

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

МАЗУРОК ВІТАЛІЙ ЯРОСЛАВОВИЧ
НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК ОКСАНА
ВОЛОДИМИРІВНА,

кандидат фізико-математичних наук,
доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від _____ 20__ р.

Завідувач кафедри

доц. Федунік-Яремчук О.В. _____

Луцьк – 2025

ЗМІСТ

ЗМІСТ.....	2
ВСТУП	3
Розділ 1. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ.....	5
1.1. Доведення нерівностей за допомогою означення	5
1.2. Аналітичний метод доведення нерівностей	6
1.3. Доведення нерівностей методом від супротивного	10
1.4. Метод підсилення при доведенні нерівностей	12
1.5. Доведення нерівностей методом математичної індукції.....	20
РОЗДІЛ 2. НЕСТАНДАРТНІ ПРИЙОМИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ...	27
2.1. Застосування методів векторної алгебри	27
2.2. Використання похідної для доведення нерівностей	29
2.3. Застосування і оцінка площі	33
2.4. Використання інтеграла для доведення нерівностей	36
2.5. Оцінка області визначення множини значень	37
ВИСНОВКИ.....	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	41

ВСТУП

Нерівності є одним із фундаментальних інструментів сучасної математики. Вони широко застосовуються в математичному аналізі, алгебрі, теорії чисел, теорії ймовірностей, оптимізації, а також у прикладних галузях науки і техніки. За допомогою нерівностей здійснюється оцінювання величин, досліджуються властивості функцій, доводиться збіжність числових послідовностей і рядів, аналізується поведінка розв'язків рівнянь та нерівностей.

Попри велику кількість відомих нерівностей і класичних прийомів їх доведення, значна частина задач не розв'язується без застосування спеціальних, нетривіальних міркувань. У таких випадках стандартні алгебраїчні перетворення або безпосереднє використання означень виявляються недостатніми або надмірно громіздкими. Це зумовлює необхідність залучення інших підходів, що ґрунтуються на ідеях векторної алгебри, аналізу функцій, геометричних інтерпретацій, інтегральних оцінок та інших методів.

Актуальність дослідження зумовлена потребою систематизації та поглибленого аналізу методів доведення нерівностей, які виходять за межі стандартних підходів. Застосування таких методів дозволяє не лише спростити доведення складних нерівностей, а й розкрити їх глибинну структуру та зв'язок із різними розділами математики. Крім того, володіння цими методами є важливим для підготовки фахівців з математики, оскільки вони широко використовуються в наукових дослідженнях, олімпіадних задачах та викладанні математичних дисциплін.

Метою магістерської роботи є систематичне дослідження та узагальнення ефективних методів доведення нерівностей, що не належать до класичних алгоритмічних підходів, а також ілюстрація можливостей їх застосування на конкретних прикладах.

Для досягнення поставленої мети в роботі передбачено розв'язання таких завдань:

- проаналізувати основні класичні методи доведення нерівностей та визначити межі їх застосування;
- дослідити методи доведення нерівностей, що ґрунтуються на використанні векторної алгебри;
- розглянути застосування похідної, монотонності функцій при доведенні нерівностей;
- проаналізувати геометричні підходи та застосування інтегралів до доведення нерівностей;
- продемонструвати ефективність розглянутих методів на прикладах різної складності.

Об'єктом дослідження є алгебраїчні нерівності з дійсними змінними.

Предметом дослідження є методи та прийоми доведення нерівностей, що базуються на нестандартних підходах.

У роботі використовуються **методи** алгебраїчних перетворень, методи математичного аналізу, елементи векторної алгебри, геометричні міркування, інтегральні оцінки, а також метод математичної індукції.

Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглянуто класичні методи доведення нерівностей та наведено відповідні приклади. Другий розділ присвячено аналізу та застосуванню нестандартних прийомів доведення нерівностей із використанням різних математичних підходів.

Розділ 1. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

1.1. Доведення нерівностей за допомогою означення

За означенням говорять, що

$$a > b \quad (a < b),$$

якщо різниця $a - b$ є додатним (відповідно від'ємним) числом. Тому, щоб довести нерівність

$$f(a, b, \dots, k) > g(a, b, \dots, k)$$

для всіх допустимих значень змінних $a, b, \dots, k$, достатньо розглянути вираз:

$$f(a, b, \dots, k) - g(a, b, \dots, k)$$

і показати, що він набуває додатних значень на цій множині. Той самий підхід застосовується і для нерівностей інших типів:

$$f < g, \quad f \geq g, \quad f \leq g,$$

де замість знаку «більше» треба відповідно показати від'ємність або невід'ємність різниці.

Приклад 1.1.1. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення. Розглянемо різницю $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ і покажемо, що вона не може бути від'ємною. Маємо:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Очевидно, що вираз $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ не може бути від'ємним при довільних

невід'ємних значеннях a та b . Тому різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ невід'ємна. Це означає,

що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Відмітимо, що знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Приклад 1.1.2. Довести, що $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi > 2a + 12b + 6c$.

Доведення. Утворимо різницю:

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 10 + \pi - (2a + 12b + 6c).$$

і покажемо, що вона додатна. Перегрупувавши доданки, дістаємо:

$$\begin{aligned} (a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + \pi - 3 = \\ = (a - 1)^2 + (2b - 3)^2 + 3(c - 1)^2 + \pi - 3. \end{aligned}$$

Очевидно, що одержаний вираз додатний при довільних значеннях a, b та c . Нерівність доведена.

Приклад 1.1.3. Довести, що якщо $a + b + c \geq 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Доведення. Перетворимо різницю $a^3 + b^3 + c^3 - 3ab$ наступним чином:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = \\ &= (a + b + c)((a + b)^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2). \end{aligned}$$

Оскільки за умовою $a + b + c \geq 0$, то одержаний вираз не може бути від'ємним. Це завершує доведення нерівності. Знак рівності можливий у випадках, коли $a + b + c = 0$ та $a = b = c$.

1.2. Аналітичний метод доведення нерівностей

Іноді застосування стандартних методів доведення нерівностей не дає бажаного результату. Це може статися через надто складні перетворення, які роблять доведення "за означенням" практично нереалізованим, або через те, що

для синтетичного методу важко підібрати відповідні базові нерівності, з яких варто почати міркування.

У таких ситуаціях одним із можливих шляхів є використання аналітичного методу.

