

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра теорій функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

ХАЛАНЧУК ДАРИНА ПЕТРІВНА

**ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ
УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ
ІНТЕГРАЛІВ**

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ПІДДУБНИЙ ОЛЕКСІЙ МИХАЙЛОВИЧ

Кандидат фіз.-мат.наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри теорій функції та

методики навчання математики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Доцент Гембарська С .Б. _____

Луцьк - 2025

Зміст

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
1.1. Змістовний аналіз терміну математична компетентність.	6
1.2. Прийоми та методи застосування математичної компетентності.....	10
1.3. Тема «Інтеграл та його застосування» та її роль у шкільному курсі математики.....	12
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ ІНТЕГРАЛІВ	14
2.1. Сучасні інформаційні технології як засіб розвитку математичних навичок учнів профільної школи	14
2.2. Приклади задач на тему « Інтеграл та його застосування».....	17
РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЗАСТОСУВАНЬ ІНТЕГРАЛІВ	22
3.1. Практичне значення поняття інтеграла у сучасній науці та техніці	22
3.2. Прикладні задачі з інтегралами для шкільного курсу	25
3.3. Аналіз рівнів сформованості компетентностей учнів до і після експерименту	34
ВИСНОВКИ	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	50

ВСТУП

Сьогодення важко уявити без інновацій, які швидко удосконалюються за рахунок розвитку наукових знань та технічних ідей. Це включає математизацію як у науці, так і в більшості практичних видах діяльності. Математика пропонує широкі та досить прості моделі для вивчення реального світу. Розширення можливостей комп'ютерної обробки даних збільшує важливість математичних моделей, які пояснюють взаємозв'язок кількісних характеристик різних явищ і процесів. Математичні знання використовуються досить часто в повсякденному житті. І це не просто математичні розрахунки, а й елементи вищої математики, аналізу та теорії ймовірності. Таким чином, математичні знання стають все більш необхідними компонентами загальної культури сучасної людини.

У кінці 60-х — початку 70-х років минулого століття у шкільних програмах ввели інтеграл. Вивчення цього розділу математичного аналізу, виявило низку труднощів у сприйнятті матеріалу учнями. Причини труднощів – високий рівень абстракції понять, складна логічна структура їх визначень, недостатність часу осмислення складних питань. Таким чином, учні не мають повного уявлення про поняття визначеного інтеграла, а залишаються розрізнені та часто не пов'язані відомості, що не сприяє розвитку математичної культури та ускладнює подальше навчання у ЗВО.

У контексті розвитку та реформування сучасної освіти процес навчання включає не лише отримання певної кількості знань, але й отримання способів пізнання світу, самовдосконалення та саморозвитку. Сучасні школи прагнуть виховати творчих людей, здатних критично мислити, отримувати, опрацьовувати та аналізувати різноманітну інформацію, приймати відповідальні рішення та використовувати свої знання для досягнення цілей. Тим не менш, випускники сучасних шкіл повинні бути комунікабельними, вміти аргументувати, слухати та поважати думки інших. Таким чином, необхідно розвивати математичні навички учнів.

Роботи О. Пометун, О. Локшиної, О. Савченко, Н. Бібік, О. Овчарук, Н. Кузьміної, В. Шахова та інших були присвячені розвитку компетентності учнів. Зокрема, А.В. Хуторський, О.Г. Смолянинова, А.О. Івоніна, Н.Н. Скосирєв, С.А. Раков, Ю.С. Рамський, В.О. Швець та інші опрацьовували розвиток математичної компетентності.

Незважаючи на те, що були досягнуті певні успіхи у дослідженнях проблем формування математичної компетентності учнів, але ще недостатньо обґрунтовані умови, необхідні для створення цілісної системи формування математичних навичок учнів, особливо під час вивчення теми «Інтеграл і його застосування» в профільній школі.

Вивчення стану математичної підготовки учнів показало, що оволодіння математичною компетентністю — це процес більш багатогранний, ніж просто накопичення знань, умінь і навичок. На мою думку, одна з причин наявності суперечностей між значним розширенням обсягу інформації, джерел її отримання та недостатньою ефективністю самостійної пізнавальної діяльності учнів.

Мета дослідження: опрацювання структурних компонентів формувань математичної компетентності, які виникають в процесі вивчення теми «Інтеграл та його застосування».

Наступні завдання були визначені відповідно до мети роботи:

1. Зробити огляд психолого-педагогічної літератури щодо набуття учнями математичних навичок.
2. Розглянути сучасні педагогічні технології, що сприяють розвитку математичних навичок учнів.
3. Дослідити, як інформаційні технології можуть допомогти учням профільної школи розвивати математичні навички.

4. Здійснити аналіз основних компонентів системи формування математичної компетентності учнів підчас вивчення теми «Інтеграл та його застосування».

Об'єкт дослідження: процес вивчення алгебри та початків аналізу учнів профільної школи.

Предмет дослідження: формування математичних навичок учнів під час вивчення інтегралу та його застосування.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Змістовний аналіз терміну математична компетентність.

Сучасна українська освіта перебуває в активному стані реформування шляхом впроваджень та застосувань компетентнісних підходів у навчанні, вихованні та практичній підготовці школярів. Низка досліджень довели, що «стара» школа була переповнена формальними знаннями, які є непотрібними для формування світогляду учнів. Діти отримували обширні знання, однак їх застосувань не знали. Практика довела, що освітяни мають шукати нові методи подання інформації. Удосконалена компетентнісна освітня програма потребує додаткових досліджень.

Орієнтація навчальних програм та набуття ключових компетентностей є одним із шляхів оновлення освіти. Це дає змогу відповідати вимогам європейських та світових просторів.

Багато міжнародних країн займалися визначенням, оцінкою та впровадженням ключових компетентностей. Вони дійшли висновку, що програми та педагогічні технології останнім часом переорієнтовані на компетентнісний підхід. Коли оцінюється навчання учнів, враховується засвоєння ключових компетентностей. Вони також мають стати основою для оцінювання навчальних досягнень у навчальних закладах України.

Головним завданням сучасної системи освіти є створення умов для якісного навчання. Важлива умова підвищення якості освіти є впровадження компетентнісного підходу.

«Компетентність» та схожі терміни набули поширення зовсім недавно. Підтекст цих понять пов'язаний з прагненням визначення необхідних змін в освіті, у тому числі у шкільному.

Ще не було встановлено точного трактування сенсу компетентнісного підходу освіти.

Тлумачення понять компетентності та компетенцій дуже різноманітні, важко знайти загальні ознаки цих понять (Я. Бродський, А. Павлов, [3]).

"Компетентність - це здатність (потенціал) здійснювати складні види дій" (Іванова Т.В., [4]).

«Компетентність - це інтегральна здатність вирішувати конкретні проблеми, що виникають у різних сферах життя» (Андрєєв А.Л. [5]).

Я. Бродський, А. Павлов вважають найбільш проблематичними поняття «предметні компетенції» та «компетентності» [3].

Для цих нововведень поки що не існує обґрунтувань та дидактичних підходів.

Проаналізувавши наведені визначення компетентності та його порівняння можна зробити висновки, що компетентність це не про уміння. У багатьох описується термін «здатність».

Отже можна зробити висновки, що компетентність поєднує між собою найважливіші складові діяльності особистості — здібності та вміння. Сучасна педагогіка не трактує вирішення проблеми взаємодії між ними.

Навчання математики має багато цілей але головною є підготовка учнів до повсякденного життя та розвиток особистості засобами математики. У зв'язку з різкими змінами в освіті за рахунок появи компетентностей потрібно виділити таке означення, як математична компетентність.

Математична компетентність — навички застосувань математики в реальному житті ,розуміння змісту і методів математичного моделювання, побудова математичної моделі, дослідження її методами математики, запис отриманих результатів, оцінка похибки обчислень. Рівень математичних досягнень, для яких важливим є набуття математичних навичок, називається математичною компетенцією. До них належать такі навички: розуміння математичного мислення, аргументування та моделювання; постановки та

розв'язування математичних задач, презентації даних; оперування математичними конструкціями; навички математичного спілкування; використання математичних інструментів.

Завдяки предметній компетентності учні можуть успішно використовувати свої знання, отримані протягом навчання математики, встановлювати зв'язки між математичними знаннями та реальними ситуаціями та знаходити способи розв'язання проблем. У процесі засвоєння учнями математичного змісту формуються предметні компетентності.

Структурні компоненти математичної компетентності	
Мотиваційний	Система причин, цілей, потреб і прагнень до математики;
Когнітивний	сукупність теоретичних і практичних знань;
Діяльнісний	комплекс математичних навичок, здатність виконувати практичні завдання;
Ціннісно-рефлексивний	Сукупність особистісно важливих прагнень, ідеалів, переконань, поглядів, ставлень щодо математики; розуміння того, наскільки математика є соціальною цінністю; прагнення до саморозвитку;
Емоційно-вольовий	розуміння власного емоційного стану, який виникає під час виконання математичних завдань.

Таблиця 1.1. Структурні компоненти математичної компетентності

Виділяють функціональні складники математичної компетентності:

Функціональні складники математичної компетентності	
Процедурна компетентність	уміння вирішувати стандартні математичні задачі;
Логічна компетентність	знання методу доведення та спростування тверджень;
Технологічна компетентність	використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій;
Дослідницька компетентність	володіння математичними та інформаційно-комунікаційними методами для моніторингу соціальних та індивідуальних завдань;
Методологічна компетентність	уміння оцінювати наскільки доцільно використано математичні методи та інформаційно-комунікаційні технології для вирішення особистих і суспільно важливих проблем;

Таблиця 1.2. Функціональні складники математичної компетентності

Новий підхід до освіти є протилежним традиційному підходу до навчання, який зосереджується на позитивних результатах в знаннях. Його основою є формування життєвої компетентності учнів, яка включає здатність критично мислити, робити висновки, адаптувати знання та навички до реальних ситуацій. Математика продовжує бути провідним предметом у сучасних школах і використовується як інструмент для розвитку всіх основних навичок учнів. Таким чином, роль і значення методичного забезпечення компетентнісного навчання математики зростають.

1.2. Прийоми та методи застосування математичної компетентності

Звертаємо увагу на те, що основною метою математичної освіти є формування в учнів математичних навичок на рівні, достатньому для того, щоб жити в сучасному світі. Це також забезпечує розвиток їх логіки, уваги, пам'яті, інтуїції та культури мислення.

З вище сказаного можна зробити висновки що вчителі відіграють важливу роль у розвитку компетентностей учнів. Для високих результатів педагогам потрібно розвивати такі якості у дітей:

- Творче мислення, послідовність міркувань та презентація власних ідей;
- Робота у команді (визначення пріоритетів, передбачення результатів, відповідальність за їх результати)
- Вміло застосовувати отримані знання у реальному житті.

На успіх і ефективність розвитку основних компетентностей учнів, особливо математичних, впливають методи та форми навчання. Сучасні педагогічні технології є пріоритетними, оскільки вони дозволяють учням брати участь в активних діяльностях, досліджувати проблеми та формувати власні ідеї.

Наразі особистісно-орієнтовані технології є найбільш важливими для освітньої системи, оскільки вони ставлять на перше місце особистість дитини, комфортність умов розвитку та максимальне використання її природних талантів. Такі технології включають, зокрема:

- співробітницька педагогіка;
- гуманно-особистісна технологія Ш. Амонашвілі;
- технологія навчання Б. Єльконіна, В. Давидова;
- система навчання Л. Занкова;
- система розвиваючого навчання, спрямована на розвиток творчих якостей особистості (І. Волков, Г. Альтшуллер, І. Іванов).

Ці технології тією чи іншою мірою перетинаються на рівні методичних прийомів.

