 0;
```

$$\begin{aligned} \text{ics} := & (a_0 + 0.1 a_1) \cos(\phi_0 + 0.1 \phi_1) \\ & + 0.003125000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \cos(3 \phi_0 + 0.3 \phi_1) \\ = & 0.8, -(a_0 + 0.1 a_1) \sin(\phi_0 + 0.1 \phi_1) \\ & - 0.03750000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \sin(\phi_0 + 0.1 \phi_1) \\ & - 0.009375000000 (a_0 + 0.1 a_1)^3 \sin(3 \phi_0 + 0.3 \phi_1) \\ = & 0 \end{aligned}$$

Із отриманої системи знайдемо невідомі константи:

```
> solve( {ics, phi} );
```

$$\begin{aligned} \{a_0 = a_0, a_1 = 7.984095239 - 10. a_0, \phi_0 = \phi_0, \phi_1 = \\ -10. \phi_0\}, \{a_0 = a_0, a_1 = -3.992047619 \\ + 179.0190195 I - 10. a_0, \phi_0 = \phi_0, \phi_1 = -10. \phi_0\}, \{a_0 \\ = a_0, a_1 = -3.992047619 - 179.0190195 I - 10. a_0, \\ \phi_0 = \phi_0, \phi_1 = -10. \phi_0\} \end{aligned}$$

```
> %[ 1];
```

$$\{a_0 = a_0, a_1 = 7.984095239 - 10. a_0, \phi_0 = \phi_0, \phi_1 = -10. \phi_0\}$$

Ототожнимо ліві та праві частини рівнянь і одержимо значення для сталої а

```
assign(%);
```

Отримуємо наближений результат у вигляді $asx(t)$:

$$\begin{aligned} 0.7984095239 \cos(t) - 0.01908571323 t \sin(t) \\ + 0.001590476103 \cos(3 t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Зобразимо графічно отриману залежність:

```
> plot( asx, t = 0 ..50 );
```

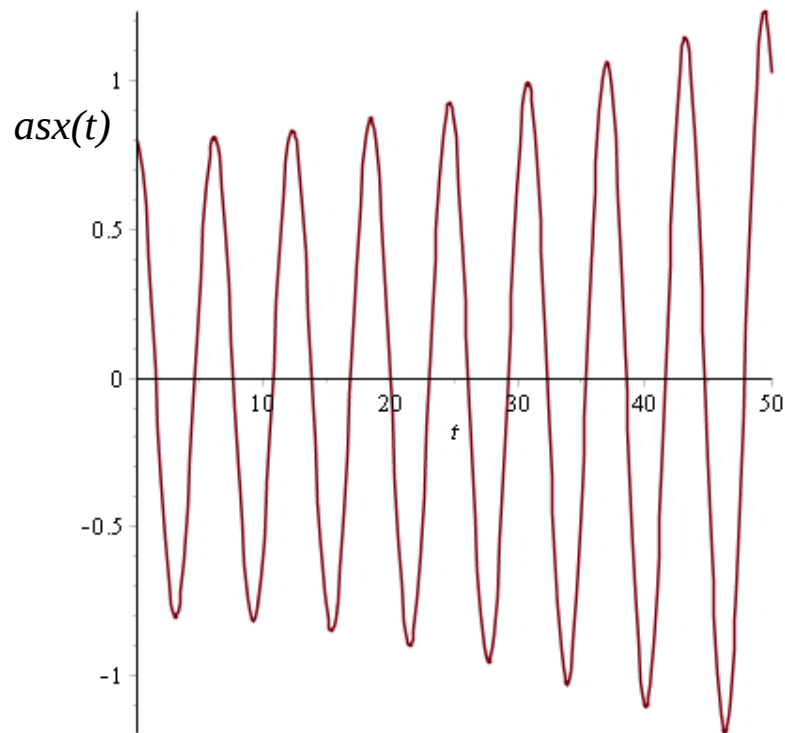


Рис 2.1. Наближений результат отриманий методом розкладу в ряд.

В одній системі координат побудуємо графіки для асимптотичного та точного розв'язку:

`plot( { asx, x(t) }, t=0 ..50);`

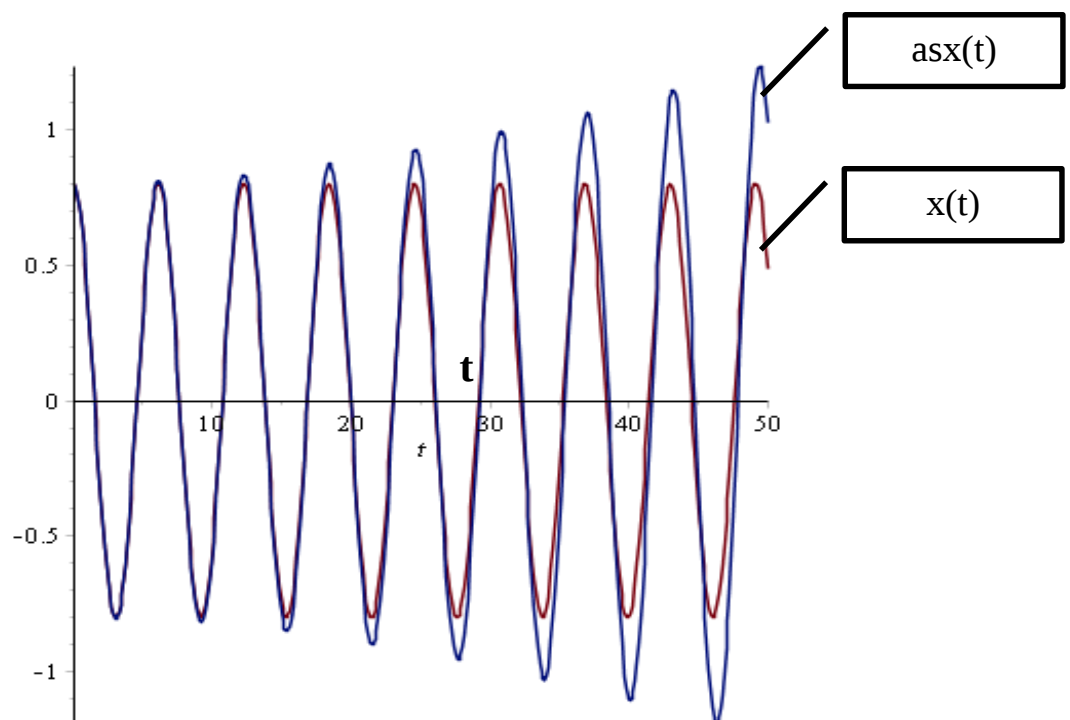


Рис 2.2. Результат отриманий в СКА Maple та асимптотичним методом розкладу в ряд.

Для оцінки відмінностей між методами знайдемо різницю для отриманих результатів:

`plot( {x(t) — asx}, t = 0 ..50);`

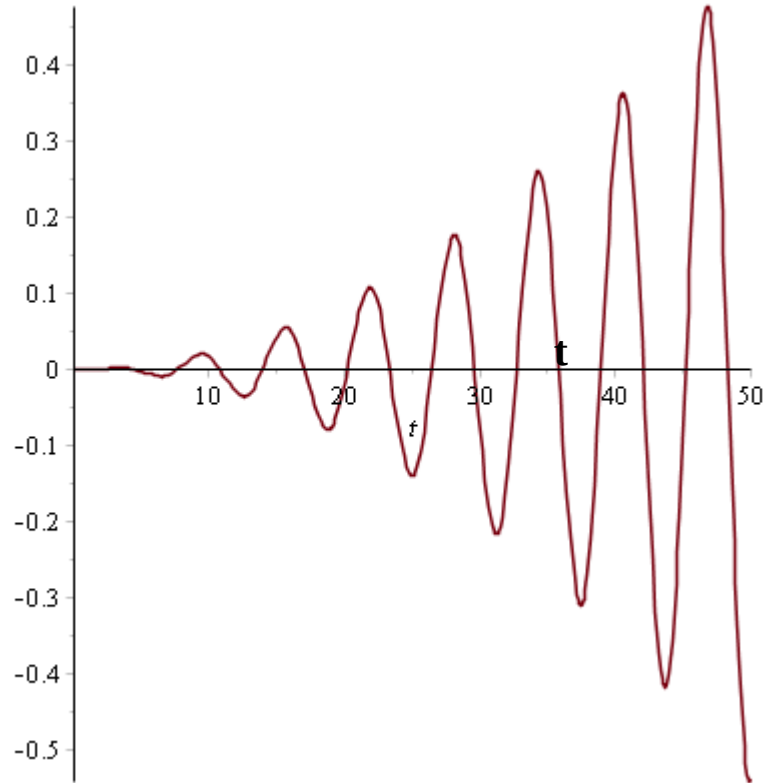


Рис. 2.3. Різниця точного та асимптотичних результатів.

Із Рис 2.2 бачимо, що для результату отриманого асимптотичним методом розкладу в ряд за малим параметром нелінійності спостерігаємо зростання амплітуди, порівняно із точним результатом. А з Рис. 2.3 видно, що перші 5с відмінності немає, проте за проміжок часу $t=0..50$ с різниця амплітуд зростає і для $t=50$ с рівна 0.5, що становить більше половини значення амплітуди.

Отже, метод малого параметра можна використовувати, проте на досить короткому проміжку часу, оскільки з плином часу різниця амплітуд зростає, а це призведе до недостовірності результату.

2.2.2.2. Метод Ланштедта – Пуанкаре

Для використання методу Ланштедта – Пуанкаре необхідно модифікувати розв’язок отриманий за допомогою розкладу в ряд по параметру, таким чином щоб враховувати неізохроність.

Побудуємо відомий розв’язок в СКА Maple.

Для виконання задамо значення ω та отримане значення для asx :