Його ідея полягає в тому, що ми послідовно перетворюємо початкову нерівність, доки не дійдемо до очевидного істинного твердження. Логічно це виглядає як ланцюжок імплікацій:

$$B \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n,$$

де B - нерівність, яку потрібно довести, A_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) - отримані з неї нерівності, A_n - кінцева правильна нерівність. Такий процес називають аналізом Евкліда. Проте знайдення істинного твердження A_n саме по собі не завершує доведення. Імплікація $B \rightarrow A_n$ може бути істинною навіть тоді, коли саме B є хибним. Тому потрібно показати, що всі перетворення можна виконати у зворотному порядку. Тобто має бути справджено:

$$A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow B.$$

На цьому етапі ми вже фактично застосовуємо синтетичний метод, але тепер початкова "опорна" нерівність (тобто A_n) нам уже відома й перевірена як істинна.

Приклад 1.2.1. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ виконується нерівність:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення. Виконаємо наступні перетворення даної нерівності:

$$a+b \geq \sqrt{ab},$$

$$\sqrt{(a)^2} + \sqrt{(b)^2} - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0,$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Одержана нерівність правильна для довільних $a \geq 0, b \geq 0$. Тепер очевидно, що з неї можна одержати попередню нерівність, з якої в свою чергу – нерівність, що потрібно було довести.

Приклад 1.2.2. Довести, що для довільних чисел $a \geq 0, b \geq 0$ виконується нерівність:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3.$$

Доведення. Очевидно, що якщо $a + b = 0$, то виконується рівність і твердження вірне. При $a + b \neq 0$ задача зводиться до доведення нерівності

$$a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ або нерівності } 3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 0, \text{ яка очевидна.}$$

Приклад 1.2.3. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ виконується нерівність

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b.$$

Доведення. Після піднесення до квадрату обох частин нерівності, маємо

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 \leq (a + b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2.$$

Отримуємо правильну нерівність $2ab \geq 0$. Очевидно, що крім неї, істинною буде і кожна з попередніх нерівностей

Приклад 1.2.4. Довести, що для довільних $a > 0, b > 0$ виконується нерівність:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Доведення. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Звідси отримуємо

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0.$$

Одержана нерівність відповідно до умови задачі вірна, і з неї тепер можна отримати всі попередні нерівності у зворотному порядку, а серед них – і задану.

Приклад 1.2.5. Довести нерівність:

$$x^8 + x^4 + 1 \geq 3x^4.$$

Доведення. Виконаємо наступні перетворення виразу:

$$x^8 + x^4 + 1 - 3x^4 \geq 0,$$

$$x^8 - 2x^4 + 2 \geq 0,$$

$$(x^4 - 1)^2 \geq 0.$$

Одержаний вираз не може бути від'ємним, що доводить задану нерівність.

Очевидно, що знак рівності буде тільки у випадку, коли $x = \pm 1$.

Приклад 1.2.6. Знайти найменше значення функції:

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4).$$

Розв'язання. Перетворимо вираз, перемножуючи два крайні та два середні множники:

$$f(x) = [(x + 1)(x + 4)] \cdot [(x + 2)(x + 3)] =$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) =$$

$$= (x^2 + 5x + 5 - 1)(x^2 + 5x + 5 + 1) = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1.$$

Очевидно, що значення функції буде найменшим, коли найменшим є перший доданок, тобто при тих значеннях x , які є коренями рівняння:

$$x^2 + 5x + 5 = 0.$$

Знаходимо $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$. При знайдених значеннях

$$f_{\min} = f\left(\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = -1.$$

Таким чином, виконується нерівність

$$-1 \leq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

1.3. Доведення нерівностей методом від супротивного

Доведення нерівностей цим способом полягає в тому, що заперечується початкове твердження, тобто знак $> (\geq, <, \leq)$ у нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно $<, \geq, >$). Після цього обґрунтовують, що таке співвідношення неможливе.

Приклад 1.3.1. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, виконується нерівність:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Доведення. Припустимо, що при деяких значеннях параметрів a, b, c та d виконується нерівність:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Після піднесення до квадрату обох невід'ємних частин нерівності та очевидних спрощень, одержуємо:

$$ad + bc < 2\sqrt{abcd} \text{ або } \frac{ad + bc}{2} < \sqrt{(ad)(bc)},$$

що суперечить нерівності Коші.

Отже, наше припущення хибне. А це доводить початкову нерівність. Рівність можлива, якщо для заданих чисел виконується умова $ad = bc$.

Приклад 1.3.2. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ та $b \geq 0$, виконується нерівність:

$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Доведення. Припустимо, що існує набір невід'ємних чисел a, b та c , для яких виконується нерівність:

$$\frac{a + b + c}{3} > \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Піднесемо до квадрату невід'ємні частини нерівності. Одержуємо

$$(a + b + c)^2 > 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

звідки дістанемо:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0$$

або

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0,$$

що неможливо, оскільки сума квадратів дійсних чисел не може бути від'ємною.

Отже, наше припущення невірне. Це доводить початкову нерівність. Рівність досягається, якщо $a = b = c$.

Отримане співвідношення не виконується при жодних значеннях змінних, що задовольняють умову задачі. Таким чином, початкове припущення є невірним. Отже, задане число додатне.

Приклад 1.3.3. Довести, що для всіх дійсних значень x виконується нерівність

$$(x - 6)(x - 9)(x - 5x + 4) + 73 + x^4 \geq 10x.$$

Доведення. Нехай

$$G(x) = (x - 6)(x - 9)(x - 5x + 4) + 73 + x^4 - 10x.$$

Перетворимо вираз у лівій та правій частині нерівності наступним чином:

$$(x - 6)(x - 9)(x^2 - 5x + 4) + 73 - 10x \geq 0,$$

$$[(x - 1)(x - 9)] \cdot [(x - 4)(x - 6)] + (x^2 - 10x) + 73 \geq 0,$$

$$(x^2 - 10x + 9)(x^2 - 10x + 24) + (x^2 - 10x) + 73 \geq 0.$$

Нехай $t = x^2 - 10x$. Тоді

$$t(t + 9)(t + 24) + t + 73 \geq 0,$$

$$t^2 + 24t + 9t + 216 + t + 73 = t^2 + 34t + 289 \geq 0,$$

$$(t + 17)^2 \geq 0.$$

Повертаючись до заміни:

$$(x^2 - 10x + 17)^2 \geq 0.$$

$$(t^2 - 10x + 9)(x^2 - 5x + 4) + 73 - 10x \geq 0$$

Очевидно, що одержане співвідношення неможливе, а це говорить про невірність припущення і доводить задану нерівність.