У житті школи часто бувають випадки, коли вчителі-новатори використовують частину технології, але не повністю. Звичайно, виникає питання, як вчитель повинен планувати свою роботу, щоб дати учням можливість вибрати найкращий спосіб досягти певної мети. За словами С. Підмазіна, успішним є перехід суб'єкта від «образу-Я» до бажаного «Я-ідеалу».

Вчитель, незалежно від технології, повинен знати, які види пізнавальної діяльності ефективно впливають на розвиток учня та допомагають йому стати суб'єктом діяльності. «Вчать не думкам, а мислити» є основною відмінністю особистісно-орієнтованого навчання. Учитель повинен організувати своє навчання таким чином, щоб учні могли розвивати загальнонавчальні інтелектуальні навички, шляхом пошукової діяльності, та дізнатися для себе те, що в науці давно відкрито.

Для особистісно-орієнтованої взаємодії вчителя з учнем потрібно такі умови:

1. Формування системи чи окремих інтелектуальних здібностей і навичок, а також спостереження за формуванням інтелектуальних якостей.
2. Використання різноманітних методів подання інформації та залучення учнів до цього процесу.
3. Зміст навчальних завдань, враховуючи різні рівні сформованості інтелекту.
4. Критичний аналіз ситуацій і творче вирішення проблем.

Учитель може створити таке планування, якщо він знає основи загальних інтелектуальних прийомів діяльності, способи їх створення та стан «навченості» учнів у використанні цих способів для самостійного отримання знань.

Таким чином, ми проаналізували дії вчителя, які сприяють розвитку математичних навичок старшокласників. Учитель може відстежувати розвиток

інтелектуальних якостей, виховувати критичне мислення та творчу діяльність, планувати та здійснювати формування складових компонентів уміння вчитися, оскільки він розуміє суть проблеми.

1.3. Тема «Інтеграл та його застосування» та її роль у шкільному курсі математики

Знання у шкільному курсі навчання можна отримати на основі стандартного, профільного та поглибленого вивчення. Один від одного вони відрізняються обсягом отриманого матеріалу та періодом вивчення. Найчастіше 10-11 класи поділяють на профільний чи поглиблений спосіб навчання, що допомагає в підготовці до ЗНО та дає позитивні результати.

Тема інтеграл підходить під всі шляхи вивчення, оскільки містить багато термінології та низку завдань. Велика кількість прикладів є в екзаменаційних завданнях, а саме у третьому блоці. Визначені нижче аспекти пояснюють, чому тема інтеграл може бути цікавою та корисною для різних рівнів вивчення:

1. Глибока математична значущість:

Інтеграл є фундаментальною концепцією у математичному аналізі та фізиці. Вивчення цієї теми на профільному рівні дозволяє учням розглядати інтеграл з більш високого рівня абстракції та глибше розуміти його теоретичні аспекти.

2. Прикладність і застосування:

Тема інтеграл має безліч прикладних застосувань у різних галузях, включаючи фізику, економіку, інженерію та інші. Вивчення на поглибленому рівні може включати більше прикладних завдань та складних випадків застосування.

3. Розвиток аналітичних та розумових навичок:

Вивчення інтегралів сприяє розвитку аналітичних та розумових навичок учнів, оскільки вирішення інтегральних задач вимагає систематичного та логічного підходу.

4. Широкий спектр складності:

Тема інтеграл дозволяє адаптувати рівень складності до потреб учнів. На стандартному рівні можна розглядати базові властивості інтегралів, тоді як на поглибленому рівні можна проводити більш глибокий математичний аналіз та вивчати розширені концепції.

5. Підготовка до вищого навчання:

Незалежно від рівня вивчення, тема інтеграл готує учнів до подальшого вивчення вищих математичних курсів та створює основу для курсів математичного аналізу у вищому навчанні.

У Таблиці 1.3. проведемо порівняльну характеристику тем рівнів вивчення інтегралів

	Стандартне вивчення	Профільне вивчення	Поглиблене вивчення
К-сть годин	10-20	20-40	Більше 40
Теми	Первісна та її властивості. Таблиця первісних. Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур.	Всі теми стандарту. Невизначений інтеграл та його властивості. Обчислення об'ємів тіл.	Детальне вивчення всіх тем профільного вивчення. Велика кількість прикладів та задач.

Таблиця 1.3. Порівняльна характеристика тем рівнів вивчення інтегралів

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ ІНТЕГРАЛІВ

2.1. Сучасні інформаційні технології як засіб розвитку математичних навичок учнів профільної школи

Сучасний процес навчання, особливо математичний, важко уявити без використання інформаційних технологій, які глибоко вкорінені в нашому повсякденному житті. Звичайно, важливо враховувати той факт, що наше суспільство є інформаційним, і сучасні старшокласники демонструють високий рівень комп'ютерного мислення та здатність швидко вивчати комп'ютерні програми.

Загальновідомо, що на сьогоднішній день є велика кількість програмних засобів навчання математики, які значно полегшують роботу вчителя. При вивченні інтегралів учні стикаються з обчисленнями площ плоских фігур, де найчастіше виникають труднощі. Тому часто педагоги використовують програмні забезпечення для пояснення матеріалу, що допомагає краще дітям засвоювати матеріал.

У таблиці наведемо приклади програм, які можна використовувати в навчанні при вивченні теми «Інтеграл та його застосування».

Програмний засіб навчання	Основні можливості
Gran	GRAN1: розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем, дослідження функцій, обчислення визначених інтегралів;
Mathematica	Побудова графіків функцій, спрощення виразів, знаходження границь, інтегрування та диференціювання функцій, розв'язання систем рівнянь, розкладання числа на прості

	множники, знаходження НСД і НСК, побудова геометричних фігур, побудова графіків, тощо.
Microsoft Mathematics	Автоматичне переведення одних одиниць вимірювання в інші; розв'язання рівнянь і їх систем; обчислення інтегралів; знаходження невідомих сторін і кутів трикутника за умовою задачі; створення графіків функцій у різних системах координат (декартові, полярні, сферичні, циліндричні тощо).
GeoGebra	Обчислення коренів, екстремумів, інтегралів тощо; створення графіків функцій; створення геометричного місця точок, яке залежить від положення іншої точки, що належить будь-якому многокутнику або кривій.

Таблиця 2.4. Програмні засоби навчання математики

Розглянемо детальніше характеристики програми GeoGebra.

У 2002 році Маркус Хохенватер розробив програму GeoGebra, як дипломний магістерський проєкт. Мета програми полягала у поєднання програм динамічної геометрії і систем комп'ютерної алгебри в одній простій системі, яка призначення для викладання математики [9].

На сьогоднішній день GeoGebra є у вільному доступі та активно розвивається. Вона призначена для вивчення та викладання математики і середніх та вищих закладах освіти. Останнє оновлення версії трактується на представленні: графічних, алгебраїчних, табличних об'єктів. Інтерфейс програми є досить простий та легкий, що дозволяє з легкістю орієнтуватись в ній[10].

Розглянемо використання програми GeoGebra :

Приклад. Знайти площу криволінійної трапеції обмеженої графіком функції

$$y = \frac{1}{(x-1)^2} \text{ і прямими } x = -2, x = 0, y = 0.$$

Для розв'язку використовуємо online версію [\[9\]](#)

Отже, відкриваємо програму, вибираємо графічний інструмент.

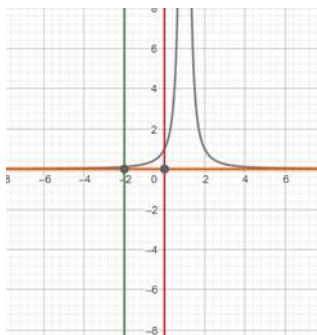


Рисунок 2.1.

Наступним кроком вводимо задану функцію $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ або $f(x) = (1-x)^{-2}$ програма одразу побудувала графік, далі прямі $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$ в GeoGebra це: $eq_1 : x = -2$, $eq_2 : x = 0$, $g : y = 0$ відповідно. Результат отриманого графіку зображено на Рисунок 2.1.



Рисунок 1.2.

Для знаходження криволінійної трапеції потрібно натиснути на Інструменти далі Перетин. Позначаємо такі точки перетину : $A = (0,1)$, $B = (0,0)$, $C = (-2,0)$, $D = (-2,0.1)$ отримали шукану трапецію Рисунок 2.2.

Для знаходження площі натискаємо знак інтеграла та обираємо N Інтеграл (Функція, Початкове значення x, Кінцеве значення x), вводимо потрібні дані. На малюнку автоматично виділилась криволінійна трапеція, як показано на Рисунок 2.3. Програма автоматично порахувала площу що показано на Рисунок 2.4.

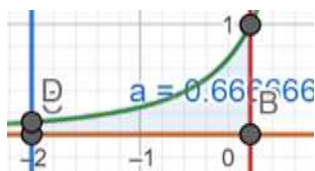


Рисунок 2.3.

$$a = \text{NІнтеграл}\left((x-1)^{-2}, -2, 0\right) \\ = 0.6666666595272$$

Рисунок 2.4

Отже, за допомогою програми було знайдено площу заданої криволінійної трапеції.

Можна виділити такі плюси GeoGebra: швидкість, точність, зручність, економія часу та зацікавлення учнів. Вона є простою для розуміння та відкривається на будь-якому гаджеті.

2.2. Приклади задач на тему «Інтеграл та його застосування»

Прикладні задачі є одні із важливих компонентів розвитку умінь та навичок учнів. Мета цих задач: показати прямий зв'язок між майбутньою професією та математикою; необхідність знань вивчених матеріалів. Підчас розв'язання задач учні розуміють, що вони виникають із реальних ситуацій життя. Результат трактується в переконанні дітей щодо актуальності використання вивчених знань.

На рівні профільного вивчення вивчаються середньої та високої складності вправи та задачі. Достатня кількість годин для вивчення матеріалу дозволяє дітям запам'ятати матеріал. Цікавими у вивченні є такі прикладні задачі та способи їх розв'язань:

1. Задача про обчислення площі між кривими:

- Знайти площу області, обмеженої кривими $y = 2\sqrt{x}$ та $y = x^4$ на інтервалі $[0,1]$.
- Площа S розраховується за формулою $S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - x^4) dx$.

2. Задача на знаходження об'єму тіла обертання:

- Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням кривої $y = e^{2x}$ навколо осі x на інтервалі $[0,1]$.
- Об'єм V розраховується за формулою $V = \pi \int_0^1 [e^{2x}]^2 dx$.

3. Визначення маси тіла:

- Дріт, який має форму кривої $y = x^2$ на інтервалі $[0,2]$ та густина якого задана функцією $p(x) = x + 1$.
- Маса M розраховується за формулою $M = \int_0^2 p(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

4. Задача про роботу сили:

- Обчислити роботу сили $F(x) = 4x$ при зміщенні об'єкта вздовж осі $x = 0$ до $x = 3$.
- Робота W розраховується за формулою $W = \int_0^3 4x \Gamma x$.

5. Моделювання економічних процесів:

- Знайти загальний дохід від продажу товару, якщо функція попиту задана як $P(x) = 20 - 2x$ та кількість товару x продається на інтервалі $[0, 5]$.
- Загальний дохід R розраховується за формулою $R = \int_0^5 (20 - 2x) dx$.

Проілюструємо одну із прикладних задач та спосіб її подання, з теми «Інтеграл та його властивості», яку можна розглядати на уроках фізики:

Задача 1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю заданою рівнянням $v = 6t - t^2$ (м / с) . Знайти шлях, яке тіло пододало від початку руху до зупинки.

