

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ЛЕСІ УКРАЇНКИ

**Кафедра експериментальної фізики, інформаційних та освітніх
технологій**

На правах рукопису

ЗУБАЧ ІРИНА ВОЛОДИМИРІВНА

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Спеціальність: 014.08 – Середня освіта (Фізика та астрономія)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Фізика»

Робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня "Магістр"

Науковий керівник:

КОБЕЛЬ ГРИГОРІЙ ПЕТРОВИЧ,

кандидат педагогічних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри _____

від _____ 2025р.

Завідувач кафедри

Луцьк 2025

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ I. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМИ.....	7
1.1. Зміст поняття фізичної задачі. Роль задач у фізичній освіті.....	7
1.2. Взаємозв'язок математики та фізики в освітньому процесі	12
1.3. Методи та способи розв'язування фізичних задач	18
1.4. Методика розв'язування фізичних задач	22
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ШКІЛЬНОГО КУРСУ	26
2.1. Застосування алгебраїчних методів	26
2.2. Графічні методи.....	33
2.3 Векторний метод	42
2.4. Застосування диференціальних рівнянь в шкільному курсі фізики	48
2.5. Математичне моделювання у розв'язуванні фізичних задач	51
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖПРЕДМЕТНИХ ІНТЕГРАЦІЙ ПРИ ВИВЧЕНІ ФІЗИКИ І МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСОБУ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ	66
3.1. Організація роботи з математичними методами на уроках фізики.....	66
3.2. Розробка інтегрованих уроків фізики і математики в старших класах.....	68
3.3. STEM- та проєктний підхід у навчанні фізики	80
3.4. Педагогічний експеримент	81
ВИСНОВКИ	84
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	85

ВСТУП

У сучасних умовах реформування освіти в Україні та переходу до компетентнісного підходу особливої актуальності набуває проблема ефективного формування в учнів умінь розв'язувати фізичні задачі. Здобувачі освіти нерідко відчують труднощі під час застосування математичних знань у фізичних контекстах, що зумовлено як недостатнім рівнем математичної підготовки, так і недосконалою системою навчання, у якій міжпредметні зв'язки реалізуються фрагментарно. Саме здатність учня використовувати математичні методи під час аналізу фізичних ситуацій визначає рівень сформованості його наукового світогляду, логічного мислення та ключових природничих компетентностей.

Математика є мовою фізики, а математичні методи — інструментом, за допомогою якого учні можуть глибше усвідомлювати закони природи, робити обґрунтовані висновки й прогнозувати результати експериментів. Без опанування математичного апарату розв'язування задач перетворюється на механічне підставлення чисел у формули, що не сприяє розвитку аналітичного мислення. Тому важливим завданням учителя фізики є формування в учнів цілісного підходу до задач, який поєднує фізичний зміст явищ з відповідним математичним інструментарієм.

Аналіз педагогічної практики свідчить, що значна частина помилок під час виконання фізичних задач зумовлена не відсутністю знань зі шкільної фізики, а саме невмінням застосовувати математичні методи: будувати рівняння, аналізувати графіки, користуватися пропорціями, векторами, алгоритмами міркування. Це підкреслює необхідність розроблення ефективної методики навчання, яка б системно формувала в учнів такі уміння.

Історично математика та фізика розвивалися у тісному взаємозв'язку. Ще І. Ньютон, Г. Лейбніц, Дж. Максвелл, Л. Ейлер, Ж. Фур'є та інші видатні вчені підкреслювали, що фізичні явища можуть бути правильно описані лише за допомогою точних математичних моделей. Сучасна наука продовжує

спиратися на цей принцип: без математичних методів неможливе моделювання руху планет, поширення хвиль, аналіз електричних процесів чи дослідження квантових систем.

Науково-методичний аналіз свідчить про те, що питання застосування математичних методів у фізичній освіті досліджували: М. Мартинюк, В. Галатюк, О. Сергєєв, С. Гончаренко, Н. Тарасенкова, В. Ільченко, Т. Кушнір та інші науковці. Проте, незважаючи на значний обсяг наукових праць, проблема формування в учнів стійкого вміння застосовувати математичні методи для розв'язування фізичних задач залишається актуальною та недостатньо розробленою в методичному аспекті. Особливої уваги потребує створення структурованої, зрозумілої й ефективної методики роботи з такими методами в шкільному курсі фізики.

Отже, дослідження математичних методів розв'язування фізичних задач у шкільному курсі є важливим у теоретичному, практичному та методичному аспектах. Воно дає можливість не лише глибше зрозуміти структуру фізичних задач, але й удосконалити процес навчання, спрямувати його на розвиток інтелектуальних умінь, самостійності мислення та пізнавальної активності учнів.

Об'єкт дослідження — процес формування вміння розв'язувати фізичні задачі в учнів закладів загальної середньої освіти.

Предмет дослідження — математичні методи як засіб підвищення ефективності розв'язування фізичних задач у шкільному курсі фізики.

Мета роботи –проаналізувати математичні методи розв'язування задач з фізики. Підібрати і скласти фізичні задачі, у розв'язуванні яких використовуються математичні методи

Завдання дослідження:

- Провести аналіз науково – методичної літератури з теми дослідження.

- Описати основні математичні методи, які використовуються у розв'язуванні фізичних задач (графічні методи, метод векторів, математичне моделювання, диференціювання, інтегрування).
- Підібрати цикл задач, у розв'язуванні яких доцільно використати математичні методи.
- Показати роль та місце таких задач у вивченні фізики у ЗЗСО.
- Дослідити активізуючу роль математичних методів розв'язування фізичних задач.

Методи дослідження:

У процесі роботи були використані такі методи:

- аналіз, синтез, порівняння — для опрацювання наукових джерел;
- моделювання — для побудови схем і моделей розв'язування задач;
- педагогічне спостереження та експеримент — для перевірки результативності методики;
- узагальнення — для формулювання висновків.

Практичне значення отриманих результатів

Практичне значення полягає в розробленні методичних рекомендацій, системи вправ, прикладів задач і дидактичних матеріалів, які можуть бути використані вчителями фізики, студентами педагогічних закладів і методистами для підвищення ефективності навчання фізики. Матеріали дослідження можуть стати основою для створення факультативних курсів, інтегрованих занять та індивідуальної роботи з учнями

Апробація результатів.

Основні положення магістерської роботи апробувалися:

- у Луцькому ліцеї №27 Луцької міської ради;
- у Волинському національному університеті імені Лесі Українки;
- у Фаховому коледжі технологій, бізнесу та права ВНУ ім. Лесі Українки
- опубліковані тези «Математичні методи розв'язування фізичних задач» XV Міжнародній науково-практичній конференції «Теоретичні та практичні аспекти розвитку науки та освіти» 15-16 липня 2025 року.

- опубліковані тези «Фізичні історичні задачі» XV Міжнародній науково-практичній конференції «Теоретичні та практичні аспекти розвитку науки та освіти» 15-16 липня 2025 р.

РОЗДІЛ І. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМИ

1.1. Зміст поняття фізичної задачі. Роль задач у фізичній освіті

Існує велика кількість тлумачень поняття «задача». У різних навчальних предметах це поняття має свої особливості залежно від характеру діяльності суб'єкта та змісту самого завдання, тому єдиного універсального визначення задачі фактично немає.

З. І. Слєпкань вказує, що кібернетика, дидактика і методика навчання розглядають задачу як ситуацію зовнішньої діяльності, що запропонована окремо від суб'єкта діяльності. Психологія трактує задачу як мету, задану в певних умовах, як особливу характеристику діяльності суб'єкта. У такому підході задачу розуміють як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта

У загальнодидактичному аспекті задача може тлумачитися як вимога виконати певну дію, досягти результату або встановити шукані зв'язки між об'єктами, що описані в умові. Г. П. Бевз зазначає, що навчальна задача — це будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити щось, що стосується певних об'єктів і відношень між ними, або запитання, рівносильне такій вимозі. Це визначення повною мірою може бути перенесене й на сферу фізичної освіти.

Фізична задача — це словесна модель або проблемна ситуація, що описує реальне фізичне явище чи процес, де потрібно знайти невідомі фізичні величини або зв'язки між ними, використовуючи закони фізики та математичні методи.

У курсі фізики під **фізичними задачами** розуміють не лише текстові (сюжетні) задачі, а й усі вправи, запитання, експериментальні завдання, графічні та якісні задачі, в яких необхідно знайти значення фізичних величин, дослідити хід процесу чи обґрунтувати певні твердження щодо фізичних явищ.

«Розв'язати задачу» — це означає відшукати її розв'язок (якщо він єдиний) або всі можливі розв'язки (якщо їх декілька), тобто виконати вимогу

задачі або довести, що розв'язків не існує. У задачах на доведення результатом розв'язування є підтвердження або спростування висунутого твердження. В усіх інших видах задач (обчислювальних, графічних, якісних, дослідницьких) результатом є знайдена величина, побудований графік, обґрунтований висновок чи опис моделі.

Для того щоб навчитися розв'язувати фізичні задачі, необхідно розрізняти такі поняття, як «розв'язок», «розв'язання» та «розв'язування» **задачі**. Ці терміни мають різний зміст.

- **Розв'язок задачі** – це кінцевий результат процесу її розв'язування (числове значення, формула-залежність, побудований графік, сформульований висновок).
- **Розв'язання задачі** – це логічно вибудована система всіх послідовних міркувань, які приводять до шуканого результату .
- **Розв'язування задачі** – це сам процес здійснення цих міркувань і дій, послідовність логічних та обчислювальних операцій, що виконуються учнем .

Розв'язати фізичну задачу – означає відповісти на поставлене в умові запитання, використовуючи правильний алгоритм дій, підібравши відповідні фізичні закони та математичні методи, виконавши необхідні перетворення над фізичними величинами та залежностями між ними. Сам процес розв'язування задачі як елемент розумової діяльності досліджується психологією, а аналіз логіки міркувань, побудови моделі та вибору способів розв'язання – методикою навчання фізики.

Для того щоб навчитися знаходити найбільш оптимальний план, метод чи спосіб розв'язування фізичних задач, учні повинні знати, з яких структурних елементів складається задача, розуміти її види і типи, уміти аналізувати умову й вимогу. Будь-яка фізична задача має свою **умову**, **дані** (відомі фізичні величини чи характеристики процесу) та **вимогу** – питання, на яке необхідно дати відповідь. Знайти розв'язок задачі – означає визначити

невідомі величини, побудувати необхідні графіки чи моделі так, щоб отриманий результат узгоджувався з умовою задачі та фізичними законами.

У методиці навчання фізики задачі виступають як **об'єкт вивчення** (учні опановують різні види задач) і водночас як **засіб навчання**, що забезпечує засвоєння теоретичних положень.

З. І. Слєпкань, аналізуючи роль навчальних задач, виділяє чотири основні функції, які повною мірою реалізуються і у фізичній освіті :

- **Навчальна функція** спрямована на формування цілісної системи знань, умінь і навичок. Завдяки системі фізичних задач учні вчаться застосовувати вивчені закони та формули, усвідомлюють необхідність здобуття нових знань; у процесі розв'язування задач засвоюються також і методи розв'язання, алгоритми застосування математичного апарату.

- **Розвивальна функція** полягає у розвитку мислення учнів, формуванні в них мисленнєвих дій і прийомів розумової діяльності, розширенні просторової уяви, вмінь аналізувати фізичну ситуацію, виділяти головне, будувати причинно-наслідкові зв'язки. Під час розв'язування фізичних задач учні здійснюють різноманітні розумові операції: аналіз, синтез, порівняння, узагальнення, конкретизацію й абстрагування, а також вчаться висловлювати власні судження й обґрунтовувати висновки.

- **Виховна функція** задач сприяє формуванню в учнів наукового світогляду, відповідального ставлення до навчання, розвитку пізнавального інтересу, працьовитості, наполегливості й цілеспрямованості. Через зміст фізичних задач можна реалізувати екологічне, економічне, політехнічне та естетичне виховання, показати зв'язок фізики з реальним життям, технікою, сучасними технологіями.

- **Контролююча функція** задач пов'язана з перевіркою рівня засвоєння знань, сформованості вмінь застосовувати закони та формули, якості володіння математичними методами. За результатами розв'язування задач учитель може судити про рівень загального розвитку учнів, їх готовність до подальшого вивчення фізики .

У кожній конкретній фізичній задачі можна виділити домінуючу функцію (навчальну, розвивальну, виховну чи контролюючу), проте на практиці вони тісно переплітаються і не реалізуються ізольовано одна від одної. У сучасних умовах під час вивчення фізики особлива увага приділяється розвивальній функції, однак навчальна та виховна складові залишаються не менш важливими.

Багато дослідників наголошують, що задачі сприяють не лише закріпленню знань і розвитку вміння використовувати їх на практиці, а й формуванню **дослідницького стилю навчальної діяльності**, характерного для природничих наук. Працюючи з фізичними задачами, учні поступово засвоюють елементи наукового підходу до вивчення явищ: висувають гіпотези, обирають моделі, перевіряють їх на узгодженість з умовою та результатами розрахунків.

Дослідження показують, що проста кількість розв'язаних задач сама по собі не гарантує уміння розв'язувати будь-які задачі. Важливо, щоб у процесі навчання формувалася **загальний підхід** до розв'язування: уміння аналізувати умову, будувати фізичну і математичну модель, обирати адекватні математичні методи, планувати хід міркувань. Лише за таких умов учень здатний самостійно розв'язувати різні види фізичних задач, у тому числі нестандартні.

Залежно від характеру вимоги можна виділити такі основні види фізичних задач:

- **задачі на обчислення** – потребують визначення числових значень фізичних величин за відомими формулами й даними;
- **якісні задачі** – вимагають пояснення явищ, визначення напрямку процесу, порівняння результатів без конкретних обчислень;
- **графічні задачі** – пов'язані з побудовою або аналізом графіків залежностей між фізичними величинами;
- **задачі на доведення** – містять твердження, яке потрібно обґрунтувати або спростувати на основі законів фізики;

- **дослідницькі та експериментальні задачі** – передбачають проведення досліду, обробку результатів, оцінку похибок, аналіз одержаних даних.

Кожен із цих видів передбачає використання відповідних математичних методів: алгебраїчних, графічних, векторних, елементів диференціального та інтегрального числення, статистичних методів тощо.

Процес розв’язування фізичної задачі, за аналогією до математичної, доцільно розглядати як послідовність етапів :

1. **Аналіз умови задачі** – виділення даних і шуканих величин, уточнення фізичного змісту ситуації, словесний опис явища.

2. **Побудова плану розв’язування** – вибір фізичних законів і принципів, визначення математичних методів, складання загального алгоритму дій.

3. **Виконання плану** – запис рівнянь, проведення обчислень чи побудова графіка, перетворення формул, застосування обраних методів.

4. **Перевірка та аналіз результату** – оцінка реалістичності отриманого значення, перевірка одиниць вимірювання, аналіз меж застосування моделі, можливий пошук більш раціонального способу розв’язання.

До кожної задачі існує свій оптимальний підхід. Не завжди потрібно використовувати повний алгоритм у всіх деталях, однак учень має засвоїти логіку послідовності: *аналіз – модель – математика – результат – інтерпретація*.

Фізичні задачі посідають у навчальному процесі важливе місце і відіграють провідну роль при вивченні шкільного курсу фізики. Багато методистів (Р. С. Черкасов, Г. П. Бевз та ін.) підкреслюють, що навчальні задачі є надзвичайно ефективним, а часто й незамінним засобом вивчення основних понять, законів і методів шкільного курсу, а також у формуванні практичних умінь та навичок застосування фізики й математики .

Отже, роль і місце задач при вивченні шкільного курсу фізики неможливо переоцінити. Саме через задачі реалізується зв'язок фізики з математичними методами, формується науковий стиль мислення, розвиваються пізнавальні й вольові якості учнів, а здобуті вміння розв'язувати фізичні задачі стають основою для подальшого навчання та практичної діяльності.

1.2. Взаємозв'язок математики та фізики в освітньому процесі

Взаємозв'язок між математикою та фізикою є фундаментальною основою сучасної природничо-наукової освіти. Ці дві дисципліни перебувають у тісній взаємодії як на рівні змісту, так і в процесі формування в учнів пізнавальних та інтелектуальних умінь. Математика забезпечує апарат для кількісного опису та аналізу фізичних явищ, тоді як фізика створює умови для застосування й осмислення математичних понять у реальних ситуаціях. Тому інтеграція навчання фізики та математики є одним із провідних принципів організації освітнього процесу у старшій школі.

Міжпредметні зв'язки виступають важливим компонентом формування системного мислення в учнів, адже дозволяють побачити єдність наукових знань, взаємозв'язок моделей, методів і способів діяльності. Особливо яскраво це проявляється під час вивчення фізичних законів, які мають математичну природу. Наприклад, тема «Закон збереження енергії» у 10 класі значно легше сприймається, коли учні бачать не лише якісну інтерпретацію, а й математичне доведення цього закону. Оперуючи формулами, графіками та рівняннями, школярі усвідомлюють універсальність математичного апарату та його важливість для фізики

Для ефективного використання міжпредметних зв'язків на уроках фізики слід грамотно підходити до організації уроку і правильно підбирати форми навчання, цьому необхідно приділити особливу увагу:

1. Комплексної постановки завдань уроку. Усі навчальні заняття повинні бути збудовані таким чином, щоб в них об'єднались освітні, розвиваючі та творчі завдання фізики;

2. Комплексної розробки змісту уроку. Так як фізика і математика споріднені дисципліни, що мають взаємопов'язані теми, які лежать в основі доказів фізичних законів і процесів, необхідно включати в освітній процес при вивченні відповідних тем на уроках математики.

3. Організації пізнавальної діяльності. Для того щоб учні активно почали застосовувати математичні знання для розв'язування фізичної задачі, необхідно виробляти у них уміння роботи з такими завданнями

4. Комплексному використанню засобів і методів навчання. На уроках математики необхідно розглядати з учнями завдання, з використанням графіків перебігу фізичних процесів, вивчати властивості функцій, пов'язаних з фізичним застосуванням (наприклад, зміна змінного струму відбувається за законом синуса).

5. Комплексного поурочного планування. Вчителі фізики та математики і повинні працювати спільно, узгоджувати теми уроків. Хоча сучасні освітні програми вимагають від педагогів встановлення міжпредметних зв'язків, але реалізується це не завжди. Це відбувається через те, що деякі теми з математики вивчаються набагато пізніше, ніж з фізики. Наприклад, поняття миттєвої швидкості, так як учні не знайомі з поняттям границі функції.

Щоб вчителям фізики і математики успішно використовувати міжпредметні зв'язки в старших класах на уроках, їм необхідно знати методи, засоби і прийоми, які дозволяють здійснити даний принцип. Умовно такі методичні прийоми можна розділити на дві групи:

- на звичайні, які допомагають встановлювати міжпредметні зв'язки математики і фізики;
- специфічні, які крім встановлення міжпредметних зв'язків збагачують процес навчання.

Методи і прийоми, орієнтовані на встановлення міжпредметних зв'язків	Специфічні для міжпредметних зв'язків методи і прийоми навчання
-Домашні завдання з інших предметів. -Включення у виклад вчителя навчального матеріалу з іншого предмета. -Беседа на відтворення знань з іншого предмета. -Застосування наочних посібників, приладів, фрагментів навчальних відеофільмів. -Постановка проблемних питань. -Розв'язування кількісних і якісних завдань, кросвордів міжпредметного характеру. -Повідомлення учнів за матеріалами іншого предмета. -Залучення в лабораторних роботах з фізики знань з інших предметів. -Застосування мікрокалькуляторів в розрахунках на лабораторних заняттях з фізики	-Робота з підручниками з кількох предметів на уроці. -Використання і виготовлення комплексних наочних посібників, узагальнюючих навчальний матеріал кількох предметів. -Виконання письмових робіт, які розробляються і оцінюються вчителями різних предметів. -Комплексні завдання, міжпредметні тексти, диференційовані з різних предметів групові завдання. -Ведення міжпредметних зошитів (виконання завдань з різних предметів, спрямованих на рішення загальної навчальної проблеми). -Групова робота вчителів по організації вивчення міжпредметних зв'язків. -Повідомлення на комплексних семінарах про налагодження міжпредметних зв'язків.
-Використання на уроках фізики деяких матеріалів екскурсій міжпредметних змісту.	-Творчі завдання в лабораторних роботах з фізики міжпредметних характеру. -Завдання з фізики з програмованим мікрокалькулятором. -Звіти, реферати або завдання, складені учнями за матеріалами екскурсій міжпредметних змісту.

Найбільш дієвими методами для реалізації міжпредметних зв'язків є ті, які спрямовані на реалізацію в учнів умінь самостійної роботи, і на збільшення мотивації навчання і розумової діяльності. Тому для цього необхідно використовувати спеціальні завдання, які вимагають від учня знання з різних шкільних предметів. Процес формування міжпредметних умінь завершується там, де починає здійснюватися перенесення вміння, з однієї дисципліни в іншу. Окреме вміння (без його перенесення) не має міжпредметного характеру

Для розв'язування фізичних задач у більшості випадків доцільно будувати математичну модель явища або процесу, оскільки саме така модель дозволяє кількісно описати залежності між фізичними величинами, передбачати поведінку системи та проводити теоретичні обґрунтування. Використання математичних методів у фізиці забезпечує можливість переходу від якісного опису до точного формалізованого аналізу, що є необхідною умовою наукового мислення. Побудова математичної моделі сприяє не лише правильному розв'язуванню задачі, але й формуванню в учнів умінь

знаходити суттєві характеристики явищ, проводити ідеалізацію та робити узагальнення.

Застосування міжпредметних зв'язків у навчальному процесі виступає важливим чинником розвитку особистості учня. Воно сприяє формуванню у школярів узагальненої системи знань, умінь і навичок, необхідних для розуміння закономірностей природи та їх математичного опису. Інтеграція змісту фізики та математики допомагає учням усвідомити єдність наукового знання, побачити спільні методи, прийоми та інтелектуальні операції, що використовуються в обох дисциплінах. Завдяки цьому формується здатність переносити знання з однієї предметної області в іншу, що є ознакою високого рівня сформованості ключових компетентностей.

У старшій школі, де розглядаються більш складні теми механіки, електродинаміки, оптики та квантової фізики, особливо важливо застосовувати інтегрований підхід. З метою реалізації міжпредметних зв'язків уроки фізики та математики можуть проводитися у формі міжпредметних лекцій, семінарів, практичних занять або інтегрованих навчальних проєктів. Такі заняття дають змогу показати учням, як математичні знання — похідні, інтеграли, векторні операції, тригонометричні залежності, статистичні методи — застосовуються для опису реальних фізичних процесів.