1.4. Метод підсилення при доведенні нерівностей

Нехай нам потрібно довести нерівність $A > B$, де A, B - деякі числові вирази або вирази із змінними. Вважатимемо, що є очевидною, або легко доводиться нерівність $A_1 \geq B_1$. Якщо нам вдається довести нерівності $A > A_1$ та $B_1 > B$, то, очевидно, що задача буде розв'язаною. Це впливає з ланцюжка нерівностей $A > A_1 \geq B_1 > B$. Іноді такий ланцюжок може бути довшим, а іноді навіть коротшим, якщо $A_1 = B_1$.

Наприклад, щоб довести числову нерівність $\log_{10} 7 > \log_{2013} 2012$, достатньо зауважити, що $\log_{10} 7 > 1$, а $\log_{2013} 2012 < 1$.

Такий прийом у доведеннях нерівностей називають методом підсилення.

При застосуванні цього методу часто використовують співвідношення:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \text{ звідки } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0,$$

$$\text{або } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ при } ab > 0,$$

$$\frac{a^2}{b} \geq 2a - b \text{ при } b > 0, \text{ або } \frac{a^2}{b+1} > \frac{a^2}{b} \text{ при } a > 0, b > 0.$$

Приклад 1.4.1. Довести нерівність:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) = \\ & = \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right) \left(\frac{3^2 - 1}{3^2}\right) \dots \left(\frac{2013^2 - 1}{2013^2}\right) = \\ & = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \dots \frac{(2013-1)(2013+1)}{2013^2} = \\ & = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{2012 \cdot 2014}{2013^2} = \\ & = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2012) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 2014)}{(2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2013)^2} = \\ & = \frac{1}{2013} \cdot \frac{2014}{2} = \frac{2014}{4026} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 1.4.2. Довести, що при $n = 2, 3, 4, \dots$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Доведення. Маємо:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ при } n \geq 2.$$

Зокрема,

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

...

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Додаючи дані нерівності, дістанемо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \\ & < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \\ & = 1 - \frac{1}{n} < 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Приклад 1.4.3. Довести нерівність:

$$43 < \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2013}} < 44.$$

Доведення. Позбудемося ірраціональності у знаменниках дробів. Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012} + \sqrt{2013}} =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{2013} - \sqrt{2012}) = \\
&= \sqrt{2013} - \sqrt{1} = \sqrt{2013} - 1.
\end{aligned}$$

Для доведення нерівності залишається зауважити, що

$$\sqrt{2013} - 1 < \sqrt{45^2} - 1 = 45 - 1 = 44,$$

звідки

$$\sqrt{2013} - 1 = 43.$$

Приклад 1.4.4. Для додатних чисел a, b довести нерівність:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b.$$

Доведення. Використовуючи двічі нерівність $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$, де $x > 0, y > 0$,

отримуємо

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq (2a - b) + (2b - a) = a + b,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 1.4.5. Довести нерівність:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} > 5.$$

Доведення. Очевидні нерівності:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{513} + \frac{1}{514} + \dots + \frac{1}{1024} > \frac{512}{1024} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1025} + \frac{1}{1026} + \dots + \frac{1}{2013} > 0.$$

Додаючи їх та перший доданок, тобто $\frac{1}{2}$, дістаємо потрібну нерівність.

Приклад 1.4.6. Порівняти числа $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ та $2\sqrt{n}$ при $n \geq 1$.

Розв'язання. Порівняємо квадрати цих додатних чисел, тобто вирази

$$(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 \text{ та } (2\sqrt{n})^2:$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 &= n-1 + n+1 + 2\sqrt{(n-1)(n+1)} = \\ &= 2n + 2\sqrt{n^2-1}, \end{aligned}$$

$$(2\sqrt{n})^2 = 4n = 2n + 2n = 2n + 2\sqrt{n^2}.$$

Очевидно, що $\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2}$ (при $n \geq 1$), тому

$$2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2\sqrt{n^2}.$$

Звідси випливає, що $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}$.

Приклад 1.4.7. Довести нерівність:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2},$$

при $a, b, c, d \geq 0$.

Доведення. Обидві частини нерівності невід'ємні, тому піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\geq \\ &\geq (a+c)^2 + (b+d)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\geq \\ &\geq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2, \end{aligned}$$

$$2\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \geq 2ac + 2bd,$$

$$\sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} \geq ac + bd.$$

Знову піднесемо до квадрата обидві невід'ємні частини нерівності:

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2,$$

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2,$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd,$$

$$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0,$$

$$(ad - bc)^2 \geq 0.$$

Остання нерівність є очевидною, оскільки квадрат дійсного числа завжди невід'ємний. Рівність досягається, якщо $ad = bc$.

Приклад 1.4.8. Довести нерівність:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \leq 1,$$

при $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Маємо n доданків:

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$

...

$$\frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Додаючи ці нерівності, отримуємо

$$S_n \leq \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Отже, $S_n \leq 1$. Рівність досягається лише при $n = 1$.

Приклад 1.4.9. Довести нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

при $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Розглянемо кожен доданок: $\frac{1}{\sqrt{k}}$. Скористаємося очевидною нерівністю:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Для доведення цієї нерівності, піднесемо обидві частини до квадрата (оскільки вони додатні):

$$\frac{1}{k} > 4(k+1+k-2\sqrt{k(k+1)}) = 4(2k+1-2\sqrt{k^2+k}).$$

Це еквівалентно

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

або

$$\frac{1}{2}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) > \sqrt{k}.$$

Остання нерівність правильна, бо

$$\sqrt{k+1} > \sqrt{k}.$$

Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}),$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Додаючи ці нерівності, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} &> \\ > 2[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] = \\ &= 2(\sqrt{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Оскільки $2(\sqrt{n+1} - 1) > \sqrt{n}$, то

$$2\sqrt{n+1} - 2 > \sqrt{n},$$

$$2\sqrt{n+1} > 2 + \sqrt{n},$$

$$(2\sqrt{n+1})^2 > (2 + \sqrt{n})^2,$$

$$4(n+1) > 4 + 4\sqrt{n} + n,$$

$$4n + 4 > 4 + 4\sqrt{n} + n,$$

$$3n > 4\sqrt{n}.$$

Піднесемо до квадрату (при $n \geq 1$ обидві частини додатні):

$$3n > 4\sqrt{n} > 16n,$$

$$9n > 16.$$

Ця нерівність є невірною для $n = 1$, але вірна для $n \geq 2$. Для $n = 1$ вихідна нерівність вірна: $\frac{1}{\sqrt{1}} > \sqrt{1}$.