Для зацікавлення учнів можна розповісти таку історію:

«Всі ми знаємо про стародавніх єгиптян, які без жодних технологій лише за допомогою примітивної та громіздкої арифметики зробили низку відкриттів в геометрії. Термін «піраміди» залежать від цих результатів, адже саме такі форми мають відомі усипальниці фараонів. Ці піраміди відносяться до семи чудес світу.

При побудові гробниць потрібно зробити розрахунки розподілу рівномірного тиску на внутрішні приміщення. Результати були вірним, адже піраміда не обвалилась всередину від власної ваги».

Розповідь підштовхне учнів до активного розв'язку задач, шляхом порівняння із наведеною історією.

Отже, можна зробити висновок що прикладні результати дають гарні результати у вивченні математики. Вони допомагають краще засвоїти отримані знання та сформулювати уявлення зв'язку реальних ситуацій з життя та математикою.

2.3. Формулювання математичної компетентності при вивченні теми «Інтеграл та його застосування» на рівні профільного вивчення

Математична компетентність учнів на рівні профільного вивчення теми «Інтеграл та його застосування» може бути сформульована наступним чином:

1. Розуміння концепцій інтегралу:

Розуміння базових понять та знаходження інтегралу, включаючи визначений та невизначений інтеграл, та вміння виражати їх у математичних термінах.

2. Застосування інтегралу в різних областях:

Учень може застосовувати інтеграл у різних областях, таких як фізика, економіка, геометрія тощо. Він має розрізняти контексти і використовувати відповідні методи розв'язання завдань.

3. Використання методів обчислення інтегралів:

Знання різних методів обчислення інтегралів, такими як метод підстановки, метод інтегрування за частинами, метод тригонометричних інтегралів тощо, та вміння їх застосовувати в конкретних ситуаціях.

4. Розв'язання складних задач:

Розв'язок складних математичних задач, які включають в себе застосування інтегралів у різних формах та контекстах.

5. Аналіз та інтерпретація результатів:

Учень має аналізувати та інтерпретувати результати обчислення інтегралів, здійснюючи обґрунтування отриманих відповідей та їхню відповідність контексту задачі.

6. Спроможність побудови математичних моделей:

Побудова математичної моделі, використовуючи інтеграл як інструмент для опису та розв'язання реальних ситуацій.

7. Сприйняття математичної мови:

Учень володіє математичною мовою та вміє чітко та конкретно виражати свої міркування в письмовій та усній формі.

Ці пункти відображають ключові аспекти математичної компетентності на рівні профільного вивчення теми «Інтеграл та його застосування». Дитина, яка володіє цими навичками, може успішно застосовувати математичні концепції та методи в різних сферах інтелектуальної діяльності. У Таблиці 4 проілюстровано застосувань тем інтегралів у різних професіях світу:

Задачі	Розв'язки
Фінансова математика	
Розрахунок загального доходу від інвестицій чи облікових ставок.	Використання формул для обчислення складних відсотків та інтегралів для розрахунку накопиченої вартості.
Медична фізика	
Визначення дози опромінення при проведенні медичних процедур, таких як комп'ютерна томографія (КТ) чи рентгенівське обстеження.	Застосування інтегралу для обчислення кількості опромінення через час та інтенсивність дози.
Економічна аналітика	
Моделювання попиту та пропозиції на ринку товарів або послуг.	Знаходження інтегралів для визначення загального доходу, витрат та прибутку в залежності від кількості продукції.
Кліматична наука	

Розрахунок середньорічної температури або об'єму опадів для певного регіону.	Для обчислення середнього значення функції температури чи опадів протягом певного періоду застосовують інтеграл.
Механіка та інженерія	
Визначення центра мас або моменту інерції складної системи об'єктів.	Використовуючи інтеграли для розв'язування вагових функцій та координат центру мас.

Таблиця 2.5. Застосувань тем інтегралів у різних професіях світу

Отож, можна зробити висновок, що розвиток математичних компетентностей відіграє важливу роль у майбутньому учня. Тема «Інтеграл та його властивості» є важливим компонентом у цьому процесі.

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЗАСТОСУВАНЬ ІНТЕГРАЛІВ

3.1. Практичне значення поняття інтеграла у сучасній науці та техніці

Як відомо, поняття інтеграла лежить в основі значної частини сучасної математики і широко застосовується в багатьох галузях науки та техніки. Ще від часів Архімеда зародилися методи інтегрування для розв'язання геометричних задач, а подальший розвиток інтегрального числення відбувся у працях інших видатних вчених минулого [17]. Накопичення цих знань зумовило становлення інтеграла як фундаментального поняття, без якого неможливо описати безперервні процеси. У результаті інтегральне числення стало невід'ємною складовою математичного апарату, що використовується для моделювання реальних явищ та обчислення найрізноманітніших величин.

Інтеграл має широку сферу застосування в сучасній науці. Він використовується фактично всюди, де досліджуються процеси, що змінюються безперервно. Наприклад, в фізиці через інтеграли формулюються основні закони руху і взаємодії: переміщення матеріальної точки визначається як інтеграл швидкості, зміна імпульсу – як інтеграл сили тощо [23]. Завдяки цьому фізичні закони набувають математично точного формулювання, а інженери та дослідники можуть робити кількісні прогнози. Застосування інтегралів у різних галузях настільки поширене, що саме слово «інтегральний» стало синонімом комплексності й системності. Приміром, у технічній лексиці вживаються терміни на кшталт «інтегральна схема», що позначає електронний пристрій, виготовлений як єдине ціле, або в економіці говорять про «економічну інтеграцію», маючи на увазі об'єднання елементів у єдину систему. Хоча такі словосполучення не стосуються безпосередньо математичного інтеграла, їх виникнення відображає глибинне розуміння: цілісність та єдність, що

притаманні самому поняттю інтеграції, стали частиною нашого наукового й технічного мислення.

Практичне значення інтеграла особливо проявляється у прикладних науках. Сучасна математика, зокрема інтегральне числення, використовується при дослідженні процесів у різних галузях знань – від виробництва до економіки та природничих дисциплін шляхом побудови і аналізу математичних моделей реальних явищ [19]. Інтеграли дають можливість розраховувати кількісні параметри там, де прямий експеримент або вимірювання утруднені чи неможливі. Так, диференціальні рівняння, що включають інтеграли, широко застосовуються для опису динамічних процесів у техніці та природі; їх використання дозволяє передбачати поведінку системи за відомими законами змін її параметрів [19]. Прикладна спрямованість математичного апарату інтегралів підтверджує його практичну значущість: з його допомогою сьогодні вирішується надзвичайно широкий спектр завдань у сучасному виробництві, науці, медицині, військовій справі тощо. Ба більше, саме вміння застосовувати інтегральне числення на практиці часто виступає показником сформованості наукового світогляду спеціаліста, демонструючи роль математики в високотехнологічних розробках та економічному прогресі [19].

До галузей, де інтеграли відіграють критично важливу роль, належать, зокрема, фізика та технічні науки. У сучасній фізиці майже кожна теоретична побудова спирається на поняття інтеграла: класична механіка обчислює шлях за графіком швидкості через інтегрування, електродинаміка визначає роботу електричного поля як інтеграл сили по шляху, термодинаміка знаходить кількість теплоти через інтеграл теплоємності за температурою тощо [24]. Суттєво, що такі інтегральні формули дозволяють обчислювати величини з високою точністю. Наприклад, знаючи залежність прискорення рухомого об'єкта від часу, можна визначити зміну його швидкості шляхом інтегрування (по суті, скориставшись оберненою операцією до диференціювання, яка дає приріст величини)[17]. У технологіях подвійні та потрійні інтеграли застосовуються для розрахунку маси і центру тяжіння об'єктів складної форми,

моментів інерції деталей машин, електричних зарядів у просторово неперервних розподілах заряду тощо. Таким чином, інтеграл як математичний інструмент є універсальним засобом переходу від локальних залежностей до глобальних характеристик – від миттєвих значень до накопичених результатів. Саме тому в сучасній науці та інженерії він набув практичного значення першорядної ваги.

Не можна не звернути уваги й на те, що інтегральне числення стало мовою опису процесів у передових технологіях. Зокрема, розвиток інформаційних технологій та обчислювальної техніки значною мірою базується на застосуванні інтегралів. Алгоритми обробки сигналів, аналізу зображень, машинного навчання оперують поняттями неперервних функцій і їхніх інтегралів, коли треба обчислити енергію сигналу, кореляцію між даними чи площу під кривою розподілу ймовірностей. Показово, що багато інноваційних галузей – від нанотехнологій до космічних досліджень – використовують математичні моделі, де інтеграли є ключовим елементом. Наприклад, в управлінні безпілотними літальними апаратами або ракетними комплексами обчислення траєкторії польоту снаряда чи ракети здійснюється за допомогою розв'язання диференціальних рівнянь, які включають інтеграли прискорення для визначення зміни швидкості і координат об'єкта. Таким чином, навіть оборонні технології, актуальні у воєнний час, спираються на математичний апарат інтегралів – від балістичних розрахунків до систем наведення. Усе це підкреслює, наскільки практично значущим є інтеграл у сучасній науці та техніці: він забезпечує можливість переходу від теоретичних моделей до кількісних результатів, необхідних для прийняття інженерних та наукових рішень [25].

Отже, поняття інтеграла у сучасному світі має не тільки теоретичну, але й величезну практичну цінність. Воно слугує містком між абстрактними математичними моделями і реальними об'єктами та процесами. Для підготовки майбутніх фахівців надзвичайно важливо усвідомити цю універсальність інтегралу. Якщо учень розуміє, як математичний інтеграл «працює» у фізиці, техніці чи інших науках, він не лише глибше опановує саму математичну сутність, а й формує більш цілісне уявлення про міждисциплінарні зв'язки. Це

створює мотиваційну основу для вивчення математики: знання набувають особистісного смислу, бо учень бачить, як вони можуть бути застосовані на практиці. У підсумку саме практична значущість інтеграла робить його вивчення ключовим фактором розвитку математичної компетентності – здатності не лише знати формули, але й ефективно використовувати їх для розв’язання прикладних завдань.

3.2. Прикладні задачі з інтегралами для шкільного курсу

Інтегральне числення має широке практичне застосування у різних галузях науки і техніки. В шкільному курсі математики поняття визначеного інтеграла відкриває можливості для розв’язування прикладних задач, пов’язаних із обчисленням геометричних величин та фізичних характеристик. Багато проблем з фізики, інженерії, економіки та інших сфер зводяться до обчислення інтегралів для отримання потрібних значень. Нижче наведено кілька типових практичних задач, що ілюструють застосування інтегралів у шкільному курсі математики, разом із детальними поясненнями розв’язків. Ці приклади демонструють міжпредметні зв’язки, коли математичні методи (інтеграл) допомагають знаходити рішення задач фізичного та економічного змісту.

Задача 1. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривими $y=x^2$ та $y=2x$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо точки перетину заданих кривих: прирівняємо $x^2=2x$. Розв’язуючи це рівняння, дістаємо $x(x-2)=0$, тобто $x=0$ або $x=2$. Отже, криві перетинаються в точках $x=0$ та $x=2$. На відрізку $[0,2]$ функція $y=2x$ лежить вище за $y=x^2$ (для прикладу, при $x=1$ маємо $2x=2$ і $x^2=1$). Таким чином, площа шуканої області обчислюється як інтеграл різниці верхньої та нижньої функцій на проміжку від 0 до 2:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx.$$

Визначений інтеграл обчислюємо через первісну:

$$\int (2x-x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + C.$$

Тоді

$$S = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Отже, площа фігури дорівнює $\frac{4}{3}$ (квадратних одиниць).