Використання сучасних засобів навчання, таких як комп'ютерні моделі, симуляції, інтерактивні графіки, цифрові вимірювальні комплекси, значно підсилює ефект міжпредметної інтеграції. Учні мають можливість не лише будувати математичні моделі, а й перевіряти їх експериментально, порівнювати теоретичні дані з практичними, виконувати аналіз похибок та інтерпретувати результати. Такий підхід сприяє формуванню дослідницької компетентності, уміння працювати з даними та проводити наукові міркування.

Отже, міжпредметна інтеграція фізики та математики забезпечує поглиблення знань, розвиток критичного мислення, формування навичок моделювання та сприяє становленню цілісного наукового світогляду учнів

Аналіз науково-педагогічної літератури дає змогу виділити три основні групи форм навчальних занять, які найефективніше забезпечують реалізацію міжпредметних зв'язків у старшій школі: теоретичні (лекції, семінари, конференції), змішані (інтегровані уроки, уроки з фрагментами міжпредметних зв'язків, узагальнюючі заняття) та практичні (лабораторні роботи, практикуми, розв'язування комплексних задач). Кожна з цих форм має власні дидактичні можливості й сприяє формуванню в учнів умінь застосовувати математичні методи для розуміння та аналізу фізичних явищ.

Важливо також окреслити засоби, які забезпечують ефективну інтеграцію фізики та математики на уроках. До них належать:

- **міжпредметні завдання**, для розв'язування яких необхідні знання з обох дисциплін;
- **порівняльний аналіз визначень, понять і законів**, що дає змогу встановити структурну подібність математичних і фізичних моделей;
- **узагальнюючі схеми, таблиці та діаграми**, які відображають зв'язки між величинами та явищами;
- **прилади й наочні посібники**, що демонструють математичні закономірності у фізичних експериментах;
- **макети та моделі технічних систем**, які дозволяють пов'язати абстрактні математичні залежності з реальними об'єктами;
- **лабораторні роботи міжпредметного характеру**, у яких учні виконують вимірювання, обробляють дані, будують графіки та математичні моделі;
- **домашні творчі завдання**, що потребують застосування математичних знань для пояснення фізичних процесів.

Вибір відповідних засобів залежить від структури уроку та його дидактичної мети. Проте основою успішної реалізації міжпредметних зв'язків є вміння учнів застосовувати математичні знання для розв'язування фізичних задач. Це вміння не формується автоматично, тому його розвиток потребує цілеспрямованої роботи вчителя.

Під час організації уроку вчитель має з'ясувати, якими математичними знаннями учні володіють і які з них можуть бути корисними для розв'язування конкретних фізичних задач. На початку заняття доцільно ставити запитання, що актуалізують необхідні поняття: пропорційність, робота з рівняннями, графічні методи, похідна як швидкість зміни величини тощо. Такі прийоми сприяють перегрупованню й активізації знань, а також дозволяють учителю оцінити рівень підготовки класу.

Ефективним є створення проблемних ситуацій, коли учень не може знайти розв'язок без застосування математичного апарату. У таких випадках потреба в математичних знаннях виникає природним шляхом, що підсилює навчальну мотивацію. Водночас слід використовувати індивідуальні завдання, які дозволяють врахувати рівень підготовки, темп роботи та інтереси кожного учня.

Як зазначалося раніше, важливою умовою успішної реалізації міжпредметних зв'язків є **злагоджена співпраця вчителів фізики та математики**. Їхня взаємодія повинна стосуватися:

- узгодження термінів вивчення споріднених тем;
- забезпечення єдиного формулювання понять, символів та позначень;
- відбору типових задач, які ілюструють зв'язок між предметами;
- розробки інтегрованих завдань і лабораторних робіт.

Така співпраця дає змогу уникнути дублювання матеріалу, зменшити когнітивні труднощі учнів та забезпечити системність і цілісність навчання. Вона також сприяє формуванню в учнів здатності бачити спільне у різних навчальних дисциплінах, інтегрувати знання та застосовувати їх для розв'язування комплексних завдань.

Аналіз змісту та форм організації навчання показує, що взаємозв'язок математики та фізики є одним із ключових чинників підвищення ефективності природничо-математичної освіти. Математика виступає універсальною мовою опису фізичних явищ, забезпечуючи точність, структурованість і логічну завершеність фізичних міркувань. Фізика, зі свого боку, створює умови для

практичного застосування математичних знань, що сприяє глибшому розумінню математичного апарату та формуванню здатності використовувати його в реальних ситуаціях.

Встановлено, що міжпредметні зв'язки сприяють формуванню в учнів цілісної системи знань, розширюють їхнє уявлення про взаємозалежність фізичних та математичних понять, підвищують мотивацію до навчання й покращують якість засвоєння матеріалу. Розв'язування фізичних задач із використанням математичних методів розвиває аналітичне мислення, уміння моделювати, інтерпретувати функціональні залежності та робити обґрунтовані висновки.

Ефективність реалізації міжпредметних зв'язків залежить від правильної організації навчального процесу: узгодження змісту й календарного планування уроків фізики та математики, добору форм і методів навчання, створення проблемних ситуацій, використання лабораторних і практичних робіт міжпредметного характеру. Особливе значення має професійна співпраця вчителів двох дисциплін, що забезпечує єдність термінології, методів і підходів до подання навчального матеріалу.

Отже, взаємозв'язок математики та фізики у навчальному процесі виступає необхідною умовою формування в учнів наукового світогляду, розвитку їхніх інтелектуальних умінь, а також підготовки до подальшого вивчення природничих дисциплін. Саме інтеграція математичних і фізичних знань створює ґрунт для ефективного опанування більш складних тем та формування стійких компетентностей, важливих для сучасної освіти.

1.3. Методи та способи розв'язування фізичних задач

Розв'язування фізичних задач є одним із ключових компонентів навчання фізики, оскільки забезпечує формування в учнів умінь застосовувати теоретичні знання для пояснення реальних явищ, виконання обчислень, побудови моделей та інтерпретації результатів. Методи вибору стратегії

розв'язування задач визначаються характером фізичного явища, типом задачі, рівнем підготовки учня та необхідною математичною базою.

Розв'язування задач з фізики викликає труднощі у більшості учнів, які навіть мають достатню теоретичну підготовку. Під час практичних занять в основному, використовується традиційний спосіб навчання розв'язанню задач: вчитель пояснює загальні принципи розв'язування задач з даної теми на прикладі розв'язування однієї або двох певних задач, а потім відбувається колективне розв'язування, при якому учні, в основному, списують відомості з дошки, не намагаючись аналізувати і мислити самостійно. При вивченні методики розв'язування задач часто використовується принцип «від частинного до загального», в якого є істотні недоліки: у студентів викликає труднощі проблема самостійного вибору методів і прийомів для виконання певного завдання. Зазвичай узагальнені знання формуються з досвідом, в процесі розв'язування задачі.

Отже, постає актуальним питання навчання узагальненим методам розв'язування задач, загальнометодичним принципам і відповідним узагальненим поняттям. Для розв'язування задачі студент повинен володіти певними прийомами і методами, характерними для даного класу завдань, не лише знати закони фізики, але і проявляти здатність до аналітичного мислення.

Виконати фізичне завдання – це означає знайти, відновити осмислити невідомі зв'язки, фізичні величини тощо. Фізичне завдання – це ситуація, що вимагає від учнів розумових і практичних дій на основі законів і методів фізики, направлених на опанування знань з фізики і на розвиток мислення. Для фізичної задачі важливо не лише знати суть фізичного явища, яке воно описує, але й уміти аналізувати умову даної задачі і здобути відповідь. В процесі розв'язування задачі слід розрізняти три етапи: фізичний, математичний і аналіз розв'язування (рис. 1). Розв'язування задачі починається з ознайомлення з умовою і аналізом фізичних процесів. Фізичний етап закінчується складанням замкненої системи рівнянь. На наступному етапі

здійснюється розв'язування даної системи, після чого відповідь аналізується. Під час аналізу слід розглянути можливі зміни умови даної задачі і допустимі межі даних змін. Для розв'язування завдання недостатньо знати послідовність етапів. Здійснення етапів розв'язування задачі залежить від вибору певного методу розв'язування.

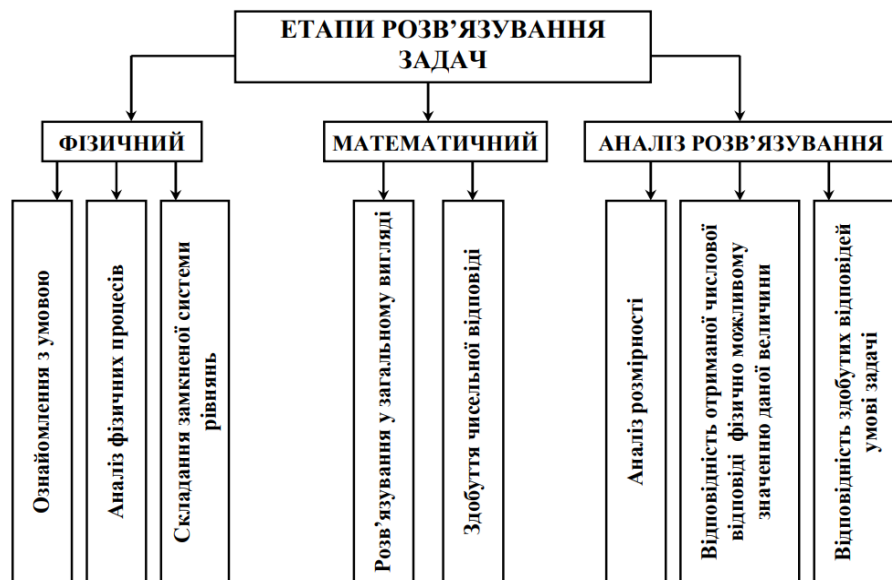


Рис. 1. Етапи розв'язування задач

При описі методів розв'язування в багатьох посібниках кожна задача розглядається окремо, аналізується лише умова даної задачі без можливих варіантів зміни умови. Подібний підхід інколи ставить студента у безвихідь: розв'язування розглянутої задачі зрозуміле, але чи можна так само розв'язувати наступну? Набуваючи навичок самостійного розв'язування задач, студенти найчастіше використовують метод «проб і помилок», який не є ефективним.

Тому слід узагальнити існуючі методи розв'язування задач в систему, використовуючи яку, учень зможе самостійно здійснити всі етапи розв'язування задачі. Необхідно, щоб при складанні узагальненої методики аналіз (максимально наочний, такий, що складається в основному з схем і таблиць) охоплював одразу цілу сукупність завдань. Це допоможе студентові глибше вникнути в суть описуваного фізичного процесу. Дана система узагальнених методів побудована з врахуванням аналізу кожного етапу розв'язування задачі (рис. 2).

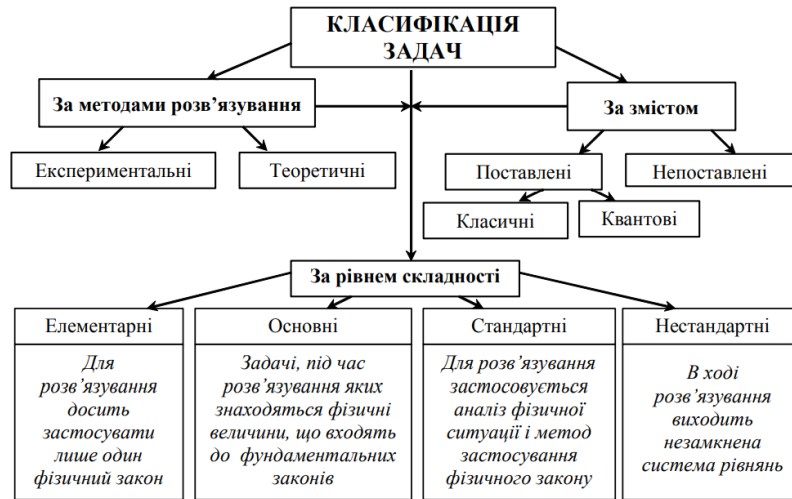


Рис. 2. Класифікація задач

В процесі вивчення розділів фізики учні стикаються з різними типами задач, кожен з яких доцільно розв'язувати певними методами. Для класифікації задач виділяються такі ознаки: методи розв'язування, зміст і рівень складності. Дані компоненти і їх взаємозв'язок проілюстровані на (рис. 3). Проаналізуємо класифікацію поставлених задач на прикладах. Поставлені задачі можна розділити на елементарні, стандартні і нестандартні. Елементарною назвемо поставлену задачу, для розв'язання якої необхідно і достатньо відтворити і застосувати лише один відповідний фізичний закон. Стандартну визначимо як поставлену задачу, для розв'язання якої необхідно і достатньо повернути лише систему «звичайних знань» і «стандартних методів» і прийомів. В поширених збірниках задач з фізики, як правило, приводять стандартні задач

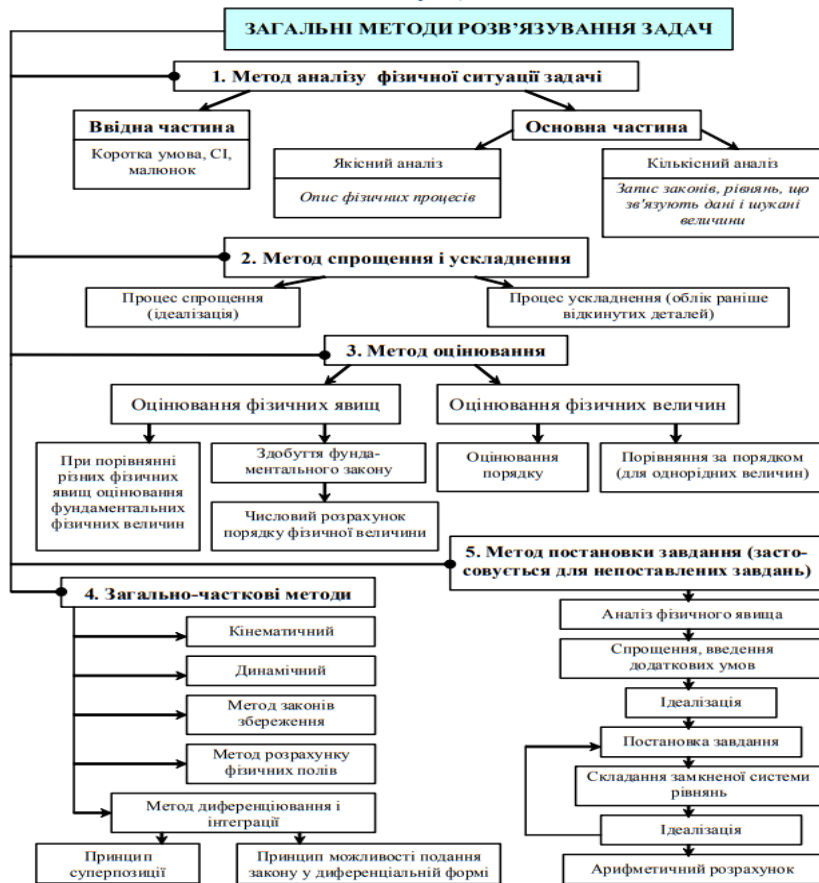


Рис. 3. Загальні методи розв'язування задач

1.4. Методика розв'язування фізичних задач

Розв'язування фізичних задач є одним із провідних засобів формування предметної та ключових компетентностей учнів, оскільки поєднує в собі пізнавальну, розвивальну та навчальну функції. У сучасній дидактиці фізики задача розглядається не лише як інструмент перевірки засвоєння знань, а як засіб активізації пізнавальної діяльності, розвитку логічного мислення, формування вмінь аналізувати фізичні явища та застосовувати теоретичні знання на практиці.

Ефективність використання задач у навчальному процесі визначається, передусім, системністю та методичною доцільністю їх добору, а також чітким усвідомленням учителем дидактичних цілей кожної конкретної задачі. У методичній літературі наголошується, що випадковий або несистематичний добір задач знижує їх навчальну цінність, тоді як продумана система задач забезпечує поетапне формування знань і вмінь учнів.

Важливою дидактичною вимогою до системи фізичних задач є принцип поступового ускладнення, який реалізується через зростання кількості зв'язків між фізичними величинами, розширення кола залучених понять і законів, а також ускладнення логічної структури розв'язування. Такий підхід узгоджується з психологічними закономірностями засвоєння знань і сприяє переходу від репродуктивної до продуктивної та творчої діяльності учнів.

На початкових етапах вивчення теми доцільно застосовувати якісні та тренувальні задачі, спрямовані на формування уявлень про фізичні явища та усвідомлення змісту фізичних законів. Надалі використовуються розрахункові, графічні та експериментальні задачі, які вимагають уміння встановлювати кількісні співвідношення між величинами, аналізувати результати вимірювань, інтерпретувати графіки. Завершальним етапом є комбіновані задачі, що інтегрують знання з різних розділів фізики та суміжних дисциплін, зокрема математики, і сприяють формуванню цілісної фізичної картини світу.

У методиці навчання фізики традиційно виділяють **аналітичний і синтетичний методи розв'язування задач**, які відображають різні логічні підходи до пошуку розв'язку.

Аналітичний метод ґрунтується на русі думки від шуканої величини до відомих. Учень аналізує запитання задачі, встановлює фізичну закономірність, що безпосередньо пов'язує шукану величину з іншими параметрами, після чого послідовно визначає необхідні проміжні величини. Цей метод сприяє розвитку логічного мислення, умінь аналізу та узагальнення, формує навички роботи з формулами та фізичними моделями.

Синтетичний метод, навпаки, передбачає рух від даних умови задачі до шуканого результату. У процесі розв'язування поступово вводяться нові співвідношення між відомими величинами, що зрештою приводить до отримання формули для обчислення шуканої величини. Цей метод є більш інтуїтивно зрозумілим для учнів середньої школи, однак може призводити до знаходження зайвих проміжних величин.

Аналіз методичної літератури та практики навчання фізики свідчить, що в реальному навчальному процесі аналітичний і синтетичний методи **не існують ізольовано**, а застосовуються в тісному взаємозв'язку. Саме тому доцільно говорити про **аналітично-синтетичний метод розв'язування фізичних задач**, який поєднує логічну строгість аналізу з практичною зручністю синтезу

Алгоритм розв'язування фізичних задач

З метою формування в учнів стійких умінь і навичок розв'язування фізичних задач у методиці навчання фізики вироблено **узагальнений алгоритм дій**, який має орієнтовний характер і може змінюватися залежно від типу задачі та рівня підготовки учнів :

1. Усвідомлене читання умови задачі з поясненням фізичних термінів і понять.
2. Аналіз фізичного змісту задачі, визначення фізичних явищ і законів, що лежать в її основі.
3. Короткий запис умови задачі та побудова схематичного рисунка або моделі.
4. Складання плану розв'язування.
5. Отримання загальної формули для шуканої величини та її аналіз.
6. Вибір системи одиниць і приведення фізичних величин до відповідної системи.
7. Обчислення числового значення шуканої величини.
8. Аналіз отриманого результату та оцінка його фізичного змісту

Дотримання зазначеної послідовності сприяє формуванню в учнів алгоритмічного стилю мислення, розвитку самостійності та культури навчальної діяльності, а також підвищує ефективність засвоєння фізичних знань .

Задача.

Через котушку мідного дроту, діаметр якого d , при напрузі U проходить струм силою I . Яка довжина дроту на котушці?

Аналітичний метод.

Довжину дроту можна визначити з формули для опору провідника:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad l = \frac{R \cdot S}{\rho}.$$

Опір дроту знаходимо з формули закону Ома для ділянки кола:

$$I = \frac{U}{R}, \quad R = \frac{U}{I}.$$

Площу поперечного перерізу дротини можна знайти за її діаметром:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

а питомий опір ρ треба взяти з таблиць.

Підставивши всі значення в формулу для визначення довжини провідника, одержуємо формулу для обчислення шуканого результату:

$$l = \frac{U \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot I \cdot \rho}.$$

Синтетичний метод

З даних умов задачі можна знайти опір дроту (за формулою Ома для ділянки кола):

$$I = \frac{U}{R}, \quad R = \frac{U}{I}.$$

За відомим діаметром дроту знаходимо площу його поперечного перерізу:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Опір провідника $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$, звідки довжина дроту на котушці

$$l = \frac{R \cdot S}{\rho}.$$

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ШКІЛЬНОГО КУРСУ

2.1. Застосування алгебраїчних методів

Алгебраїчні методи є одним із фундаментальних математичних інструментів фізики, що забезпечують кількісний опис, аналіз і прогнозування фізичних явищ. Вони ґрунтуються на використанні рівнянь, систем рівнянь, функціональних залежностей та алгебраїчних перетворень, за допомогою яких фізичні закони набувають формалізованого вигляду. Саме завдяки алгебраїчному апарату фізика постає як точна наука, здатна не лише описувати явища, а й передбачати результати експериментів і технічних застосувань.

У процесі навчання фізики алгебраїчні методи виконують подвійну функцію. З одного боку, вони слугують ефективним засобом розв'язування фізичних задач, з іншого — є важливим чинником реалізації міжпредметних зв'язків між фізикою та математикою. Формування в учнів умінь працювати з формулами, рівняннями та математичними моделями фізичних процесів є необхідною умовою розвитку їхньої предметної та математичної компетентностей.

Особливо широко алгебраїчні методи застосовуються в механіці — одному з базових розділів шкільного курсу фізики. У кінематиці вони використовуються для опису рівномірного та рівноприскореного руху, аналізу залежностей між переміщенням, швидкістю та часом. Розв'язування таких задач часто зводиться до лінійних або квадратних рівнянь, що вимагає від учнів умінь виконувати алгебраїчні перетворення та інтерпретувати отримані результати з фізичної точки зору. У динаміці алгебраїчні методи застосовуються при використанні законів Ньютона, коли фізична ситуація моделюється за допомогою рівнянь руху, що передбачає свідомий вибір системи відліку та правильне задання проєкцій фізичних величин.

Задача 1. У – подібну трубку з площею поперечного перерізу $S = 1 \text{ см}^2$ наливо ртуть. Правий кінець трубки закривають корком так, що у закритій

частині міститься $V_1 = 10 \text{ см}^3$ повітря. Яку масу ртуті потрібно долити у ліве, відкрите коліно, щоб його повністю заповнити? Атмосферний тиск становить

760 мм рт. ст. Густина ртуті $\rho = 13,6 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Розв'язування.