> restart;

> epsilon:=0.1;

$\varepsilon := 0.1$

За відомими результатами маємо наступні асимптотичні оцінки для ω та x для осцилятора Дуффінга:

$\omega := 1 + 3 \cdot \text{epsilon} \cdot a^2 / 8;$

$asx := t \rightarrow a \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) + (\text{epsilon} \cdot a^3) / 32 \cdot \cos(3 \cdot (\omega \cdot t + \phi));$

$\omega := 1 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2$

$asx := t \rightarrow a \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos(3 \omega t + 3 \phi)$

Константи, що присутні у наближеному розв’язку, знаходяться з умов:

$a := a_0 + \text{epsilon} \cdot a_1;$

$\phi := \phi_0 + \text{epsilon} \cdot \phi_1;$

$a := a_0 + \varepsilon a_1$

$\phi := \phi_0 + \varepsilon \phi_1$

Тоді, використовуючи ці умови, одержимо:

$$\begin{aligned} & (a_0 + \varepsilon a_1) \cos \left(\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1)^2 \right) t + \phi_0 + \varepsilon \phi_1 \right) \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1)^3 \cos \left(3 \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a_0 + \varepsilon a_1)^2 \right) t + 3 \phi_0 + 3 \varepsilon \phi_1 \right) \end{aligned}$$

Похідна від цього виразу:

$D(asx)(t);$

$$\begin{aligned}
& - (a0 + \varepsilon a1) \sin \left(\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a0 + \varepsilon a1)^2 \right) t + \phi0 \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon \phi1 \right) \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a0 + \varepsilon a1)^2 \right) - \frac{3}{32} \varepsilon (a0 \\
& \quad + \varepsilon a1)^3 \sin \left(3 \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a0 + \varepsilon a1)^2 \right) t + 3 \phi0 \right. \\
& \quad \left. + 3 \varepsilon \phi1 \right) \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon (a0 + \varepsilon a1)^2 \right)
\end{aligned}$$

> asx(0);

$$\begin{aligned}
& (a0 + \varepsilon a1) \cos(\phi0 + \varepsilon \phi1) + \frac{1}{32} \varepsilon (a0 \\
& \quad + \varepsilon a1)^3 \cos(3 \phi0 + 3 \varepsilon \phi1)
\end{aligned}$$

> series(asx(0),epsilon,2);

$$\begin{aligned}
& a0 \cos(\phi0) + \left(-a0 \sin(\phi0) \phi1 + a1 \cos(\phi0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{32} a0^3 \cos(3 \phi0) \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

> x0:=0.8;y0:=0;

x0:=0.8

y0:=0

> sys0:=coeff(series(asx(0),epsilon,2),epsilon,0)=x0,
coeff(series(D(asx)(0),epsilon,2),epsilon,0)=y0;

sys0:=a0 cos(phi0)=0.8, -a0 sin(phi0)=0

> solve({sys0,a0>0});

{a0=0.8000000000, phi0=0.}

> assign(%);

> sys1:=coeff(series(asx(0),epsilon,2),epsilon,1),
coeff(series(D(asx)(0),epsilon,2),epsilon,1);

sys1:=a1+0.01600000000, -0.8000000000 phi1

> solve({sys1});

{a1=-0.01600000000, phi1=0.}

> assign(%);