Приклад 1.4.10. Довести нерівність:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

при $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, піднесемо їх до квадрата:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2),$$

$$a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2,$$

$$0 \leq 2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2,$$

$$0 \leq a^2-2ab+b^2,$$

$$0 \leq (a-b)^2.$$

Остання нерівність є очевидною. Отже, початкова нерівність доведена. Рівність досягається, коли $a = b$.

1.5. Доведення нерівностей методом математичної індукції

Метод математичної індукції спирається на спеціальний принцип, який є однією з аксіом натуральних чисел. Суть цього принципу така: твердження $A(n)$ буде істинним для всіх натуральних чисел n , якщо виконуються дві умови:

1) твердження $A(1)$ істинне (тобто воно правильне для першого натурального числа).

2) якщо припустити, що твердження $A(k)$ істинне для деякого натурального числа k , то з цього має випливати, що істинним буде й твердження $A(k + 1)$.

Доведення за допомогою математичної індукції складається з трьох кроків:

1. спочатку показують, що твердження правильне для $n = 1$;
2. потім припускають правильність твердження для $n = k$ і на основі цього доводять правильність для $n = k + 1$;
3. після цього роблять висновок, що твердження правильне для всіх натуральних n .

Існує також узагальнений варіант принципу індукції. Згідно із ним твердження $A(n)$ є істинним для всіх натуральних чисел $n \geq m$, якщо:

- 1) воно правильне для числа $n = m$;
- 2) якщо з істинності $A(k)$ при будь-якому $k \geq m$ випливає істинність $A(k + 1)$.

Приклад 1.5.1. Довести, що для довільних $a \geq 0, b \geq 0$ та натурального числа n виконується нерівність:

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}.$$

Доведення. Очевидно, що при $n = 1$ виконується рівність, тому дане твердження вірне. Нехай воно істинне при деякому натуральному числі $k = n$, тобто вірно, що

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt[k]{\frac{a^k + b^k}{2}}.$$

Користуючись цим припущенням, покажемо, що правильною є також нерівність:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[k+1]{\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}}.$$

Оскільки ліва частина, згідно з припущенням, обмежена виразом:

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt[k+1]{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}} = \sqrt[k+1]{\frac{a+b}{2} \left(\frac{a+b}{2}\right)^k} \leq \sqrt[k+1]{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2}},$$

то для доведення достатньо показати, що

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k + b^k}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}.$$

Для цього розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} & (a+b)(a^k + b^k) - 2(a^{k+1} + b^{k+1}) = \\ & = ab^k + ba^k - a^{k+1} - b^{k+1} = (a^k - b^k)(b - a). \end{aligned}$$

Одержаний вираз при $a \geq 0, b \geq 0$ завжди від'ємний або дорівнює 0 (при $a = b$), тому

$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Згідно з принципом математичної індукції вірною є також початкова нерівність

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}.$$

Приклад 1.5.2. Довести, що для довільного натурального числа $n \geq 10$:

$$2^n > n^3 + 23.$$

Доведення. При $n = 10$ отримуємо нерівність $2^{10} - 10^3 > 23$, яка правильна. Нехай вона виконується при деякому натуральному числі $k \geq 10$, тобто виконується нерівність $2^k > k^3 + 23$. Користуючись цим припущенням,

покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1} > (k+1)^3 + 23$. Дійсно, за індуктивним припущенням:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - ((k+1)^3 + 23) &= 2 \cdot 2^k - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 23) > \\ &> 2 \cdot (k^3 + 23) - k^3 - 3k^2 - 3k - 24 = k^3 - 3k^2 - 3k + 22. \end{aligned}$$

Оцінимо вираз

$$f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 22.$$

Функція

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 22$$

має похідну

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

та екстремуми у точках $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, причому на проміжку $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$ виконується $f'(x) > 0$. Переконавшись, що $f(10) > 0$, можемо стверджувати, що при $k \geq 10$ виконується нерівність:

$$f(k) = k^3 - 3k^2 - 3k - 22 > 0.$$

Посилання на принцип математичної індукції завершує доведення.

Приклад 1.5.3. Довести, що $2^n > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 5$.

Доведення. При $n = 5$ отримуємо нерівність $2^5 > 25$, яка вірна. Нехай вона вірна при деякому натуральному числі $k \geq 5$, тобто виконується нерівність $2^k > k^2$. Користуючись цим припущенням, покажемо, що вірною є також нерівність $2^{k+1} > (k+1)^2$. Маємо:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k - k^2 - 2k - 1 > \\ &> 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1. \end{aligned}$$

Оскільки $k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1 > 0$ при $k \geq 5$. На основі принципу математичної індукції стверджуємо, що задана в умові нерівність вірна.

Приклад 1.5.4. Довести, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ та для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ виконується нерівність

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Доведення. При $n = 2$ нерівність $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$ вірна. Справді, вона вірна у випадку, коли одне з чисел (або обидва) рівні 0 чи у випадку, коли обидва числа додатні або обидва від'ємні, виконується знак рівності. Якщо ж числа різних знаків, то дійсно строго нерівність. Можливі й інші доведення цього факту, наприклад, аналітичним методом або методом доведення від супротивного.

Нехай нерівність вірна при деякому натуральному $k + 1$, тобто виконується співвідношення

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{k+1}|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & |a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} + a_{k+2}| = \\ & = |(a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}) + a_{k+2}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}| + |a_{k+2}| \leq \\ & \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{k+1}| + |a_{k+2}|. \end{aligned}$$

згідно з принципом математичної індукції, завершує доведення.

Приклад 1.5.5. Довести, що для $x > -1$ при всіх натуральних n виконується нерівність $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (нерівність Бернуллі).

Доведення. При $n = 1$ виконується знак рівності, тому твердження вірне. Нехай виконується нерівність $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

Тоді

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) = \\ &= 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2. \end{aligned}$$

Оскільки $kx^2 \geq 0$, то $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$. Отже, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність вірна.

Приклад 1.5.6. Довести методом математичної індукції, що при $n \geq 2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Доведення. При $n = 2$ отримуємо вірну числову нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$.

Припустимо, що вірна нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ і покажемо, що

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Із припущення маємо $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$. Покажемо, що

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Аналізуючи різницю квадратів лівої та правої частин, дістанемо:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)^2 - (\sqrt{k+1})^2 &= k + \frac{1}{k+1} + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} - (k+1) = \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{k}\sqrt{k+1} - (k+1)}{k+1}. \end{aligned}$$

Оскільки $2\sqrt{k}\sqrt{k+1} > 2k$ при $k \geq 1$, то

$$1 + 2\sqrt{k}\sqrt{k+1} - (k+1) > 1 + 2k - k - 1 = k > 0.$$

Отже, відповідно до принципу математичної індукції, нерівність доведена.