Маса

Дано:

$$S = 1 \text{ см}^2$$

$$V_1 = 10 \text{ см}^3$$

$$p_{\text{ат}} = 76 \text{ см рт. ст.}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$m = ?$$

долитої ртуті: $m = \rho V = \rho(2V_1 - Sh)$.

До повітря у закритій частині трубки застосуємо закон Бойля-

Маріотта $p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_2 Sh$.

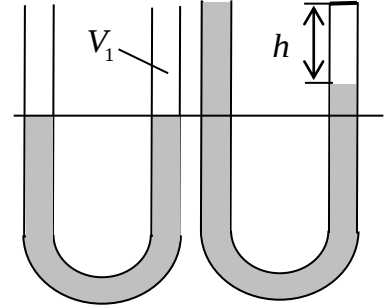
Початковий тиск $p_1 = p_{\text{ат}}$, кінцевий — $p_2 = p_{\text{ат}} + \rho gh$. $p_{\text{ат}} = \rho gH$,

де $H = 76 \text{ см}$. Тоді $\rho gH V_1 = (\rho gH + \rho gh)Sh$ або $HV_1 = (H + h)Sh$.

Отримуємо квадратне рівняння відносно h $Sh^2 + SHh - HV_1 = 0$.

Підставимо числові значення і знайдемо h в сантиметрах. $h^2 + 76h - 760 = 0$,

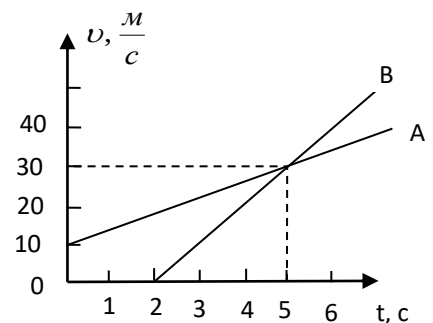
$$h = -38 + \sqrt{38^2 + 760} = -38 + 46,95 = 8,95 (\text{см}). \quad m = 13,6(2 \cdot 10 - 1 \cdot 8,95) = 150,3 (\text{г})$$



Задача 2. Дано графіки залежності швидкості від часу для двох тіл, які рухаються вздовж однієї прямої. Описати рух обох тіл. У який момент часу і де зустрінуться тіла, якщо в момент часу $t = 0$ тіло B перебувало позаду тіла A на відстані 20 м від нього?

Розв'язування: Обидва тіла рухаються рівноприскорено. Користуючись графіком знайдемо прискорення руху кожного з

$$\text{тіл.} \quad a_A = \frac{30 - 10}{5} = 4 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right), \quad a_B = \frac{30 - 0}{3} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$



Нехай тіло B у початковий момент часу

перебувало у початку координат, тоді початкова координата тіла A становила

$x_{0A} = 20 \text{ м}$. Початкова швидкість тіла A : $v_{0A} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а тіла B : $v_{0B} = 0$. Тіло B

перебувало у стані спокою у початку координат протягом $t_1 = 2 \text{ с}$. Запишемо

закон руху кожного з тіл. $x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \frac{a_A t^2}{2}$ або з числовими коефіцієнтами

$$x_A = 20 + 10t + \frac{4t^2}{2}, \quad x_A = 20 + 10t + 2t^2 \quad (1), \quad x_B = x_{0B} + v_{0B}(t - t_1) + \frac{a_B(t - t_1)^2}{2} \quad \text{або з}$$

числовими коефіцієнтами $x_B = \frac{10(t - 2)^2}{2}, \quad x_B = 5(t - 2)^2 \quad (2)$. В момент зустрічі тіл їхні координат стають рівними. $x_A = x_B$. Прирівнюємо (1) та (2). $20 + 10t + 2t^2 = 5(t - 2)^2$.

Розв'язуємо отримане рівняння:

$20 + 10t + 2t^2 = 5t^2 - 20t + 20, \quad 3t^2 - 30t = 0$. Звідки знаходимо час та координату зустрічі: $t = 10 \text{ с}, \quad x = 320 \text{ (м)}$.

Задача 3. До стелі зали висотою $H = 8 \text{ м}$ на легкій нерозтяжній нитці підвішена лінза. Лінза рівномірно обертається по колу в горизонтальній площині так, що її головна оптична вісь завжди напрямлена вздовж нитки. Нитка утворює кут $\alpha = 60^\circ$ з вертикаллю. При цьому на підлозі видно чітке зображення точки підвісу. Яка відстань d від предмета(точки підвісу) до лінзи? Визначити лінійну швидкість руху цього зображення, якщо фокусна відстань лінзи $F = 3 \text{ м}, \quad g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Розв'язування: лінза (її оптичний центр – точка O)

Дано:

$$H = 8 \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$F = 3 \text{ м}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$v - ?$$

рухається по колу

радіусом r з центром в

точці С з доцентровим

прискоренням.

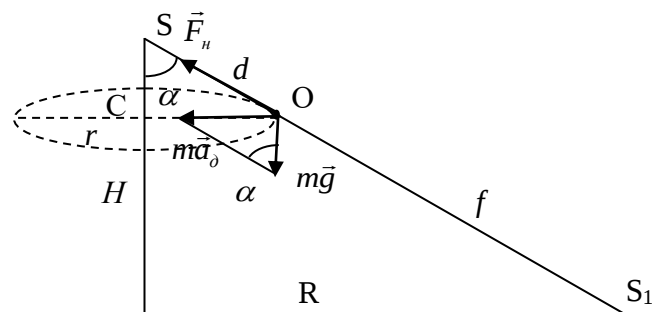
Запишемо закон руху

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}_\phi,$$

лінзи:

$a_\phi = \omega^2 \cdot r = g \cdot \tan \alpha$. Радіус $r = d \cdot \sin \alpha$, де d – відстань від предмета S до лінзи.

Кутова швидкість лінзи: $\omega = \pm \sqrt{\frac{g \cdot \tan \alpha}{r}} = \pm \sqrt{\frac{g}{d \cos \alpha}}$. Для визначення d розв'яжемо



систему рівнянь: $d + f = \frac{H}{\cos \alpha}$ і $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. $f = \frac{H}{\cos \alpha} - d$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d}$, $f = \frac{dF}{d - F}$.

$$\frac{H}{\cos \alpha} - d = \frac{dF}{d - F}, \quad \frac{H}{\cos \alpha}d - \frac{FH}{\cos \alpha} - d^2 = 0, \quad d^2 - \frac{H}{\cos \alpha}d + \frac{FH}{\cos \alpha} = 0.$$

Підставимо в останнє рівняння числові значення в СІ. $d^2 - 16d + 48 = 0$, $d = 8 \pm \sqrt{64 - 48} = 8 \pm 4$, $d_1 = 12(\text{м})$, $d_2 = 4(\text{м})$. Знаходимо модулі лінійної швидкості обертання

зображення точки підвісу на підлозі.

$$v_1 = \omega_1 R = \sqrt{\frac{g}{d_1 \cos \alpha}} \cdot H \tan \alpha,$$

$$v_2 = \omega_2 R = \sqrt{\frac{g}{d_2 \cos \alpha}} \cdot H \tan \alpha.$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{4 \cos 60^\circ}} \cdot 8 \cdot \tan 60^\circ = 31 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{12 \cos 60^\circ}} \cdot 8 \cdot \tan 60^\circ = 17,9 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right),$$

Задача 4. Дві однакові металеві сфери розміщені на великій відстані одна від одної. Сфера 1 заряджена до заряду Q , а сфера 2 не заряджена. До сфери 1 підносять і торкаються незарядженою металевою кулькою. Потім цю кульку підносять до сфери 2 і торкаються до неї. Після цього дотику

Дано:	
Q	на кульці залишився заряд $q_2 = \frac{Q}{9}$. Який заряд отримала сфера 2?
$q_2 = \frac{Q}{9}$	Розв'язування: Позначимо через q заряд, отриманий кулькою
$Q_2 - ?$	після контакту з першою сферою. На сфері залишиться заряд $Q - q$.

Потенціали першої сфери та кульки будуть однакові: $k \frac{Q - q}{R} = k \frac{q}{r}$. Звідки

$$\frac{Q - q}{q} = \frac{R}{r} \quad (1).$$

Після контакту кульки із другою сферою на сферу перейде заряд Q_2 , а на кульці залишиться - $q_2 = \frac{Q}{9}$. Потенціали другої сфери та кульки будуть

однакові: $k \frac{Q_2}{R} = k \frac{q_2}{r}$. Звідки $\frac{Q_2}{q_2} = \frac{R}{r}$ (2). Прирівнюючи ліві частини (1) та (2) та

враховуючи закон збереження заряду: $q = Q_2 + \frac{Q}{9}$, знаходимо заряд другої

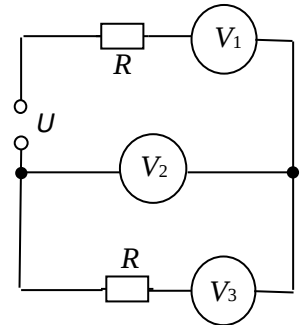
сфери. $\frac{Q - q}{q} = \frac{9Q_2}{Q}$. $\left(Q - Q_2 - \frac{Q}{9} \right) Q = 9Q_2 \left(Q_2 + \frac{Q}{9} \right)$. $\frac{8}{9} Q^2 - QQ_2 = 9Q_2^2 + QQ_2$. Отримуємо

квадратне

$$\text{рівняння: } 81Q_2^2 + 18QQ_2 - 8Q^2 = 0$$

$$Q_2 = \frac{-18Q + \sqrt{32Q^2 + 4 \cdot 81 \cdot 8 \cdot Q^2}}{2 \cdot 81} = \frac{-18 + 54}{2 \cdot 81} Q = \frac{2}{9} Q$$

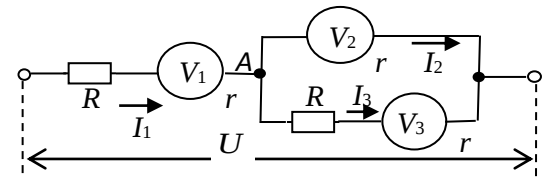
Задача 5. У схемі, яка зображена на рисунку, $U = 16$ В, резистори мають однакові опори, всі вольтметри також однакові. Покази першого вольтметра $U_1 = 6$ В. Знайти покази другого V_2 і третього V_3 вольтметрів.



Розв'язування: Зобразимо трохи інакше

Дано: електричну схему (див. рис.).
 $U = 16$ В
 $U_1 = 6$ В
 $U_2 = ?$,
 $U_3 = ?$

Нехай r – опір кожного із вольтметрів. Вольтметр завжди показує спад напруги на самому



собі. Напруги на паралельно з'єднаних

вітках однакові: $U_2 = U_3 + \frac{U_3}{r} R$ (1). Через вольтметр V_3 проходить струм силою $I_3 = \frac{U_3}{r}$. Спад напруги на всьому колі дорівнює сумі спадів на окремих,

послідовно з'єднаних ділянках: $U = U_1 + \frac{U_1}{r} R + U_2$ (2). Через вольтметр V_1

проходить струм силою $I_1 = \frac{U_1}{r}$. Із рівнянь (1) та (2) виключаємо $\left(1 + \frac{R}{r}\right)$. Із

(1) знаходимо: $1 + \frac{R}{r} = \frac{U_2}{U_3}$. Із (2) маємо: $1 + \frac{R}{r} = \frac{U - U_2}{U_1}$. Отримуємо рівняння

відносно напруг $\frac{U_2}{U_3} = \frac{U - U_2}{U_1}$ (3). Для вузла A маємо: $I_1 = I_2 + I_3$, або

$\frac{U_1}{r} = \frac{U_2}{r} + \frac{U_3}{r}$. Звідси $U_1 = U_2 + U_3$ (4).

Розв'язуємо рівняння (3) і (4) як систему: із (4) маємо: $U_3 = U_1 - U_2$.

$$\frac{U_2}{U_1 - U_2} = \frac{U - U_2}{U_1}, \quad U_2 U_1 = (U_1 - U_2)(U - U_2), \quad U_2 U_1 = U U_1 - U U_2 - U_1 U_2 + U_2^2.$$

Або: $U_2^2 - 2U_1 U_2 - U U_2 + U U_1 = 0$. Перейдемо в отриманому квадратному рівнянні

до числових коефіцієнтів: $U_2^2 - 28U_2 + 96 = 0$. $U_2 = 14 \pm \sqrt{196 - 96} = 14 \pm 10$.

Значення $U_2 = 24 \text{ В} > 16 \text{ В} = U$, тому його відкидаємо.

$$\text{Отже, } U_2 = 4 \text{ В, а } U_3 = 6 - 4 = 2 \text{ (В)}.$$

Важливе місце алгебраїчні методи займають у задачах на закони збереження імпульсу та механічної енергії, де фізичні процеси описуються узагальненими алгебраїчними співвідношеннями. У молекулярній фізиці та термодинаміці вони використовуються при аналізі газових законів, рівнянь стану та теплових процесів, а в електродинаміці — під час розрахунків електричних кіл із застосуванням закону Ома та законів Кірхгофа. Усі ці приклади підкреслюють тісний зв'язок фізики з курсом алгебри та демонструють прикладний характер математичних методів у фізичному пізнанні.

Методично важливим аспектом застосування алгебраїчних методів у фізиці є запобігання формалізму в навчанні. Формальне підставлення числових значень у формули без аналізу фізичної ситуації не забезпечує глибокого розуміння навчального матеріалу. Тому алгебраїчний підхід має поєднуватися з якісним аналізом задачі, побудовою фізичної моделі та оцінкою реалістичності отриманих результатів.

У контексті реалізації концепції **Нової української школи (НУШ)** особливого значення набуває компетентнісний підхід до навчання фізики, орієнтований не лише на засвоєння теоретичних знань, а й на формування здатності учнів застосовувати їх у практичних і життєвих ситуаціях. Алгебраїчні методи у фізиці виступають ефективним інструментом розвитку математичної, природничо-наукової та інженерної компетентностей, оскільки забезпечують уміння аналізувати умову задачі, будувати математичну модель фізичного процесу та інтерпретувати отримані результати з позицій реального фізичного змісту.

Компетентнісний підхід у межах НУШ передбачає використання задач різних рівнів складності, зокрема практико-орієнтованих і проблемних, у яких

алгебраїчні методи застосовуються усвідомлено й обґрунтовано. Робота з такими задачами сприяє розвитку критичного мислення, вміння аргументувати вибір математичного апарату, оцінювати достовірність результатів та встановлювати міжпредметні зв'язки між фізикою, математикою й інформатикою. Таким чином, алгебраїчні методи стають не лише засобом розв'язування фізичних задач, а й важливим інструментом формування ключових компетентностей учнів, визначених освітніми стандартами НУШ, та забезпечують цілісне сприйняття фізики як фундаментальної природничої науки.

Додатково слід зазначити, що алгебраїчні методи у фізиці тісно пов'язані з поняттям **математичної моделі фізичного явища**. Побудова такої моделі передбачає відбір суттєвих фізичних величин, встановлення між ними кількісних залежностей та подальший запис цих залежностей у вигляді формул або рівнянь. На шкільному рівні математичні моделі зазвичай мають спрощений характер, однак навіть у такому вигляді вони відіграють важливу роль у формуванні в учнів умінь абстрагуватися від другорядних факторів і зосереджуватися на головному фізичному змісті задачі.

Важливою складовою алгебраїчних методів є **вміння переходу між різними формами подання інформації**: словесним описом умови задачі, математичним записом фізичних законів та числовим результатом. Такий перехід сприяє розвитку структурованого мислення, умінь аналізувати умову задачі та перевіряти коректність отриманих результатів. Зокрема, перевірка розмірності фізичних величин і аналіз граничних випадків є ефективними засобами самоконтролю при використанні алгебраїчного апарату.

Алгебраїчні методи також створюють передумови для **диференціації навчання фізики**. Задачі одного фізичного змісту можуть бути подані на різних рівнях складності — від простих підстановок у формули до задач, що потребують складання систем рівнянь або розв'язування квадратних рівнянь. Це дає змогу враховувати індивідуальні особливості учнів, їхній рівень

математичної підготовки та пізнавальні можливості, що є важливим у сучасному освітньому процесі.

Крім того, застосування алгебраїчних методів у фізиці сприяє формуванню **алгоритмічної культури учнів**. Чітка послідовність дій — аналіз умови, вибір фізичного закону, запис рівнянь, алгебраїчні перетворення, аналіз результату — формує навички планування розв’язання задачі та підвищує усвідомленість навчальної діяльності. Разом із тим учні навчаються відрізняти стандартні задачі, що розв’язуються за відомим алгоритмом, від проблемних, які потребують творчого підходу.

Таким чином, алгебраїчні методи у фізиці виступають не лише інструментом обчислень, а й важливим дидактичним засобом розвитку пізнавальної активності учнів, формування в них умінь математичного моделювання, аналізу та узагальнення. Їх цілеспрямоване використання в навчальному процесі забезпечує підвищення якості фізичної освіти та створює міцне підґрунтя для подальшого вивчення природничих і технічних дисциплін.

2.2. Графічні методи

Графічні методи знаходять широке застосування у вирішенні різноманітних науково-технічних та економічних завдань. Здатність будувати та інтерпретувати графіки є наразі життєво необхідною компетенцією для фахівців багатьох професійних галузей. Відомо, що деякі задачі з курсу фізики, що вивчається у середній школі, не можуть бути розв’язані за допомогою лише елементарної математики. Серед таких завдань можна виділити, зокрема, виведення формул для визначення переміщення тіла за прямолінійного рівноприскореного руху або для обчислення роботи сили пружності. Їхнє розв’язання потребує залучення методів вищої математики. Однак існує можливість оминати використання більш складного математичного апарату та скористатися натомість графічним підходом. За допомогою цього методу можна отримати формули для визначення

переміщення під час рівноприскореного руху або для обчислення роботи сили пружності. Крім того, графічний спосіб дозволяє виводити й інші фізичні формули, серед яких:

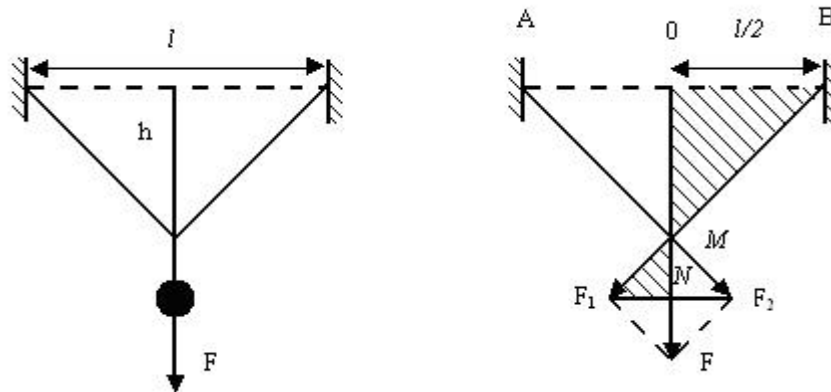
а) формула для визначення роботи виштовхувальної сили рідини, що впливає на тіло простої геометричної форми;

б) формула для обчислення енергії зарядженого конденсатора;

в) формула енергії магнітного поля провідника зі струмом. Суть графічного методу у вирішенні задач зводиться до знаходження числових значень шуканих фізичних величин через аналіз графіків та векторних діаграм.

Розглянемо приклади фізичних задач, які задаються графічно.

1. Посередині троса завдовжки $l = 10$ м підвісили ліхтар масою $m = 10$ кг. Визначити силу натягу троса, якщо стріла прогину $h = 0,5$ м



Силу натягу F розкладемо на дві складові F_1 і F_2 , направлені уздовж частин троса. Неважко довести, що $F_1 = F_2$, $MN = \frac{F}{2}$ і $\triangle OMB \sim \triangle MNF_1$. З подібності трикутників виходить:

$$\frac{BM}{OM} = \frac{F_1 M}{MN}.$$

Оскільки стріла прогину невелика, приймемо, що $MB = \frac{l}{2}$, тоді

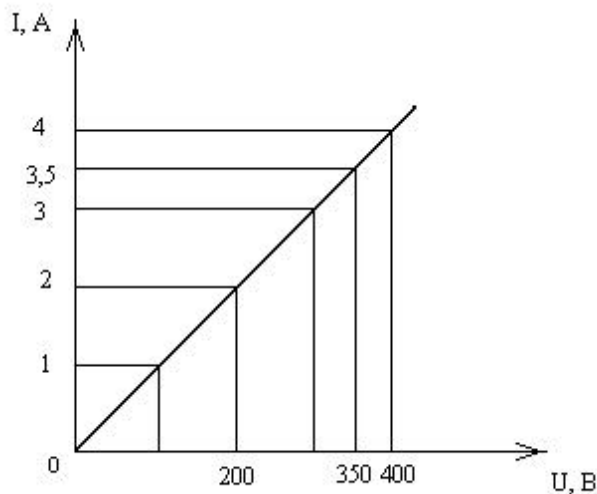
$$\frac{l}{2h} = \frac{2F_1}{F}$$

Звідси

$$F_1 = \frac{Fl}{4h} = \frac{mgl}{4h} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 10}{4 \cdot 0,5} = 490 (H)$$

Шукана сила натягу троса рівна по величині і протилежно по напрямку силі F_1 .

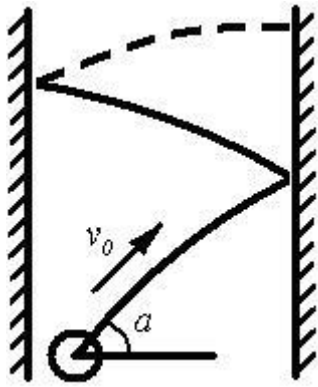
2. На малюнку представлений графік закону Ома для ділянки кола. Визначите по графіку опір провідника, а також напругу, необхідну для створення в провіднику струму 3,5 А .



Для вирішення першої частини завдання беруть яке-небудь значення U і по графіку знаходять відповідне йому значення I . Опір провідника обчислюють за формулою $R = \frac{U}{I}$. У даному випадку $R = 100$ Ом. На друге питання завдання можна відповісти узявши по графіку значення $I = 3,5$ А і знайшовши відповідне цьому струму напругу 350 В. Відповідь корисно перевірити розрахунком:

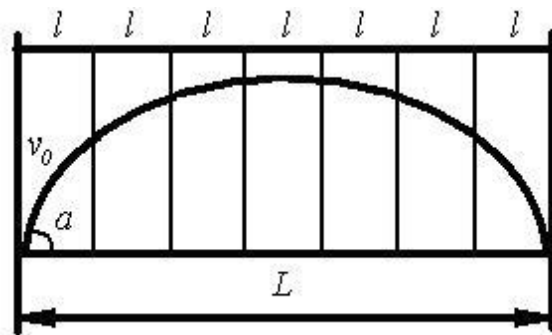
$$U = IR = 3,5 \text{ А} \cdot 100 \text{ Ом} = 350 \text{ В}.$$

3. Невеликий м'яч кинули між двома гладкими паралельними стінками із швидкістю $v_0 = 8$ м/с під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту. Горизонтальна складова швидкості м'яча перпендикулярна стінкам. Скільки разів м'яч удариться об стінки до того, як повернеться на колишню висоту h ? Відстань між стінками $l = 1$ м, удари абсолютно пружні .