```

> epsilon:=0.1;
ε := 0.1
> a:=a0+epsilon*a1;
φ:=φ0+epsilon*φ1;
a := 0.7984000000
φ := 0.
> ics := asx(0)=0.8, D(asx)(0)=0;
ics := a cos(φ) + 0.003125000000 a3 cos(3 φ) = 0.8,
-a sin(φ) (1 + 0.03750000000 a2)
- 0.009375000000 a3 sin(3 φ) (1
+ 0.03750000000 a2) = 0
> solve({ics,φ});
{a = 0.798409523897084, φ = 0.}, {a = -0.3992047619
+ 17.90190195 I, φ = 0.}, {a = -0.3992047619
- 17.90190195 I, φ = 0.}
> %[1];
{a = 0.798409523897084, φ = 0.}
> assign(%);
> a;
omega;
0.798409523897084
1.02390466629436

```

Одержимо результат:

```

>asx:=.7984000000*cos(1.023904096*t)+
+0.1590419187e-2*cos(3.071712288*t);
> plot({x(t),asx},t=500..510);
plot(x(t)-asx,t=0..50);

```

(2.4)

Використовуючи одержані результати зображаємо на одній системі координат два графіки: точний за допомогою СКА Maple та наближений, отриманий асимптотичним методом Ланштедта – Пуанкаре.

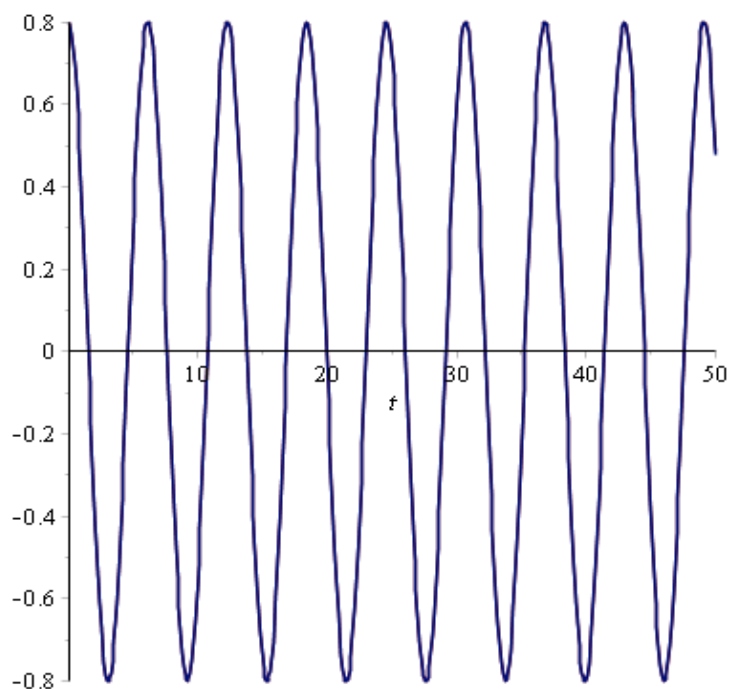


Рис 2.4. Точний результат.

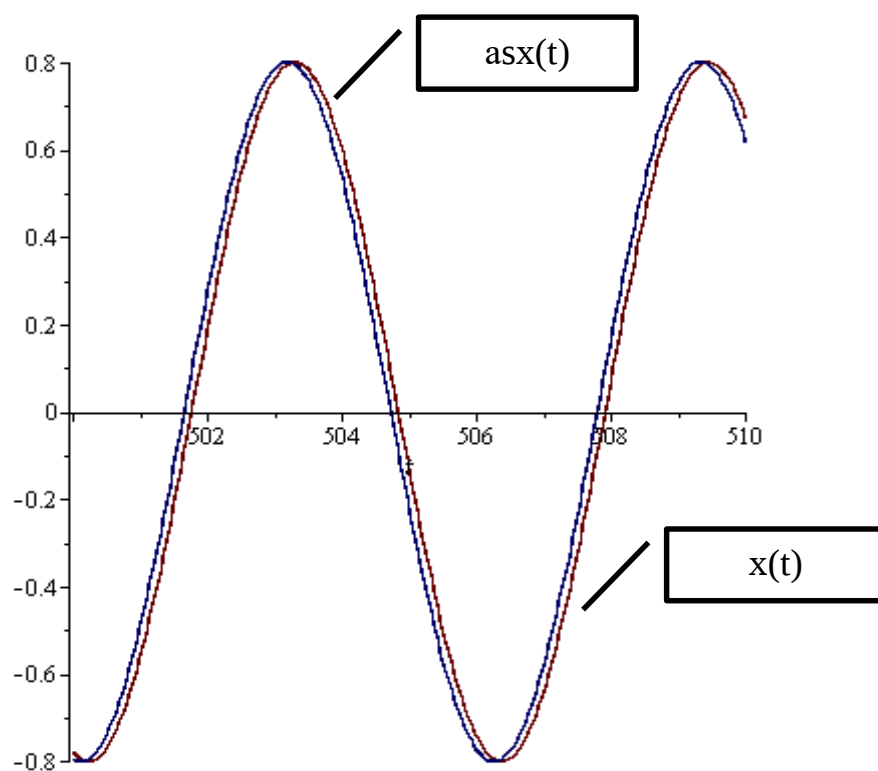


Рис 2.5. Асимптотичний та точний результат.

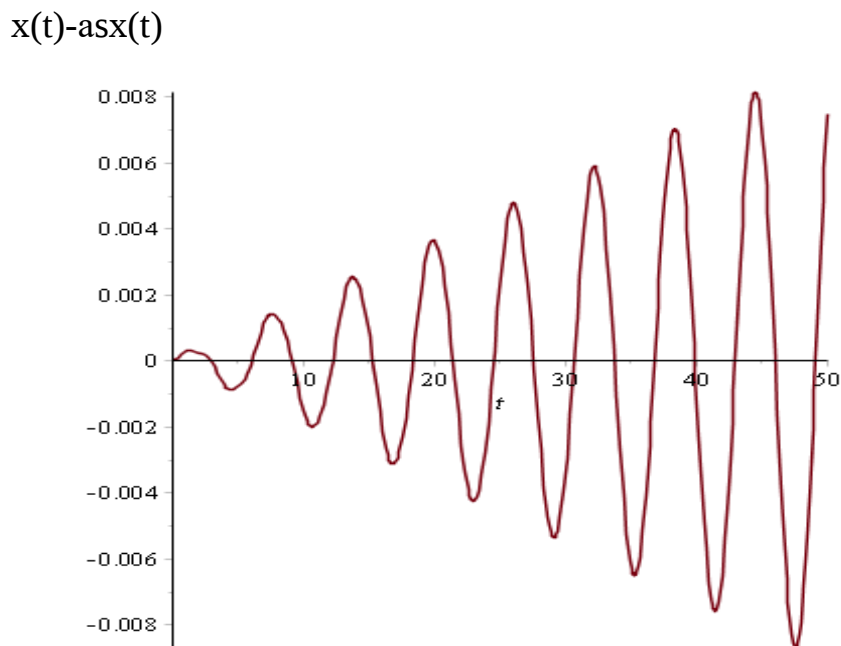


Рис. 2.6. Різниця точного результату та результату отриманого методом Ланштедта-Пуанкаре

На Рис. 2.4 зображено два графіки: результат отриманий точно, та наближений, для інтервалу часу $t = 0..50$ с, проте за цей час відмінності одержаних результатів настільки малі, що побачити їх графічно майже неможливо, тому зобразимо ці ж графіки уже для часу $t = 500..510$ с (Рис. 2.5), бачимо, що для цього часу асимптотичний результат, має незначне зміщення порівняно із точним.

Аналогічно до попереднього випадку попудуємо різницю одержаних результатів (Рис. 2.6). З отриманої залежності бачимо, що різниця амплітуд становить тисячні частини від одиниці і, наприклад, на 50с руху ця різниця рівна 0.008, тобто відмінність одержаних результатів для амплітуди становить 0.001, що свідчить про високу точність одержаного результату. Це дозволяє використовувати метод Ланштедта – Пуанкаре, і одержувати набагато точніші результати порівняно із методом розкладу в ряд за малим параметром.

2.2.2.3. Метод Боголюбова – Крилова

Метод Боголюбова – Крилова є одним із методів побудови вдосконаленої теорії збурень, що базується на усередненні, використаємо цей метод для аналізу коливань осцилятора Дуффінга.

Запишемо рівняння для осцилятора Дуффінга (2.1):

$$\text{> ode: diff(asx(t), t, t) + asx(t) + epsilon \cdot asx(t) \cdot \cdot 3 = 0;}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} asx(t) + asx(t) + \varepsilon asx(t)^3 = 0$$

>Наближений розв'язок для цього рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\begin{aligned} asx &:= asx(t); \\ asx &:= a(t) \cdot \cos(\psi(t)); \end{aligned}$$

Як відомо для розв'язання рівняння методом Боголюбова-Крилова необхідно його представити у вигляді $\frac{d^2}{dt^2} asx(t) + asx(t) = \varepsilon f\left(asx, \frac{d(asx)}{dt}\right)$.

Для рівняння (2.1) функція f запишеться у вигляді:

$$f\left(a(t) \cos(\psi(t)), \frac{dasx}{dt}\right) = a(t) (t)^3 \cos(\psi(t)) (t)^3$$

Похідна

$$\text{diff}(a(t) \cdot \cos(\psi(t)), t, t);$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) \cos(\psi(t)) \\ &- 2 \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(\psi(t)) \left(\frac{d}{dt} \psi(t)\right) \\ &- a(t) \cos(\psi(t)) \left(\frac{d}{dt} \psi(t)\right)^2 \\ &- a(t) \sin(\psi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \psi(t)\right) \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку розглянемо систему:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f \sin \psi \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a \omega_0} f \cos \psi, \end{cases} \quad (2.5)$$

де $f \sin \psi = K$, а $f \cos \psi = M$. Невідомі коефіцієнти K та M знаходимо обчислюючи відповідні інтеграли в межах $(0; 2\pi)$ по ψ . В результаті їх обчислення знаходимо:

$$K := \frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \text{Pi}} (a(t)^3 (\cos(\psi))^3 \cdot \sin(\psi), \psi = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}) \right);$$

$$K := 0$$

$$M := \frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \left(\int_0^{2 \cdot \text{Pi}} (a(t)^3 (\cos(\psi))^3 \cdot \cos(\psi), \psi = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}) \right);$$

$$M := \frac{3}{8} a(t)^3$$

Підставимо отримані значення для коефіцієнтів в систему (2.5).

$$koeficient1 := \frac{\varepsilon K}{\omega}$$