Приклад 1.5.7. Довести, що при $n \geq 2$:

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}.$$

Доведення. При $n = 2$ отримуємо вірну числову нерівність:

$$2^2 > 1 + 2\sqrt{2}.$$

Припустимо, що виконується нерівність $2^k > 1 + k\sqrt{2^{k-1}}$.

Покажемо, що звідси випливає вірність співвідношення

$$2^{k+1} > 1 + (k+1) \cdot \sqrt{2^k}.$$

Маємо

$$\begin{aligned}2^{k+1} - 1 - (k + 1) \cdot \sqrt{2^k} &= 2 \cdot 2^k - 1 - (k + 1) \cdot \sqrt{2^k} > \\&> 2 \cdot \left(1 + k\sqrt{2^{k-1}}\right) - 1 - (k + 1) \cdot \sqrt{2^k} = \\&= 1 + \sqrt{2^k}(k(\sqrt{2} - 1) - 1).\end{aligned}$$

Одержаний вираз додатний при $k \geq 3$. Таким чином із припущення, що нерівність вірна при $n = k$ випливає, що вона вірна при $n = k + 1$. Згідно з принципом математичної індукції нерівність виконується при довільному натуральному $n \geq 2$.

РОЗДІЛ 2. НЕСТАНДАРТНІ ПРИЙОМИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Застосування методів векторної алгебри

Ідея застосування векторів при доведенні нерівностей ґрунтується на таких простих геометричних міркуваннях.

Розглянемо два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Очевидно, що виконується нерівність $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, або в координатному вигляді:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Нехай виконується рівність векторів $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Переходячи до довжин векторів, отримуємо, що $|\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (нерівність трикутника). Оскільки $\vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, то з одержаної нерівності випливає, що

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

В обох випадках кількість координат векторів може бути взята довільно і ми отримаємо більш загальні, ніж наведені, співвідношення. Рівність в них досягається при умові колінеарності векторів.

Наведемо приклади.

Приклад 2.1.1. Довести, що для довільних $a > 0, b > 0, c > 0$ виконується нерівність:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9.$$

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори

$$\vec{u} = (a, b, c),$$

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right).$$

Тоді їхній скалярний добуток:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Тепер, використовуючи нерівність $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$:

$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Підставляємо:

$$3^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Нерівність доведено.

Приклад 2.1.2. Довести, що нерівність:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} < 12$$

виконується при всіх значеннях x , для яких визначена її ліва частина.

Доведення. Розглянемо вектори

$$\vec{u} = (1, 1, 1),$$

$$\vec{v} = (\sqrt{x+1}, \sqrt{2x-3}, \sqrt{50-3x}).$$

Очевидно, що ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq \\ & \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(x+1) + (2x-3) + (50-3x)} = \\ & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12. \end{aligned}$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тільки тоді, коли $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3} = \sqrt{50-3x}$. Оскільки система даних рівнянь несумісна, то нерівність строга.

Приклад 2.1.3. Довести, що якщо числа a, b, c задовольняють умову

$a + b + c = 1$, то виконується нерівність

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}.$$

Доведення. Розглянемо вектори

$$\vec{u} = (\sqrt{2a+1}, \sqrt{2b+1}, \sqrt{2c+1}),$$

$$\vec{v} = (1, 1, 1).$$

Оскільки ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, то виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2a+1} \cdot 1 + \sqrt{2b+1} \cdot 1 + \sqrt{2c+1} \cdot 1 \leq \\ & \leq \sqrt{(2a+1) + (2b+1) + (2c+1)} \cdot \sqrt{1+1+1} = \sqrt{2(a+b+c)+3} \cdot \sqrt{3}, \\ & \sqrt{2(a+b+c)+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 1 + 3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}. \end{aligned}$$

Знак рівності виконується при

$$\frac{\sqrt{2a+1}}{1} = \frac{\sqrt{2b+1}}{1} = \frac{\sqrt{2c+1}}{1},$$

тобто при $a = b = c = \frac{1}{3}$.

2.2. Використання похідної для доведення нерівностей

Розглянемо, як можна застосовувати похідну для доведення нерівностей.

Ідея методу така.

Нехай на певному проміжку $x \in [a, b]$, де визначені функції f і g , потрібно довести нерівність

$$f(x) \geq g(x).$$

Для цього вводять нову функцію:

$$u(x) = f(x) - g(x).$$

Припустімо, що похідна $u'(x)$ має на цьому відрізку єдиний корінь x_0 , і в цій точці функція $u(x)$ досягає свого мінімального значення. Якщо також виконується

$$u(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0,$$

то цього досить, щоб стверджувати, що на всьому проміжку $[a, b]$ справедлива нерівність:

$$f(x) \geq g(x).$$

Такий підхід можна використовувати і для доведення числових нерівностей. Для цього спершу вводять функцію, яка у визначених точках набуває потрібних числових значень, а потім застосовують описану вище схему.

Приклад 2.2.1. Довести нерівність:

$$e^x - 1 \geq \ln(x + 1).$$

Доведення. ОДЗ: $x > -1$. Очевидно, що при $x = 0$ отримуємо рівність $e^0 - 1 = \ln(0 + 1)$, яка вірна.

Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(x + 1)$.

Її похідна $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$. При $x = 0$ похідна $f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+1} = 1 - 1 = 0$ і монотонно зростає (оскільки $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ для довільних $x \in (-1, \infty)$). Таким чином, для функції $f(x)$ точка $x = 0$ є точкою екстремуму, а саме точкою мінімуму. Тому для всіх x , що належать ОДЗ, виконується нерівність $f(x) \geq f(0) = 0$, що і потрібно було довести.

Зауважимо, що одночасно нами фактично розв'язані рівняння

$e^x - 1 = \ln(x + 1)$ з єдиним коренем $x = 0$ та нерівність

$e^x - 1 \geq \ln(x + 1)$, розв'язком якої є $x \in (-1, \infty)$.