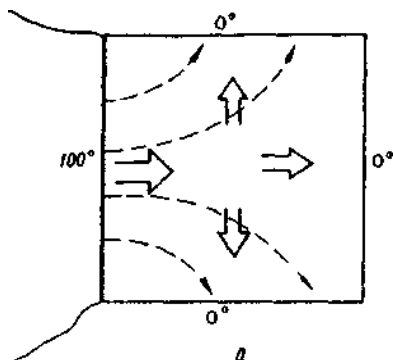


Розв'язок. Траєкторія м'яча після удару - це дзеркальне відображення траєкторії за відсутності удару. Тому цю задачу найкраще розв'язувати методом розгортки. "Розвернемо" траєкторію. Дальність польоту:

$$L = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g} \approx 6 \text{ м.}$$



4. До дуже тонкої металевої пластини підводять з трьох сторін лід при 0°C , а з четвертого боку - стоградусну пару. Визначити температуру, що встановиться в центрі пластини.



Розв'язок. Завдання має досить простий строгий розв'язок, і лише з відомими грубими наближеннями її можна вирішити аналітично.

Нехай Φ – тепловий потік, що йде від пари до центру. Він ділиться приблизно на 3 рівних частини, і процес передачі тепла здійснюється від центру до холодних сторін. Процес передачі тепла, що встановиться виглядає приблизно так:

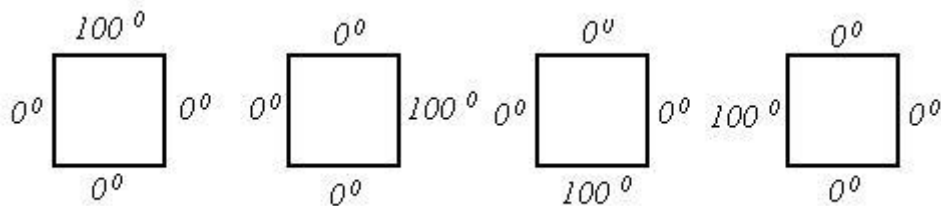
$$x\Phi(100 - t_x) = 3x\Phi(t_x - 0)$$

$$100 - t_x = 3t_x$$

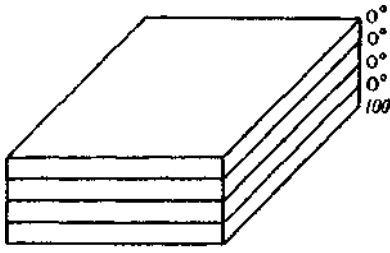
$$t_x = 25^{\circ}$$

де x – коефіцієнт теплопровідності

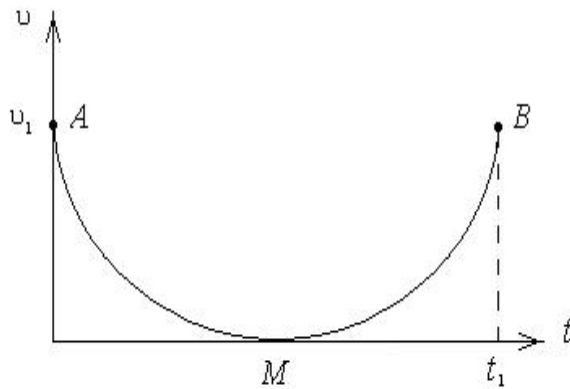
Відомий математик Трігг запропонував простіший і абсолютно строгий розв’язок цієї задачі методом, який визначається як «динамічні малюнки». Перевага цього методу полягає в тому, що він не допускає грубі моделі на зразок теплопередачі тільки через центральну зону (адже передача тепла насправді від грані до грані відбувається і найкоротшими шляхами, які показані на малюнку пунктирними стрілками).



Уявіть, що у нас є чотири таких пластини, але гаряча сторона у кожної зміщена (повернена на 90° щодо попередньої). Складемо дуже тонкі пластинки разом. З кожного боку буде одна нагріта до 100° і три сторони, підтримувані при 0° . (Відмінність лише в тому, на якій висоті буде «гарячий шар», але оскільки пластинки тонкі, то це не має значення.) Застосовуючи метод динамічних малюнків, ми прийшли до однорідної структури - рівноважної системи, що тільки і має сенс при вимірюванні температур. Звідси зрозуміло, що 100°C доводиться на чотири пластинки, тобто в рівноважній системі усюди однакова температура 25°C .



3. Залежність модуля швидкості v першого тіла від часу зображено дугою півкола AMB . Упродовж часу t_1 це тіло пройшло такий шлях, як інше тіло, яке рухалось із постійною швидкістю $v_2 = 5 \text{ м/с}$. Знайдіть початкову швидкість першого тіла v_1 .



Розв'язок. Відстань, яку пройде перше тіло, буде площею під кривою AMB , тобто різницею площ прямокутника зі сторонами v_1 і t_1 та півкола AMB

$$S = v_1 t_1 - \frac{1}{2} \pi v_1 \frac{t_1}{2} = v_1 t_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Друге тіло, рухаючись рівномірно, пройде шлях:

$$S = v_2 t_1.$$

$$\text{Отже, } v_2 t_1 = v_1 t_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \text{ Звідси, } v_1 = \frac{v_2}{\left(1 - \frac{\pi}{4} \right)} \approx 23,26 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Задача 1. Тіло рухається зі сталим прискоренням протягом 4 с. За першу секунду спостереження за рухом воно проходить 2 м, за другу – 1 м. Яку відстань проходить тіло за третю та за четверту секунди?

Розв'язування: З умови задачі зрозуміло, що тіло рухається

Дано: рівносповільнено. Закон руху тіла:

$$S_1 = 2 \text{ м}$$

$$S_2 = 1 \text{ м}$$

$$t_1 = 1 \text{ с}$$

$$t_2 = 2 \text{ с}$$

$$a = \text{const}$$

$$S_3 = ?, S_4$$

$$-?$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2} \quad \text{Шлях, пройдений}$$

тілом за першу секунду:

$$S_1 = x_1 - x_0 = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} \quad (1). \quad \text{Шлях,}$$

пройдений тілом за другу секунду:

$$S_2 = x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1) - \frac{a(t_2^2 - t_1^2)}{2} \quad (2).$$

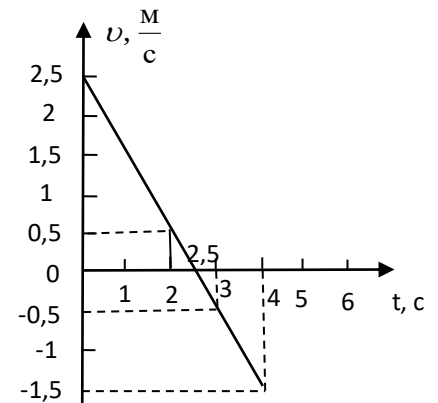


Рисунок 17

Для спрощення розв'язування підставимо у рівняння (1) та (2) числові

значення величин в СІ та знайдемо v_0 та a . $v_0 - \frac{a}{2} = 2$; $v_0 - \frac{3a}{2} = 1$. Звідси

знаходимо: $a = 1 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)$, $v_0 = \frac{a}{2} + 2$. $v_0 = 2,5 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$. Запишемо залежність

швидкості від часу: $v = v_0 - at = 2,5 - t$. Зобразимо залежність швидкості від часу графічно. З графіка видно, що у момент часу 2,5 с тіло на мить зупиняється, його швидкість рівна нулю і тіло змінює напрям швидкості на протилежний. З графіка знаходимо шлях за третю секунду, як суму площ двох трикутників:

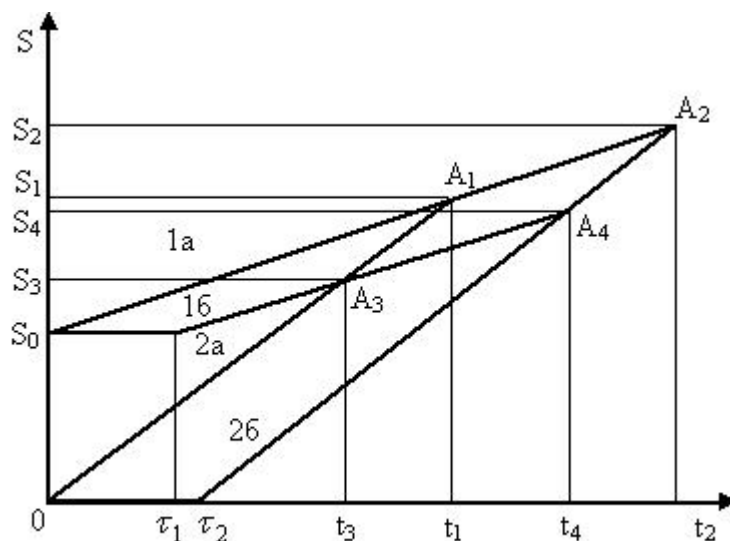
$$S_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ (м)}$$

Шлях, пройдений тілом за четверту секунду, знаходимо як площу трапеції

$$S_4 = \frac{0,5 + 1,5}{2} \cdot 1 = 1 \text{ (м)}$$

Задача. З пункту А спочатку виїхав велосипедист, а через деякий час слідом за ним – автомобіліст. Кожен рухається зі сталою швидкістю, тому обидва знали місце й час зустрічі. В дорозі автомобіліст зробив непередбачену технічну зупинку, після чого визначив, що зустріч відбудеться на 0,75 год. пізніше. Непередбачену зупинку зробив і велосипедист та, не знаючи про зупинку автомобіліста, визначив, що його доженуть на 45 км ближче. Справжня зустріч показала, що в своїх розрахунках автомобіліст помилився на 0,5 год, а велосипедист – на 30 км. Якими були швидкості автомобіліста та велосипедиста?

Розв’язок. Розв’язок цієї задачі суттєво спрощується, якщо побудувати та проаналізувати графіки руху обох людей. За початок відліку часу приймаємо момент, коли автомобіліст виїжджає з пункту А. На той час велосипедист подолав деякий шлях S_0 . Згідно умови задачі зустріч відбулася після зупинок і не залежить від того, коли саме вони відбувались, тому умовно зображаємо їх на початку відліку. Пряма 1а є графіком запланованого руху велосипедиста, а пряма 1б – з зупинкою тривалості τ_1 . Аналогічно пряма 2а є графіком запланованого руху автомобіліста, а 2б – з зупинкою тривалості τ_2 . Точці A_1 відповідає запланована зустріч, точці A_2 – зустріч, визначена автомобілістом, точці A_3 – зустріч, визначена велосипедистом, точці A_4 – справжня зустріч.



За умовою задачі

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = 0,75 \text{ год},$$

$$\Delta S_{31} = S_1 - S_3 = 45 \text{ км},$$

$$\Delta t_{42} = t_2 - t_4 = 0,5 \text{ год},$$

$$\Delta S_{43} = S_4 - S_3 = 30 \text{ км}.$$

Оскільки $A_1A_2A_4A_3$ є паралелограмом, то швидкість велосипедиста

$$V_1 = \frac{\Delta S_{21}}{\Delta t_{12}} = \frac{\Delta S_{43}}{\Delta t_{12}} = \frac{30 \text{ км}}{0,75 \text{ год}} = 40 \text{ км/год},$$

а швидкість автомобіліста

$$V_2 = \frac{\Delta S_{42}}{\Delta t_{42}} = \frac{\Delta S_{31}}{\Delta t_{42}} = \frac{45 \text{ км}}{0,5 \text{ год}} = 90 \text{ км/год}.$$

Розв'яжемо цю задачу аналітично. Введемо позначення:

Δt_1 – час стоянки велосипедиста; Δt_2 – час стоянки автомобіля. Тоді скорочення відстані між автомобілем та велосипедом за рахунок стоянок:

$$v_2 \Delta t_1 - v_1 \Delta t_2,$$

де v_1 – швидкість велосипеда; v_2 – швидкість автомобіля. Це зумовлює зменшення часу руху велосипедиста на:

$$\frac{v_2 \Delta t_1 - v_1 \Delta t_2}{v_2 - v_1}.$$

Пройдений велосипедистом шлях зменшиться на:

$$\Delta l = \frac{v_2 \Delta t_1 - v_1 \Delta t_2}{v_2 - v_1} \cdot v_1. \quad (1)$$

За умовою задачі $\Delta l = 45 \text{ км} - 30 \text{ км} = 15 \text{ км}$.

Час руху велосипедиста зростає на час стоянки Δt_1 і зменшиться на $\frac{v_2 \Delta t_1 - v_1 \Delta t_2}{v_2 - v_1}$, отже,

$$\Delta t_1 - \frac{v_2 \Delta t_1 - v_1 \Delta t_2}{v_2 - v_1} = \Delta T_1 \quad (2)$$

За умовою $\Delta T_1 = 45 \text{ хв} - 30 \text{ хв} = 15 \text{ хв} = 0,25 \text{ год}$. Автомобіліст вважає, що збільшення відстані між ними становить $v_1 \cdot \Delta t_2$, а тому час запізнення зустрічі

$$\Delta T_1 = \frac{v_1 \Delta t_2}{v_2 - v_1} \quad (3)$$

Велосипедист вважає, що зменшення відстані становить $v_2 \cdot \Delta t_1$, а тому зустріч

відбудеться раніше на час $\frac{v_2 \Delta t_1}{v_2 - v_1}$. Або ближче на ΔS

$$\Delta S = \frac{v_2 \Delta t_1}{v_2 - v_1} \cdot v_1 \quad (4)$$

Ми записали чотири рівняння і маємо чотири невідомих: Δt_1 ; Δt_2 ; v_1 ; v_2 .

Виключаючи із цих рівнянь час стоянок, знайдемо швидкості руху велосипедиста та автомобіля.

В результаті розв'язання системи рівнянь отримуємо

$$v_2 = \frac{\Delta S}{\Delta T - \Delta T_1} \quad v_2 = \frac{45 \text{ км}}{0,5 \text{ год}} = 90 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$

$$v_1 = \frac{\Delta S - \Delta l}{\Delta T} \quad v_1 = \frac{(45 - 15) \text{ км}}{0,75 \text{ год}} = 40 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$

Для перевірки можемо визначити час стоянки велосипедиста і автомобіля.

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta T(v_2 - v_1)}{v_1} ; \quad \Delta t_2 = \frac{0,75 \cdot 50}{40} = \frac{15}{16} \text{ год} = 0,9375 \text{ год} ;$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S(v_2 - v_1)}{v_1 v_2} ; \quad \Delta t_1 = \frac{45 \cdot 50}{40 \cdot 90} = \frac{5}{8} \text{ год} = 0,625 \text{ год} .$$

Як бачимо аналітичний розв'язок є набагато довший і потребує відповідної математичної підготовки.

2.3 Векторний метод

У шкільному курсі фізики здебільшого застосовують координатний метод. Йому за традицією приділяється більше часу, тим більше, що цей метод досить ефективний і непогано сприймається учнями.

Векторний метод найчастіше є супутним, але в деяких випадках його застосування більш прийнятне, оскільки розв'язування задачі у цьому разі є простішим. Розглянемо векторний метод на прикладах розв'язування конкретних задач.

Для рівнозмінного руху ми користуємося такими виразами:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (1) \text{ (для визначення швидкості тіла в будь-який момент часу);}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (2) \text{ (для радіус-вектора).}$$

У виразах (1) і (2) у початковий момент часу $t=0$ $\vec{v} = \vec{v}_0$ і $\vec{r} = \vec{r}_0$.

Вектори переміщення тіла подано в такому вигляді:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (3)$$

$$\Delta \vec{r} = \frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2} t \quad (4)$$

Правило додавання векторів дає змогу подати співвідношення (1), (3) і (4) у вигляді, зображеному на мал. 1,2,3. На мал.1 зображено трикутник швидкостей, а на мал. 2 і 3 — трикутники переміщень. Застосуємо векторний метод для визначення дальності польоту і висоти тіла, кинутого під кутом α до горизонту. Для цього використаємо трикутник переміщень (мал.4).

Спроекуємо трикутник переміщення на координатні осі:

$$\text{Oy: } v_0 t \sin \alpha = \frac{gt^2}{2} \quad (5) \quad \text{Ox: } \Delta r = v_0 t \cos \alpha \quad (6)$$

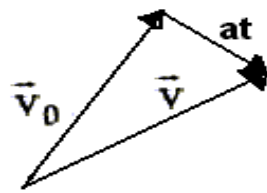
Із формули (5) визначимо час польоту t

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (7)$$

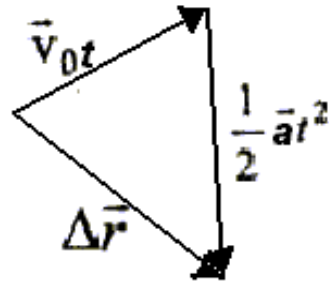
Після цього знайдемо дальність польоту l і максимальну висоту піднімання тіла $h_{\text{макс}}$:

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (8) \quad h_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (9)$$

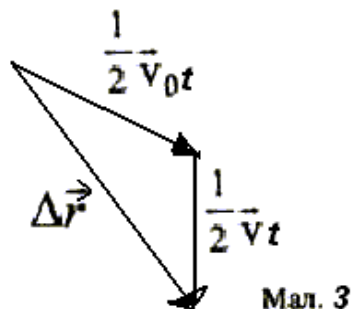
Не варто думати, що цей метод кращий чи гірший від загальноприйнятого. Це просто один із методів, який іноді є



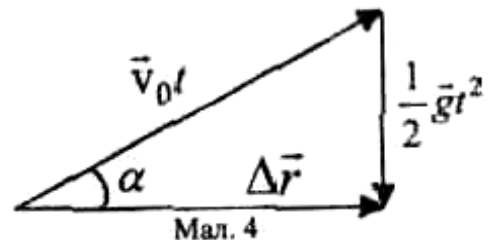
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

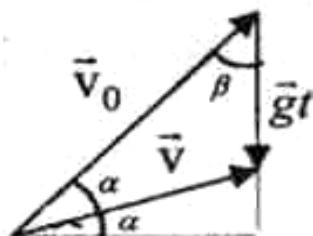


Мал. 4

Метод векторних діаграм заснований на розумінні аналогії коливального руху і рівномірного руху точки по колу, координата якої x визначається з рівняння, ідентичного рівнянню коливального руху: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Для руху по колу A - радіус точки, ω - кутова швидкість, φ - початковий кут, а для коливального руху відповідно амплітуди, циклічна частота, фаза. Миттєве положення точки на колі можна задати її радіусом-вектором, а сам рух точки описати рухом радіуса-вектора з кутовою швидкістю ω проти годинникової стрілки (вибраний напрям руху).

Методика використання векторів при розв'язуванні задач з механік

Задача 1. Камінь кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Через 1 с швидкість каменя стала 8 м/с . Нехтуючи опором повітря, визначити кут α .



Мал. 5

Розв'язування. Побудуємо трикутник швидкостей (мал. 5).

Використаємо теорему косинусів:

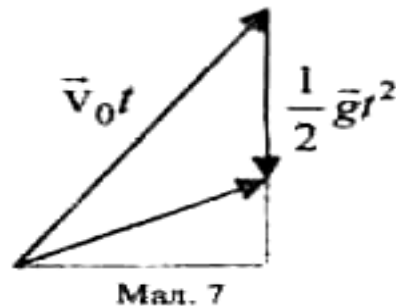
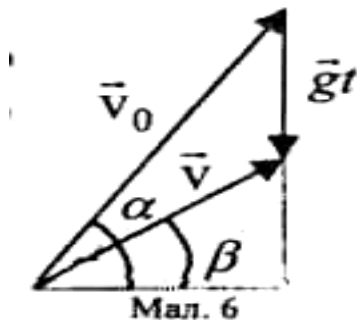
$$v^2 = v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt \cos \beta \quad (10)$$

Враховуючи, що $\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, визначимо кут α :

$$\sin \alpha = \frac{v_0^2 + (gt)^2 - v^2}{2v_0 gt} \quad (11)$$

Підставимо числові значення і знайдемо, що $\alpha = 42^\circ$.

Задача 2. На якій висоті вектор швидкості тіла, кинутого під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с, утворюватиме з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$? Опором повітря знехтувати



Розв'язування. Розглянемо трикутник швидкостей (мал. 6) і трикутник переміщень (мал. 7). З трикутника швидкостей маємо;

$$v_0 \cos \alpha = v \cos \beta \quad (12)$$

Звідси:

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta} \approx 16,33 \text{ м/с}$$

Використаємо трикутник швидкостей для визначення часу піднімання тіла до заданої висоти:

$$(gt)^2 = v_0^2 + v^2 - 2v_0 v \cos(\alpha - \beta) \quad (13)$$

звідси:

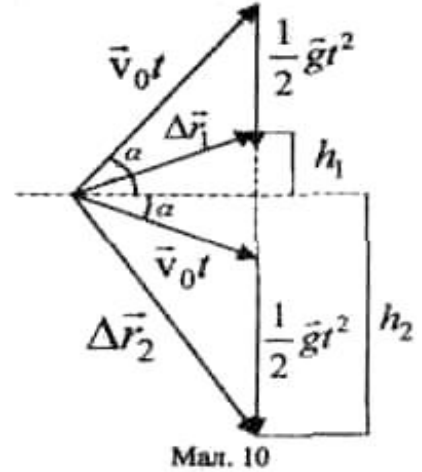
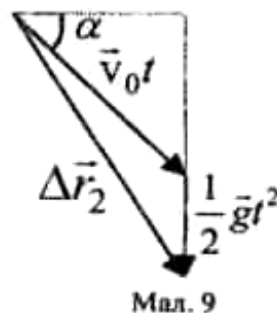
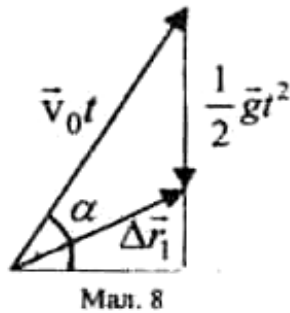
$$t = \sqrt{\frac{v_0^2 + v^2 - 2v_0 v \cos(\alpha - \beta)}{g^2}} \approx 0,61 \text{ с.}$$

З трикутника переміщень (мал. 7) маємо:

$$v_0 t \sin \alpha = h + \frac{gt^2}{2} \quad (14)$$

$$\text{Звідси: } h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \approx 6,8 \text{ м.}$$

Задача 3. З точки, розміщеної на висоті h , кинути два тіла під однаковим кутом α до горизонту: одне — вгору, друге — вниз. Початкові швидкості обох тіл дорівнюють v_0 . Визначити різницю висот цих тіл через час t . Опором повітря знехтувати.