$$koeficient2 := \frac{3}{8} \frac{\varepsilon a(t)^2}{\omega}$$

Отримуємо два диференціальних рівняння першого порядку, що розв'язуються методом розділення змінних:

$$\frac{d}{dt} a(t) = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon a(t)^2}{\omega} \tag{2.7}$$

Із рівнянь (2.6) і (2.7) знаходимо невідомі сталі a та θ :

$$a := a_0$$

$$\theta(t)$$

$$\theta := \frac{3}{8} \frac{\varepsilon a_0^2 t}{\omega}$$

Вираз для ψ , що знаходиться під косинусом у виразі для пошуку розв'язку запишемо у вигляді:

$$\psi := \omega \cdot t + \theta;$$

$$\psi := \omega t + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon a \theta^2 t}{\omega}$$

Після підстановки одержаних результатів отримаємо асимптотичний розв'язок у вигляді:

$$> asx;$$

$$a\theta(t) \cos\left(\omega(t) t(t) + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon(t) a\theta(t)^2 t(t)}{\omega(t)}\right) \quad (2.8)$$

У (2.8) невідомі константи покладемо рівними:

$$> \text{epsilon} := 0.1; a\theta := 0.8; \omega := 1.024;$$

$$\varepsilon := 0.1$$

$$a\theta := 0.8$$

$$\omega := 1.024$$

Побудуємо графік для (2.8):

$$> \text{plot}(asx(t));$$

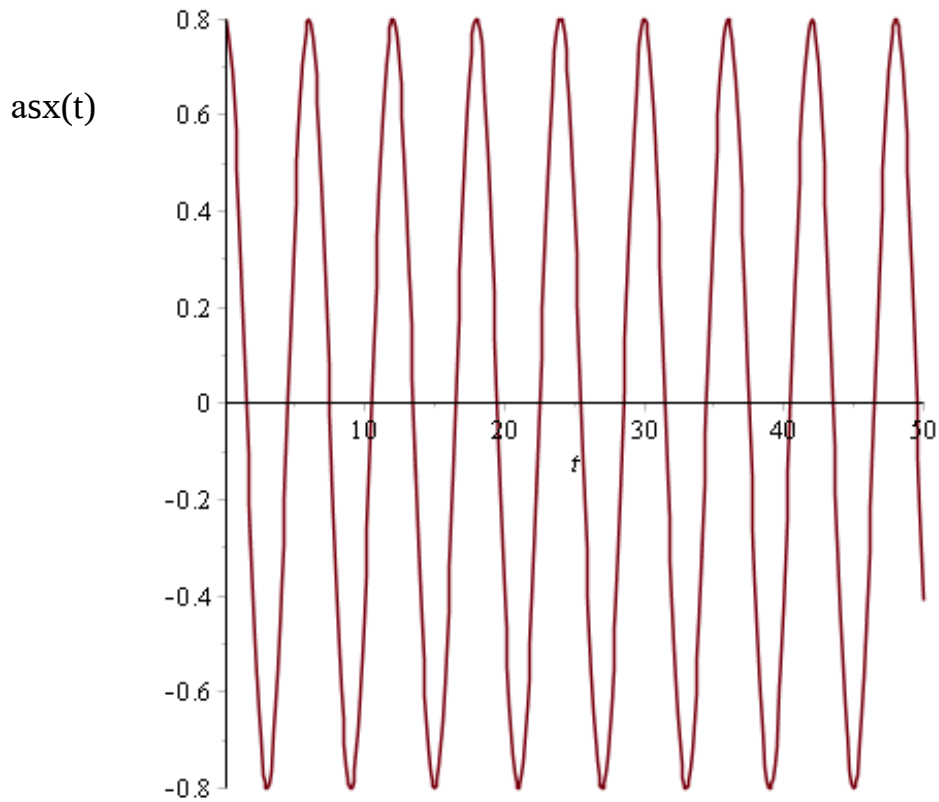


Рис 2.7. Асимптотичний результат отриманий методом Боголюбова – Крилова.

Порівняємо одержані результати точним та асимптотичним методом, зобразивши їх в одній системі координат (Рис 2.8) та знайдемо різницю одержаних результатів за час 50с.

`plot( {x(t), asx(t) }, t=0 ..50);`

А

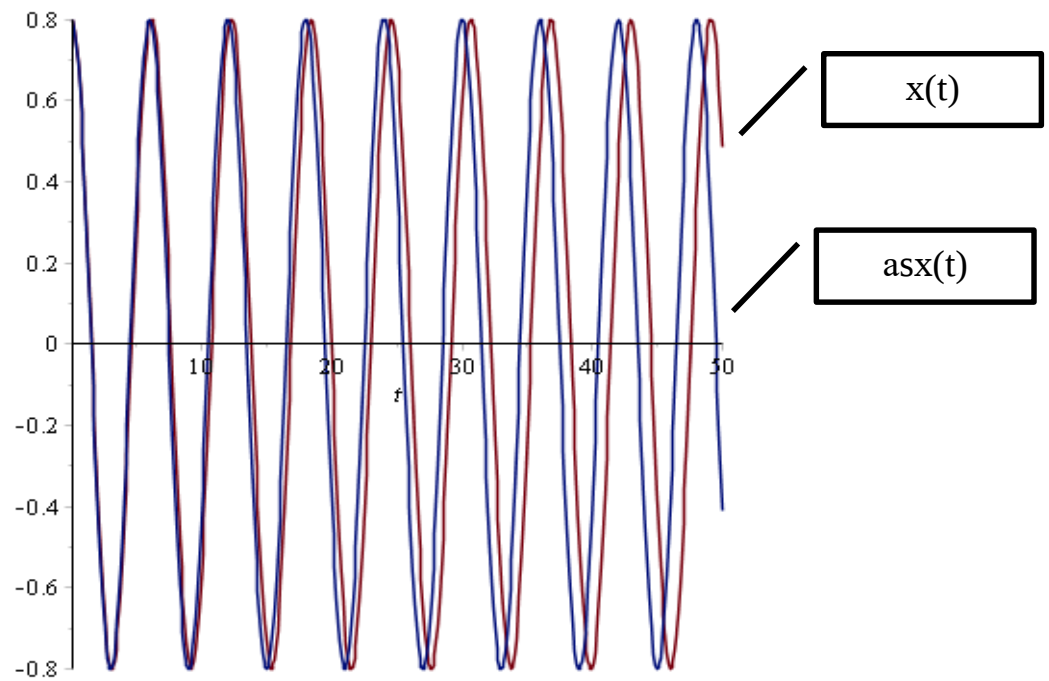


Рис. 2.8. Точний та асимптотичні результати.

Графічна залежність різниці точного та асимптотичного результатів матиме вигляд:

$\text{plot}(\{x(t) - \text{asx}(t)\}, t = 0 \dots 50);$

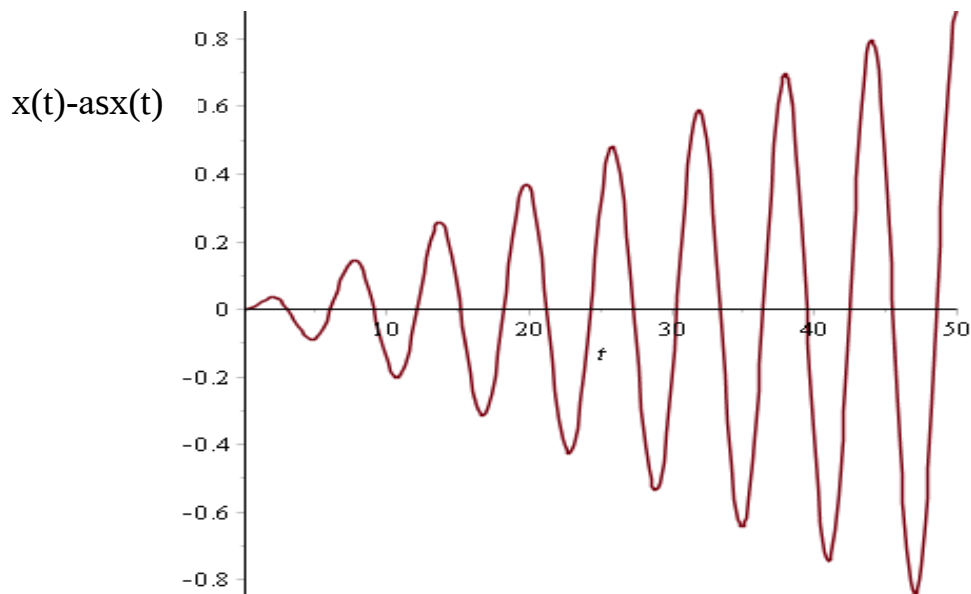


Рис. 2.9. Різниця одержаних результатів

Із Рис. 2.8 бачимо, що відмінності між одержаними результатами є суттєвими уже протягом перших 50с руху, для їх числової характеристики проаналізуємо Рис. 2.9, на якому зображена різниця одержаних результатів за цей же проміжок часу. Видно, що незначна різниця фаз уже присутня в перші

секунди руху, а для 50с вона уже становить 0.8 , тобто відміність рівна амплітуді коливань, а отже не узгоджується із точним результатом.

Отож, із аналізу отриманих результатів можна зробити висновок, що застосування асимптотичних методів не лише суттєво спрощує пошук розв'язку задачі, а й дає непогану точність отриманого результату в порівнянні із точним.

Зокрема для осциляторра Дуффінга найточнішим є результат отриманий методом Ланштедта – Пуанкаре.

РОЗДІЛ 3

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ОБРАХУНКУ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Математичний маятник відомий нам перш за все, як модель, що демонструє ізохронні коливання, що описуються гармонічною функцією часу. Проте, при великих кутах відхилення від вертикалі період коливань залежить від амплітуди. Під математичним маятником ми розуміємо матеріальну точку, яка підвішена на довгій і нерозтяжній нитці та здійснює коливання у вертикальній площині під дією сили тяжіння.

Диференціальне рівняння руху маятника має вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0. \quad (3.1)$$

Часто при $x \ll 1$ записують, що $\sin x \approx x$, і одержують рівняння руху у спрощеній формі

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

розв'язок якого легко знаходиться. Проте цей розв'язок є наближеним, для уточнення розглянемо це рівняння розклавши $\sin x$ в ряд Тейлора [13]. Якщо врахувати два перші члени, тобто вважати, що

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

то розв'язок суттєво ускладниться, але дасть кращу оцінку отриманому результату. Перевіримо справедливість цього в СКМ Maple.

Для аналізу доцільності використання асимптотичних методів до розв'язання диференціального рівняння математичного маятника порівняємо точний та наближений розв'язок знайдений асимптотичними методами: малого параметра та Боголюбова – Крилова.

3.1. Знаходження розв'язків рівняння математичного маятника за допомогою СКА Maple

Для математичного маятника знайдемо:

- 1) точний розв'язок;
- 2) результат, що виникає при врахуванні в розкладі синуса лише x ;
- 3) з урахуванням кубічного доданка, за допомогою СКА Maple.

При цьому вважатимемо що довжина маятника 1 м, а кут відхилення 60 градусів.

3.1.1 Точний розв'язок

Запишемо рівняння руху математичного маятника (3.1) у вигляді:

```
>ode:=diff(x(t),t,t)+omega^2*sin(x(t))=0;
```

$$ode := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 \sin(x(t)) = 0$$

```
>Задамо початкові умови:
```

```
g:=9.8;
```

```
l:=1;
```

```
omega:=sqrt(g/l);
```

```
g := 9.8
```

```
l := 1
```

```
omega := 3.130495168
```

```
> ics := x(0)=Pi/3, D(x)(0)=0;
```

$$ics := x(0) = \frac{1}{3} \pi, D(x)(0) = 0$$

Отримаємо розв'язок рівняння у вигляді:

```
> ds:=dsolve({ode,ics},numeric);
```

```
ds := proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
>Побудуємо графік цього розв'язку:
```

```
> pl1:=plots[odeplot](ds,t=200..205):
```

3.1.2. Результат отриманий, при $\sin x \approx x$

Використаємо відомий результат у вигляді:

$$> x := (t) \rightarrow a \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.2);$$

$$x := t \rightarrow a \sin(\omega t + \alpha)$$

> Задамо початкові умови:

$$\text{solve}(\{x(0)=\text{Pi}/3, D(x)(0)=0, a>0\});$$

$$\{a = 1.047197551, \alpha = 1.570796327\}$$

> assign(%);

> pl2:=plot(x(t),t=200..205):

> with(plots):

Побудуємо на одній системі координат точний та результат отриманий для $\sin x \approx x$:

> display({pl1,pl2});

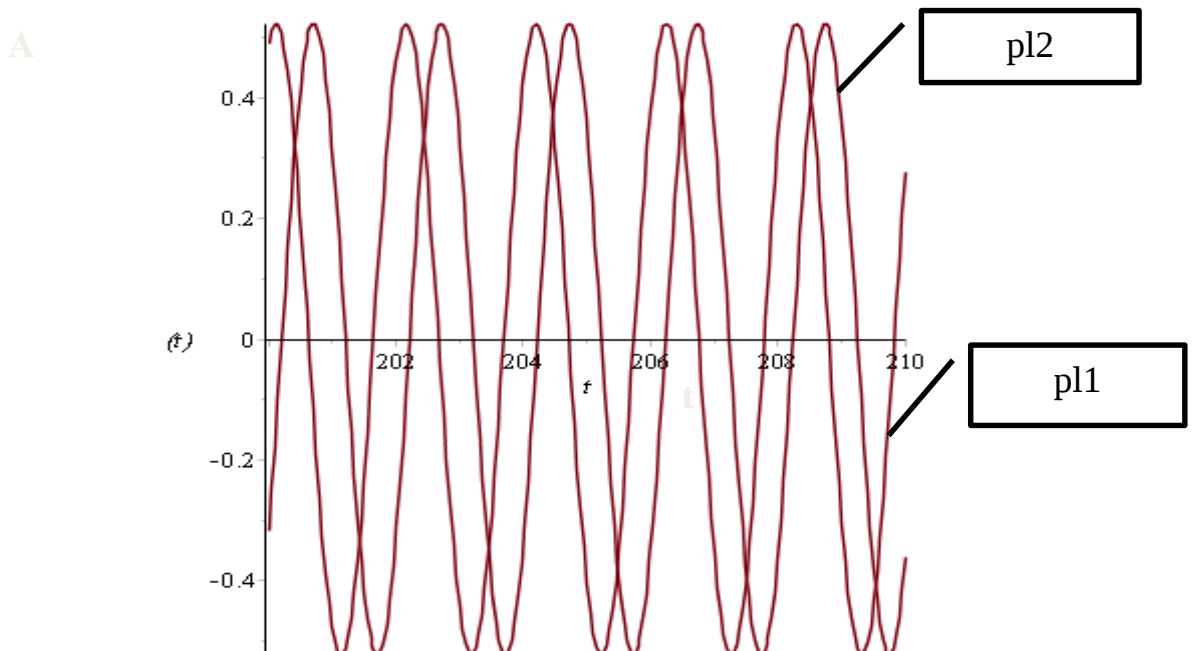


Рис 3.1. Точний та результат отриманий для $\sin x \approx x$.

3.1.3. Результат одержаний для $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$

Розкладемо синус в ряд Тейлора і, обмежившись кубічним доданком, одержимо:

$$> de := diff(asx(t), t, t) + omega \cdot 2 \cdot \sin(asx(t)) = 0;$$

$$de := \frac{d^2}{dt^2} asx(t) + 9.799999997 \sin(asx(t)) = 0$$

$$> \sin(asx(t)) := asx(t) - \frac{asx(t) \cdot \cdot 3}{3!};$$

$$\sin(asx(t)) := asx(t) - \frac{1}{6} asx(t)^3$$

$$> de;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} asx(t) + 9.799999997 asx(t) - 1.633333333 asx(t)^3 = 0$$

$$> ics := asx(0) = \frac{\pi}{3}, D(asx) (0) = 0;$$

$$ics := asx(0) = \frac{1}{3} \pi, D(asx) (0) = 0$$

Розв'яжемо рівняння

$$> dsolve(\{ de, ics \});$$

І побудуємо графік для отриманого результату:

$$> pl3 := plot(asx(t), t=200..205);$$

$$> with(plots):$$

Побудуємо отриману залежність графічно із двома отриманими вище результатами:

$$> display(\{ pl1, pl3 \});$$

$$display(\{ pl2, pl3 \});$$

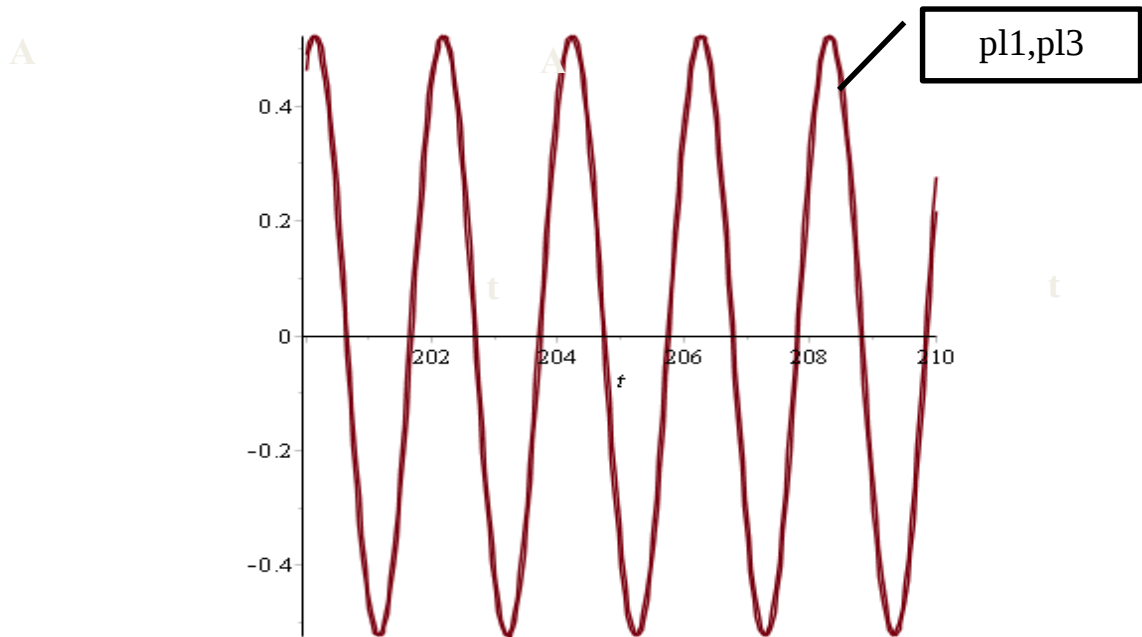


Рис 3.2. Результат одержаний для $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ та точний результат.

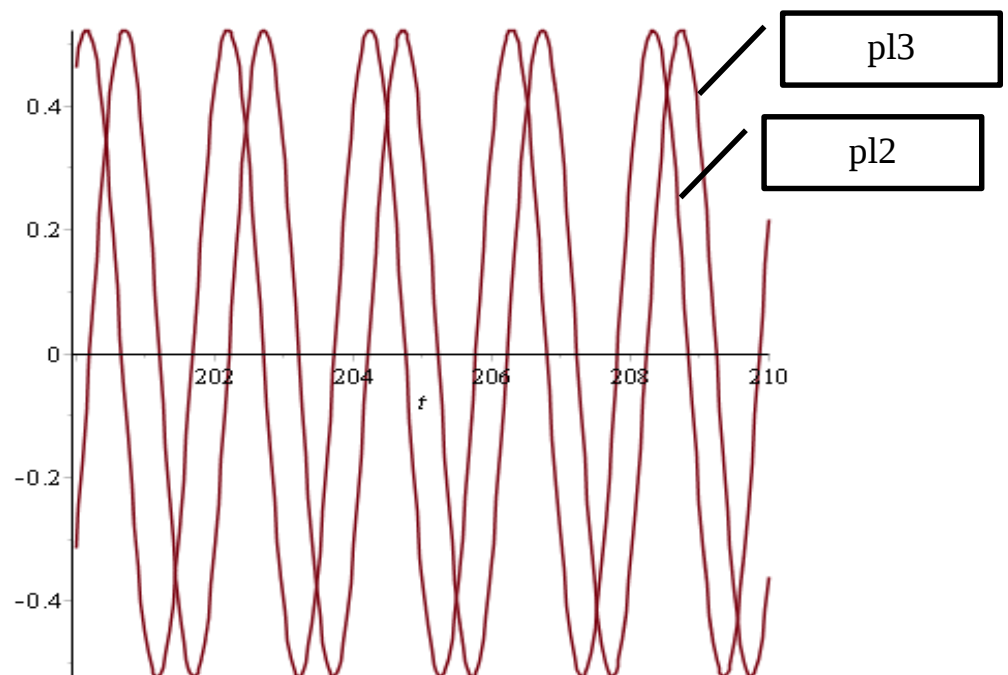


Рис 3.3. Результат одержаний для $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ та для $\sin x \approx x$.

Зробивши аналіз (Рис.3.1-3.3) бачимо, що врахування кубічного доданка суттєво наближує результат до точного, щоб побачити різницю одержаних результатів зобразимо їх на одній системі координат:

```
> display({pl1,pl2,pl3});
```

A

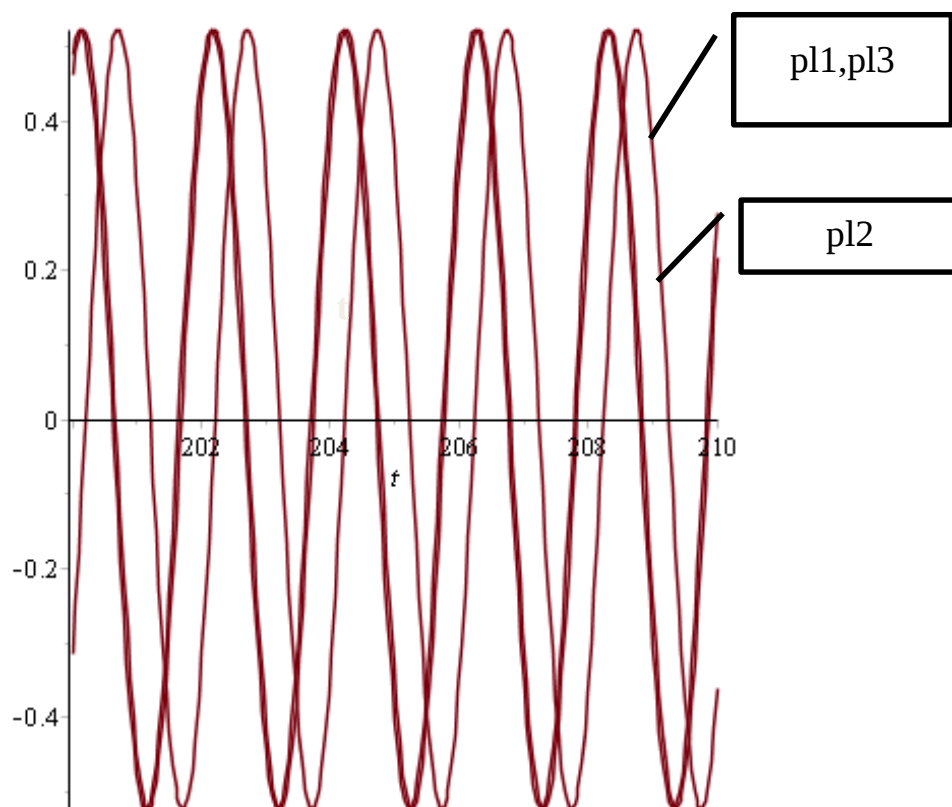


Рис 3.4. Одержанні результати для рівняння руху математичного маятника для кута $\frac{\pi}{6}$: точний, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, $\sin x \approx x$.

A

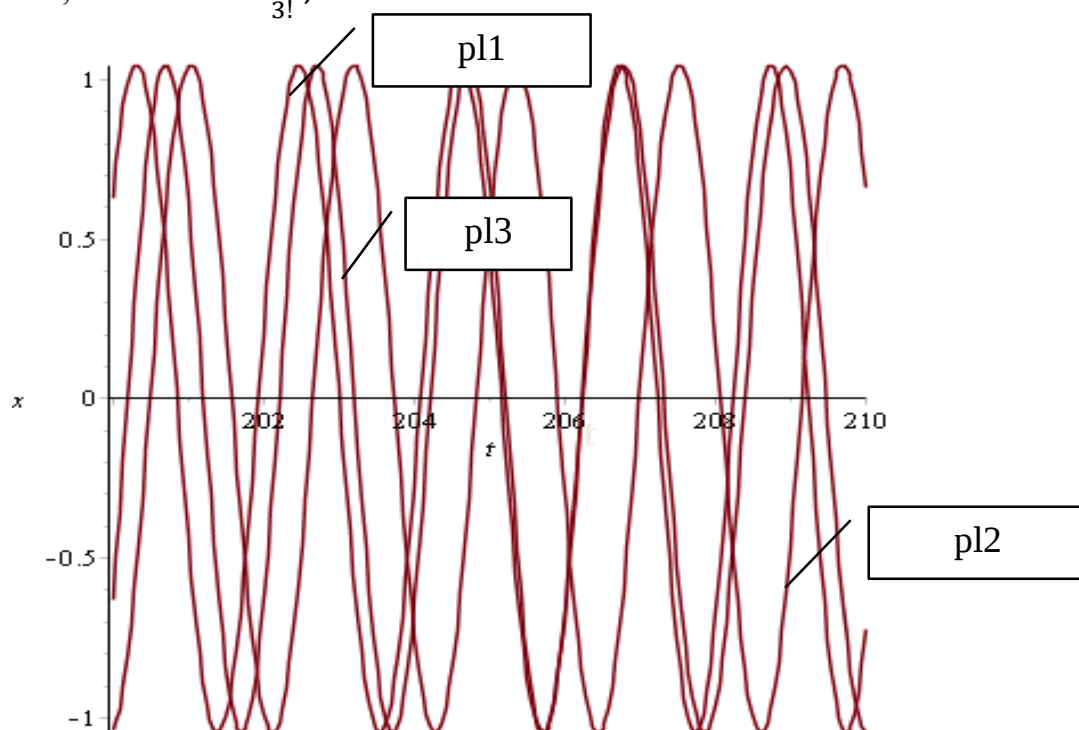


Рис 3.5. Одержанні результати для рівняння руху математичного маятника для кута $\frac{\pi}{3}$: точний, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, $\sin x \approx x$.

На Рис.3.4 в одній системі координат зображено три одержані результати для кута $\frac{\pi}{6}$. Порівняємо їх в момент $t=205$ с. маємо $x(t)=0.499$, $x=0.6779$, $asx=0,521$. Знайдемо різницю цих результатів: $x(t) - x = -0.17$, $x(t) - asx = 0,022$, $asx - x = -0.1489$. Видно, що при врахуванні в розкладі лише x , відмінність одержаних $-0,17$, а при врахуванні $x + \frac{x^3}{6}$ – різниця рівна $0,022$. Тобто врахування наступного у розкладі доданка дає змогу отримати $\approx$ у 8 раз точніший результат.

Для порівняння подивимось, що отримуємо, якщо удвічі збільшуємо кут початкового відхилення, тобто для випадку $\frac{\pi}{3}$ (Рис.3.4). Порівняння проведемо в цей же момент часу, маємо $x(t)=0.404$, $x=0,3389$, $asx=-0,289$. Відповідно різниця: $x(t) - x = -0.743$, $x(t) - asx = -0,115$. Бачимо, що точність отриманих результатів зменшилася, порівняно із попереднім випадком.

Можемо зробити наступні висновки:

- врахування кубічного доданку в розкладі синуса дозволяє отримати точніший результат ніж класичне припущення, що $\sin x \approx x$;
- зі збільшенням початкового кута відхилення відмінність одержаних результатів збільшується.

3.2. Метод малого параметра

Розглянемо рівняння математичного маятника у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad (3.3)$$

та розкладемо $\sin x$ в степеневий ряд і збережемо в ряді два перших члени

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}. \quad (3.4)$$

Тоді рівняння (3.3) матиме вигляд:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2 x^3}{3!} = 0, \quad (3.5)$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu x^3 = 0, \quad (3.6)$$

де малий параметр:

$$\mu = \frac{\omega_0^2}{3!}. \quad (3.7)$$

Для визначення закону коливань маятника використаємо метод малого параметра. Виконаємо розрахунки з точністю до членів, що містять μ в першому степені включно. Тоді шукане x і квадрат невідомої частоти p^2 запишемо у вигляді:

$$x = x_0 + \mu x_1, \quad (3.8)$$

$$p^2 = \omega_0^2 + \mu \alpha_1, \quad (3.9)$$

де x_0, x_1, α_1 визначаються наступним чином.

Підставляючи (3.8) і (3.9) в рівняння (3.6), одержимо:

$$\ddot{x}_0 + \mu \ddot{x}_1 + (p^2 - \mu \alpha_1)(x_0 + \mu x_1) - \mu(x_0 + \mu x_1)^3 = 0.$$

З точністю до членів, що містять малий параметр μ в першому степені включно, це рівняння матиме вигляд:

$$\ddot{x}_0 + p^2 x_0 + \mu(\ddot{x}_1 + p^2 x_1 - \alpha_1 x_0 - x_0^3) = 0.$$

Прирівняємо до нуля члени вільні від μ , а також коефіцієнт що стоїть в дужці при μ , одержимо:

$$\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0, \quad (3.10)$$

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = \alpha_1 x_0 + x_0^3. \quad (3.11)$$

Використовуючи дані початкові умови: $x(0) = a_0, \dot{x}(0) = 0$ в рівняннях:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t),$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \mu \dot{x}_1(t),$$

маємо

$$a_0 = x_0(0) + \mu x_1(0),$$

$$0 = \dot{x}_0(0) + \mu \dot{x}_1(0).$$

Прирівнявши в кожному з цих рівнянь зліва і справа члени, що не містять μ , а також складові що містять μ , отримаємо початкові умови для функцій $x_0(t), x_1(t)$ при $t = 0$:

$$a_0 = x_0(0), x_1(0) = 0, \dot{x}_0(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0. \quad (3.12)$$

Як відомо загальний розв'язок рівняння (3.10) має вигляд:

$$x_0(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.$$

А похідна по часу $\dot{x}_0(t) = -C_1 p \sin pt + C_2 p \cos pt$. Тоді використовуючи початкові умови, знайдемо що $C_1 = a_0$, $C_2 = 0$.

Відповідно

$$x_0(t) = a_0 \cos pt. \quad (3.13)$$

Це перше наближення, в якому циклічна частота p ще невизначена.

Для інтегрування диференціального рівняння (3.11) підставимо в його праву частину (3.13) і використаємо формулу $\cos^3 pt = \frac{3}{4} \cos pt + \frac{1}{4} \cos 3pt$.

В результаті одержимо:

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = a_0 \left(\alpha_1 + \frac{3}{4} a_0^3 \right) \cos pt + \frac{1}{4} a_0^3 \cos 3pt.$$

Частинний розв'язок цього рівняння

$$x_1 = \frac{a_0^3}{32p^2} (\cos pt - \cos 3pt).$$

Підставимо знайдені результати в (3.8) і (3.9):

$$x = a_0 \cos pt + \mu \frac{a_0^3}{32p^2} (\cos pt - \cos 3pt),$$

$$p^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4} \mu a_0^2.$$

Використовуючи вираз (3.7) для малого параметра μ , знайдемо друге наближення:

$$x = a_0 \cos pt + \frac{1}{192} \frac{\omega_0^2}{p^2} a_0^3 (\cos pt - \cos 3pt),$$

$$p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} a_0^2 \right). \text{ [Помилка! Джерело посилання не знайдено.]}$$

Побудуємо цей розв'язок у СКА Maple та порівняємо його із точним:

$$\begin{aligned} &> \text{asx}(t) := a \cdot \cos(p \cdot t) + \frac{1}{192} \cdot \frac{\text{omega} \cdot 2}{p \cdot 2} \cdot a \cdot 3 \cdot (\cos(p \\ &\quad \cdot t) - \cos(3 \cdot p \cdot t)); \end{aligned}$$

$$\text{asx} := t \rightarrow a \cos(pt)$$

$$+ \frac{1}{192} \frac{\omega^2 a^3 (\cos(pt) - \cos(3pt))}{p^2}$$

```

> p := omega * (1 - 1/16 * a * 2);

p := ω (1 - 1/16 a^2)

asx(t);
a cos(ω (1 - 1/16 a^2) t)
+ 1/192 * 1 / (1 - 1/16 a^2)^2 * (a^3 (cos(ω (1
- 1/16 a^2) t) - cos(3 ω (1 - 1/16 a^2) t)))

> solve({asx(0) = Pi/6, D(asx)(0) = 0, a > 0});

{a = 1/6 * π}

> assign(%);

> g:=9.8;

l:=1;

omega:=sqrt(g/l);

g:=9.8

l:=1

ω:=3.130495168

> a cos(p t) + 1/192 * ω^2 a^3 (cos(p t) - cos(3 p t)) / p^2;

0.5243727145 cos(3.076854979 t)
- 0.0007739388703 cos(9.230564937 t)

> pl3 := plot(asx(t), t=200..202);

> with(plots):

Побудуємо на одній системі координат розв'язки отриманий точним
методом та методом розкладу в ряд за малим параметром.