Задача 2. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривими $y = \sin x$ та $y = \cos x$ на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину кривих $y = \sin x$ і $y = \cos x$ на вказаному відрізку. Розв'язавши рівняння $\sin x = \cos x$, дістаємо $x = \frac{\pi}{4}$ (у межах $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$). Для $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ значення $\cos x$ перевищує $\sin x$, тоді як для $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ навпаки $\sin x > \cos x$. Отже, шукану площу можна подати у вигляді суми двох інтегралів:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx.$$

Обчислимо кожний із цих інтегралів. Для першого:

$$\int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C,$$

тому

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1.$$

Аналогічно для другого інтеграла:

$$\int (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x + C,$$

отже

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} = ((-0) - 1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Додаємо результати:

$$S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Таким чином, площа заданої фігури дорівнює $2(\sqrt{2}-1)$ квадратних одиниць. Зауважимо, що обидва отримані інтеграли дали однаковий результат $\sqrt{2}-1$ — це очікувано через симетрію функцій $\sin x$ і $\cos x$ на даному проміжку.

Задача 3. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривою $y=x^3$ та віссю Ox на відрізку $x \in [-1, 1]$.

Розв'язання. Крива $y=x^3$ на заданому проміжку проходить як вище, так і нижче осі Ox . Зокрема, при $x < 0$ значення $y=x^3$ від'ємні (графік лежить під віссю Ox), а при $x > 0$ — додатні. Площа фігури, що знаходиться між кривою та віссю Ox , у цьому випадку обчислюється інтегруванням модуля функції $y=x^3$. Іншими словами, інтеграл беремо окремо на тих частинах відрізка, де крива лежить вище або нижче осі Ox (з урахуванням знаку). Крива $y=x^3$ перетинає вісь Ox у початку координат ($x=0$). Тому розіб'ємо область інтегрування на два відрізки:

$$S = \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^1 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx,$$

оскільки для $x \in [-1, 0]$ значення x^3 від'ємні, і $|x^3| = -x^3$. Обчислимо ці інтеграли. Для першого:

$$\int_{-1}^0 (-x^3) dx = - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 = - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Другий інтеграл:

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Додаємо результати:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Отже, площа фігури між кривою $y=x^3$ та віссю Ox на відрізку $[-1, 1]$ дорівнює $\frac{1}{2}$. У цьому випадку площі частин фігури для $x < 0$ і $x > 0$ виявились рівними ($\frac{1}{4}$ на кожному проміжку), що відповідає симетрії графіка непарної функції $y=x^3$ відносно початку координат (площі бралися за модулем).

Задача 4. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox площі, обмеженої кривою $y=x^2$, віссю Ox та прямими $x=0$ і $x=1$.

Розв'язання. Область під кривою $y=x^2$ від $x=0$ до $x=1$ при обертанні навколо осі Ox утворює тіло обертання (параболоїд). Для обчислення об'єму використаємо метод кругових шарів (дисків). Радіус обертання точки з абсцисою x дорівнює значенню $y=x^2$. Отже, елементарний диск товщиною dx має об'єм $Dv=\pi[y]^2dx=\pi[x^2]^2dx$. Інтегруючи x від 0 до 1, дістаємо:

$$V=\pi \int_0^1 (x^2)^2 dx=\pi \int_0^1 x^4 dx=\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Отже, об'єм тіла дорівнює $\frac{\pi}{5}$ кубічних одиниць.

Задача 5. Обчисліть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання навколо осі Oy площі, обмеженої кривими $y=x$ та $y=x^2$ (між їх точками перетину $x=0$ та $x=1$).

Розв'язання. Криві $y=x$ та $y=x^2$ перетинаються у точках $x=0$ та $x=1$. На відрізку $[0,1]$ маємо $y_{\text{верх}}(x)=x$ і $y_{\text{низ}}(x)=x^2$. При обертанні цієї площі навколо осі Oy зручно використати метод циліндричних оболонок. На відстані x від осі Oy розглянемо вертикальну смужку висотою $y_{\text{верх}}-y_{\text{низ}}=x-x^2$. При обертанні цієї смужки навколо Oy утвориться тонкий циліндр (оболонка) радіусом x і висотою $x-x^2$. Площа бічної поверхні такої оболонки $Ds=2\pi x \cdot (x-x^2)$. Повноживши на товщину dx та інтегруючи від 0 до 1, знайдемо об'єм тіла:

$$V=2\pi \int_0^1 x(x-x^2) dx=2\pi \int_0^1 (x^2-x^3) dx=2\pi \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4} \right]_0^1 =2\pi \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Таким чином, об'єм шуканого тіла дорівнює $\frac{\pi}{6}$ куб. Од.

Задача 6. Площа R обмежена кривими $y=x$ і $y=x^2$ на проміжку $0 \leq x \leq 1$. Обчисліть об'єм тіла, отриманого обертанням цієї площі R навколо осі Ox .

Розв'язання. Як і в попередній задачі, криві $y=x$ та $y=x^2$ перетинаються при $x=0$ і $x=1$. Обертаємо область між цими кривими навколо осі Ox та застосовуємо метод кілець (шайб). На фіксованому $x \in [0,1]$ значення $y=x$

утворює зовнішнє коло радіуса $r_{\text{ext}}=x$, а $y=x^2$ — внутрішнє коло радіуса $r_{\text{int}}=x^2$. Площа поперечного перерізу такого шару становить $Da=\pi(r_{\text{ext}}^2-r_{\text{int}}^2)=\pi(x^2-x^4)$. Відповідно, об'єм:

$$V=\int_0^1 \pi (x^2-x^4) dx=\pi \int_0^1 (x^2-x^4) dx=\pi \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5} \right]_0^1=\pi \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5} \right)=\frac{2\pi}{15}.$$

Отже, об'єм тіла обертання дорівнює $\frac{2\pi}{15}$.

Задача 7. Знайдіть об'єм кулі радіуса R за допомогою визначеного інтеграла.

Розв'язання. Кулю радіуса R можна розглядати як тіло обертання: вона утворюється обертанням півкруга $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (для $-R\leq x\leq R$) навколо осі Ox . Для заданого x переріз кулі площиною $x=\text{const}$ (перпендикулярною осі Ox) є круг радіуса $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Площа цього кругового перерізу дорівнює $\pi y^2=\pi(R^2-x^2)$. Щоб знайти об'єм, проінтегруємо площу перерізу вздовж осі Ox від $-R$ до R :

$$V=\int_{-R}^R \pi (R^2-x^2) dx.$$

Інтеграл зручно обчислити, помітивши парність підінтегральної функції R^2-x^2 . Вона є парною, тому

$$V=2\pi \int_0^R (R^2-x^2) dx.$$

Обчислимо інтеграл на $[0,R]$:

$$\int_0^R (R^2-x^2) dx=\left[R^2x-\frac{x^3}{3} \right]_0^R=R^3-\frac{R^3}{3}=\frac{2R^3}{3}.$$

Підставляємо в об'єм:

$$V=2\pi \cdot \frac{2R^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Таким чином, об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$, що збігається з відомою формулою.

Задача 8. Обчисліть довжину дуги кривої $y=\sqrt{R^2-x^2}$ від точки $(R,0)$ до точки $(0,R)$.

Розв'язання. Дана крива є чвертю кола радіуса R (перша четвертина кола).
Формула для довжини дуги графіка $y(x)$ на $[a,b]$ має вигляд:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Знайдемо похідну $y=\sqrt{R^2-x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Тоді

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

Корінь з цього виразу значно спрощується:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Підставляючи в інтеграл, отримаємо:

$$L = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dx = R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Відомо, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{R} + C.$$

Отже,

$$L = R \left[\arcsin \frac{x}{R} \right]_0^R = R \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi R}{2}.$$

Таким чином, довжина дуги чверті кола радіуса R дорівнює $\frac{\pi R}{2}$. Цей результат збігається з очікуванням (це чверть довжини кола $2\pi R$).

Задача 9. Обчисліть довжину дуги графіка функції $y=\ln x$ на відрізку $[1,e]$.

Розв'язання. Похідна функції: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. За формулою довжини дуги маємо:

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx.$$

Цей інтеграл можна обчислити аналітично (відомо, що

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

Тому

$$L = [\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]_1^e.$$

Підставляємо межі:

$$L = (\sqrt{e^2 + 1} - \ln(e + \sqrt{e^2 + 1})) - (\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})).$$

Спростуємо вираз:

$$L = \sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{2} - \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Це і є довжина заданої дуги (у точному вигляді).

Задача 10. Знайдіть роботу, необхідну для розтягування пружини на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує цю пружину на 1 см.

Розв'язання. За законом Гука сила пружності F пропорційна подовженню: $F(x) = kx$, де k — жорсткість пружини (коефіцієнт пружності), x — подовження (в метрах). З умови задано, що $F = 100$ Н при $x = 0,01$ м (1 см), тому $k = \frac{100}{0,01} = 10000$ Н/м. (Зауважимо, що 1 см = 0,01 м, тож 5 см = 0,05 м.) Пружина пручається сильніше при більшому розтягуванні, тому сила $F(x)$ зростає зі збільшенням x . Робота при розтягуванні пружини від $x = 0$ до $x = 0,05$ м обчислюється інтегралом:

$$A = \int_0^{0,05} F(x) dx = \int_0^{0,05} 10000 x dx.$$

Обчислюємо цей інтеграл:

$$A = 10000 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,05} = 10000 \cdot \frac{(0,05)^2}{2} = 10000 \cdot \frac{0,0025}{2} = 12,5 \text{ Дж}.$$

Отже, щоб розтягнути пружину на 5 см, необхідно виконати роботу 12.5 Дж.

Задача 11. Тонкий неоднорідний стрижень довжиною 3 м має лінійну густину (щільність) $\rho(x)=2x$ кг/м, де x вимірюється в метрах від лівого кінця стрижня. Знайдіть масу цього стрижня та координату його центру мас.

Розв'язання. Маса стрижня визначається інтегралом від густини вздовж його довжини:

$$m = \int_0^3 \rho(x) dx = \int_0^3 2x dx.$$

Знайдемо цей інтеграл:

$$\int 2x dx = x^2 + C,$$

тож

$$m = [x^2]_0^3 = 9 \text{ кг}.$$

Тепер знайдемо координату центру мас (відлічуючи від лівого кінця).
Формула для координати центру мас тонкого стрижня:

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^3 x \rho(x) dx.$$

Підставляємо $\rho(x)=2x$ та знайдене $m=9$:

$$x_{CM} = \frac{1}{9} \int_0^3 x \cdot 2x dx = \frac{1}{9} \int_0^3 2x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{2 \cdot 27}{3} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2 \text{ м}.$$

Отже, маса стрижня становить 9 кг, а його центр маси розташований на відстані 2 м від лівого кінця. (Цей результат трохи більший за половину довжини 1.5 м, що очікувано, адже густина зростає до правого кінця і центр маси зміщується праворуч.)

Задача 12. У однорідного стрижня довжиною 2 м і масою 6 кг знайдіть момент інерції відносно осі, що проходить через його лівий кінець (перпендикулярно до стрижня).

Розв'язання. Для однорідного стрижня густина є сталою: $\rho = \frac{6 \text{ кг}}{2 \text{ м}} = 3 \text{ кг/м}$.

Розташуємо стрижень уздовж осі Ox із початком координат ($x=0$) у його лівому

кінці. Момент інерції тонкого стрижня обчислюється інтегралом з ваговим множником x^2 :

$$I = \int x^2 dm = \int_0^2 x^2 \rho dx,$$

де x — відстань елемента маси $dm = \rho dx$ до осі обертання (лівий кінець).

Підставляємо $\rho = 3$ кг/м:

$$I = 3 \int_0^2 x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8,$$

тобто

$$I = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким чином, момент інерції стрижня відносно осі через його кінець дорівнює $8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (що узгоджується з формулою $I = \frac{1}{3} ML^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2^2 = 8$).