Розв'язування. Виконаємо малюнки для першого тіла (мал.8), другого тіла (мал.9) і для обох тіл разом (мал. 10). Аналогічно до попередньої задачі з трикутників переміщень (мал. 10) знайдемо:

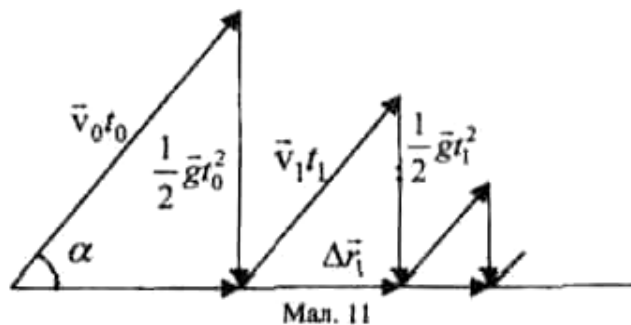
$$h_1 + \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha$$

$$h_2 = v_0 t \sin \alpha + \frac{gt^2}{2}$$

Звідси:

$$\Delta h = h_1 + h_2 = 2v_0 t \sin \alpha$$

Задача 4. М'яч кинути із землі під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Після удару об горизонтальну поверхню м'яч підстрибує так, що відношення його швидкості до удару до швидкості після удару є сталою величиною, яка дорівнює k . Визнати час і дальність польоту м'яча. Опором повітря знехтувати.



Розв'язування. Побудуємо трикутники переміщень м'яча (мал.11). Запишемо вирази для вертикальних проекцій:

$$v_0 t_0 \sin \alpha = \frac{gt_0^2}{2}; \quad v_1 t_1 \sin \alpha = \frac{gt_1^2}{2}; \quad v_2 t_2 \sin \alpha = \frac{gt_2^2}{2}$$

Визначимо час польоту м'яча для кожного випадку:

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}; \quad t_1 = \frac{2v_1 \sin \alpha}{g}; \quad t_2 = \frac{2v_2 \sin \alpha}{g}$$

Увесь час польоту:

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots = t_0 \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots\right) = t_0 \frac{k}{k-1} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cdot \frac{k}{k-1}$$

Для визначення суми $1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots$ ми скористалися формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії.

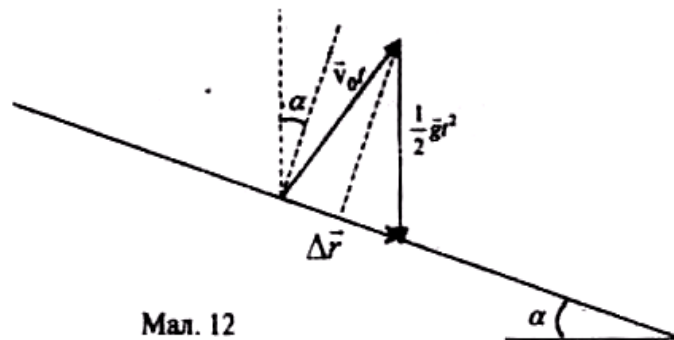
Тепер знайдемо дальність польоту м'яча:

$$\Delta s = \Delta r = \Delta r_0 + \Delta r_1 + \Delta r_2 + \dots = v_0 t_0 \cos \alpha + v_1 t_1 \cos \alpha + v_2 t_2 \cos \alpha + \dots \quad (20)$$

Спростимо цей вираз, скориставшись формулою (19):

$$\Delta r = v_0 t_0 \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \dots\right) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{k^2}{k^2 - 1} \quad (21)$$

Задача 5. З висоти h на похилу площину з кутом нахилу α вільно падає куля без початкової швидкості. Визначити відстань, яку пролетить куля вздовж похилої площини до наступного падіння на похилу площину. Удар кулі об площину вважати пружним.



Мал. 12

Розв'язування. Оскільки удар кулі об похилу площину пружний, трикутник переміщення буде рівнобедреним (мал. 12). Зрозуміло, що після першого відбивання кулі її швидкість дорівнюватиме:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (22)$$

З трикутника переміщень маємо:

$$v_0 t = \frac{gt^2}{2}$$

Звідси:

$$t = \frac{2v_0}{g} \quad (23)$$

Тоді:

$$\Delta r = 2v_0 t \sin \alpha = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g} \quad (24)$$

Підставимо значення v_0 із формули (22):

$$\Delta r = \frac{4 \cdot 2gh \sin \alpha}{g} = 8h \sin \alpha \quad (25)$$

Задача 6 Дві кульки загальною масою M одночасно вилітають горизонтально у протилежних напрямках з двохстороннього пружинного пістолета. Кулька меншої маси $m_1 = \frac{M}{5}$ отримала початкову швидкість $v_{01} = 12 \frac{M}{c}$. Яка початкова швидкість кульки більшої маси? Визначити відстань між кульками у той момент, коли вектори їх швидкостей будуть перпендикулярними. Опором повітря знехтувати. $g = 10 \frac{M}{c^2}$.

Розв'язування. Знайдемо початкову швидкість кульки більшої маси

Дано:

$$m_1 = \frac{M}{5}$$

$$v_{01} = 12 \frac{M}{c}$$

$$g = 10 \frac{M}{c^2}$$

$l = ?$

$$m_1 v_{01} = m_2 v_{02}, \quad v_{02} = \frac{m_1 v_{01}}{m_2} = \frac{M \cdot 5}{5 \cdot 4M} v_{01} = \frac{v_{01}}{4} = 3 \left(\frac{M}{c} \right).$$

Запишемо залежність швидкості від часу для кожної кульки у векторній формі. $\vec{v}_1 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t$ та $\vec{v}_2 = \vec{v}_{02} + \vec{g}t$. Зобразимо на рисунку момент, коли вектори швидкостей кульок будуть перпендикулярними.

Відстань між кульками
 $l = l_1 + l_2 = v_{01}t + v_{02}t = (v_{01} + v_{02})t$

. Потрібно знайти час t . Із рисунка

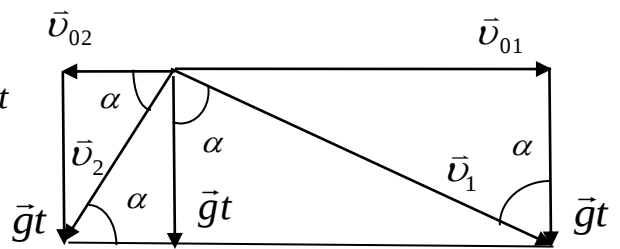
$$\text{видно: } \tan \alpha = \frac{v_{01}}{gt} = \frac{gt}{v_{02}}. \quad (gt)^2 = v_{01} \cdot v_{02},$$

$$t = \frac{\sqrt{v_{01} \cdot v_{02}}}{g}. \quad \text{Тоді шукана відстань: } l = (v_{01} + v_{02}) \frac{\sqrt{v_{01} \cdot v_{02}}}{g}.$$

$$\text{Виконаємо обчислення в СІ: } l = (12 + 3) \frac{\sqrt{12 \cdot 3}}{10} = 9 \text{ (м)}$$

2.4. Застосування диференціальних рівнянь в шкільному курсі фізики

Диференціальні рівняння є одним із фундаментальних інструментів теоретичної фізики, оскільки більшість фізичних законів описують не самі величини, а **швидкість їх зміни** у просторі або часі. У повному математичному формулюванні ці закони належать до апарату вищої математики, однак у шкільному курсі фізики вони використовуються в **адаптованій, неявній формі**, доступній для розуміння учнів без спеціальної підготовки з математичного аналізу.



Хоча учні закладів загальної середньої освіти не розв'язують диференціальні рівняння формально, значна кількість фізичних тем фактично ґрунтується на **диференціальних залежностях між фізичними величинами**. Учні працюють з уже готовими розв'язками таких рівнянь, вивчають їхній фізичний зміст і застосовують результати до розв'язування задач.

Диференціальні рівняння в кінематиці та динаміці

Одним із найпростіших прикладів є зв'язок між швидкістю та прискоренням руху тіла. У загальному вигляді прискорення визначається як похідна швидкості за часом, а швидкість — як похідна координати. Таким чином, рівняння руху тіла є диференціальним рівнянням, яке в шкільному курсі подається у вигляді готових формул для рівномірного та рівноприскореного руху.

Наприклад, рівняння рівноприскореного руху виникає як розв'язок диференціального рівняння, що описує сталість прискорення. У навчальному процесі цей факт не формалізується, проте учні оперують результатами інтегрування у вигляді аналітичних формул і графіків залежностей. Таким чином, диференціальні рівняння в кінематиці присутні **на концептуальному рівні**, формуючи уявлення про змінність фізичних величин.

Коливальні процеси як приклад диференціальних рівнянь

Важливу роль диференціальні рівняння відіграють під час вивчення механічних та електромагнітних коливань. Гармонічні коливання математично описуються диференціальним рівнянням другого порядку, розв'язком якого є синусоїдальна функція. У шкільному курсі фізики учні не виводять це рівняння, однак вивчають його наслідки: період, частоту, амплітуду коливань, фазу.

Розгляд коливальних процесів на основі готових функціональних залежностей дозволяє сформулювати у школярів уявлення про **диференціальний характер фізичних законів**, навіть без прямого використання математичного апарату диференціальних рівнянь.

Теплові та електричні процеси

У шкільному курсі фізики диференціальні рівняння опосередковано використовуються також при вивченні теплових і електричних явищ. Так, закон охолодження тіл, процеси заряджання та розряджання конденсатора, встановлення електричного струму в колі з індуктивністю мають диференціальний характер. У навчальних матеріалах ці процеси подаються у вигляді якісних описів, графіків або спрощених аналітичних залежностей.

Робота з такими прикладами сприяє усвідомленню учнями того, що фізичні процеси відбуваються **безперервно**, а зміна однієї величини зумовлює зміну іншої, що є сутністю диференціального підходу.

Дидактичне значення диференціального підходу в навчанні фізики

Використання диференціальних ідей у шкільному курсі фізики має важливе дидактичне значення. Воно:

- формує в учнів уявлення про змінність і динаміку фізичних величин;
- забезпечує міжпредметні зв'язки фізики з математикою;
- готує учнів до вивчення вищої математики та теоретичної фізики;
- сприяє розвитку абстрактного та аналітичного мислення.

Таким чином, хоча диференціальні рівняння безпосередньо не входять до шкільної програми з фізики, їх **ідеї та наслідки** широко використовуються при вивченні основних фізичних законів. Це дозволяє розглядати диференціальний підхід як важливу методичну основу шкільного курсу фізики, що забезпечує науковість навчання та наступність між шкільною і вищою освітою.

Приклади задач:

Задача 1

Точка здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 1,57$ с і амплітудою $A = 12$ см.

Записати

рівняння руху точки $x(t)$, якщо в початковий момент часу вона має координату $x_0 = 6$ см і віддаляється від положення рівноваги.

Дано:	Розв'язування
$T = 1,57 \text{ с}$	Оскільки в початковий момент часу ні координата, ні швидкість точки не дорівнюють нулю, то немає значення, яку функцію вибрати для опису коливань. Отож будемо шукати рівняння $x(t)$ у вигляді
$A = 12 \text{ см}$	
$x_0 = 6 \text{ см}$	
$x(t) - ?$	

$$x(t) = A \cos(2\pi/T \cdot t + \varphi_0). \quad (1)$$

Значення A і T задані, отже, задача зводиться до визначення початкової фази φ_0 . Підставивши в рівняння (1) значення $t = 0$, x_0 і A , одержимо

$$6 = 12 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 1/2 \Rightarrow \varphi_0 = \pm \pi/3.$$

Для вибору знаку φ_0 врахуємо, що за умовою у початковий момент напрям швидкості точки збігається з напрямом осі OX , тобто $v_{0x} > 0$. Проекція швидкості $v_{0x} = x'(t)$, тому відповідно до рівняння (1) отримаємо

$$v_x = x'(t) = -A \cdot 2\pi/T \cdot \sin(2\pi/T \cdot t + \varphi_0).$$

При $t = 0$

$$v_{0x} = -A \cdot 2\pi/T \cdot \sin \varphi_0.$$

Оскільки $v_{0x} > 0$, то

$$\sin \varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 < 0.$$

Отже, початкова фаза $\varphi_0 = -\pi/3$.

Підставивши в рівняння (1) всі числові значення, отримаємо відповідь:

$$x(t) = 12 \cos(4t - \pi/3), \text{ см.}$$

2.5. Математичне моделювання у розв'язуванні фізичних задач

Математичним називають моделювання, при якому модель і оригінал мають різну фізичну природу, а явище або процеси, які характеризують їх, описуються рівняннями однакової форми, і між змінними цих рівнянь існують однозначні співвідношення.

В основу математичного моделювання покладено аналогію фізичних явищ, яка розглядається як найбільш загальний випадок подібності, властивий і для явищ різної природи.

У випадку математичного моделювання (на основі аналогій) потрібно

відмежуватися від якісних характеристик моделі та, досліджуваного в задачі, об'єкта і перейти від іменованих чисел до абстрактних. Після отримання результату знову перейти до іменованих чисел.

При цьому в учнів формується абстрактне мислення, вони ознайомлюються з логікою наукового пізнання, більш глибоко вникають у суть методу моделювання.

Використання елементів математичного моделювання значною мірою полегшує в багатьох випадках розв'язування задач фізичного змісту.

Математичне моделювання у розв'язуванні задач з механіки

Розглянемо окремі задачі, у процесі розв'язування яких, тією або іншою мірою використані ідеї математичного моделювання.

Задача 1. З пункту А на березі каналу з нерухомою водою треба потрапити в пункт В на іншому березі. Людина пливе в човні з швидкістю v_1 , а далі йде пішки з швидкістю v_2 . Якою має бути траєкторія руху, щоб час руху був мінімальним?

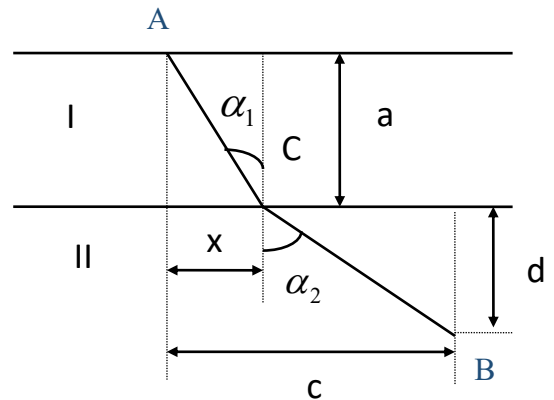
Розв'язування:

1 спосіб. Знайдемо загальний час руху і дослідимо його на екстремум.

$$t_{AC} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}; t_{CB} = \frac{\sqrt{d^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

$$t = t_{AB} + t_{CB}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$



Умова екстремуму $\frac{dt}{dx} = 0$; $\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2(c-x)}{2v_2\sqrt{d^2 + (c-x)^2}};$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(c-x)}{v_2\sqrt{d^2 + (c-x)^2}} = 0$$

. Як видно з малюнка $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \alpha_1$;

$$\frac{c-x}{\sqrt{d^2+(c-x)^2}} = \sin \alpha_2. \quad \text{Отже,} \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \quad \text{або} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

2 спосіб. Використаємо оптичну модель. Нехай промінь світла в середовищі I поширюється з швидкістю v_1 , а в середовищі II - з швидкістю v_2 . Промінь поширюється по шляху АСВ, заломлюючись в точці С. За принципом Ферма промінь поширюється вздовж такого шляху, на проходження якого необхідний найменший час. За законом заломлення $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{21}$ - відносний показник заломлення другого середовища відносно

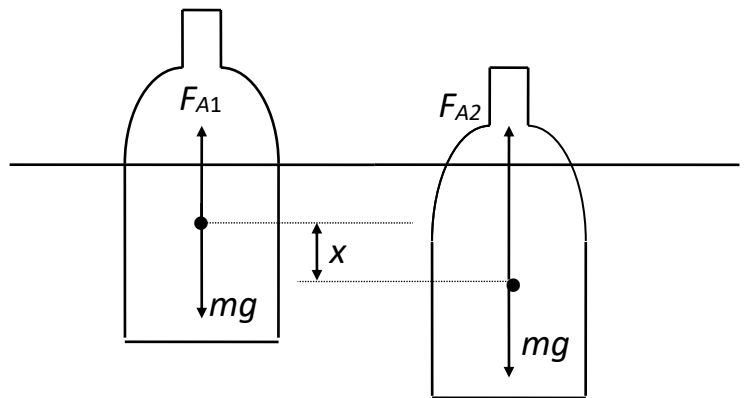
$$\text{першого} \quad n_{21} = \frac{n_2}{n_1}; n_1 = \frac{c}{v_1}; n_2 = \frac{c}{v_2}. n_{21} = \frac{c v_1}{v_2 c} = \frac{v_1}{v_2}. \quad \text{Отже,} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Метод моделювання ефективно використовується при розв'язуванні ряду задач на коливальні рухи.

Задача 2. Знайти період малих коливань пляшки, яка плаває на поверхні води у вертикальному положенні, якщо її маса m , площа поперечного перерізу s . Густина води ρ .

Розв'язування:

Умова рівноваги пляшки $F_{A1} = mg$. Якщо пляшка буде занурена глибше на x від положення рівноваги, то сила, яка змушує її коливатися рівна архімедовій силі, яка діє на додатково

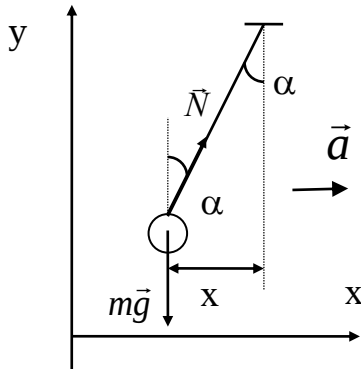


занурений об'єм $\Delta V = s \cdot x$, $F_x = -\rho g \Delta V$, $F_x = -\rho g s x$. Пляшка рухається під дією сили $F_x = -kx$, де $k = \rho g s$. Сила напрямлена проти зміщення. Величина сили пропорційна зміщенню. Отже, закон руху пляшки: $-\rho g s x = m x''$ або $x'' +$

$$\frac{\rho g s}{m} x = 0. \quad \text{Позначимо} \quad m \bar{g} \quad \omega^2 = \frac{\rho g s}{m}. \quad \text{Тоді період коливань пляшки}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g s}}.$$

Задача 3. Математичний маятник довжиною ℓ підвішений у вагоні, який рухається з прискоренням a . Який період коливань такого маятника?



Розв'язування: Якщо маятник не коливається, то рівняння його руху має вигляд:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}, \text{ або в проекціях на осі: } \begin{aligned} N \sin \alpha &= ma \quad \text{оу:} \quad N \cos \alpha - mg = 0 \end{aligned}$$

$$N \sin \alpha = ma; \quad N \cos \alpha = mg; \quad N^2 \sin^2 \alpha = m^2 a^2;$$

$N^2 \cos^2 \alpha = m^2 g^2$. Додамо два останні співвідношення і знайдемо N :
 $N = m\sqrt{a^2 + g^2}$. Коливання маятника у рухомому вагоні зумовлює результуюча сили натягу і сили тяжіння. Рівняння руху маятника має вигляд:

$$m\sqrt{a^2 + g^2} \sin \alpha = -mx'', \text{ або } x'' + \sqrt{a^2 + g^2} \frac{x}{\ell} = 0. \text{ Оскільки } \sin \alpha = \frac{x}{\ell}. \text{ Позначимо}$$

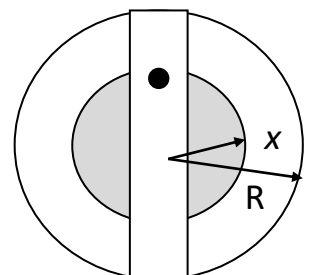
$$\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell}. \text{ Тоді період коливань маятника } T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

На обласній олімпіаді юних фізиків для учнів 11 класу пропонувалася задача, для розв'язування якої можна використати математичне моделювання.

Задача 4. Припустимо, що вздовж осі обертання Землі прорито тунель. Скільки часу падало б тіло в такому тунелі до центра Землі? Швидкість тіла біля поверхні Землі рівна нулю. Вважати Землю кулею з середньою густиною ρ . Опором повітря нехтувати.

Розв'язування: Розглянемо тіло в момент, коли його відстань від центра Землі рівна x . На тіло діє сила

$$F = G \frac{M_1 m}{x^2} \quad (1). \text{ Маса внутрішньої частини Землі}$$



$M_1 = \frac{4}{3} \pi x^3 \rho$, а маса всієї Землі рівна $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$. Тоді $M_1 = M \frac{x^3}{R^3}$.

Підставляючи останній вираз у формулу (1), отримаємо:

$F = G \frac{Mx^3 m}{R^3 x^2} = G \frac{Mm}{R^3} x$. На поверхні Землі $G \frac{M}{R^2} = g$. Отже, $F = \frac{mg}{R} x$. Оскільки

при русі в напрямі сили зміщення x зменшується, то $F = -\frac{mg}{R} x = -kx$.

Отже, тіло рухалося б в тунелі під дією сили, яка пропорційна зміщенню і завжди напрямлена до положення рівноваги (центра Землі). Тіло здійснювало б коливальний рух подібно до тіла на пружині. Рівняння такого

руху має вигляд: $mx'' + \frac{mg}{R} x = 0$ або $x'' + \frac{g}{R} x = 0$. Позначимо: $\omega^2 = \frac{g}{R}$. Тоді

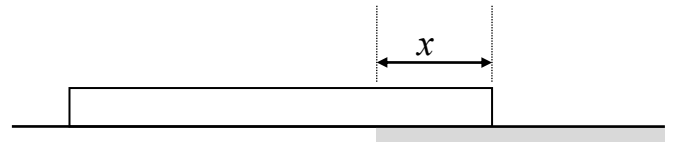
період коливань тіла рівний $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$. До центра Землі тіло буде рухатися

чверть періоду. Тому шуканий час рівний $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$. Обчислимо

$$t = \frac{3,14}{2} \sqrt{\frac{6371200}{9,81}} = 1266,5 \text{ с} = 21,1 \text{ хв.}$$

Метод математичного моделювання можна застосовувати і до випадку, коли тіло не буде коливатися, а лише його рух подібний до коливального на якійсь ділянці амплітуди.

