

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

БОНДИСЄВ АНДРІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

ГЕМБАРСЬКА СВІТЛАНА БОРИСІВНА,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Гембарська С. Б. _____

Луцьк-2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Основні відомості про функціональні рівняння.....	5
1.1. Знайомство з функціональними рівняннями	5
1.2. Поняття функції, означення оберненої функції.....	9
1.3. Знаходження та побудова композиції елементарних функцій.....	12
1.4. Знаходження розв'язку функціональних рівнянь лінійного виду	13
1.5. Функціональна характеристика показникової і логарифмічної функцій.....	17
1.6. Знаходження розв'язків функціональних рівнянь у вигляді многочленів.....	19
1.7. Застосування поняття групи для знаходження розв'язку функціонального рівняння. 	22
РОЗДІЛ 2. Функціональні рівняння в просторі.....	25
2.1. Визначення функціонального рівняння для простору	25
2.2. Методи розв'язання функціональних рівнянь	29
ВИСНОВКИ	40
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	41

ВСТУП

Функціональні рівняння займають важливе місце в сучасній математиці. Вони виникають у різних її розділах, зокрема в математичному аналізі, алгебрі, геометрії та теорії функцій. На відміну від звичайних рівнянь, у функціональних рівняннях невідомою є функція, а не окреме число, що значно ускладнює процес пошуку розв'язків і потребує застосування спеціальних методів дослідження.

Історично функціональні рівняння з'явилися під час розв'язування прикладних задач з механіки та фізики, а згодом стали самостійним об'єктом математичних досліджень. Значний внесок у розвиток цієї теорії зробили такі відомі математики, як Л. Ейлер, О. Коші, К. Гаусс, М. Лобачевський та інші. Їхні праці заклали основи сучасних методів дослідження функціональних рівнянь і показали важливість цього розділу математики.

У навчальному процесі функціональні рівняння відіграють особливу роль, оскільки поєднують знання з різних тем і вимагають від студентів глибокого розуміння властивостей функцій, уміння працювати з композиціями, оберненими функціями та алгебраїчними перетвореннями. Розв'язування таких рівнянь сприяє розвитку логічного мислення, математичної культури та вміння будувати строгі міркування.

Актуальність даної магістерської роботи зумовлена потребою систематизувати основні підходи до розв'язування функціональних рівнянь та показати їх застосування для різних класів функцій. Особливо важливим є розгляд функціональних рівнянь не лише на числових множинах, а й у просторі, що дозволяє розширити уявлення про можливості застосування цих рівнянь у сучасній математиці.

У зв'язку з цим виникає необхідність узагальненого та послідовного викладу основних методів роботи з функціональними рівняннями, аналізу класичних прикладів і вивчення більш загальних підходів до їх розв'язування.

Метою магістерської роботи є систематизація основних підходів до розв’язування функціональних рівнянь, дослідження їх властивостей, а також вивчення методів знаходження розв’язків у різних класах функцій, зокрема в класі многочленів, лінійних, показникових і логарифмічних функцій.

Для досягнення поставленої мети у роботі необхідно розв’язати такі **завдання:**

- 1) проаналізувати основні поняття та означення, пов’язані з функціональними рівняннями;
- 2) розглянути класичні приклади функціональних рівнянь та методи їх розв’язування;
- 3) дослідити функціональні характеристики елементарних функцій;
- 4) показати застосування алгебраїчних методів і поняття групи при розв’язуванні функціональних рівнянь;
- 5) розглянути функціональні рівняння в просторі та їх особливості.

Об’єктом дослідження є функціональні рівняння та функції, які їх задовольняють.

Предметом дослідження є методи розв’язування функціональних рівнянь і властивості отриманих розв’язків.

Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглянуто основні теоретичні відомості про функціональні рівняння та методи їх розв’язування. Другий розділ присвячено функціональним рівнянням у просторі та узагальненню отриманих результатів.

РОЗДІЛ 1. Основні відомості про функціональні рівняння

1.1. Знайомство з функціональними рівняннями

Функціональне рівняння – рівняння, в якому невідомою є функція, певною мірою пов’язана з відомими функціями за допомогою композиції відображень, звичайно називається клас функцій, у якому шукають невідому.

Розв’язати функціональне рівняння – означає знайти таку функцію, що перетворить його у тотожність.