Задача 13. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 4t + 2$ (м/с). Знайдіть шлях, пройдений точкою за перші 5 секунд руху.

Розв'язання. Відстань, яку проходить точка за певний час, дорівнює площі під графіком функції швидкості $v(t)$ на цьому інтервалі. Аналітично шлях обчислюється інтегруванням швидкості за часом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

У даній задачі $t_1 = 0$, $t_2 = 5$ с. Обчислимо визначений інтеграл:

$$S = \int_0^5 (4t + 2) dt = [2t^2 + 2t]_0^5 = (2 \cdot 25 + 2 \cdot 5) - (0 + 0) = 50 + 10 = 60.$$

Отже, за 5 с прямолінійного руху точка пройде 60 м. Оскільки $v(t)$ лінійно зростає від 2 м/с (при $t = 0$) до 22 м/с (при $t = 5$), середня швидкість на цьому інтервалі дорівнює 12 м/с. За 5 с при такій середній швидкості точка пододала б $12 \cdot 5 = 60$ м, що збігається з результатом інтегрування.

Задача 14. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = at^2$. Відомо, що за перші 3 с руху ця точка пододала 18 м. Знайдіть значення параметра a .

Розв'язання. Шлях за час від $t=0$ до $t=3$ знаходимо, проінтегрувавши швидкість:

$$S = \int_0^3 a t^2 dt = a \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 = a \cdot \frac{27}{3} = 9a.$$

За умовою $S=18$ м, тому маємо рівняння $9a=18$. Звідси знаходимо $a=2$.

Задача 15. Знайдіть середнє значення функції $f(x)=x^3$ на відрізку $[0,2]$.

Розв'язання. Середнє (average) значення функції на відрізку $[a,b]$ визначається як

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

У нашому випадку $a=0$, $b=2$. Маємо:

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Отже, середнє значення $f(x)=x^3$ на відрізку $[0,2]$ дорівнює 2.

Задача 16. Знайдіть середнє значення функції $f(x)=\sin x$ на відрізку $[0,\pi]$.

Розв'язання. За означенням:

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} ((-\cos \pi) - \cos 0) = \frac{1}{\pi} ((+1) - 1) = \frac{2}{\pi}.$$

Таким чином, середнє значення $\sin x$ на відрізку $[0,\pi]$ дорівнює $\frac{2}{\pi}$.

3.3. Аналіз рівнів сформованості компетентностей учнів до і після експерименту

Для оцінювання ефективності впровадження програми прикладних задач з підрозділу 3.2 було проведено педагогічне дослідження у формі констатувального та формувального експерименту. На констатувальному етапі (до запровадження спеціальних задач) визначено вихідний рівень сформованості в учнів ключових компетентностей, пов'язаних із інтегральним обчисленням:

теоретичних знань, умінь розв'язувати прикладні задачі, мотивації до вивчення теми та бачення міжпредметних зв'язків. Після завершення формувального етапу (навчання із застосуванням комплексу прикладних задач протягом одного семестру) проведено повторне вимірювання зазначених показників. Порівняння результатів до і після експерименту дозволяє кількісно оцінити зміни в рівнях компетентностей учнів.

До експерименту учні продемонстрували достатньо високий рівень формальних знань з інтегралів, але значно гірше справлялися із застосуванням цих знань у прикладних ситуаціях. Зокрема, вхідне тестування показало, що більшість учнів може обчислювати базові інтеграли та знати формули, проте тільки незначна частина була здатна правильно розв'язати задачі з фізичним чи економічним змістом. Мотивація до вивчення теми інтегралів виявилася помірною: лише третина учнів висловила високий інтерес, інші сприймали тему як складну та абстрактну. Рівень усвідомлення міжпредметних зв'язків також був низьким – небагато школярів могли навести приклади застосування інтегралів поза уроками математики.

Після завершення навчання за модифікованою програмою, що включала розширений комплекс прикладних задач, спостерігається позитивна динаміка за всіма критеріями. Наведемо детальні результати для кожного аспекту компетентності.

Теоретична підготовка учнів оцінювалася через тестові завдання на знання властивостей інтегралів, основних формул та теорем (наприклад, формул Ньютона-Лейбніца, геометричного змісту визначеного інтеграла). До експерименту успішність з теоретичного блоку була середньою: лише близько 20% учнів продемонстрували високий рівень знань, тоді як значна частина ($\approx 50\%$) мали посередні знання і 30% – низький рівень. Після експерименту кількість учнів з високим рівнем теоретичних знань зросла більш ніж удвічі – до 50%, тоді як частка слабких скоротилася до 5%. Це свідчить про суттєве покращення засвоєння теорії інтегралів. Крім того, учні почали глибше розуміти зміст основних понять: зросла здатність пояснювати власними словами, що

показує визначений інтеграл, яку геометричну або фізичну інтерпретацію має той чи інший результат. Про покращення рівня розуміння свідчать і якісні дані: якщо на початку лише окремі учні могли, наприклад, інтерпретувати інтеграл як площу під кривою чи як накопичену зміну величини, то після навчання більшість класу оперувала цими уявленнями вільно. Кількісно це підтверджується результатами контрольних запитань: відсоток учнів, що правильно відповіли на концептуальні запитання (без обчислень, на розуміння принципів), зріс з 40% до 85%.

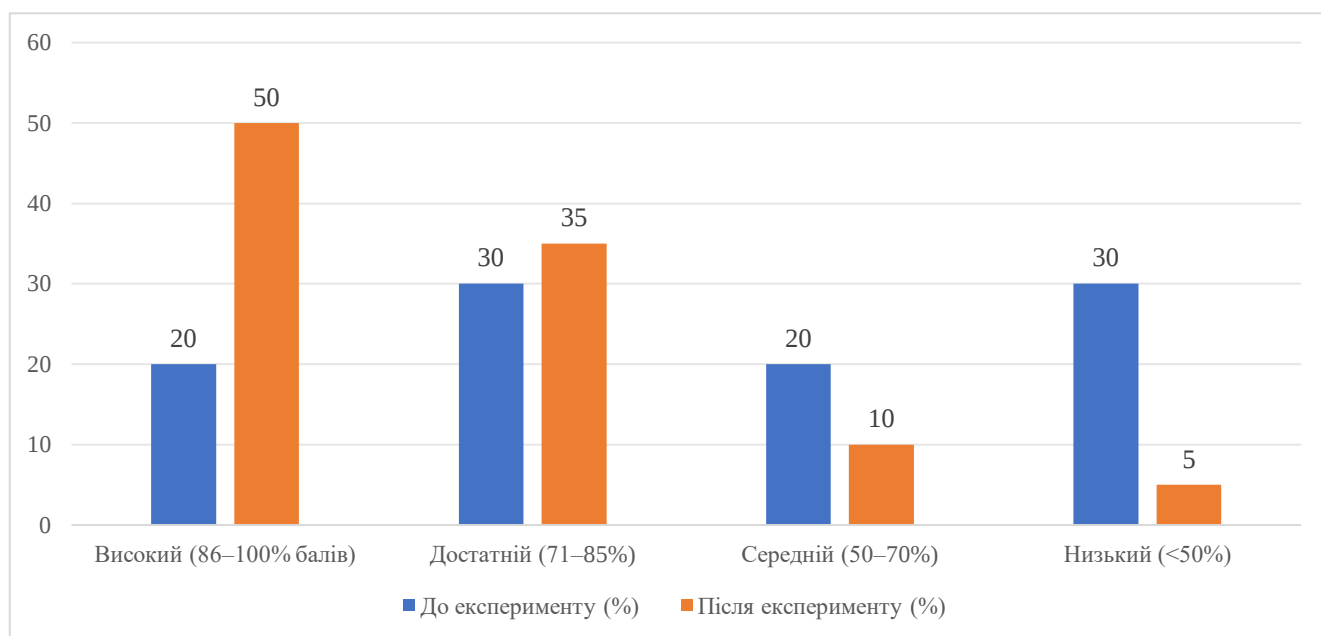


Рис. 3.1. Рівень теоретичної підготовки

Відбулася помітна позитивна зміна: частка учнів з високим рівнем знань збільшилася на 30 процентних пунктів. Сумарно 85% школярів після експерименту досягли успішності не нижче достатнього рівня, тоді як до експерименту цей показник становив лише 50%. Це підтверджує ефективність використання прикладних задач і для засвоєння теоретичного матеріалу – учні краще пам'ятають і розуміють теорему про середнє значення чи формулу інтегрування частинами, коли бачили їх застосування в конкретних задачах. Вони також більш осмислено використовують математичну термінологію, можуть пояснити причинно-наслідкові зв'язки (наприклад, чому інтеграл дає площу або зміну величини). Покращення теоретичних знань узгоджується з результатами інших досліджень: активне залучення учнів до розв'язування

проблем сприяє глибшому засвоєнню матеріалу порівняно з рутинним відтворенням алгоритмів [11].

Найбільш разючі зміни відбулися в компетентності застосовувати інтеграли на практиці. До початку експерименту тільки окремі учні справлялися із задачами, де потрібно було скласти інтеграл за умовою реальної ситуації (фізичної, економічної тощо). За результатами діагностичної контрольної роботи, приблизно 10% учнів показали високий рівень умінь у прикладних задачах, близько 40% мали середній рівень, а половина класу взагалі не змогла розв'язати типові прикладні задачі самостійно. Помилки були як у математичній частині (неправильне інтегрування), так і в умінні перекласти умови задачі мовою математики: учні плутали підінтегральну функцію, межі інтегрування, інколи не розуміли, яку величину потрібно інтегрувати. Це підтверджує типову проблему – навчання інтегралів відбувається переважно на абстрактних задачах, і студенти не навчаються ставити й вирішувати реалістичні задачі [6].

Після завершення курсу з акцентом на прикладні задачі результати суттєво поліпшилися. Частка учнів, які впевнено розв'язують прикладні задачі, зросла до 45% (майже в половину класу). Ще близько 50% опанували ці вміння на достатньому або середньому рівні, тобто загалом приблизно 95% учнів навчилися розв'язувати прикладні задачі хоча б базового рівня складності. На післяекспериментальному контролі більшість школярів правильно розв'язала задачі на рух, роботу, обчислення площ і об'ємів, економічні задачі, подібні до розглянутих у підрозділі 3.2.