Задача 5. Тонкий однорідний брусок довжиною l ковзає по гладкому горизонтальному столі, а потім попадає на ділянку з коефіцієнтом тертя μ . Брусок зупиняється, в'їхавши наполовину своєї довжини. Знайти його початкову швидкість і час гальмування.



Розв'язування:

Гальмування бруска зумовлює сила тертя, яка змінюється із збільшенням відстані x . $F_{\text{тр}} = \mu m' g$, де $m' = \rho s x$. Маса всього бруска

рівна $m = \rho s \ell$. Звідки $\rho s = \frac{m}{\ell}$. Тоді $F_{\text{мр}} = -\mu \frac{mg}{\ell} x$.

Отже, закон руху бруска до зупинки має вигляд: $mx'' + \mu \frac{mg}{\ell} x = 0$, або

$x'' + \frac{\mu g}{\ell} x = 0$. Позначимо $\omega^2 = \frac{\mu g}{\ell}$. Рух бруска аналогічний коливальному руху лише на чверті періоду. Час, за який брусок в'їде на

половину своєї довжини $t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$.

Амплітуда таких коливань $A = \frac{\ell}{2}$, тоді x міняється за законом:

$x = \frac{\ell}{2} \sin \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}} t$. Закон зміни швидкості: $v = x' = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}} \cos \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}} t$.

Початкова швидкість тіла при $t = 0$: $v_0 = \omega A = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu g \ell}$.

Метод моделювання можна використовувати при узагальненні розв'язків певної групи задач (узагальнююча функція моделювання). Тут можуть бути так звані задачі-моделі. Загальний розв'язок задачі-моделі можна використовувати для багатьох аналогічних задач. В умові такої задачі увагу учнів звертають на основні параметри процесу або явища (абстрагуюча функція моделювання) і нехтують другорядними.

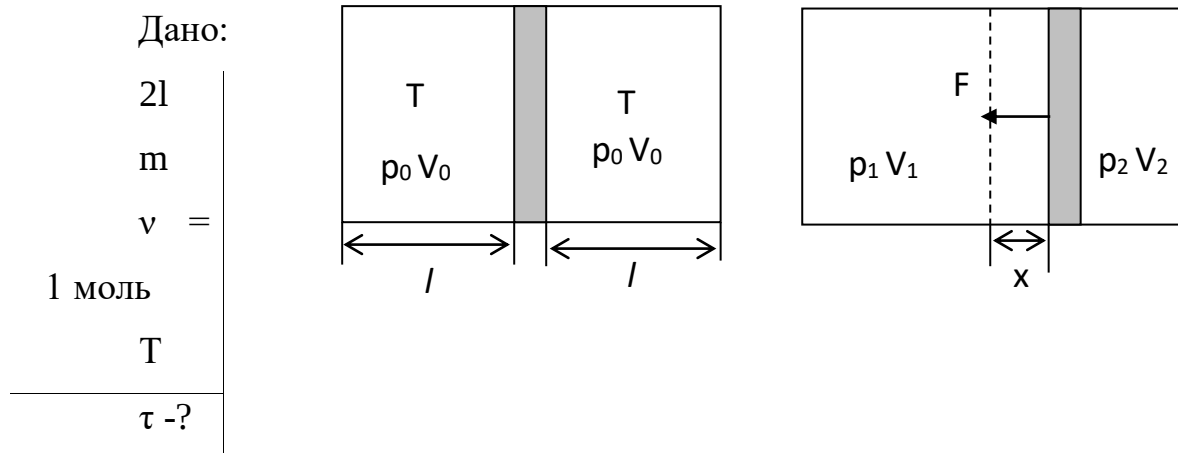
У випадку математичного моделювання (на основі аналогій) потрібно відмежуватися від якісних характеристик моделі та, досліджуваного в задачі, об'єкта і перейти від іменованих чисел до абстрактних. Після отримання результату знову перейти до іменованих чисел.

Це великою мірою полегшує в багатьох випадках розв'язування задач. При цьому в учнів формується абстрактне мислення, вони ознайомлюються з логікою наукового пізнання, більш глибоко вникають у суть методу моделювання.

Розглянемо приклад розв'язування задачі з молекулярної фізики, у якій

використовується математичне моделювання.

Задача 6. Циліндр завдовжки $2l$ поділений пополам поршнем масою m , який може рухатися без тертя. У кожній частині циліндра знаходиться 1 моль ідеального газу при температурі T . Знайти період коливань, які виникають при малому зміщенні поршня. Процес вважати ізотермічним. Товщиною поршня можна знехтувати.



Якщо поршень знаходиться в рівновазі, то об'єм кожної частини циліндра $V = l S$, тиск p . При зміщенні поршня на x тиски будуть рівні p_1 і p_2 , а об'єми $V = (l+x)S$; $V = (l-x)S$. Сила, яка змусить поршень коливатися, $F = -(p_2 - p_1)S$, де S - площа поршня. Враховуючи, що процес ізотермічний, знайдемо тиски p_1 і p_2 . З рівняння Бойля - Маріотта $p_0 \cdot V_0 = p_1 \cdot V_1$. Звідки

знаходимо $p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1}$. Аналогічно $p_2 = \frac{p_0 V_0}{V_2}$. Тоді: $F = -\left(\frac{p_0 V_0}{V_2} - \frac{p_0 V_0}{V_1}\right)S$. Після

спрощення $F = -p_0 V_0 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)S = -p_0 V_0 \left(\frac{1}{(l-x)S} - \frac{1}{(l+x)S}\right)S = -\frac{2xp_0 V_0}{l^2 - x^2}$. Оскільки

зміщення поршня x мале, то $x \ll l$ і величиною x^2 порівняно з l^2 можемо

знехтувати. Тоді маємо $F = -\frac{2p_0 V_0}{l^2} x$. Оскільки $p_0 V_0 = \nu RT$, то $F = -\frac{2\nu RT}{l^2} x$.

Отже, сила, яка зумовлює коливання поршня, змінюється за законом $F = -kx$,

де $k = \frac{2\nu RT}{l^2}$. Процес коливань поршня описується таким самим рівнянням, як і

коливання пружинного маятника: $m x'' + kx = 0$, $x'' + \frac{k}{m}x = 0$. Тоді період

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{2\nu RT}}.$$

коливань поршня

Математичне моделювання у розв'язуванні задач з електродинаміки

Розглянемо деякі приклади задач з електродинаміки, у процесі розв'язування яких, тією або іншою мірою використані ідеї математичного моделювання.

Метод моделювання можна використовувати при узагальненні розв'язків певної групи задач (узагальнююча функція моделювання). Тут можуть бути так звані задачі-моделі. Загальний розв'язок задачі-моделі можна використовувати для багатьох аналогічних задач. В умові такої задачі увагу учнів звертають на основні параметри процесу або явища (абстрагуюча функція моделювання) і нехтують другорядними.

Має місце чітка аналогія між законом всесвітнього тяжіння і законом Кулона:

$$F_e = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{і} \quad F_k = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.$$

Обидва закони виражають силу, яка обернено пропорційна квадрату відстані між тілами, обидва встановлені експериментально з допомогою крутильних терезів Кавендіша.

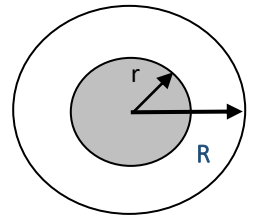
Електричне поле	Гравітаційне поле
q	m
k	γ
$F = k \frac{Q \cdot q}{r^2}$	$F_e = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2}$
Напруженість та потенціал електричного поля $E = \frac{F}{q}, \quad \varphi = \frac{W_n}{q}.$	Напруженість та потенціал гравітаційного поля $G = \frac{F}{m}, \quad \varphi = \frac{W_n}{m}.$
Напруженість та потенціал поля точкового заряду Q або зарядженої кулі на відстані r від її	Напруженість та потенціал гравітаційного поля матеріальної точки або кулі масою M на відстані

центра: $E = k \frac{Q}{r^2}, \quad \varphi = k \frac{Q}{r}.$	r від її центра: $G = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad \varphi = -\gamma \frac{M}{r}$
---	--

Проте перший описує лише притягання тіл, а другий в залежності від знаків зарядів описує і притягання заряджених тіл, і відштовхування. Гравітаційне та електричне поля є потенціальними. Подамо в таблиці електромеханічну аналогію фізичних величин.

Розглянемо приклади задач з електродинаміки, розв'язування яких зручно виконати з використанням математичного моделювання.

Задача 1. Заряд Q рівномірно розподілено по об'єму непровідної кулі радіуса R . Чому дорівнює напруженість поля E на відстані r від центра кулі? Побудуйте графік залежності $E(r)$.



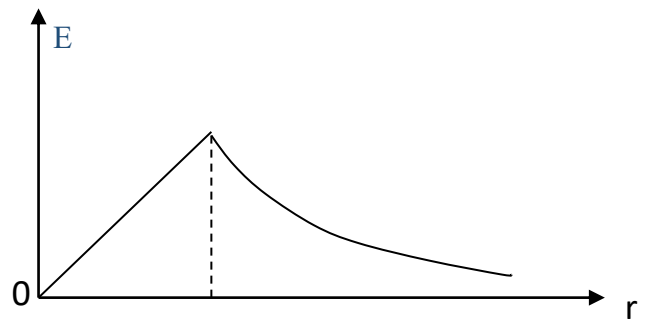
Розв'язок. При $r > R$ $E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Щоб знайти залежність $E(r)$, коли $r \leq R$, проведемо уявну сферу радіуса r . Об'ємна густина

$$\sigma = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

заряду кулі

Всередині кулі на відстані $r \leq R$ від центра поле створюється лише зарядом, який зосереджений у сфері радіусом r :

$$q = \sigma \cdot V_r = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}.$$



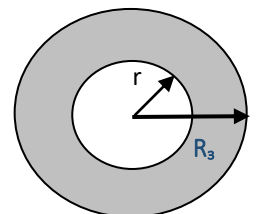
Тоді $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr^3}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$. Побудуємо графік залежності $E(r)$.

Для аналізу розв'язку цієї задачі можна використати таку задачу з механіки, яка є математичною моделлю даної.

Задача 2. Вважаючи Землю однорідною кулею радіусом R_3 , знайти залежність $g(r)$.

Розв'язок.

Якщо $r \geq R_3$, то виходячи із закону всесвітнього



тяжіння $g = \gamma \frac{M_3}{r^2}$. Щоб знайти залежність $g(r)$, коли $r < R_3$, проведемо сферу радіусом r з центром в центрі Землі і розглянемо окремо силу притягання тіла масою 1 кг до тієї частини Землі, яка міститься всередині цієї сфери (позначимо масу цієї частини M'), і до сферичного шару. Сила притягання до цього шару дорівнює нулю. Таким чином, тіло в шахті зазнає притягання тільки частини Землі масою M' . Оскільки Земля вважається однорідною кулею, то $M \sim R^3$. Отже,

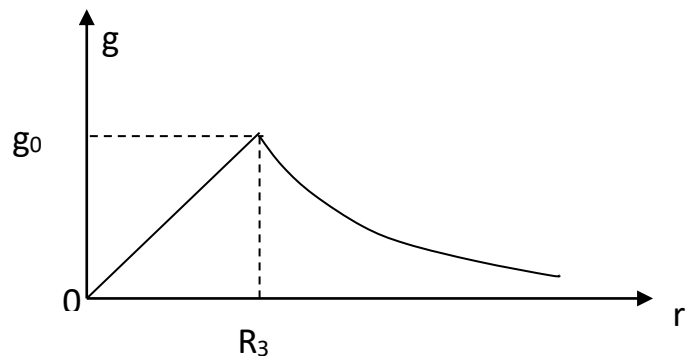
$$\frac{M'}{M_3} = \frac{r^3}{R_3^3} \quad \text{звідки} \quad \text{знаходимо}$$

$$M' = M_3 \frac{r^3}{R_3^3}. \quad \text{Тоді} \quad g' = \gamma \frac{M_3}{R_3^3} r.$$

Враховуючи, що на поверхні

$$\text{Землі} \quad g_0 = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} \quad \text{маємо} \quad g' = g \frac{r}{R_3}.$$

Побудуємо графік $g(r)$.



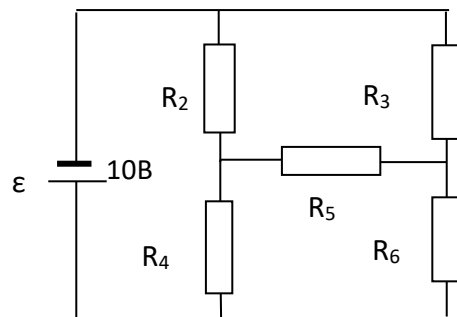
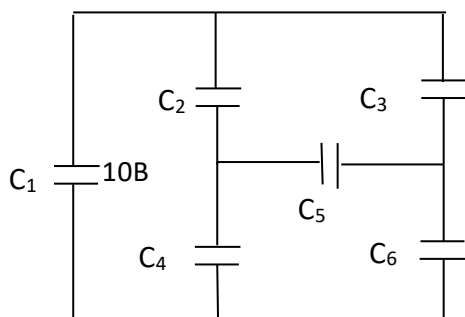
З допомогою математичного моделювання можна полегшити розрахунок з'єднань конденсаторів. Нагадаємо формули для послідовного

з'єднання: $R = \sum_{i=1}^n R_i$, $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$; та паралельного з'єднання: $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$, $C = \sum_{i=1}^n C_i$.

Крім того, аналогічні наступні вирази: $U \rightarrow U$, $I \rightarrow Q$, $R \rightarrow \frac{1}{C}$, $U = R \cdot I \rightarrow U = \frac{1}{C} \cdot Q$.

Наприклад, для знаходження зарядів на конденсаторах необхідно зобразити схему, яка містить опори з врахуванням, наведених вище аналогій.

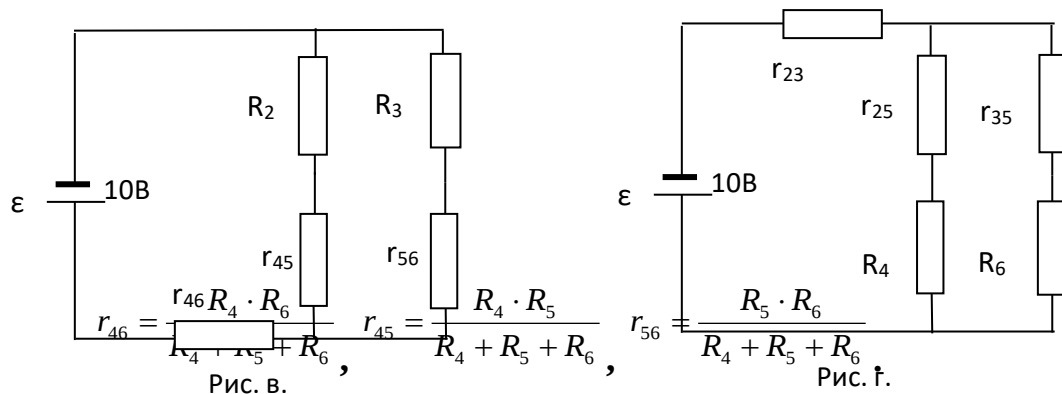
Задача 3. З'єднання конденсаторів показано на рис. а. $C_2 = 2\text{ мкФ}$, $C_3 = C_4 = C_6 = 5\text{ мкФ}$, $C_5 = 10\text{ мкФ}$. Знайти заряд на конденсаторі C_5 .



Зобразимо аналогічну електричну схему (рис.б.), в якій замість конденсаторів увімкнено опори. Замість зарядженого спочатку конденсатора C_1 увімкнемо джерело з е.р.с. 10 В. Обчислимо значення відповідних опорів використовуючи наведену вище аналогію:

$$R_2 \sim \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^5 = 500 \text{ кОм}, R_3 = R_4 = R_6 \sim 200 \text{ кОм}, R_5 \sim 100 \text{ кОм.}$$

Внутрішнім опором джерела нехтуємо. Знайдемо силу струму в опорі R_5 . Для цього потрібно знайти спочатку I_4 та I_2 , тоді $I_5 = I_4 - I_2$. З'єднані “трикутником” опори R_4, R_5, R_6 (рис.в) та R_2, R_5, R_3 (рис.г) перетворимо у з'єднання “зіркою”. Із першого з'єднання (рис.в) знайдемо I_2 (рис.г), а з другого – I_4 .



$$r_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_5 + R_3}, \quad r_{25} = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5 + R_3}, \quad r_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2 + R_5 + R_3}.$$

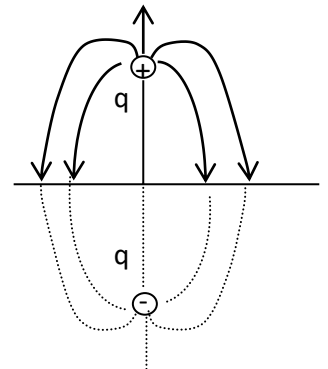
Числове значення I_5 буде рівне значенню заряду на конденсаторі C_5 .

Одним із прикладів математичного моделювання є метод дзеркальних зображень, який ґрунтується на методі побудови зображень у плоских дзеркалах. Цим методом можна розв'язувати задачі не лише з оптики, а й кінематики, електростатики. Метод дзеркальних зображень в електростатиці на такій властивості еквіпотенціальної поверхні: якщо замінити еквіпотенціальну поверхню електростатичного поля провідною поверхнею такої ж форми і створити на ній такий же потенціал, то електростатичне поле не зміниться. Проаналізуємо застосування цього методу при розв'язуванні

задач.

Задача 4. Знайти силу взаємодії точкового заряду q , який розміщений на відстані r від провідної нескінченної заземленої поверхні, з цією поверхнею.

В результаті електростатичної індукції на пластині перерозподілиться негативний заряд, і результуюче електричне поле буде мати вигляд, показаний на рисунку. Це поле повністю співпадає з полем, яке створене двома однаковими різнойменними зарядами, розміщеними симетрично відносно площини. Фіктивний точковий заряд $-q$ називається зарядом – зображенням. Сила взаємодії заряду q з площиною еквівалентна силі взаємодії заряду q і його “дзеркального” зображення $-q$.



Отже,
$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2r)^2}.$$

Задача 5. Пилінка радіусом 0,1 мм із позитивним зарядом 0,5 нКл розміщена на відстані 1 мм від поверхні провідної кулі радіусом 1 см і зарядженої зарядом 1 нКл того ж знаку. Знайти силу, яка діє на пилінку.

Розв’язок.

$r=0,1\text{мм}=10^{-4}\text{ м}$

$R=1\text{см}=10^{-2}\text{ м}$

$h=1\text{мм}=10^{-3}\text{ м}$

$q_1=0,5\text{нКл}$

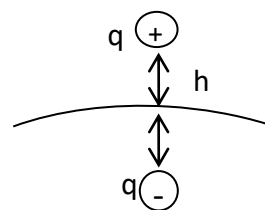
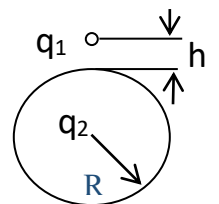
$q_2=1\text{нКл}$

$F - ?$

Якщо розв’язувати задачу з допомогою закону Кулона, вважаючи заряди точковими, то заряди відштовхуються із силою:

$$F_1 = \frac{kq_1q_2}{(R+r+h)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 10^{-18}}{(100 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} + 10 \cdot 10^{-4})^2} = 0,365 \cdot 10^{-4} (H)$$

В даній задачі відстань від пилінки до кулі невелика і тому заряди не можна вважати точковими. В провідній кулі виникає “зображення” заряду пилінки, до якого вона буде притягуватися із силою:



$$F_2 = \frac{kq_1^2}{(2h)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 0,25 \cdot 10^{-18}}{4 \cdot 10^{-6}} = 5,625 \cdot 10^{-4} (H)$$

Результуюча сила, яка діє на пилінку в проекції на радіальний напрям

рівна різниці сил F_1 та F_2 . $F = F_1 - F_2 = 0,365 \cdot 10^{-4} - 5,625 \cdot 10^{-4} = -5,26 \cdot 10^{-4}$ (Н).

Отже, однойменно заряджені тіла притягуються, а не відштовхуються. Цей ефект має місце лише на невеликих відстанях між тілами. У нашому

випадку знайдемо цю відстань із умови, що $F_1 = F_2$. На відстані більшій від $h = 0,55 \cdot R$ пилінка буде відштовхуватися від кульки.

$$h = \frac{R}{2\sqrt{\frac{q_2}{q_1} - 1}} = 0,55R$$

Дана задача не лише ілюструє застосування методу електростатичних зображень, а й дає можливість глибше з'ясувати модельний характер поняття точкового заряду.

Математичне моделювання у розв'язуванні задач з оптики

Розглянемо приклади задач з оптики, розв'язування яких зручно виконати з використанням математичного моделювання.

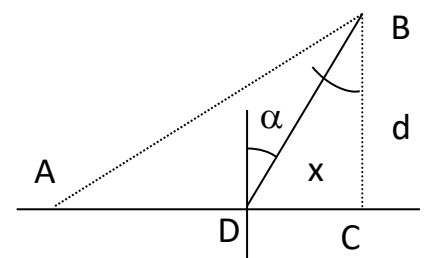
Задача 1. У випадку повного внутрішнього відбивання для граничного кута падіння промінь із більш оптично густого середовища не переходить в середовище менш оптично густе. Якщо для явище повного внутрішнього відбивання, як для всіх явищ геометричної оптики, притаманна оборотність ходу променів, то як промінь знаходить точку, де йому потрібно повернутися в більш оптично густе середовище при зворотному ході?

Для аналізу розв'язку цієї задачі можна використати таку задачу з механіки, яка є математичною моделлю даної.

Задача 2. Людина стоїть на березі озера в точці А і хоче якнайшвидше потрапити в точку В на озері. Швидкість руху людини на березі v_1 , а у воді - v_2 . Якою траєкторією слід рухатися людині, якщо $v_1 > v_2$?