Приклад 2.2.2. Довести, що при $x \geq 0$ виконується нерівність:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $y(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Знайшовши $y'(x) = e^x - 1 - x$ та $y''(x) = e^x - 1$, бачимо, що друга похідна перетворюється в 0 у точці $x = 0$ і при переході через цю точку змінює знак $f''(x)$ на «+». Це означає, що для функції $y'(x)$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму і $y'(0) = 0$. Таким чином, $y'(x) \geq 0$ на всій числовій осі. Звідси випливає, що функція $y(x)$ монотонно зростає. Оскільки $y(0) = 0$, то при $x \geq 0$ маємо $y(x) \geq 0$. Нерівність доведена.

Одночасно нами отримано наступні результати: Рівняння $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ має єдиний корінь $x = 0$. Розв'язком нерівності $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ є проміжок $x \in (0, +\infty)$. Розв'язком нерівності $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ є проміжок $x \in (-\infty, 0)$.

Приклад 2.2.3. Довести, що при $x > -1$ для всіх натуральних n виконується нерівність $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (нерівність Бернуллі).

Доведення. При $n = 1$ нерівність вірна. Нехай $n > 1$. Розглянемо функцію $f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$. Її похідна $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n$ перетворюється в нуль у єдиній точці $x = 0$, що, як легко бачити, є точкою мінімуму. Тому для всіх $x > -1$ виконується нерівність $f(x) \geq f(0)$, тобто $(1 + x)^n - 1 - nx \geq 0$ з одержаної справедливої початкової нерівності Бернуллі.

Приклад 2.2.4. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2},$$

Доведення. Розглянемо функцію:

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Похідна $f'(x) = -\sin x + x$ при довільних значеннях x в єдиній точці $x = 0$ перетворюється в нуль. Це значення x є точкою мінімуму. Тому для значень x буде виконуватися нерівність:

$$f(x) \geq f(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0.$$

Рівність досягається при $x = 0$.

Приклад 2.2.5. Довести, що $2^x \geq x^2$ для всіх натуральних $x \geq 5$.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = 2^x - x^2$ та знайдемо її похідну. Маємо $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$. Оскільки

$$f'(-1) = \frac{\ln 2}{2} + 2 > 0, \quad f'(2) = 4 \ln 2 - 4 < 0,$$

$$f'(4) = 16 \ln 2 - 8 = 8(\ln 4 - 1) > 0,$$

то на проміжках $[-1, 2]$, $[2, 4]$ похідна має принаймні по одному кореню. Більше коренів рівняння $f'(x) = 0$ мати не може.

Справді, рівняння $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2$ має єдиний корінь. Тому функція $f'(x)$ має єдину точку екстремуму, а саме точку мінімуму, а рівняння $f'(x) = 0$ має тільки два корені. Таким чином обґрунтовано, що похідна $f'(x)$ на проміжку $(4, +\infty)$ приймає додатні значення і функція $f(x)$ зростає.

$$\text{Отже, } f(x) = 2^x - x^2 > f(4) = 0.$$

Нерівність $2^x \geq x^2$ на проміжку $x \in (4, \infty)$ виконується для довільних x , тому і для всіх натуральних $x \geq 5$ нерівність матиме місце.

Приклад 2.2.6. Порівняти числа $\sqrt[2025]{2025}$ і $\sqrt[2026]{2026}$.

Розв'язання. Порівняємо натуральні логарифми цих чисел, тобто числа $\frac{\ln 2025}{2025}$ та $\frac{\ln 2026}{2026}$ що рівносильне поставленій задачі, оскільки функція $\ln x$ монотонно зростає на своїй області визначення. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ визначену на інтервалі $(0, +\infty)$. Встановимо проміжки її

монотонності. Очевидно, що похідна $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ перетворюється в нуль у точці $x = e$. Легко встановити, що це точка максимуму і що на проміжку $x \in (e, +\infty)$ функція монотонно спадає. Оскільки цьому проміжку належать числа 2025 та 2026, то більшому з них відповідає менше значення функції.

$$\text{Тому } \frac{\ln 2025}{2025} > \frac{\ln 2026}{2026} \text{ і } {}^{2025}\sqrt{2025} > {}^{2026}\sqrt{2026}.$$

2.3. Застосування і оцінка площі

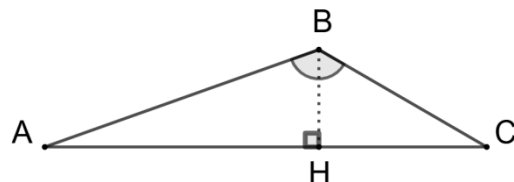
Приклад 2.3.1. Довести, що при $x > 0$ виконується нерівність:

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} \leq x + \frac{2}{x} + 3.$$

Доведення. Побудуємо $\triangle ABC$, в якому висота $BH = x$, $AH = \sqrt{4x+4}$,

$$HC = \sqrt{2x+1}.$$

Позначимо $\angle ABC = \alpha$.



За теоремою Піфагора:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 = (\sqrt{4x+4})^2 + x^2 = \\ &= 4x + 4 + x^2 = (x+2)^2, \end{aligned}$$

$$AB = x + 2.$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= HC^2 + BH^2 = (\sqrt{2x+1})^2 + x^2 = \\ &= 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, \end{aligned}$$

$$BC = x + 1.$$

Тоді площа S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} x (\sqrt{4x+4} + \sqrt{2x+1}).$$

З іншого боку,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (x+2)(x+1) \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{2} x (\sqrt{4x+4} + \sqrt{2x+1}) = \frac{1}{2} (x+2)(x+1) \sin \alpha,$$

$$x(2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}) = (x+2)(x+1) \sin \alpha.$$

Так як $\sin \alpha \leq 1$, то

$$x(2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}) \leq x^2 + 3x + 2.$$

Оскільки $x > 0$, то

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} \leq x + \frac{2}{x} + 3.$$

Приклад 2.3.2. Периметр описаного чотирикутника дорівнює 4. Довести, що його площа не перевищує 1.

Розв'язання. Позначимо сторони чотирикутника через a, b, c, d , а його площу через S . Тоді $a + b + c + d = 4$.

Легко бачити, що виконується також нерівність $S \leq \frac{1}{4}(ab + cd)$.

Тоді

$$\begin{aligned} 4S &\leq ab + bc + cd + ad = (a+c)(b+d) \leq \\ &\leq \left(\frac{a+b+c+d}{2} \right)^2 = \frac{4^2}{4} = 4. \end{aligned}$$

Цим самим фактично доведено, що з усіх опуклих чотирикутників із фіксованим периметром найбільшу площу має квадрат.

Приклад 2.3.3. Довжини двох сторін трикутника a та b задовольняють умову $a + b = p$, а довжини відповідних їм висот дорівнюють h_a та h_b . Довести нерівність $a + h_a \geq b + h_b$, та встановити, коли досягається рівність.