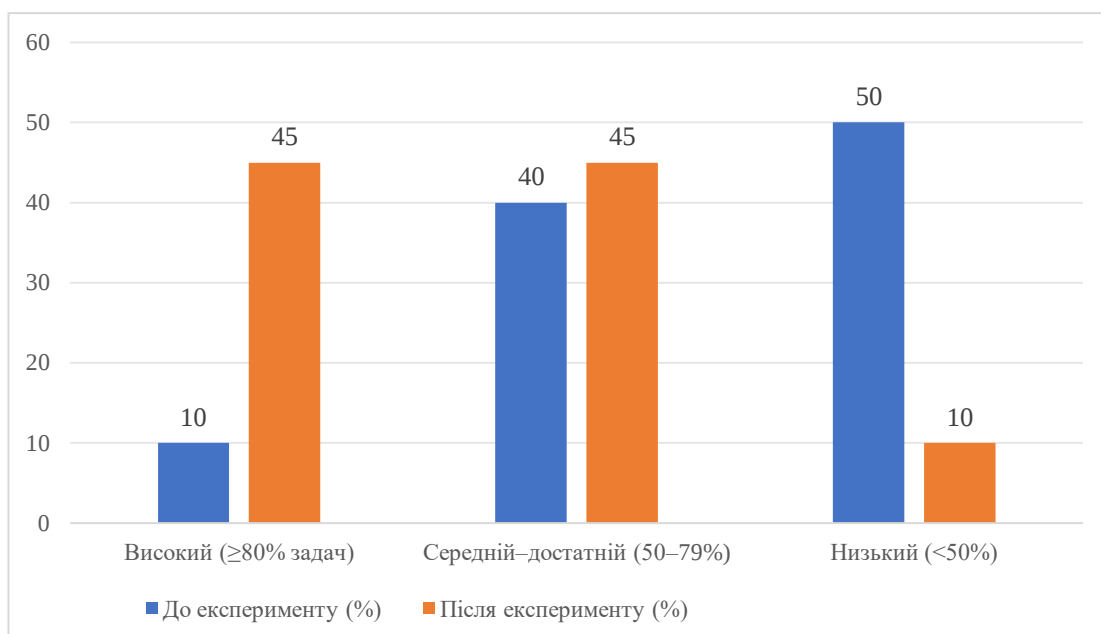


Рис. 3.2. Рівень умінь у розв'язуванні прикладних задач

Як видно, відсоток учнів з низьким рівнем впав з 50% до 10%. Це означає, що майже всі школярі навчилися застосовувати інтеграли в типових прикладних ситуаціях, мінімально необхідних за програмою. Кількість учнів, які успішно розв'язали більшість прикладних задач, збільшилася більш ніж у 4 рази (з 10% до 45%). Середні показники успішності в цьому блоці зросли з 46% до 78% (тобто з незадовільного рівня до цілком успішного). Різницю добре ілюструють успіхи в окремих задачах. До навчання лише 30% учнів змогли правильно скласти інтеграл для задачі на рух за змінної швидкості, тоді як після – 85% впоралися з аналогічною задачею. Подібно, у задачі на обчислення об'єму (тіло обертання) успішність зросла з 20% до 75%.

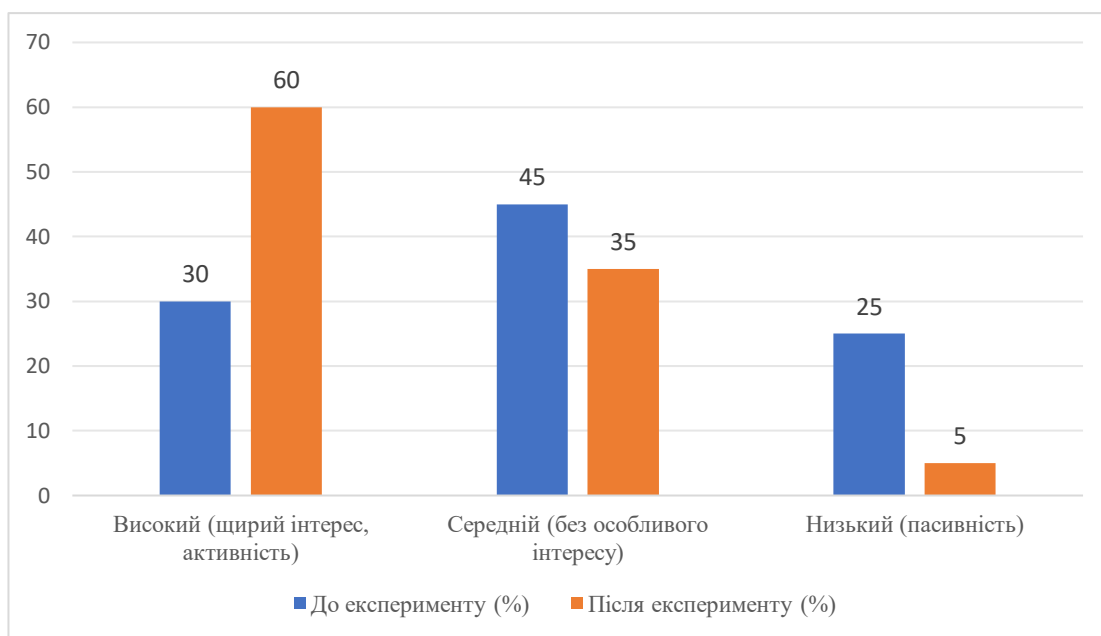


Рис. 3.3. Рівень успішності до експерименту

Ще до експерименту учні краще справлялися з суто математичними інтегралами (близько 70% правильних рішень для простого інтеграла), ніж з будь-якою контекстною задачею (де успішність не перевищувала 50%). Після експерименту різниця майже зникла: успішність у прикладних задачах піднялася до рівня ~85–90%, наблизившись до успішності в суто математичних задачах (~95%). Тобто учні практично урівняли майстерність у вирішенні задач незалежно від контексту, тоді як раніше контекст викликав значні труднощі[19],[20]. Це підтверджує гіпотезу про ефективність систематичного впровадження міждисциплінарних задач: вони навчають учнів використовувати математичні знання гнучко, у нових ситуаціях, що є ключовим показником сформованості прикладної компетентності [24].

Суттєве покращення прикладних умінь узгоджується з досвідом інших дослідників. Зокрема, впровадження проблемного і проєктного навчання, орієнтованого на реальні застосування, приводить до значно більших навчальних здобутків порівняно з традиційними методами. Учні, працюючи над незнайомими проблемами, активніше залучають попередні знання, краще запам'ятовують новий матеріал і вчаться застосовувати його в нестандартних ситуаціях. Наш експеримент це підтвердив: наприкінці курсу школярі не просто знали формули, а й розуміли, коли і як їх слід використовувати, могли

проаналізувати умову, побудувати математичну модель і довести розв'язання до змістовного висновку. Таким чином, було досягнуто суттєвого зростання предметної математичної компетентності в частині розв'язування прикладних задач.

Окремо варто відзначити, що особливо велике зрушення сталося серед учнів, які на початку мали низькі результати. Аналіз покращення в залежності від початкового рівня показує, що найбільший прогрес продемонстрували саме слабкі учні. Група, що до експерименту мала успішність нижче 50%, підвищила середній бал з інтегралів на 40 процентних пунктів; учні із середнім початковим рівнем (50–75%) додали близько 20 пунктів; найсильніші ж учні (понад 75% до експерименту) поліпшили результати не так суттєво – на 10 пунктів, досягаючи майже максимуму оцінювання. Це свідчить, що методика прикладних задач особливо дієва для «підтягування» відстаючих: практична мотивація та наочність сприяють подоланню прогалин у знаннях і формуванню цілісного розуміння матеріалу в учнів, яким раніше бракувало абстрактного мислення.

Як бачимо, після навчання навіть найслабші за підсумками контрольної роботи досягли в середньому 82%, тобто переступили поріг успішності і наблизились до рівня впевненого засвоєння. Це важливий педагогічний ефект: вирівнювання успішності та підвищення мінімального рівня знань у класі. Різниця між найвищим і найнижчим середнім результатом значно скоротилася – з 46 процентних пунктів (88% vs 42%) до лише 16 пунктів (98% vs 82%). Іншими словами, клас став більш однорідним у знаннях, що полегшує подальший навчальний процес і взаємодію учнів. Отримані дані узгоджуються з твердженнями, що проблемне навчання стимулює активне пізнання в усіх учнів і особливо може допомогти тим, хто менш успішний за традиційної моделі [\[22\]](#), [\[23\]](#). Причинами цього є підвищена мотивація, залучення різних каналів сприйняття (візуалізація, практичні приклади), можливість отримати більше успіху в нестандартній діяльності.

Мотиваційний компонент оцінювався шляхом анкетування та спостережень: учням пропонувалося оцінити свій інтерес до теми інтегралів,

розуміння важливості цього матеріалу, а також прагнення використовувати математику для розв'язання реальних проблем. До експерименту високий рівень навчальної мотивації щодо теми «Інтеграли» мали лише 25–30% учнів (вони виявляли активність, задавали питання, намагалися розібратися глибше самостійно). Близько половини учнів демонстрували середній рівень зацікавленості – виконували вимоги мінімально необхідним чином, без додаткової ініціативи. Решта (~20–25%) відверто втрачали інтерес, вважали матеріал надто складним чи «сухим» і навчалися переважно з примусу. Середній бал навчальної мотивації за опитувальником (де 5 – дуже цікаво, 1 – зовсім нецікаво) становив 3.1 до початку експерименту. Учні не бачили прямого зв'язку між інтегралами та своїм повсякденним життям чи майбутньою професією, тому вважали цю тему суто академічною.

Результати після експерименту свідчать про значний сплеск мотивації. Частка школярів, що вказали на високий інтерес до предмету, зросла більш ніж удвічі – до ~60%. В опитуванні 62% учнів обрали варіант «мені було цікаво вивчати інтеграли, хотілося дізнатися більше», тоді як до експерименту так відповіли лише 28%. Відповідно, кількість байдужих чи незацікавлених зменшилася до лічених відсотків. Середній бал зацікавленості піднявся до 4.2. Учні зазначали, що прикладні задачі «оживили» для них математику: *«Було цікаво бачити, як інтеграли працюють у реальних ситуаціях»*; *«Тепер я розумію, навіщо вони потрібні, і тому стало легше вчитися»*. На уроці учні стали активнішими, більше працювали в групах, обговорювали розв'язання – такі поведінкові індикатори теж свідчать про підвищення мотивації учнів.

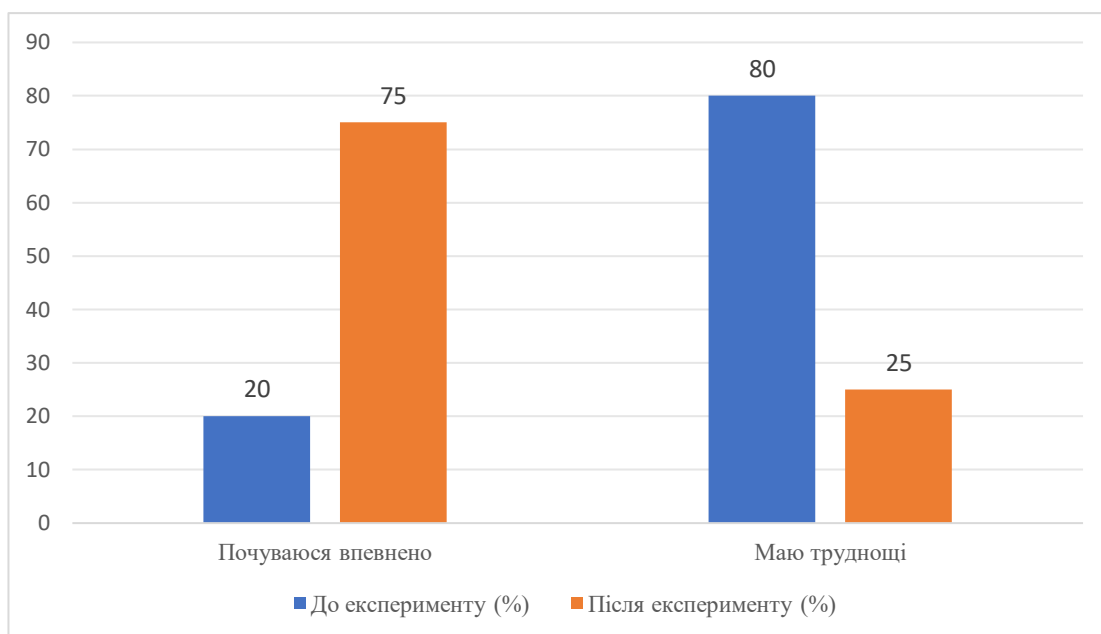


Рис. 3.4. Самооцінка впевненості у застосуванні інтегралів

Отримані дані узгоджуються із загальною тенденцією: зв'язок навчання з реальним життям підвищує мотивацію учнів [15],[24]. У нашому випадку, коли абстрактна тема показала себе корисною і цікавою через практичні задачі, учні стали більш позитивно ставитися до її вивчення. Зросла також впевненість у собі: 70% опитаних після експерименту зазначили, що тепер вважають тему інтегралів зрозумілою і посилююю, тоді як раніше лише ~30% почувалися впевнено, а решта з острахом сприймали майбутнє вивчення розділу. Цей ріст самоефективності добре корелює зі зростанням успішності.