> display({pl3,pl1});

```

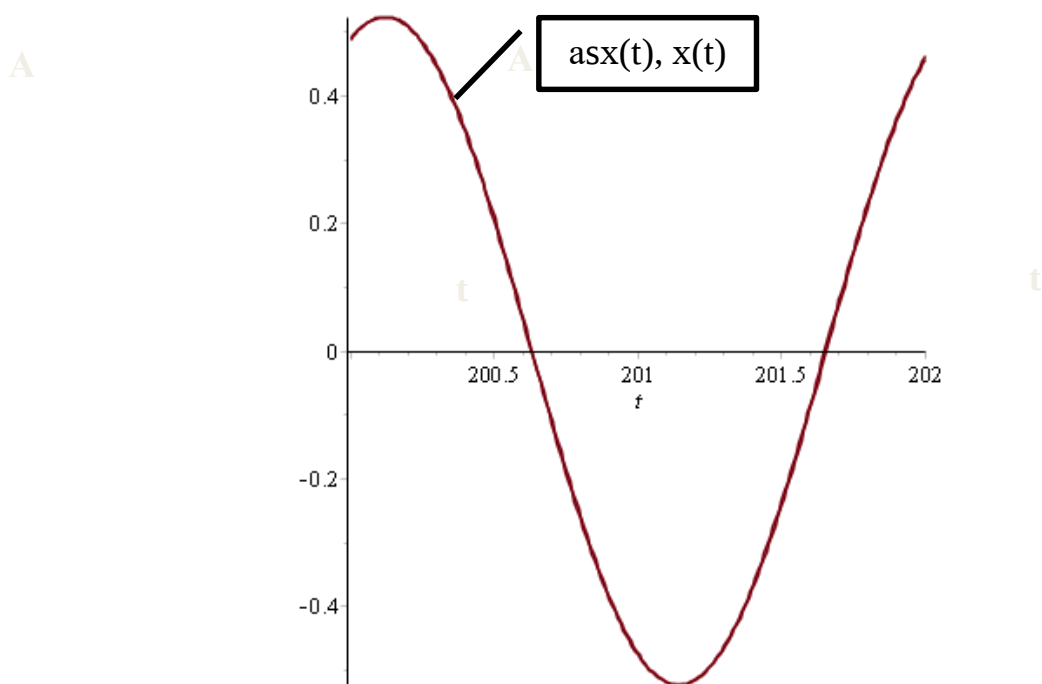


Рис 3.6. Одержанні результати для рівняння руху математичного маятника для кута $\frac{\pi}{6}$: точний та метод розкладу в ряд.

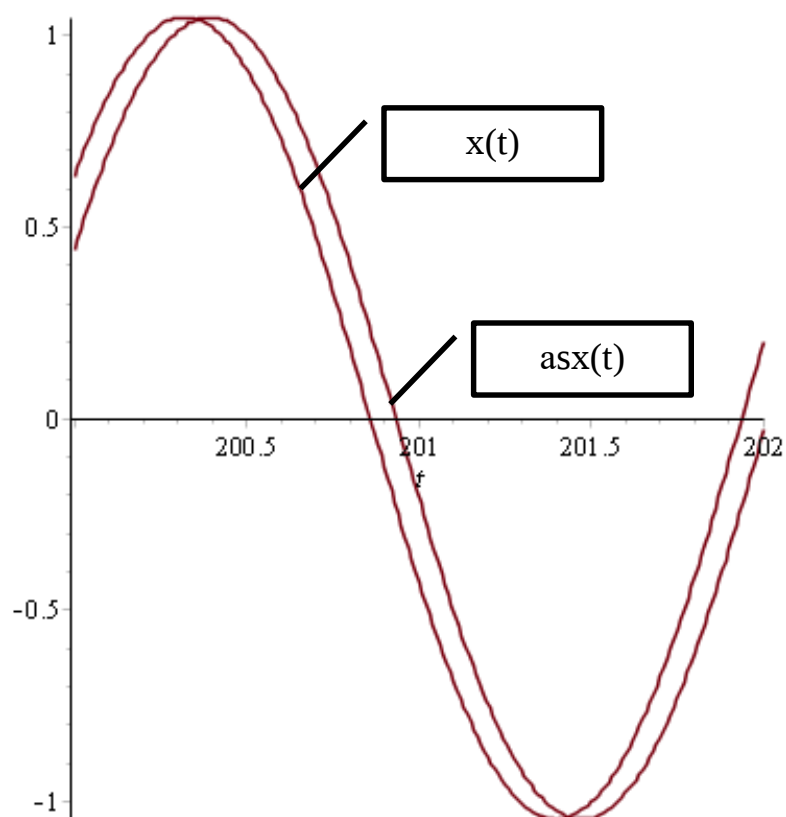


Рис 3.7. Ці ж результати для кута $\frac{\pi}{3}$.

З Рис 3.6 бачимо, що точний та асимптотичний результати майже не відрізняються для кута рівного $\frac{\pi}{6}$, проте для кута $\frac{\pi}{3}$ відмінність навіть візуально є суттєва (графік зображено на Рис 3.7).

Для порівняння одержаних результатів знайдемо значення в момент часу $t=201$, для кожного із кутів:

1. Початкове відхилення $\frac{\pi}{3}$, тоді для точного результату отримуємо значення $x(t) = -0.427$, а для асимптотичного $asx(t) = -0.208$. Відмінність одержаних результатів становить 0,2.

2. Аналогічно для $\frac{\pi}{6}$, маємо $x(t) = -0.476$, а $asx(t) = -0.472$, відмінність 0,04.

Проте в першому випадку максимальна амплітуда 0.5, а в другому 1, тобто зі збільшенням кута відхилення зростає амплітуда, та зменшується точність одержаних результатів.

3.3. Метод Боголюбова - Крилова

Для побудови вдосконаленої теорії збурень, розглянемо результат одержаний асимптотично, виконавши необхідні розрахунки в СКА Maple.

Запишемо рівняння руху математичного маятника (3.1) у вигляді:

$$\begin{aligned} de : diff(asx(t), t, t) + omega \cdot 2 \cdot asx(t) \\ = \frac{omega \cdot 2 \cdot asx(t) \cdot 3}{3!}; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} asx(t) + 9.799999997 asx(t) = 1.633333333 asx(t)^3$$

Тоді розв'язок:

$$asx(t) := a(t) \cdot \cos(\psi);$$

$$asx := t \rightarrow a(t) \cos(\psi)$$

Функція $f(asx)$ має вигляд:

$$f(asx) := \frac{omega \cdot 2 \cdot asx(t) \cdot 3}{6};$$

$$f := asx \rightarrow \frac{1}{6} \omega^2 asx(t)^3$$

Невідомі коефіцієнти К та М:

$$K := \frac{1}{2 \text{ Pi}} \cdot \text{int}(f(asx) \cdot \sin(\text{psi}), \text{psi} = 0 \dots 2 \text{ Pi});$$

$$K := 0.$$

$$M := \frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot asx(t) \cdot 3}{6} \cdot \cos(\text{psi}), \text{psi} = 0 \dots 2 \cdot \text{Pi}\right);$$

$$M := \frac{1.924225500 a(t)^3}{\pi}$$

Кут ψ шукатимемо у вигляді $\psi = \omega t + \theta(t)$

$$\psi := 3.130495168 t + \theta(t) .$$

Необхідний кут $\theta(t)$ знайдемо із дифференціального рівняння:

$$\text{der} : \text{diff}(\theta(t), t) = -\frac{1}{a(t) \cdot \omega} \cdot M;$$

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = -\frac{0.6146712891 a(t)^2}{\pi}$$

$$> \theta(t) := -\frac{\omega \cdot a(t) \cdot 2}{16} \cdot t;$$

$$\theta := t \rightarrow -\frac{1}{16} \omega a(t)^2 t$$

В результаті отримуємо, що ψ :

$$3.130495168 t - 0.1956559480 a(t)^2 t$$

Асимптотичне значення відповідно рівне: $asx(t)$

$$a(t) \cos(-3.130495168 t + 0.1956559480 a(t)^2 t)$$

Невідомі константи визначимо у вигляді $a(t) = \frac{\pi}{3}$

$$a := t \rightarrow \frac{1}{3} \pi$$

Тоді $asx(t)$:

$$\frac{1}{3} \pi \cos(-3.130495168 t + 0.02173954978 \pi^2 t)$$

> pl3 := plot(asx(t), t = 200 ..202) :

> with(plots):

> display({pl3,pl1});

A

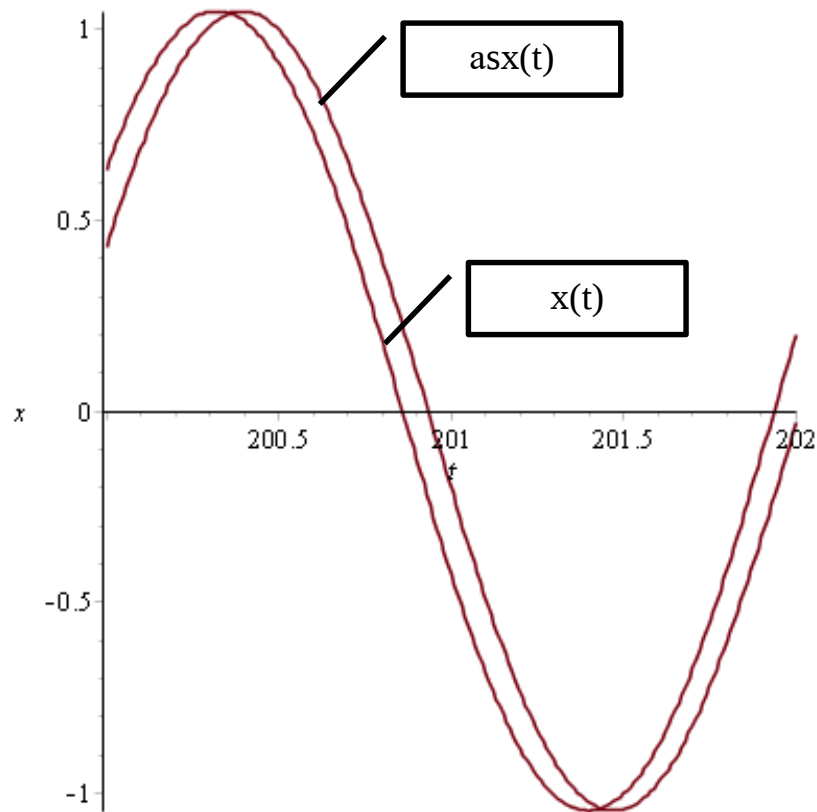


Рис. 3.8. Точний та асимптотичний результат

Із Рис. 3.8. знайдемо також різницю результатів в точці $t=201$:

$x(t) = 0,42$, а $asx(t) = 0,20082$ різниця $0,22$.

Ми порівняли точний розв'язок рівняння (1), знайдений в СКА Maple та асимптотичний розв'язок цього рівняння, виконавши розклад $\sin x$ в ряд із збереженням доданків не вище кубічних.

Побудуємо також в цій же системі координат закон руху маятника, коли ми апроксимуємо $\sin x = x$ та проаналізуємо відмінність між цими трьома результатами.

A

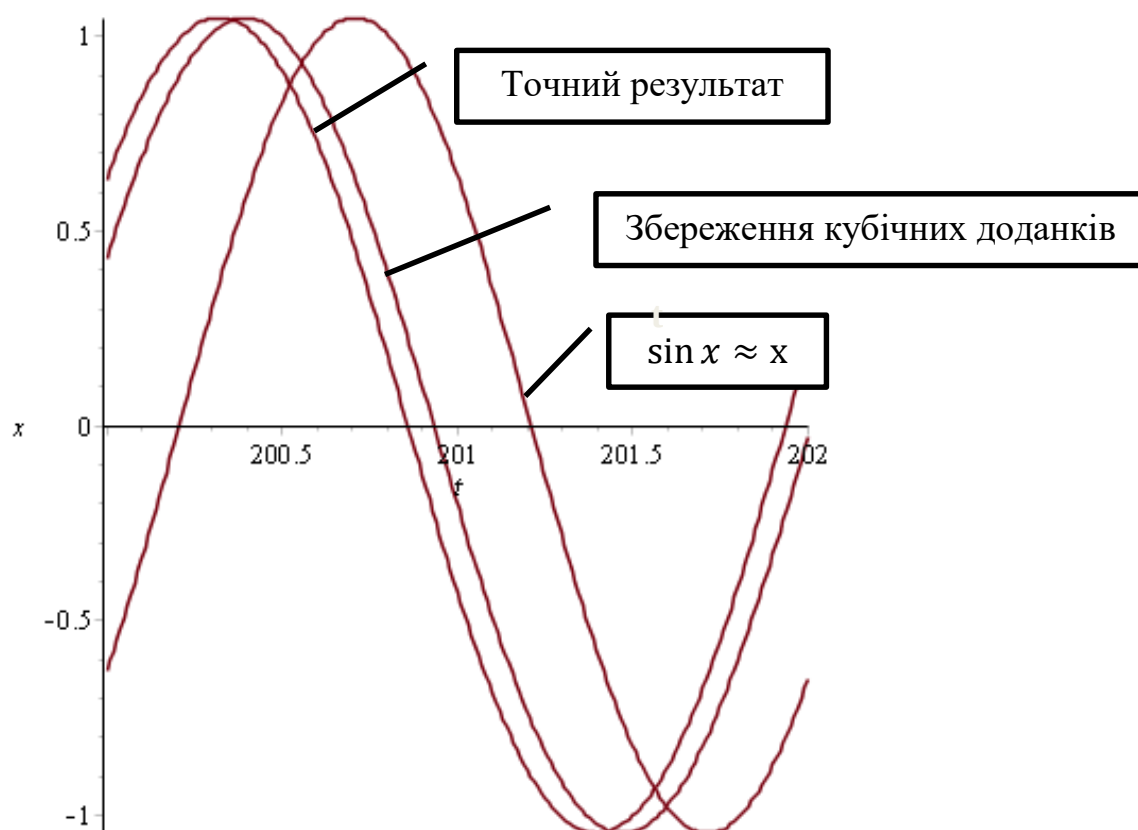


Рис. 3.9. Точний та два наближені розв'язки.

З Рис. 3.9 бачимо, що якщо не враховувати кубічний доданок, то відмінність одержаних результатів навіть візуально значна.

ВИСНОВКИ

У сучасній нелінійній динаміці основними аналітичними інструментами дослідження залишаються асимптотичні методи, метод усереднення, метод малого параметра та їх модифікації. При застосуванні цих наближених методів, як правило, припускається, що шуканий розв'язок за своєю структурою близький до гармонічного, а його параметри (амплітуда та фаза) повільно змінюються у часі. Після знаходження параметрів основного наближення результат може бути уточнений шляхом врахування вищих гармонік, хоча, як показує практика, ці уточнення здебільшого носять кількісний характер і рідко приводять до виявлення нових якісних ефектів.

Основною метою магістерської роботи було встановлення ступеня відмінності між наближеними розв'язками, отриманими аналітично за допомогою класичних асимптотичних методів, та точними чисельними розв'язками, одержаними з використанням системи Maple. Це дозволило оцінити межі доцільності та достовірності використання аналітичних підходів для інженерних та наукових розрахунків.

У ході виконання роботи було проаналізовано фундаментальні джерела з теми дослідження, що стосуються точності асимптотичних методів та аналізу механічних коливань. Дослідження проводилося на прикладі двох базових моделей: осцилятора Дуффінга та математичного.

За результатами виконаного теоретичного та чисельного дослідження зроблено наступні висновки:

1. Теоретичні основи та методологія.

У першому розділі роботи детально розглянуто особливості нелінійних коливань на прикладі одновимірного руху в потенціальному полі. Проаналізовано роль та значення асимптотичних методів у теорії нелінійних коливань. Показано загальну теоретичну схему побудови наближених розв'язків, яка дозволяє звести складну нелінійну задачу до послідовності лінійних диференціальних рівнянь.

2. Дослідження осцилятора Дуффінга.

У другому розділі охарактеризовано фізичну суть та практичне значення моделі осцилятора Дуффінга. Проведено детальне порівняння результатів, одержаних асимптотичними методами, з еталонним розв'язком у середовищі СКМ Maple. Графічна побудова та чисельний аналіз дозволили оцінити точність кожного методу:

- Метод розкладу в ряд за малим параметром нелінійності (прямий метод). Встановлено, що даний метод має суттєві обмеження. Зокрема, виявлено розходження амплітудних значень, яке зростає з часом: на 50-й секунді руху різниця амплітуд склала 0.5, що є неприпустимо великою похибкою. Це підтверджує, що прямий розклад призводить до появи секулярних членів і не підходить для тривалих прогнозів динаміки системи.