Доведення. Площа S трикутника

$\triangle ABC$ дорівнює $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$, звідки

$$ah_a = bh_b.$$

Крім цього $S = \frac{1}{2}absin C$, звідки

$$h_a = \frac{b}{a}h_b. \quad \text{Звідки} \quad h_a = \frac{2S}{a} \quad \text{та} \quad h_b = \frac{2S}{b}.$$

Перетворимо нерівність, яку ми доводимо, наступним чином:

$$a + \frac{2S}{a} \geq b + \frac{2S}{b} \Leftrightarrow a - b \geq 2S \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow a - b \geq \frac{2S(a - b)}{ab}.$$

Очевидно, що відповідно до умови задачі, одержаний вираз не може бути від'ємним. Легко бачити, що рівність досягається при $a = b$, тобто у випадку, коли трикутник прямокутний.

Приклад 2.3.4. Довести, що $(x + y)(x + z) \geq 2$, якщо

$$xyz(x + y + z) = 1 \text{ і } x > 0, y > 0, z > 0.$$

Доведення. Очевидно, що при $x > 0, y > 0, z > 0$ існує трикутник ABC такий, що $AB = c = x + y, BC = a = y + z, AC = b = x + z$.

Нехай K, M, N — точки дотику вписаного кола із сторонами AB, BC, AC відповідно. Маємо $x + y + z = p$, де p — півпериметр трикутника. Крім того,

$$AK = AN = p - a = x,$$

$$BK = BM = p - b = y,$$

$$CM = p - c = z.$$

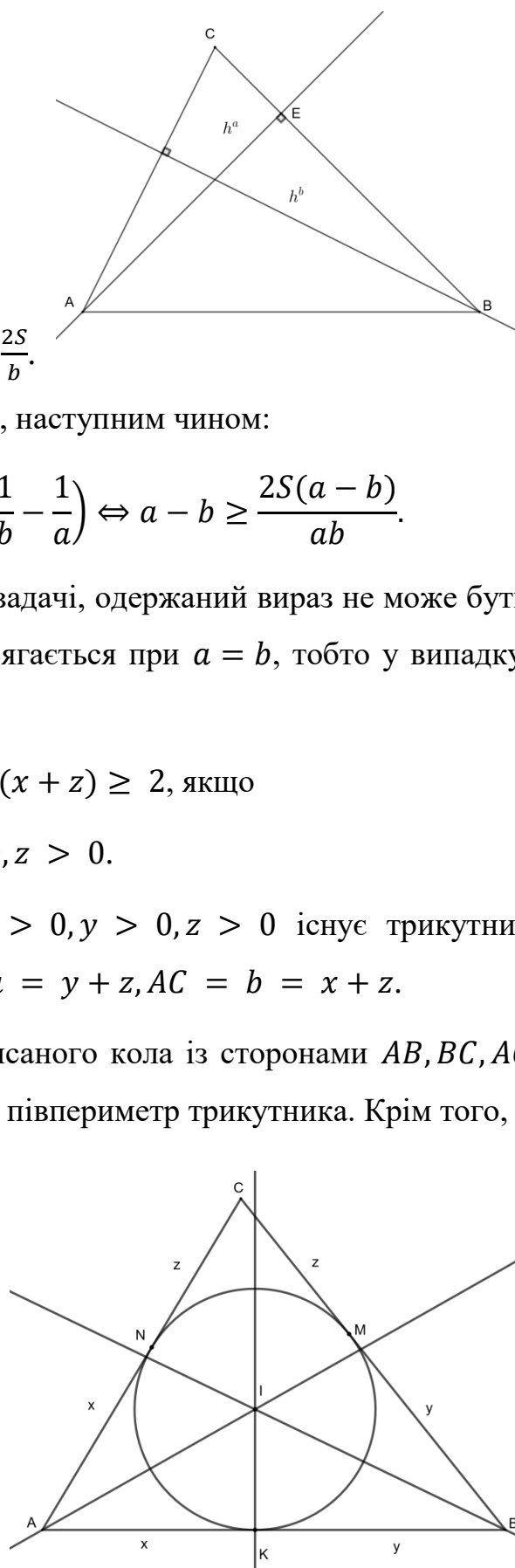
Але за умовою задачі

$$xyz(x + y + z) = S^2 = 1, \quad \text{звідки}$$

$S = 1$. S — площа трикутника ABC .

З іншого боку,

$$2S = AB \cdot AC \cdot \sin BAC \leq$$



$$\leq AB \cdot AC = (x+y)(x+z).$$

$$\text{Тоді } (x+y)(x+z) \geq 2S = 2.$$

2.4. Використання інтеграла для доведення нерівностей

Використання інтегрального числення при доведенні нерівностей використовує наступні міркування. Нехай на проміжку $[a, b]$ задані дві неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ і в усіх точках цього проміжку виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$. Тоді на заданому відрізку виконується також нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Аналогічне твердження стосується також випадків $f(x) > g(x)$,

$$f(x) \leq g(x) \text{ та } f(x) < g(x).$$

Алгоритм використання даного прийому може виглядати наступним чином. Для доведення нерівності $F(x) \geq G(x)$ розглядаємо функції $f(x)$ та $g(x)$, де $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Якщо виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то стверджуємо, що вірна нерівність $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

Задача 2.4.1. Довести, що при $x \in [1, +\infty)$ виконуються нерівності

$$2013x^{2014} + 1 \geq 2014x^{2013}, 2013x^{2014} + 2 \geq 2015x^{2013}.$$

Розв'язання. Оскільки на вказаному проміжку виконується нерівність $x^{2013} \geq x^{2012}$, то

$$\int_1^x t^{2014}dt \geq \int_1^x t^{2013}dt \geq \int_1^x t^{2012}dt \geq \frac{2014}{2015}x^{2015} - \frac{1}{2015}.$$

Звідки знаходимо

$$2013x^{2014} + 1 \geq 2014x^{2013}.$$

Інтегруючи одержану нерівність ще раз, маємо

$$\begin{aligned}\int_{2013}^{2014} \frac{t^{2014} + 1}{t^{2015}} dt &\geq \int_{2013}^{2014} \frac{t^{2013}}{t^{2015}} dt = \int_{2013}^{2014} t^{-2} dt = \\ &= -t^{-1} \Big|_{2013}^{2014} = \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}.\end{aligned}$$

З одержаної нерівності отримуємо, що

$$2013^{2014} + 2 \geq 2015^{2014}.$$

Задача 2.4.2. Довести нерівність

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2012} < \frac{4026\sqrt{2013} - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Значення $\sqrt{k}$ можна трактувати, як площу прямокутника з висотою $\sqrt{k}$ та основою, що дорівнює 1 (відстань між точками k та $k + 1$), то

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2012} < \int_1^{2013} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^{2013} = \frac{2}{3} (2013\sqrt{2013} - 1),$$

що і доводить нерівність.