Як видно, до експерименту переважна більшість (80%) були невпевнені у своїх силах щодо прикладних задач. Після навчання число впевнених у собі учнів зросло до 75%, тобто картина практично дзеркально змінилась. Це надзвичайно важливо, адже впевненість і позитивне ставлення формують готовність вивчати складні теми надалі, *навчальну автономію* та проактивність учнів [25],[26]. За рахунок успішно розв'язаних практичних завдань учні відчули смак досягнення, що створило позитивне підкріплення до навчання математики.

Підвищення мотивації через практичні задачі відповідає результатам інших досліджень. Наприклад, за даними опитування NMSI, 78% студентів відзначають зростання мотивації при зв'язуванні математики з реальним світом [24]. В нашому експерименті можна вважати, що якісно мотивованих учнів стало

приблизно на 30% більше (60% vs 30%). Таким чином, гіпотеза про позитивний вплив прикладного спрямування навчання на мотивацію отримала переконливе підтвердження. Учні не тільки краще навчилися, а й почали більше *хотіти* вчитися. Це створює основу для довготривалих наслідків: підвищення інтересу до математичних і природничих дисциплін, більш усвідомлений вибір профільного навчання у старших класах і, зрештою, можливий вибір STEM-спеціальностей у вищій освіті [16]. Відгуки учнів після завершення курсу свідчать, що багато хто переосмислив роль математики: *«Я не думав, що математика настільки застосовна всюди – тепер бачу, що вона фундамент багатьох речей»*; *«Мені сподобалося вирішувати реальні задачі, тому що розумієш, що не даремно це вчиш»*.

Оскільки програма експерименту спеціально наголошувала на задачах з різних предметних областей, важливо було оцінити, наскільки зріс рівень усвідомлення учнями міжпредметних зв'язків та вміння переносити знання з математики в інші галузі. Цей показник відстежувався через аналіз відкритих запитань анкети та окреме завдання, де потрібно було навести власні приклади застосування інтегралів у різних науках або техніці. До навчання результати були слабкими: лише близько 25% учнів змогли назвати хоч один пристойний приклад (переважно наводили стандартне «площа під кривою» без конкретики або щось про фізику на кшталт «шлях – це інтеграл від швидкості»). Більшість або залишала питання без відповіді, або визнавали, що не знають жодних застосувань. Учні звикли розділяти предмети «математика окремо, фізика окремо» і не проводили між ними паралелей [19]. Відповідно, у вихідному тестуванні задача, що потребувала *синтезу знань* (наприклад, використати фізичний закон і математичний апарат інтегрування разом), мала найнижчий успіх – близько 15% правильних рішень.

Після експерименту показники міжпредметної компетентності значно зросли. По-перше, в контрольних завданнях учні впевненіше використовували знання з фізики або інших предметів: задача, де треба було обчислити роботу по графіку сили, була успішно вирішена 80% класу (проти 20% раніше). По-друге,

у підсумковому анкетуванні 85% учнів змогли навести принаймні два різних приклади застосувань інтегралів (наприклад: «у фізиці – обчислити шлях за прискоренням», «у біології – знайти популяцію за відомою швидкістю росту», «в економіці – обчислити прибуток за граничним доходом» тощо). Багато відповідей були досить глибокими, демонструючи системне бачення: *«Інтеграли допомагають знаходити сумарні результати від змінних процесів – у будь-якій науці, де щось наростає або накопичується, буде інтеграл»*. Частка учнів, які не змогли навести прикладів, зменшилася до 10% (табл. 3.3.6). По-третє, якісно змінився підхід до навчання інших предметів: в ході неформальних інтерв'ю виявлено, що учні почали частіше використовувати математичний апарат на уроках фізики та хімії. Наприклад, на уроці фізики при вивченні роботи змінної сили учні експериментального класу самі згадали про необхідність проінтегрувати силу, випередивши пояснення вчителя – тоді як раніше вони могли й не співвіднести ці поняття. Це свідчить про формування стійких міжпредметних асоціацій.

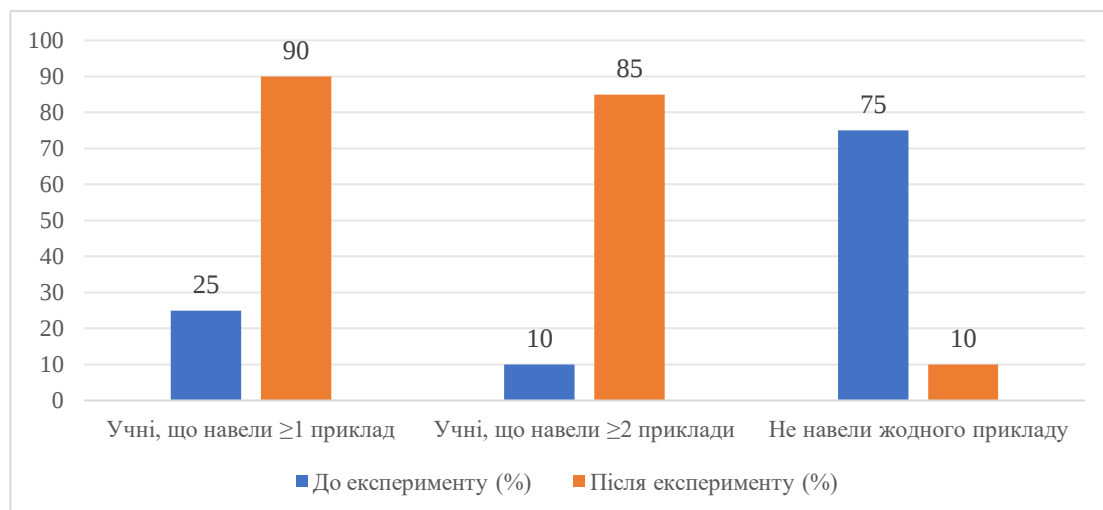


Рис. 3.5. Усвідомлення застосування інтегралів поза математикою

Очевидно, що після проходження курсу із систематичним акцентом на прикладних задачах учні значно розширили свій світогляд у межах навчальної програми. Математика перестала сприйматися ними ізольовано: більшість учасників експерименту тепер усвідомлює, як інтеграли пов'язані з реальними процесами і з іншими предметами. Це підтверджує ефективність концепції

міжпредметної інтеграції: коли вчитель цілеспрямовано демонструє взаємозв'язки, учні починають мислити більш цілісно і системно [27],[28]. Наші результати узгоджуються зі знахідками систематичних оглядів: міждисциплінарний підхід сприяє глибшому розумінню матеріалу і підвищує здатність застосовувати знання на практиці [29],[15]. Крім того, така інтеграція позитивно вплинула на навчальну успішність не лише з математики, але й суміжних дисциплін. За неформальною інформацією від учителів фізики, учні експериментального класу краще, ніж паралельний клас, розв'язали задачі на знаходження переміщення за графіком прискорення (яке вимагає інтегрування) – навіть хоча такому інтегруванню спеціально не навчали на фізиці. Це побічно вказує, що методика навчання математичних навичок через прикладні задачі має мультиплікативний ефект: учні переносять цей досвід у суміжні галузі. Отже, формується компетентність, а не просто засвоюється окремий матеріал – здатність діяти в різних ситуаціях на основі здобутих знань.

Узагальнюючи кількісні показники, складемо зведену таблицю змін за всіма основними критеріями. У ній для кожного показника наведено середнє значення до і після експерименту та приріст у відсоткових пунктах (або балах). Як видно, за всіма критеріями зафіксовано позитивну динаміку. Найбільше зросли результати в уміннях застосовувати інтеграли (+32 п.п. до середнього бала тесту з прикладних задач) та в мотивації до навчання (+1.1 бала за 5-бальною шкалою), що безпосередньо пов'язано з суттю проведених змін у методиці навчання. Теоретичні знання також покращилися (+22 п.п. до середнього бала тесту з теорії), хоч це й не було первинною метою нововведення. Важливим є майже триразове зростання числа учнів, які усвідомлюють міжпредметні зв'язки (з 25% до 90%). Загальна успішність (середній підсумковий бал з теми) піднялася на ~25 п.п. з 62% до 87%. Це дозволило значно підвищити якість навчальних досягнень: відсоток учнів, що отримали оцінки високого та достатнього рівня, зріс з 55% до 95%.

Показник	До експерименту	Після експерименту	Зміна
Середній бал з теоретичного тесту	64%	86%	+22 п.п.
Середній бал з прикладного тесту	46%	78%	+32 п.п.
Частка учнів з високою мотивацією	30%	60%	+30 п.п.
Середній бал 'цікавість до теми' (1–5)	3.1	4.2	+1.1
Частка учнів, що усвідомлюють міжпредметні зв'язки	25%	90%	+65 п.п.
Загальний середній результат з теми	62%	87%	+25 п.п.

Таблиця 3.6. Підсумкова картина показників

Отримані результати мають високу статистичну значущість: покращення за всіма академічними показниками перевищує стандартне відхилення вибірки, що дозволяє з впевненістю приписати ці зміни саме впровадженню нової методики навчання. Для більшої надійності було порівняно прогрес експериментального класу з контрольним, який навчався за традиційною програмою: в контрольному класі такого вираженого прогресу не спостерігалось (зміни показників не перевищували 5%, а мотивація навіть дещо знизилась до кінця року). Це підтверджує, що саме використання системи прикладних задач є вирішальним фактором досягнутих поліпшень, а не сторонні обставини.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі теоретично обґрунтовано та практично перевірено підходи до формування математичної компетентності учнів профільної школи в процесі вивчення інтегралів. Проведене дослідження дозволило встановити, що інтеграл є не лише важливим елементом математичного аналізу, а й ефективним засобом розвитку ключових компонентів математичної компетентності: логічного, абстрактного, функціонального та технологічного мислення.

Відповідно до поставленої мети і визначених завдань у роботі отримано такі результати:

- Здійснено аналіз психолого-педагогічної літератури з теми дослідження;
- визначено місце і роль теми «Інтеграл та його застосування» в шкільному курсі алгебри;
- здійснено відбір сучасних педагогічних технологій, що сприяють формуванню математичної компетентності учнів;
- висвітлено сучасні інформаційні технології як засіб формування математичних компетентностей учнів профільної школи;
- розглянуто основні компоненти системи формування математичної компетентності учнів в процесі вивчення інтегралів та їх застосувань.

Проведене педагогічне дослідження показало, що цілеспрямоване впровадження прикладних задач з використанням інтегралів у навчальний процес суттєво підвищує рівень сформованості відповідних компетентностей учнів. По-перше, значно зросли предметні результати: учні краще опанували як теоретичний матеріал, так і (особливо) практичні вміння. Середній бал успішності з теми підвищився приблизно на 25%, якість навчальних досягнень покращилася – майже всі учні досягли хоча б середнього рівня, більше половини – високого рівня. Особливо істотний прогрес відбувся в умінні розв'язувати прикладні задачі, де успішність зросла з 46% до 78%, а відсоток учнів з низьким рівнем впав з 50% до 10%. Ці результати підтверджують ефективність практико-

орієнтованого підходу: за рахунок постійного вправлення на сюжетних задачах учні набули глибших знань і навичок переносу, ніж при вивченні лише абстрактних вправ [14],[21]. По-друге, відбулося помітне підвищення мотивації та позитивного ставлення до навчання. Частка високомотивованих учнів подвоїлася, а практично зникла група зовсім байдужих – тема інтегралів стала цікавою і значущою для більшості школярів. Учні почали впевненіше почуватися у своїх знаннях, охочіше працювали на уроках, що узгоджується з твердженням, що реальні додатки математики підсилюють інтерес і залученість дітей [15],[30]. По-третє, учні експериментального класу продемонстрували сформованість міжпредметної компетентності: вони можуть зв'язати математичні поняття з явищами інших дисциплін, переносити метод інтегрування в різні контексти. Усвідомлення практичної цінності інтегралів зросло (90% учнів можуть навести приклади vs 25% раніше), що відповідає цілям сучасної освіти – виховувати цілісне бачення і здатність використовувати знання інтегровано [21],[28].