Позначимо $AC=S$, $BC=d$, $DC=x$

Рух найкоротшим шляхом АВ триває не найкоротший час внаслідок повільнішого руху по воді, ніж по березу. Вигідніше увійти у воду в точці D, скорочуючи шлях у воді за рахунок подовження шляху берегом. Знайдемо, для якого значення α час руху буде



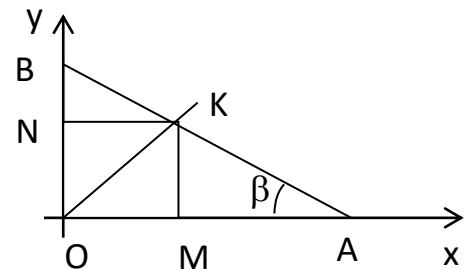
найменшим. Час рівний $t = \frac{s-x}{g_1} + \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{g_2}$. Він набуває найменшого значення, якщо $\frac{x}{g_2\sqrt{d^2+x^2}} - \frac{1}{g_1} = 0$. Звідси знаходимо: $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{g_2}{g_1}$. Для даного випадку $x = \frac{d g_2}{\sqrt{g_1^2 - g_2^2}}$.

Задача 3. Три дзеркала утворюють між собою двогранні прямі кути. Доведіть, що після трьох відбивань від цієї системи дзеркал напрямок променя світла змінюється на протилежний.

Скористаємося механічною аналогією – замінімо дзеркала пружними стінками, а промінь світла – пружною кулькою (закони відбивання в обох випадках однакові). Якщо напрямити осі координат вздовж ребер двогранних кутів, то при кожному з трьох зіткнень одна з проекцій початкової швидкості $\vec{g}$ кульки (g_x, g_y, g_z) змінює знак на протилежний, а інші дві не змінюються. Після трьох зіткнень проекції швидкості на осі координат дорівнюють $(-g_x, -g_y, -g_z)$, тобто швидкість кульки дорівнює $-\vec{g}$. Розглянута властивість дзеркального “тригранного прямого кута” використовується в куткових відбивачах (катафотах).

В математиці існує спеціальний розділ, в якому вивчають методи побудови особливих креслень – номограм. З їх допомогою можна швидко знаходити невідому величину.

Зобразимо на площині прямокутну систему координат xOy . На осях відкладемо рівні відрізки $OM = ON$ довжиною F . Через точку K проведемо довільну пряму до перетину з осями в точках A та B . Позначимо на осі ox відрізок $OA = d$, а на осі oy – відрізок $OB = f$.



З подібності трикутників АОВ та АМК запишемо $\frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}$. Звідси легко отримуємо: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$. Отже, побудовані відрізки ОА, ОВ, КМ=ОМ зв'язані між собою співвідношенням, яке ідентичне формулі тонкої лінзи, а тому виступає її математичною моделлю.

З допомогою побудованої номограми за відомими двома із трьох величин d , f і F завжди можна графічно визначити третю. Запропонований спосіб придатний не тільки для збиральних лінз, але і для розсіювальних, а також для будь-яких розміщень предмета і зображення відносно лінзи. Якщо, наприклад, предмет або зображення уявні, то відповідні значення d і f від'ємні, тому їх потрібно відкладати у від'ємному напрямі від початку координат.

Номограми можна використовувати також для визначення лінійного збільшення лінзи – лінійного розміру H зображення до лінійного розміру

предмета h :
$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} = \operatorname{tg} \beta$$
.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖПРЕДМЕТНИХ ІНТЕГРАЦІЙ ПРИ ВИВЧЕНІ ФІЗИКИ І МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСОБУ ФОРМУВАННЯ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ

3.1. Організація роботи з математичними методами на уроках фізики

Математичні методи, засоби, теорія у процесі вивчення та розвитку природничих наук, їх зв'язку з математикою відіграє надзвичайно важливу роль в опануванні предметів математичної та природничої освітніх галузей. Такі предмети як математика і фізика не можуть існувати окремо одна від одної, а тісно пов'язані між собою. Зв'язки між ними різноманітні й постійні. Математика, як наука, сформувалася першою, але в міру розвитку фізики математичні методи знаходили все більше застосування в її дослідженнях. Математичний апарат необхідний нам для опису фізичних процесів і явищ, запису законів і наслідків з них, у доведенні деяких положень фізики, при розв'язуванні задач, обчисленні даних, отриманих при лабораторних роботах.

Сучасне викладання вимагає органічного поєднання експериментального й теоретичного методів вивчення фізики, виявлення суті фізичних законів на основі доступних здобувачам освіти понять шкільної математики. Такий підхід забезпечує підвищення рівня математичних знань, формує логічне мислення, усвідомлення єдності матеріального світу. Учні відчують задоволення, помічаючи, що абстрактні математичні формули й рівняння отримують реальне втілення у фізичних процесах.

На уроках математики учні працюють з математичними виразами, а на уроках фізики навчаються переходити від фізичних явищ і зв'язків до їх математичного вираження. Математичний апарат – один із головних методів дослідження фізичних явищ. Так при побудові графіків шляху та швидкості при рівномірному прямолінійному русі використовуються знання з математики про графіки прямої та оберненої залежності. Під час вивчення теми «Паралельне з'єднання провідників» необхідні знання учнів про

додавання та віднімання дробів з різними знаменниками. При вивченні теми «Прості механізми. Момент сили. Важіль. Умова рівноваги важеля» школярі користуються властивістю пропорції. Знання властивостей трикутників допомагають опанувати геометричну оптику. Під час розгляду матеріалу про шлях, переміщення, координату при прямолінійному рівноприскореному русі в нагоді квадратні рівняння та співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику. При дослідженні коливального руху застосовується похідна, а при вивченні принципу суперпозиції полів – дії над векторами. Знання про площу прямокутника допомагають засвоїти тему «Робота термодинамічного процесу». Для розв'язування ряду фізичних задач використовуємо математичні знання про лінійну функцію..

Розвиток фізичної теорії спирається на наявний певний математичний апарат, але останній вдосконалюється й розвивається в міру його використання у фізиці.

Великий німецький філософ Еммануїл Кант сказав: «Теорія без практики сліпа». Якщо вчитель додасть більше прикладної направленості у викладання предмета, ефективніше реалізується один з основних дидактичних принципів - зв'язок науки з життям. Під час вивчення фізики доцільно вишукувати можливості

максимального використання діяльнісних форм і методів активного навчання, розвивати вміння шукати інформацію та працювати з інформацією (аналізувати, оцінювати, синтезувати). Втілювати (моделювання, конструювання, STEM-проєктування).

При вивченні базового курсу фізики здобувачі освіти повинні виконувати арифметичні дії над цілими й дробовими числами, мати уявлення про пропорції, пряму і обернену пропорційність величин, виконувати наближені обчислення, уміти записувати формули за допомогою буквених виразів. У фізиці буква наділена чітким фізичним змістом, бо це конкретна фізична величина.

3.2. Розробка інтегрованих уроків фізики і математики в старших класах

Проведення інтегрованих уроків має на меті узагальнення суміжних знань і гармонійне поєднання певних розділів фізики і математики. Для цього необхідно використовувати лише ті форми організації освітнього процесу, які сприяють здійсненню даних цілей і узагальнюють міжпредметні зв'язки обох дисциплін. Найбільш вдалі при цьому в старших класах будуть такі форми проведення уроків як: узагальнюючі уроки, уроки-лекції, уроки-конференції, уроки - «подорожі», семінари та екскурсії.

Як психологічна основа, яка допомагає реалізовувати міжпредметні зв'язки, є процес встановлення асоціацій учнів знань одного предмета зі знаннями іншого. Психологи відзначають, що формування наукових знань відбувається на основі чотирьох рівнів їх систематизації:

I рівень - прості асоціації (факти і явища пов'язують безвідносно до системи даних явищ).

II рівень - обмежено-системні асоціації (встановлюються зв'язки між фактами і явищами в межах теми).

III рівень - внутрішньо-системні асоціації (зв'язок встановлюється в межах навчального предмета).

IV рівень - міжсистемні асоціації (встановлюються зв'язки між знаннями, які належать до різних наук).

Тема: Застосування інтеграла при розв'язуванні задач з фізики

Мета:

сприяти глибокому засвоєнню знань фізики і математики через встановлення міжпредметних зв'язків засобами інтегрального числення, формувати практичні зв'язки наукового розуміння законів, взаємозв'язків явищ у природі за допомогою розв'язування задач; розвивати в учнів вміння узагальнювати цілісну систему, вміння реалізувати практичні зв'язки курсів математики і фізики, розвивати навички самостійного прийняття рішень, виховувати культуру розумової праці, створювати сприятливі умови для

формування загальнонавчальних умінь і навичок учнів.

Тип уроку: застосування знань, умінь та навичок.

Обладнання: графічний планшет, мультимедійна дошка

Хід уроку

I. Організаційна частина

Привітання . Перевірка готовності класу до уроку.

II. Мотивація навчальної діяльності

Учитель математики.

Математика вивчає різні зв'язки між величинами. Найважливіші приклади таких зв'язків дає механічний рух. Між положенням точки (її координатою та її швидкістю) є відомий зв'язок, який лежить в основі математичного аналізу: швидкість є похідна від координати за часом: $v(t) = x'(t)$. Сама операція знаходження швидкості називається *диференціюванням*. Розв'язування оберненої задачі – знаходження положення точки за її швидкістю – приводить до поняття первісної функції і розв'язується за допомогою іншої математичної задачі, яка називається *інтегруванням*.

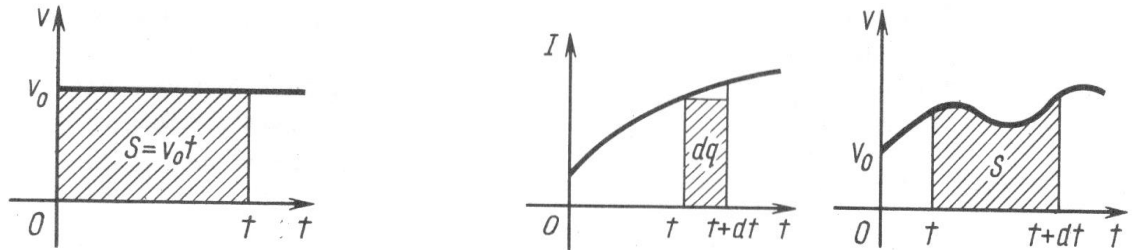
Вчитель фізики

Ви знаєте багато прикладів пар величин, які пов'язані між собою так само, як положення точки та її швидкість. Знаходження однієї з величин, якщо відома друга, ми зводили до операції диференціювання. Так, лінійна густина тонкого стержня є похідна від його маси за довжиною, потужність є похідна від роботи за часом, сила струму є похідна заряду за часом і т.д.

Перед тим, як перейти до розв'язування прикладних задач на застосування інтеграла, ще раз повернемося до задачі про механічний рух.

Нехай точка рухається зі сталою швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ буде пряма $v = v_0$, паралельна осі часу t . Якщо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку

координат, то її шлях s , пройдений за час t , обчислюється за формулою $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ являє собою площу прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис та двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу під графіком швидкості.



Звернемось до випадку нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати сталою тільки на маленькому відрізку часу. Якщо швидкість змінюється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений точкою за проміжок $[t; t + dt]$, наближено дорівнює добутку $v(t)dt$, а на графіку – площі прямокутника зі сторонами dt і $v(t)$. Точне значення шляху за проміжок часу $[t; t + dt]$ дорівнює площі криволінійної трапеції, що заштрихована на малюнку. Весь шлях дорівнює сумі площ всіх таких криволінійних трапецій, тобто дорівнює площі під графіком швидкості.

Аналогічно якщо ми накреслимо графік залежності сили струму від часу $I = I(t)$, то величина заряду, який буде перенесено струмом за проміжок часу $[t; t + dt]$, наближено обчислюється за формулою $I(t)dt$, тобто дорівнює площі прямокутника зі сторонами dt і $I(t)$. Точне значення величини заряду можна обчислити як площу під графіком сили струму.

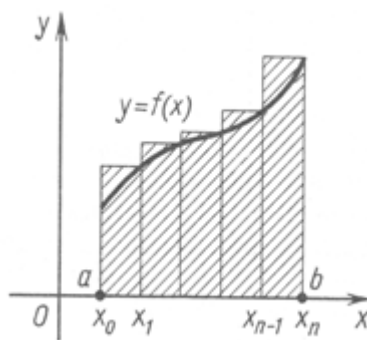
Таким чином задача інтегрування тісно пов'язана з задачею обчислення площі.

Вчитель математики:

Ви знаєте, що задача обчислення площі під графіком функції – площі криволінійної трапеції – тісно пов'язана з інтегралом. Можна про інтеграл коротко сказати так: *Інтеграл – це площа.*

Нагадаємо хід міркувань, застосованих для обчислення площі

криволінійної трапеції. Відрізок $[a; b]$ під графіком функції $f(x)$ (неперервної та невід'ємної на цьому відрізку) розбивають на n частин. Площа криволінійної трапеції всього підграфіка розбивається на суму площ менших криволінійних трапецій. Кожну таку трапецію можна наближено вважати прямокутником. Сума площ тим точніше дає уявлення про площу криволінійної трапеції, чим більше буде частин, на які розіб'ється відрізок $[a; b]$



За допомогою формул це можна записати так.

Відрізок $[a; b]$ розбито на n частин точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, довжину k -го відрізка позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Сума $S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$ виражає наближено площу східчастої фігури.

Суми виду $S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$ називають *інтегральними сумами* для функції $f(x)$. **Площа під графіком дорівнює границі інтегральних сум, якщо діаметр розбиття – найбільша з довжин відрізків Δx_k , - прямує до нуля.** Таким чином про інтеграл можна сказати так:

Визначений інтеграл дорівнює границі інтегральних сум функції:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Розглянутий спосіб обчислення площ походить з далекої давнини. Ще в III ст. до н.е. великий Архімед обчислив площі параболічного сегменту за допомогою винайденого ним «методу вичерпування», який за дві тисячі років був перетворений на метод інтегрування. Архімеду вдалося виконати пряме

обчислення деяких площ, а отже і інтегралів. Але лише у XVII столітті Ньютону та Лейбніцу вдалося відкрити загальний спосіб обчислення інтегралів.

Раніше нами було розглянуто доведення теореми, що швидкість зміни функції $S(x)$ змінної площі під графіком функції $f(x)$ дорівнює функції, тобто $S'(x) = f(x)$.

Відома **теорема Ньютона – Лейбніца**, яка носить прізвища засновників математичного аналізу, стверджує:

Нехай $f(x)$ - дана неперервна на відрізку $[a;b]$ функція , а $F(x)$ - одна з її первісних, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема Ньютона – Лейбніца зводить обчислення інтегралів до обчислення первісних.

«Метод вичерпування» Архімеда хоча і не дав загального способу обчислення площі, однак зіграв дуже велику роль в математиці, оскільки за його допомогою вдалося об'єднати різні задачі – обчислення площі, об'єму, маси, роботи, тиску та інших.

Вчитель математики

Таким чином, при знайомстві з інтегралом ми виділили три його характеристики.

- 1) Інтеграл від функції $f(x)$ є площа під графіком (з урахуванням знаку).
- 2) Інтеграл є границя інтегральних сум.
- 3) Інтеграл від функції f є приріст її первісної.

Будь-яка з цих характеристик інтегралу може слугувати основою для його застосувань. Найбільш стандартним шляхом вираження однієї величини як інтеграл від іншої є використання третьої характеристики інтеграла як приросту первісної. Але і дві перші характеристики дуже важливі в застосуванні, так як дозволяють отримати геометричний зміст зв'язку між

фізичними величинами та простий спосіб їх наближеного обчислення.

Інтеграл застосовується тоді, коли відома швидкість (густина) f шуканої величини. Якщо шукану величину подати у вигляді приросту деякої функції F , то f є похідною для F , а отже F є первісною для f , тобто інтеграл від функції F .

Запишемо тепер все це за допомогою формул. У якості незалежної змінної виберемо літеру t . Нехай ми шукаємо величину F . Розглянемо її значення на маленькому відрізку $[t; t+dt]$. Нехай швидкість зміни величини F позначено f . Цей зв'язок між величинами F і f можна записати у диференціальній формі:

$$dF = f(t)dt \quad (\text{або } \Delta F = f(t)\Delta t)$$

$$(\text{Нагадаємо, що } F'(t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{dF}{dt} = f(t))$$

Тоді

$$F = \int_a^b f(t)dt$$

Повернемося до величин, які можна обчислювати за допомогою інтеграла. До таких величин можна віднести переміщення, роботу, масу, електричний заряд, тиск, теплоту. До них можна приєднати і геометричні величини – довжину, площу, об'єм.

Вчитель фізики

пропонує учням прокоментувати таблицю фізичних величин та співвідношень між ними.

III. Застосування знань та умінь

Вчитель фізики

Розглянемо приклади задач фізичного змісту, для розв'язання яких доцільно використати інтеграл.

(Вчитель математики контролює правильність математичних дій)

Задача 1

При якій висоті h рідини в циліндричній посудині радіусом $r = 5 \text{ см}$ сила тиску на дно посудини та на бічну стінку будуть однаковими?

Розв'язання

Тиск рідини на стінки посудини $P = \rho gh$, відповідно, сила тиску дорівнює $F_1 = PS = \rho gh\pi r^2$. Тиск на бічну стінку залежить від глибини y : $P(y) = \rho gy$. Розіб'ємо подумки бічну стінку на кільцеві смужки висотою dy , тоді сила тиску смужки на глибині $dF(y) = \rho gy 2\pi r dy$. Повна сила знаходиться інтегруванням по всім кільцям:

$$F_2 = \int_0^h dF(y) = \rho g 2\pi r \int_0^h y dy = \pi \rho g r h^2.$$

З умови $F_1 = F_2$ отримуємо $h = r$.

Задача 2

До стелі ліфта, що вільно падає, прикріплено пружину з важком. Важок не коливається. Знайти максимальне значення сили пружності при миттєвій зупинці ліфта, якщо безпосередньо перед зупинкою ліфта сума потенціальної енергії важка дорівнювала 40 Дж . Коефіцієнт жорсткості пружини 500 Н/м . Тертям та масою пружини знехтувати. Потенціальну енергію сили пружності і сили тяжіння відраховувати від положення максимального розтягу пружини.

Розв'язання

Згідно формули для роботи рівнодійної сили $E_k - E_{k0} = A_{mg} - A_{пружн}$

Так, як $A_{mg} = mgx_{\max} = E_{n0}$, тобто, початковій потенціальній енергії важка,

а

$$A_{пружн} = \int_0^{x_{\max}} kx dx = \frac{kx_{\max}^2}{2} = \frac{F_{пружн}^2}{2k}.$$

$$\text{Тоді маємо} \quad -E_{k0} = E_{n0} - \frac{F_{пружн}^2}{2k},$$

тобто повна енергія

$$E_{повн} = E_{k0} + E_{n0} = \frac{F_{пружн}^2}{2k}. \text{ звідки}$$

$$F_{пружн} = 200 \text{ Н}$$

Задача 3

Температура маси m ідеального газу з молярною масою M змінюється за законом $T = \alpha V^2$, де α – відома стала. Яку роботу виконує газ при збільшенні його об'єму від V_1 до V_2 ? Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу в цьому процесі? Отримує чи віддає газ тепло в цьому процесі?

Розв'язання

Скористаємось рівнянням стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

$$P = \frac{m}{MV}RT = V \frac{mR\alpha}{M}$$

Роботу можна знайти методом інтегрування:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mR\alpha}{M} (V dV) = \frac{mR\alpha}{2M} (V_2^2 - V_1^2)$$

Для визначення внутрішньої енергії скористаємось формулою

$$U = \frac{3}{2}PV = \frac{3mR\alpha}{2M}V^2,$$

Отже,

$$\Delta U = \frac{3mR\alpha}{2M} (V_2^2 - V_1^2) = 3A$$

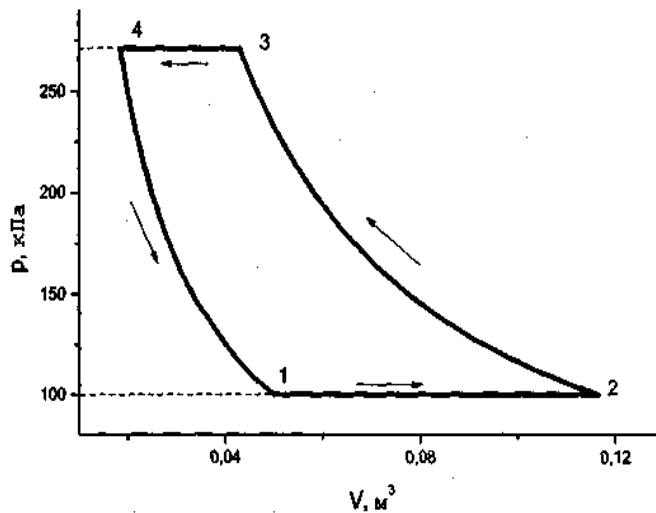
Згідно першого закону термодинаміки, теплота, надана тілу в цьому процесі, дорівнює

$$Q = \Delta U + A = \frac{2mR\alpha}{M} (V_2^2 - V_1^2) > 0,$$

отже газ отримує теплоту.

Задача 4

Над $\nu = 2$ молями ідеального газу здійснюється цикл 1234(див рис),



Який складається із двох ізобар (12, при тиску $P_1=100$ кПа, та 34, при тиску $P_3=272$ кПа) та двох ізотерм (23, при температурі $T_2=700$ К, та 41, при температурі $T_1=300$ К). Знайти теплоту, яку газ поглинає за цикл.

Розв'язання

Згідно першого закону термодинаміки, $Q = \Delta U + A$. В коловому процесі зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю, отже $Q = A$. на ізобарах 12 і 34 робота дорівнює

$$A_{12} = P_1 (V_2 - V_1), \quad A_{34} = P_3 (V_4 - V_3),$$

або враховуючи рівняння стану в точках 1234

$$P_1 V_1 = P_3 V_4 = \nu R T_1,$$

$$P_1 V_2 = P_3 V_3 = \nu R T_2$$

$$\text{отримуємо} \quad A_{12} + A_{34} = 0$$

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} P dV = \nu R T_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = \nu R T_2 \ln \frac{P_1}{P_3}$$

Аналогічно,

$$A_{41} = \nu R T_1 \ln \frac{P_3}{P_1},$$

Отже,

$$Q = \nu R (T_2 - T_1) \ln \frac{P_1}{P_3} < 0$$

Підстановка даних із умови задачі дає $Q = -3,32$ кДж, теплота віддається, а не поглинається, тобто, в цьому циклі теплова машина працює

як холодильник.