2.5. Оцінка області визначення множини значень

При доведенні нерівностей в окремих випадках доцільно проаналізувати область визначення та множину значень заданих в умові виразів. Цього іноді може виявитися достатнім для розв'язання задачі.

Приклад 2.5.1. Довести нерівність

$$\sqrt{x^2 - 4x} \leq \sqrt{1 + (x - 2)^2} + 1.$$

Доведення. Немає потреби робити певні перетворення при доведенні даної нерівності. Достатньо, порівнюючи підкореневі вирази, побачити, що при довільних x та y виконується нерівність $x^2 - 4x < 1 + (x - 2)^2$. Тому ліва частина приймає значення менші, ніж права.

Приклад 2.5.2. При $x \geq y$ довести нерівність

$$2\lg(x^2 - 2xy + y^2 + 10) + 3\sqrt{x-y} + y^2 - 2y \geq 1.$$

Доведення. Очевидно, що

$$2\lg(x^2 - 2xy + y^2 + 10) \geq 2\lg((x - y)^2 + 10) \geq 2\lg(0 + 10) = 2, \quad x, y \geq 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 - 1 \geq -1.$$

Тому ліва частина виразу приймає значення більші або рівні 1. Отже, нерівність виконується на всій області допустимих значень, тобто при $x \geq y$. Знак рівності досягається при $x = y = 1$.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі проведено систематичне дослідження різних підходів до доведення нерівностей та проаналізовано можливості застосування як класичних, так і нестандартних методів у задачах різної складності. Показано, що вибір методу доведення істотно впливає на наочність, компактність та глибину розуміння відповідної нерівності.

У першому розділі розглянуто класичні методи доведення нерівностей, зокрема доведення за означенням, аналітичний метод, метод від супротивного, метод підсилення та метод математичної індукції. На основі наведених прикладів встановлено, що ці методи є універсальними та ефективними для широкого класу задач, проте в окремих випадках можуть призводити до громіздких перетворень або не давати достатньо прозорого пояснення суті нерівності.

Другий розділ присвячено аналізу нестандартних прийомів доведення нерівностей. Розглянуто застосування векторної алгебри, похідної, властивостей монотонності та опуклості функцій, геометричних міркувань, а також інтегральних методів. Показано, що ці підходи дозволяють істотно спростити доведення багатьох нерівностей, а також виявити їхній геометричний або аналітичний зміст. Особливо ефективним виявилось використання векторних методів та похідної для доведення симетричних і функціональних нерівностей.

У роботі продемонстровано, що нестандартні методи не лише доповнюють класичні підходи, а й у багатьох випадках є більш доцільними, оскільки дозволяють уникнути складних алгебраїчних перетворень та зосередитися на суттєвих властивостях досліджуваних виразів. Наведені приклади підтверджують, що один і той самий результат може бути отриманий різними способами, кожен з яких має власні переваги залежно від конкретної задачі.

Отримані результати мають теоретичне та методичне значення. Матеріали роботи можуть бути використані при викладанні математичного аналізу, алгебри та спеціальних курсів з теорії нерівностей, а також при підготовці студентів до

олімпіад та науково-дослідної роботи. Проведене дослідження створює підґрунтя для подальшого вивчення та розвитку методів доведення нерівностей і їх застосування в інших розділах математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барвінок Р. Л., Козлова О. М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. Ч. III. Навчальний посібник. Черкаси: ЧОППОП, 2013. 96с.
2. Бродський Я. С., Сліпенко А. К. Похідна та інтеграл у нерівностях, рівняннях, тотожностях. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. 120 с.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. Київ : Либідь, 1993. 344 с.
4. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. 2014. 100 с.
5. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України (2001–2006). Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
6. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. Х.: Вид. група «Основа», 2008. 255с.
7. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для загальноосвітніх навчальних закладів. Чернівці, 2004. 360 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2020/21 навч. рік: навч. – метод. посіб. / А. Анікушин, І. Жук, В. Коваль та ін.; за ред. Б.В.Рубльова. Х.: Гімназія, 2022. 432 с.: іл.
9. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 400 с.
10. Ясінський В.В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ»/ За редакцією чл.-кор. НАН В.С. Мельника К.: НТУУ «КПІ», 2003. 324 с.
11. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities. Cambridge : Cambridge University Press, 1952. 324 p.

12. Mitrinović D. S. Analytic Inequalities. Berlin : Springer-Verlag, 1970. 400 p.
13. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. Classical and New Inequalities in Analysis Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993. 740 p.
14. Beckenbach E. F., Bellman R. Inequalities. Berlin : Springer-Verlag, 1961. 198 p.

Анотація

Мазурок В. Я. Нестандартні методи доведення нерівностей. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 42 с.

У магістерській роботі здійснено систематичне дослідження методів доведення нерівностей, що виходять за межі класичних алгебраїчних підходів. Проаналізовано можливості застосування векторної алгебри, похідної, властивостей монотонності функцій, геометричних і інтегральних методів у задачах на доведення нерівностей. Показано, що використання нестандартних методів дозволяє суттєво спростити доведення багатьох нерівностей, а також глибше розкрити їхню аналітичну та геометричну природу.

Магістерська робота містить 42 сторінки, список використаних джерел налічує 14 найменувань.

Ключові слова: нерівності, методи доведення нерівностей, векторна алгебра, похідна, монотонність, геометричні методи, інтегральні методи, математична індукція.

Abstract

Mazurok V. Non-Standard Methods for Proving Inequalities. Master's Thesis. Lutsk, 2025. 42 p.

This master's thesis presents a systematic study of methods for proving inequalities that go beyond classical algebraic approaches. The applicability of vector algebra, derivatives, monotonicity of functions, geometric arguments, and integral methods in inequality proofs is analyzed. It is shown that non-standard methods often significantly simplify proofs and provide deeper insight into the analytical and geometric nature of inequalities.

The master's thesis consists of 42 pages and includes 14 references.

Keywords: inequalities, methods of proving inequalities, vector algebra, derivative, monotonicity, geometric methods, integral methods, mathematical induction.