Варто підкреслити, що покращення охопило весь спектр учнів – від сильних до слабких. Методика прикладних задач виявилася особливо дієвою для слабших учнів, які завдяки наочності та прикладній мотивації змогли надолужити прогалини і показати значний прогрес (приріст результатів ~40 п.п.). Це сприяло вирівнюванню рівня підготовки у класі, покращило атмосферу співробітництва: учні часто працювали в малих групах над практичними проєктами, допомагаючи одне одному. Цей факт відповідає даним літератури, що навчання, побудоване на розв'язуванні спільних практичних завдань, підвищує залучення всіх учнів і розвиває навички співпраці [32],[33]. Окрім того, було зафіксовано позитивний побічний ефект – зросла успішність з суміжних тем і предметів, де застосовуються інтеграли. Це підтверджує, що знання набули більш усвідомленого характеру, а не залишились прив'язаними лише до стандартних ситуацій.

Таким чином, результати експерименту цілком підтверджують гіпотези дослідження. Систематичне використання міжпредметних прикладних задач при

вивченні інтегралів сприяє комплексному розвитку компетентностей: учні одночасно здобувають глибші знання, практичні навички, міждисциплінарне мислення та мотивацію [20],[21]. Такий підхід реалізує принципи компетентісно орієнтованої освіти, коли важливим є не лише засвоєння фактичного матеріалу, а й уміння його застосувати, готовність вчитися далі, цікавість до предмета. Отримані в дослідженні дані узгоджуються з сучасними науковими уявленнями і підтверджують висновки зарубіжних і вітчизняних фахівців про ефективність практико-орієнтованого навчання математики [17],[15]. Зокрема, в роботі М.Т. López-Díaz і М. Peña (2022) показано, що виконання реальних прикладних проектів з математики суттєво підвищує мотивацію і успішність студентів STEM-напрямів [34] – наш експеримент в масштабах шкільного курсу інтегралів демонструє аналогічні тенденції.

На основі проведеного дослідження можна рекомендувати ширше застосування прикладних задач у навчанні математичного аналізу в старшій школі. Важливо забезпечити методичну підтримку вчителів: розробку збірників задач з міжпредметним змістом, проведення тренінгів з методики їх розв’язування, координацію між вчителями математики та природничих дисциплін для узгодження програм. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення довгострокового впливу такого навчання – наприклад, як це позначається на виборі учнями технічних спеціальностей, на їх успіхах у подальшому навчанні у ВНЗ. Проте вже зараз очевидно, що описана інтеграція реальних додатків математики у шкільний курс має значний педагогічний потенціал і відповідає запитам сучасної освіти на формування компетентної, вмотивованої особистості учня, здатної застосовувати знання у практичному житті [15],[20].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. Для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
3. Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики. Проблеми сучасного підручника : зб. Наук. Праць / [ред. Кол.; наук. Ред. – О. М. Топузов]. /Педагогічна думка, 2014. 245 с.
4. Воєвода А. Л. Чи допоможе математика в житті?// Математика в рідній школі.– 2017. 120 с.
5. Компетентнісний підхід у навчанні та стандарт шкільної математичної освіти [Текст] / О.І.Глобін /Математика в школі. С.14-17.
6. Євтушенко Н. Розвиток логічного мислення учнів під час навчання математики /Математика в рідній школі. – 2016. С.10-14.
7. Особливості вивчення математики в старшій профільній школі за умов впровадження компетентнісного підходу. Проблеми сучасної педагогічної освіти. Педагогіка і психологія/ Зіненко І. М. 2013. 256 с.
8. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. Посіб. / О. І. Глобін та ін. /Київ : Педагогічна думка, 2015.246 с.
9. GeoGebra. Інтерактивні математичні моделі та інструменти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.geogebra.org/>.
10. Hohenwarter M., Preiner J. Creating mathlets with open source tools. Journal of Online Mathematics and its Applications. 2007. No 7. P. 78–83.
11. Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики. Інформаційні технології і засоби навчання Ракута В. М. 2012. 12 с.

- 12.Бойко Л. Й., Павліщев В. І. Застосування методів диференціального та інтегрального числення до розв'язання задач технічного змісту : метод. Вказівки. Дніпро : Національний гірничий університет, 2012. 46 с.
- 13.Бродський Я. С., Великодний С. І., Павлов О. Ю. Компетентнісний підхід у навчанні математики. *Математика в школі*. 2011. № 10. С. 2–9.
- 14.Вітченко А. Ю. Компетентнісний підхід у сучасній вищій освіті: освітня інновація чи симулякр?. *Вища школа*. 2020. № 3. С. 52–66.
- 15.Кабінет Міністрів України. Державний стандарт базової середньої освіти : Постанова № 898 від 30 вересня 2020 р.. *Офіційний вісник України*. 2020. № 81. С. 217–221.
- 16.Поляков М. В. Метод проєктів як засіб формування математичної компетентності старшокласників. *Математика в сучасній школі*. 2018. № 3. С. 12–18.
- 17.Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій. Київ : ІЗМН, 2005. 343 с.
- 18.Соколенко Л. О. Прикладні аспекти математики: інтеграл та його застосування в класах природничого профілю. *Вісник Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького. Серія «Педагогічні науки»*. 2010. Вип. 191(1). С. 111–121.
- 19.Сукач Т. М., Чуйков А. С., Бірюкова Т. В. Застосування визначеного інтеграла у формуванні професійних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти. *Вісник Університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія»*. 2020. № 1(19). С. 289–297.
- 20.Сукач Т. М., Чуйков А. С., Бірюкова Т. В. Розв'язання задач прикладного характеру як засіб формування математичної компетентності студента. *Вісник Університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія»*. 2020. № 1(19). С. 178–186.

21. Український центр оцінювання якості освіти. ЗНО 2021: Аналіз результатів зовнішнього незалежного оцінювання з математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://testportal.gov.ua>.
22. Adamu M., Olabiyisi T., Audu A. Definite Integral for Real Life Problem Solving in Science and Engineering: An Overview. *International Journal of Mechatronics, Electrical and Computer Technology*. 2022. Vol. 12(43). P. 5145–5154. DOI: 10.5281/zenodo.7502310.
23. Amos N. R., Heckler A. F. Student understanding of differentials in introductory physics. *Proceedings of the Physics Education Research Conference 2015*. 2015. P. 35–38.
24. Bajracharya R. R., Sealey V. L., Thompson J. R. Student understanding of the sign of negative definite integrals in mathematics and physics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2023. Vol. 9(1). P. 115–133.
25. Bezuidenhout J., Olivier A. Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2000. Vol. 2. P. 73–80.
26. Biriukova T. V., Sukach T. M., Yarovy I. M. Application of the determined integral in the formation of the professional competences of higher and pre-higher education students. *Modern Pedagogical Research*. 2020. № 1. P. 1398–1409.
27. Bressoud D. M. Restore the integral to the fundamental theorem of calculus. *MAA Launchings*, May 2009. URL: http://www.maa.org/external_archive/columns/launchings/launchings_05_09.html (дата звернення: 20.10.2025).
28. Christensen W. M., Thompson J. R. Investigating student understanding of physics and underlying calculus concepts in thermodynamics. *Proceedings of the 13th RUME Conference*. 2010. P. 1–7.
29. Czarnocha B., Dubinsky E., Loch S. Ta іт. Conceptions of area: In students and in history. *College Mathematics Journal*. 2001. Vol. 32(2). P. 99–109.

30. Ely R., Jones S. R. The teaching and learning of definite integrals (Guest Editorial). *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2023. Vol. 9(1). P. 1–7. DOI: 10.1007/s44217-023-00034-1.
31. Engineering Math Resource Center (USU). Definite Integrals in Engineering Contexts [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://engineering.usu.edu> (дата звернення: 12.10.2025).
32. Faulkenberry E., Faulkenberry T. J. Learning opportunities for solving context-based calculus tasks in textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2024. Vol. 55(1). P. 7–21. DOI: 10.1080/0020739X.2023.2290610.
33. Jones S. R. An exploratory study on student understandings of integrals in non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2017. Vol. 45. P. 21–41.
34. Korolyuk M., et al. Modern approaches to forming mathematical competencies of students in Ukraine. *Journal of Mathematics Education*. 2020. Vol. 13(4). P. 89–99.
35. Le T. H. C., Ngo M. D. Teaching concept of integral in high school from the perspective of interdisciplinary mathematics and physics: Overcoming traditional approach disadvantages. *Journal of Science, Educational Science*. 2019. Vol. 64(9). P. 106–115.
36. Mutanen A., Rissanen A., Saastamoinen K. Bridging disciplines: the role of mathematical reasoning in interdisciplinary inquiry. *Proceedings of the 6th International Baltic Symposium on Science and Technology Education (BalticSTE 2025)*. 2025. P. 85–94.
37. OECD. PISA 2018 Results. Volume II: Where All Students Can Succeed. Paris : OECD Publishing, 2019. 360 p. DOI: 10.1787/b5fd1b8f-en

АНОТАЦІЯ

Халанчук Д.П. Формування математичної компетентності учнів профільної школи в процесі вивчення інтегралів. Магістерська робота на здобуття освітнього ступеня магістра за спеціальністю 111 Математика – Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра теорій функцій та методики навчання математики. – Луцьк, 2025. – 53 с., список використаних джерел із 34 найменувань, три розділи, 8 підрозділів.

У магістерській роботі розглянуто теоретичні, методичні та практичні підходи до формування математичної компетентності учнів профільної школи у процесі вивчення теми «Інтеграл та його застосування». Перший розділ присвячено аналізу сутності поняття математичної компетентності, її структурних компонентів та значення у сучасній шкільній освіті. Другий розділ містить методичні підходи до формування компетентностей під час вивчення інтегралів, зокрема використання сучасних інформаційних технологій та прикладних задач. Третій розділ присвячено практичним аспектам застосування інтегралів у різних галузях науки і техніки та аналізу ефективності впроваджених методичних рішень у навчальний процес.

Ключові слова: математична компетентність, інтеграл, профільна школа, прикладні задачі, інформаційні технології, методика навчання.

ANNOTATION

Khalanchuk D.P. Formation of mathematical competence of high school students in the process of studying integrals. Master's thesis for obtaining the educational degree of Master in specialty 111 Mathematics – Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of Function Theories and Methods of Teaching Mathematics. – Lutsk, 2025. – 53 p., list of references containing 34 sources, three chapters, eight subsections.

The master's thesis examines theoretical, methodological and practical approaches to the formation of mathematical competence of high school students during the study of the topic “Integral and its applications”. The first chapter is devoted to analyzing the essence of mathematical competence, its structural components, and its significance in modern school education. The second chapter presents methodological approaches to competence development while studying integrals, in particular the use of modern information technologies and applied tasks. The third chapter focuses on the practical aspects of applying integrals in various fields of science and technology, as well as on analyzing the effectiveness of the implemented methodological solutions in the educational process.

Keywords: mathematical competence, integral, high school, applied problems, information technologies, teaching methodology.