Задача 5

Заряджений конденсатор ємності C замкнений на котушку індуктивності L . Знайти таку залежність від часу ємності конденсатора, при якій струм у колі збільшується прямо пропорційно часу. Електричним опором кола знехтувати.

Розв'язання

За законом Фарадея, $|E| = LI = \frac{LI}{t} = \text{const}$, так як за умовою задачі струму колі збільшується прямо пропорційно часу: $I \approx t$. отже, і напруга на конденсаторі, що дорівнює напрузі на котушці в будь – який момент часу, теж залишається сталою:

$$U_c = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - q}{C},$$

де q_0 - початковий заряд на конденсаторі, q - заряд, який стік із обкладок конденсатора за час t , а C - ємність конденсатора в момент t . З рівності $\frac{LI}{t} = \frac{q_0}{C_0}$ знаходимо струм:

$$I = \frac{q_0 t}{LC_0}$$

Тоді повний заряд, що стікає з конденсатора за час дорівнює

$$q(t) = 0 \int_0^t I(\tau) d\tau = \frac{q_0 t^2}{2LC_0}$$

Підставивши цей вираз для заряду у формулу, отримуємо

$$C = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2LC} \right)$$

Зауважимо, що ця відповідність буде правильною за умови, що $q < q_0$.

Задача 6

Дві частинки, які мають масу 5 мг , 2 мг і заряди, що дорівнюють $+12 \text{ нКл}$ та $+7 \text{ нКл}$, рухаються назустріч одна одній, маючи вдалині відносну швидкість 18 км/год . На яку найменшу відстань зближаться частинки?

Розв'язання

Задачу можна розв'язати трьома способами, враховуючи вибір системи відліку:

- 1) (ICB) – інерціальна система відліку (пов'язана з Землею);
- 2) система відліку, яка зв'язана з центром інерції системи двох частинок;
- 3) НІСВ – неінерціальна система відліку, тобто одна частинка нерухома, а інша рухається назустріч першій з відносною швидкістю ($v_{відн}$)

Розглянемо третій спосіб. Виберемо систему, яка рухається поступово разом з однією із заряджених частинок, наприклад, з першою. Ця система – неінерціальна. У ній перша частинка нерухома, а друга рухається назустріч першій з початковою швидкістю ($v_{відн}$). Система вважається незамкненою, оскільки на неї діють сили інерції, які потрібно вважати зовнішніми відносно системи.

Але ми знаємо, що зміна енергії системи дорівнює роботі (A) сили інерції (F_{in}), що діє на частинку (m_2) під час її наближення до частинки (m_1).

$W_2 - W_1 = A$, де W_2 – кінцева енергія, при $r = r_{min}$, яка дорівнює потенціальній енергії кулонівської взаємодії, тобто

$$W_2 = E_p;$$

$$E_p = k \frac{q_1 q_2}{r_{min}} \Rightarrow W_2 = \frac{q_1 q_2}{r_{min}},$$

Оскільки в момент найбільшого зближення друга частинка має нульову швидкість. W_1 – початкова енергія системи частинок, яка дорівнює кінетичній енергії другої частинки

$$W_1 = \frac{mv_{відн}^2}{2}$$

A – робота сили інерції, визначається за допомогою інтеграла

$$A = \int_{r_{min}}^{r_{max}} F_{in} (-dr)$$

Врахувавши, що $a_i = \frac{F}{m_1}$, де F – кулонівська сила.

Знаючи $F_{in} = m_2 a_1 = \frac{m_2 k q_1 q_2}{m_1 r^2}$, тоді

$$A = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{k q_1 q_2}{m_1 r^2} (-dr) = \frac{k q_1 q_2 m_2}{m_1 r_{\min}}, \text{ вважаючи } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Прирівняємо роботу зі зміною енергії:

$$k \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} - \frac{m_2 v_{\text{відн}}^2}{2} = -\frac{k q_1 q_2 m_2}{m_1 r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{2k q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v_{\text{відн}}^2} \Rightarrow r_{\min} = 0,04 \text{ м}$$

Частинка зблизиться на мінімальну відстань *4 см*

Задача 7

Магнітне поле створюється провідником зі струмом, сила якого *50 А*. У полі розміщена рамка. Так що дві великі сторони довжиною *65 см* паралельні провіднику, а відстань від провідника до найближчої сторони рівна її ширині. Який магнітний потік пронизує рамку?

Розв'язання

Магнітна індукція поля провідника визначається:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}, \text{ де } r - \text{відстань до провідника.}$$

Магнітний потік що пронизує рамку визначається за законом:

$$\Phi = BS \cos \alpha, \text{ де } \cos \alpha = 1, \text{ а } B - \text{зменшується з віддаленням від провідника.}$$

Розіб'ємо площу рамки на окремі ділянки, елементарна площа яких $\Delta S = l \Delta r$.

Для визначення магнітного потоку звернемось до процесу інтегрування:

$$\Phi = r \int \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} l \Delta r = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \ln r \Big|_r^{2r} = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \ln 2;$$

Підрахунки дають значення *4,5 мкВб*.

IV. Підведення підсумків

На уроці було систематизовано знання щодо застосувань інтегралу при розв'язуванні прикладних задач. Розглянуто схему застосування інтегралу (алгоритм переходу до інтегралів) при розв'язуванні задач фізичного змісту.

Фізика вивчає залежності між величинами та описує їх мовою математики; математика систематизує та узагальнює способи розв'язування

різноманітних задач, створюючи математичні моделі та методи їх дослідження.

3.3. STEM- та проєктний підхід у навчанні фізики

У сучасних умовах освіта вимагає впровадження новітніх підходів до викладання природничих дисциплін, зокрема фізики, оскільки традиційні методи не завжди забезпечують достатній рівень залучення учнів у навчальний процес. Одним із ключових чинників ефективного навчання є розвиток пізнавальної активності, що стимулює інтерес до науки, мотивує до дослідницької діяльності та сприяє формуванню практичних навичок.

Використання STEM-методології, цифрових інструментів, гейміфікації та проєктного навчання створює навчальне середовище, де учень не просто споживає інформацію, а стає активним учасником пізнання, конструюючи знання через практичний досвід. Персоналізація навчання дає змогу кожному учневі обирати індивідуальні траєкторії розвитку, реалізовувати власні ідеї в дослідницьких проєктах.

Методика проблемного навчання орієнтована на створення навчальних ситуацій, у яких учні самостійно шукають шляхи розв'язання наукових задач. Наприклад, на занятті «Фізика у світі майбутнього» учні моделюють вплив новітніх технологій на суспільство, досліджують питання енергозбереження, відновлюваних джерел енергії та створюють презентації щодо перспектив фізичної науки.

Застосування віртуальних лабораторій, таких як PhET, дозволяє моделювати складні експерименти у безпечному середовищі. Це дає змогу ефективно відпрацьовувати теми механіки, електромагнетизму, квантової фізики, а також краще розуміти явища, які складно продемонструвати в умовах традиційної шкільної лабораторії.

Гейміфікація — потужний інструмент активізації пізнавальної діяльності. Фізичні квести на зразок «Місія: врятувати планету» залучають учнів до інтерактивних завдань, пов'язаних із законами фізики, аналізом природних аномалій і пошуком їх наукового обґрунтування. Онлайн-

платформи Kahoot, Quizizz, LearningApps забезпечують інтерактивний зворотний зв'язок через вікторини, тести та навчальні ігри.

Проектне навчання дає змогу інтегрувати теоретичні знання з практичними вміннями. Так, у проєкті «Будуємо міст майбутнього» учні застосовують знання з механіки, матеріалознавства, архітектури та використовують 3D-друк для створення моделей мостів. У проєкті «Робототехніка у фізиці» учні конструюють механічні системи, програмують мікроконтролери, поєднуючи фізику з інформатикою та математикою.

STEM-інтеграція передбачає розв'язання реальних інженерних задач. Наприклад, за допомогою Arduino учні моделюють системи «розумного будинку», досліджують роботу сенсорів, створюють електромеханічні пристрої. Урок «Фізика в космосі» базується на прикладах місій NASA — учні аналізують траєкторії польотів, особливості космічних досліджень, розробляють власні прототипи марсоходів. Доповнена реальність з 3D-моделями планет, схем і механізмів дозволяє досліджувати об'єкти у форматі взаємодії.

Метод «перевернутого класу» змінює роль учня у навчанні — теорія опрацьовується самостійно за допомогою відео, інтерактивних презентацій, платформ Coursera, Edpuzzle, а урок присвячено практичному засвоєнню. Наприклад, під час заняття «Фізика у повсякденному житті» учні досліджують роботу побутових приладів, аналізують джерела світла, створюють відеоролики з поясненням фізичних явищ.

Цифрові ресурси, як-от Labster, відкривають нові горизонти для викладання: моделювання електромагнітних полів, руху частинок, візуалізація хвиль — усе це сприяє глибшому розумінню складних тем.

3.4. Педагогічний експеримент

У сучасному навчальному процесі особливу увагу слід приділяти розвитку аналітичного мислення учнів, зокрема шляхом застосування математичних методів під час розв'язування фізичних задач. Такий підхід не лише зміцнює міжпредметні зв'язки, а й поглиблює розуміння учнями як

фізичних процесів, так і принципів математичного аналізу.

Для реалізації поставлених завдань було проведено педагогічний експеримент. Його мета — **науково обґрунтовано перевірити гіпотезу** щодо доцільності активного використання математичних методів у курсі фізики. Експериментальні заняття було організовано під час педагогічної практики в Луцькому ліцеї №27 Луцької міської ради в 8-А, 8-Б та 8-В класах. Учням було запропоновано завдання, які передбачали:

- аналіз графіків фізичних процесів;
- розв’язання задач із використанням квадратних та лінійних рівнянь;
- застосування елементів диференціального числення;
- математичне моделювання ситуацій (рух тіла, зміна температури, коливальні процеси).

Результати експерименту

Результати анкетування та тестування показали:

- Лише 20 % учнів повністю впоралися із завданням, продемонструвавши навички аналізу графіків та розв’язування задач математичними способами
- 40 % частково володіють елементами аналізу, але не змогли застосувати математичні методи у повному обсязі.
- 30 % учнів виявили значні труднощі.

Це свідчить про потребу **систематичного навчання учнів математичній підтримці курсу фізики** — поступового введення понять функцій, похідних, рівнянь, що мають безпосереднє практичне застосування.

Висновки та освітні перспективи

Використання широкого спектру математичних методів у фізиці дозволяє:

1. **Поглибити розуміння фізичних процесів** шляхом математичного аналізу.
2. **Сформувати міжпредметні зв’язки** та закріпити знання з математики на практиці.

3. **Навчити учнів мислити логічно й системно, аналізувати причинно-наслідкові зв'язки.**
4. **Забезпечити диференціацію навчання, адаптуючи завдання під рівень кожного учня.**
5. **Розвивати дослідницькі та проектні навички через створення математичних моделей реальних фізичних явищ.**

ВИСНОВКИ

Застосування математичних методів у процесі розв’язування фізичних задач є важливим чинником підвищення якості засвоєння фізичних знань та формування в учнів цілісного наукового світогляду. Особливе місце серед таких методів займають графічні способи подання й аналізу фізичних процесів, оскільки вони забезпечують наочність, доступність і глибше розуміння суті фізичних явищ.

Проведений аналіз методичних систем навчання фізики засвідчив, що дидактичні можливості математичних, зокрема графічних, методів розв’язування фізичних задач у шкільній практиці використовуються недостатньо та потребують цілеспрямованого й системного впровадження.

- Використання математичних методів, зокрема графіків, функціональних залежностей і елементів математичного моделювання, у процесі розв’язування фізичних задач сприяє не лише глибшому засвоєнню навчального матеріалу, а й розвитку в учнів умінь аналізувати, узагальнювати та творчо застосовувати отримані знання.
- Запропонована в роботі методика використання графічних методів у розв’язуванні фізичних задач довела свою ефективність, оскільки забезпечує підвищення рівня сформованості навчальних умінь, покращення якості розуміння фізичних закономірностей та оптимізацію процесу навчання.
- Систематичне застосування графічних і інших математичних методів у навчанні фізики сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення учнів, формуванню міжпредметних зв’язків між фізикою та математикою, а також підвищує пізнавальний інтерес до вивчення фізики.
- Результати дослідження можуть бути використані у практиці навчання фізики в закладах загальної середньої освіти, а також при вивченні суміжних дисциплін, насамперед математики, що сприяє реалізації міжпредметної інтеграції та компетентнісного підходу в освіті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бар'яхтар В. Г. Фізика : підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти / В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова, С. О. Довгий, М. М. Кірюхін, О. О. Кірюхіна ; за ред. С. О. Довгого. Х. : Вид-во «Ранок», 2025. 309 с
2. Бенедисюк М. М. Задачі з фізичним змістом на уроках математики як можливість інтеграції шкільних курсів математики та фізики. *Теоретико-методичні аспекти навчання математичних дисциплін* : монографія / ред. А. Прус. Житомир, 2018. С. 103–134.
3. Величко С. П. Графічний метод дослідження природних явищ у навчанні фізики: Навч. посібник для студ. пед. вищих навч. закладів освіти. Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2002. 167 с.
4. Види міжпредметних зв'язків. StudFiles. URL: <https://studfile.net/preview/5603100/page:3/>
5. Використання елементів STEM-освіти на уроках математики. Збірник матеріалів роботи творчої групи викладачів математики. Рівне: НМЦ ПТО, 2019. 95 с.
6. Всеукраїнські олімпіади з фізики / За ред. Кременського Б.—Львів: Євросвіт, 2006.—32 с.
7. Головіна, Н., Кобель, Г. (2021) Задачі-моделі й моделі до задач. *Фізика та освітні технології*, 2, 16–22, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2021-2-3>
8. Гуревич Р., Коломієць А. Роль інтеграції навчальних знань у гуманізації технічної освіти // *Неперервна професійна освіта: Теорія і практика* / Науково-методичний журнал. 2002. Вип. 3(7). С.45-54.
9. Засипко А. В. Інноваційні форми і методи позакласної роботи Математика в школах України. Позакласна робота. 2015. № 1. С. 2-5.
- 10.Зубач І.В., Кобель Г. П. Історичні фізичні задачі. *Теоретичні та практичні аспекти розвитку науки та освіти*: матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 15-16 липня 2025 року. Львів : Львівський науковий форум, 2025. С. 110-112. <http://lviv-forum.inf.ua/save/2025/15-16.07/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf>
- 11.Зубач І.В., Кобель Г. П. Математичні методи розв'язування фізичних задач. *Теоретичні та практичні аспекти розвитку науки та освіти*: матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 15-16 липня 2025 року. Львів : Львівський науковий форум, 2025.С. 113-116. <http://lviv-forum.inf.ua/save/2025/15->

- [16.07/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA.p
df](#)
- 12.Ілляшенко В.Я. Удосконалення професійної підготовки вчителя фізики // Матеріали VII Всеукраїнської наукової конференції „Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики». Київ: НПУ, 2002. С.36.
 - 13.Кобель Г.П., Головіна Н.А. Математичні методи у фізичних задачах. *Матеріали науково-практичної конференції, присвяченої 130-річчю від дня народження М.П. Кравчука* (11 жовтня 2022 року). Луцьк, 2022. С23-25.
 - 14.Кобель Г.П., Головіна Н.А. Експоненціальна залежність у фізичних задачах. *Зб.наукових праць Кам'янець-Подільського у-ту імені Івана Огієнка. Серія педагогічна.* В.27. 2021. С.150–153.
<https://doi.org/10.32626/2307-4507.2021-27> <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2021-27.150-153>
 15. Кобель Г.П., Савош В.О. Готовність учителя фізики до організації самостійного розв’язування старшокласниками фізичних задач засобами математичного моделювання//*Професійний розвиток педагогів в умовах освітнього середовища (теоретико-прикладний аспект): колективна монографія/* за ред. П.С.Олешка, Н.М. Ткачук. Луцьк:КП ІАЦ «Волинський енергосфот», 2019.С.275-282.
 - 16.Кобель Г.П., Савош В.О. Олімпіадні задачі з фізики (обласна учнівська олімпіада з фізики: Волинська область, 2015-2019 навч. рік). Луцьк: Вежа-Друк, 2020. 96 с.
 - 17.Корсун І. В., Бачинський Ю. Г. Міжпредметні зв’язки як засіб формування пізнавального інтересу учнів до фізики. *Підготовка майбутніх учителів фізики, хімії. Біології та природничих наук у контексті вимог Нової української школи* : матеріали міжнародної науково-практичної конференції (20-21 травня 2019 р., м. Тернопіль). Тернопіль : Вектор, 2019. С. 34-36
 - 18.Курносенко О. В. STEM-освіта: проблеми та напрямки впровадження
[URL:http://tsiurupynskschool2.edukit.kherson.ua/distancijne_navchannya/mo
vch
iteliv_fizikomatematichnih_nauk/stemosvita_problemi_ta_napryamki_vprovad
zhe_nnya/](http://tsiurupynskschool2.edukit.kherson.ua/distancijne_navchannya/mo
vch
iteliv_fizikomatematichnih_nauk/stemosvita_problemi_ta_napryamki_vprovad
zhe_nnya/)
 - 19.М. В. Головка, «Проблеми формування змісту базового курсу фізики та методики його реалізації в гімназії». *Проблеми сучасного підручника: зб. наук. праць*, О.М. Топузов, Ред., Київ, Україна: Педагогічна думка, 2018,

Вип. 21, С. 92-104.

- 20.. М. В. Головка, Л. В.Непорожня, В. В. Коваль, Ю. С. Мельник, В. В. Сіпій, *Фізика. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів*, Київ, Україна: Видавничий дім «Сам», 2017, 322 с
- 21.Савош, В., & Кобель, Г. (2023). Комплексне використання засобів моделювання у процесі реалізації енергетичного підходу до розв'язування фізичних задач. *Фізика та освітні технології*, (4), 21–27. <https://doi.org/10.32782/pet-2023-4-3>
- 22.Савош, В.О., Кобель Г.П., Головіна Н.А., Муляр В.П., Тематичне ФІН-моделювання у процесі розв'язування експериментальних задач з фізики. *«Актуальні питання у сучасній науці» Серія «Педагогіка»*, 2025. № 8(38). С. 1419 – 1428. [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-8\(38\)-](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-8(38)-)
- 23.Садовий М. І. Програмні компетентності майбутніх фахівців спеціальності 014 «Середня освіта (природничі науки)» : зміст та особливості формування. Зб. наук. пр. Кам'янець-Поділ. нац. ун-ту ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна / Кам'янець-Поділ. держ. ун-т ім. Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2018. Вип. 24. С. 27-30.
- 24.Сергієнко В.П., Шут М.І. Проблеми вивчення загальної фізики в системі професійної підготовки вчителя // VII Всеукраїнська наукова конференція „Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики» / Матеріали конф. Київ: НПУ, 2002. С.27.
- 25.Скубій Т.В., Сергієнко В.П. Розв'язування навчальних задач з фізики: питання теорії і методики / За заг. ред. Є.В. Коршака. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. –185 с
- 26.Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи. Матеріали IV Міжнародної науковопрактичної Інтернет-конференції (м. Тернопіль, 7–8 листопада, 2019), 193 с.
- 27.Упровадження STEM-освіти в умовах інтеграції формальної і неформальної освіти обдарованих учнів: методичні рекомендації / Н.І.Поліхун, К. Г. Постова, І. А. Сліпухіна, Г. В. Онопченко, О.В.Онопченко. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2019. 80 с
28. Фізика : підруч. для 7 кл. закл. загал. серед. освіти / [В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова, С. О. Довгий, М. М. Кірюхін, О. О. Кірюхіна] ; за ред. С. О. Довгого. Х. : Вид-во «Ранок», 2024. 272 с.
- 29.Фізика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Бар'яхтар В. Г. та ін.; за ред. В. Г. Бар'яхтара, С. О. Довгого. Харків: Вид-во «Ранок», 2017. 272 с.
- 30.Фізика (рівень стандарту, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Локтева В. М.) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [В. Г. Бар'яхтар, С. О. Довгий, Ф. Я. Божинова, О. О. Кірюхіна] ; за ред. В. Г. Бар'яхтара, С. О. Довгого. Харків : Вид-во

- «Ранок», 2018. 272 с.
31. Фізика (рівень стандарту, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Локтева В. М.) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / [Бар'яхтар В. Г., Довгий С. О., Божинова Ф. Я., Кірюхіна О. О.] ; за ред. Бар'яхтара В. Г. Довгого С. О. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. 272 с.
 32. Шишкін Г.О. Теоретичні і методичні засади інтеграції змісту дисциплін природничо-математичного і професійного циклів підготовки майбутніх учителів технологій : автореф. дис... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ, 2015. 43 с.
 33. Шмигер Г. П., Василенко Я. П. Деякі аспекти впровадження STEM-освіти в навчальний процес. STEM-освіта та шляхи її впровадження в навчально-виховний процес: збірник матеріалів І регіональної науковопрактичної веб-конференції, Тернопіль, 24 травня 2017 р. Тернопіль : ТОКШПО, 2017. С. 29-33.
 34. Янушевич О. В. Інтерактивні методи у педагогічному процесі профільного ліцею : інтегративний підхід. Проблеми інтеграції у сучасній професійній освіті : методологія, теорія, практика : монографія / за ред. І. Козловської, Я. Кміта. Львів : Сполом, 2004. С. 173-180.

Анотація

Зубач І. В. Математичні методи розв'язування фізичних задач.

У даній магістерській роботі обґрунтовано необхідність ефективного використання математичних методів у процесі розв'язування фізичних задач у шкільному курсі фізики. Проаналізовано роль міжпредметних зв'язків фізики та математики у формуванні цілісного наукового мислення учнів.

Підібрано та систематизовано фізичні задачі, розв'язування яких передбачає застосування різних математичних методів, що можуть бути використані на різних типах уроків фізики.

Цей матеріал буде корисний як молодим вчителям, вчителям зі стажем, так і студентам педагогічних вузів.

Annotation

Zubach I. V. Mathematical methods for solving physical problems.

This master's thesis substantiates the need for effective use of mathematical methods in the process of solving physical problems in the school physics of course. The role of interdisciplinary connections between physics and mathematics in the formation of holistic scientific thinking of students is analyzed.

Physical problems are selected and systematized, the solution of which involves the use of various mathematical methods that can be used in different types of physics lessons.

This material will be useful for both young teachers and teachers with experience, as well as students of pedagogical educational institutions.