- Метод Лінштедта–Пуанкаре. Результати показали високу ефективність цього методу. Графіки наближеного та точного розв'язків не мають помітного фазового зміщення, а відмінність амплітуд становить близько 0.001. Це свідчить про високу точність методу та доцільність його використання для слабонелінійних коливальних систем, де важливим є врахування залежності частоти від амплітуди.
- Метод Крилова–Боголюбова. Побудована теорія збурень на основі усереднення дозволяє отримати компактний аналітичний результат, який легко аналізувати теоретично. Проте для осцилятора Дуффінга цей метод у першому наближенні не забезпечив належної точності фазових характеристик порівняно з методом Лінштедта–Пуанкаре.

Загалом, результати другого розділу дозволяють стверджувати, що застосування адекватних асимптотичних методів (зокрема Лінштедта–Пуанкаре) не лише значно спрощує процес пошуку розв'язку порівняно з чисельним інтегруванням, а й дозволяє отримати аналітичний результат, надзвичайно близький до точного.

3. Аналіз моделі математичного маятника.

У третьому розділі проведено дослідження рівняння коливань математичного маятника з урахуванням вищих членів розкладу відновлювальної сили. Отримано наступні результати:

- Врахування кубічного доданка в розкладі синуса дозволяє отримати у 5–8 разів точніший результат порівняно з класичним лінійним наближенням $\sin x \approx x$.
- Встановлено залежність точності наближених обчислень від початкових умов: зі збільшенням початкового кута відхилення маятника точність асимптотичних розв'язків закономірно зменшується через зростання впливу нелінійності.
- Використання асимптотичних методів (малого параметра та усереднення) дозволило отримати розв'язки, що не мають критичних відмінностей із точним інтегруванням.
- Таким чином, для системи математичного маятника використання запропонованих асимптотичних методів дає результати, що добре узгоджуються з точними. Однак при їх застосуванні слід критично оцінювати величину початкового відхилення (амплітуду), оскільки від неї безпосередньо залежить зміна циклічної частоти і, відповідно, накопичення фазової похибки з часом.

Перспективи подальших досліджень. Подальший розвиток даної теми вбачається у необхідності адаптації та дослідження розглянутих методів для аналізу суттєво нелінійних коливань (де малий параметр відсутній), оцінці їхньої збіжності та визначенні меж достовірності результатів. Також актуальним є пошук універсальних методів, що дозволять проводити глобальний якісний та кількісний аналіз складних нелінійних коливальних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азарєнков М.О. Теорія коливань та хвиль / М.О. Азарєнков, В.О. Гірка. — Х.: 2005. — 154 с.
2. Анісімов І.О. Коливання та хвилі: навчальний посібник / І.О. Анісімов. — К.: КНУ, 2011. — 210 с.
3. Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. 2nd ed. Westview Press, 2015. 528 p.
Kovacic I., Brennan M. J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. John Wiley & Sons, 2011. 394 p.
4. Lynch S. Dynamical Systems with Applications using Maple. Birkhäuser Boston, 2010. 504
5. Fidlin, A. Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2019. 364 p.
6. Lynch, S. Dynamical Systems with Applications using Python. Cham: Birkhäuser, 2018. 382 p.
7. Strogatz, S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. 2nd ed. Boulder: Westview Press, 2015. 528 p.
8. Булавін Л.А. Медична фізика : підручник.-Т.1. Динамічні і статичні моделі / Л.А.Булавін. —К:Київський університет, 2010. —600с.
9. Космінська Ю. О. Комп'ютерні технології в електроніці : конспект лекцій / укладач Ю. О. Космінська. — Суми : Сумський державний університет, 2014. — 149 с.
10. Попов Б. О. Розв'язування задач у системі комп'ютерної алгебри Maple V/ Попов Б. О. Київ: ViP, 2007. 312 с.
11. Боголюбов М. М., Митропольський Ю. О. Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 1974. 501 с.
12. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища школа, 1971. 226 с.

- 13.Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння: Приклади та задачі. Київ: Вища школа, 1984. 408 с.
- 14.Ландау Л. Д., Ліфшиць Є. М. Механіка. Теоретична фізика, т. 1. Київ: Фізматліт, 2007. 210 с.
- 15.Арнольд В. І. Математичні методи класичної механіки. Київ: Наукова думка, 1979. 472 с.
- 16.Макара В. А., Решетняк С. О. Комп'ютерне моделювання фізичних процесів: навчальний посібник. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2018. 255 с.
- 17.Городецька А. С. Моделювання коливальних процесів у системі Maple. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016. 120 с.
- 18.Герасимчук С. М. Курс лекцій з теорії коливань. Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012. 148 с.
- 19.Бабський В. Г., Мишкіс А. Д. Математичне моделювання: процеси в нелінійних середовищах. Київ: Наукова думка, 2001. 364 с.
- 20.Павленко В. М. Чисельні методи математичної фізики в середовищі Maple. Черкаси: ЧНУ, 2017. 188 с.
- 21.Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley & Sons, 2011. 533 p.
- 22.Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. 2nd ed. New York: Springer, 2007. 431 p.
- 23.Heck A. Introduction to Maple. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2003. 828 p.
- 24.Enns R. H., McGuire G. C. Computer Algebra Recipes for Classical Mechanics. Boston: Birkhäuser, 2003. 272 p..
- 25.Jordan D. W., Smith P. Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction for Scientists and Engineers. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 2007. 560 p.
- 26.Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. 2nd ed. New York: Springer, 2003. 844 p.

27. Rand R. H. Lecture Notes on Nonlinear Vibrations. Ithaca: Cornell University, 2012. 120 p.
28. Tocci C., Adams S. Applied Maple for Engineers and Scientists. Norwood: Artech House, 2003. 424 p.
29. Mickens R. E. Oscillations in Planar Dynamic Systems. Singapore: World Scientific, 1996. 319 p.
30. Thomsen J. J. Vibrations and Stability: Advanced Theory, Analysis, and Tools. 2nd ed. Berlin: Springer, 2003. 404 p.