Перші функціональні рівняння виникли при розв’язуванні деяких задач з механіки, а математики досліджували їх ще у XVIII - XIX століттях. Такі визначні математики, як Леонард Ейлер, Карл Гаусс, Микола Лобачевський, та інші не раз зверталися до таких рівнянь у своїх наукових працях. Наприклад, засновник неевклідової геометрії Микола Іванович Лобачевський використав функціональне рівняння

$$f(x) = \sqrt{f(x+y)f(x-y)}$$

для означення кута паралельності. Леонард Ейлер застосовував такі рівняння при розв’язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Функціональне рівняння

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)f(x)$$

має цікаве застосування в механіці, зокрема для обґрунтування закону додавання сил.

Часто математики використовують функціональні рівняння для аналітичного обґрунтування побудов різних функцій, наприклад, показникової, логарифмічної, тригонометричних. Бо цей підхід має переваги перед геометричним, що обумовлено вибором різних геометрій, адже він є законним як в евклідовій, так і неевклідовій аксіоматиці.

Ще двісті років тому великий вклад в теорію розв’язування вніс французький математик Огюстен Коші (1789-1857). На честь нього названо одне з найвідоміших функціональних рівнянь

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.1.1}$$

котре має розв'язком будь-яку адитивну функцію. Наприклад, лінійна однорідна функція

$$f(x) = ax \quad (1.1.2)$$

є розв'язком цього рівняння. Покажемо, що ця функція справді є розв'язком рівняння (1.1.1).

Праву та ліву частини рівняння (1) можна записати у вигляді

$$f(x) + f(y) = ax + ay \quad \text{та} \quad a(x + y) = f(x + y)$$

так як ліві частини останніх двох рівностей рівні, бо

$$ax + ay = a(x + y),$$

то отримуємо рівність для правих частин:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Зауважимо, що множина адитивних функцій не обмежується лише множиною лінійних однорідних функцій. Німецький математик Г. Гамель (1877-1954) сконструював адитивну функцію, котра не входила до множини лінійних однорідних функцій. Основна властивість гамелевої знахідки полягала в тому, що вона не обмежена зверху на довільному інтервалі. Зазначимо, що результат Гамеля настільки складний, що навести його немає змоги.

Рівняння Коші (1.1.1) використовується у проєктивній геометрії та теорії ймовірностей.

Неявно можна зустрітися з функціональними рівняннями виду

$$f(-x) = f(x), \quad (1.1.3)$$

$$f(-x) = -f(x), \quad (1.1.4)$$

$$f(x + T) = f(x), \quad (1.1.5)$$

коли вивчають такі властивості тригонометричних функцій, як парність, непарність, періодичність.

Взагалі, функціональні рівняння – це певна співвідношення, за яким потрібно знайти невідому функцію. Наприклад, найпростіші функціональні рівняння, для яких знайдено способи розв'язку

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(2x), \quad (1.1.6)$$

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(x) + f(y), \quad (1.1.7)$$

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad (1.1.8)$$

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(x) \cos y, \quad (1.1.9)$$

$$f(x+1) + f(x) = x, \quad (1.1.10)$$

$$2f(1-x) + 1 = xf(x). \quad (1.1.11)$$

Давайте складемо функціональне рівняння. Для цього згадаємо властивість добутку степенів

$$a^x a^y = a^{x+y}. \quad (1.1.12)$$

Враховуючи, що

$$f(x) = a^x, \quad f(y) = a^y \quad \text{та} \quad a^{(x+y)} = f(x+y),$$

матимемо таке функціональне рівняння

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad (1.1.13)$$

З іншої сторони отримаємо розв'язок рівняння (1.1.13).

Зробимо заміну аргументу

$$x = y = \frac{z}{2},$$

тоді

$$f(z) = f^2\left(\frac{z}{2}\right) \geq 0,$$

тобто функція невід'ємна. Проте, насправді, $f(z) > 0$ для будь-яких дійсних z . Припустимо, що для деякого значення x $f(x) = 0$ отримаємо з рівності (1.1.13) для довільного значення $z = x + y$ необхідне співвідношення $f(z) = 0$. Таким чином, функція що задовольняє (1.1.13) завжди додатня.

Щоб знайти розв'язок функціонального рівняння (1.1.13), позначимо

$$f(1) = a > 0$$

та скористаємося допоміжною функцією

$$g(x) = \log_a f(x),$$

адже $f(x) > 0$, тобто

$$f(x) = a^{g(x)}. \quad (1.1.14)$$

Тоді рівняння (1.1.13) матиме вигляд

$$a^{g(x+y)} = a^{g(x)} a^{g(y)} \quad \text{або} \quad a^{g(x+y)} = a^{g(x)+g(y)}.$$

Останнє рівняння типу Коші, зазначимо, якщо обмежити $f(x)$ зверху хоча б на одному інтервалі $(s; s + t)$, де t – деяке додатне число, то отримуємо обмеженість зверху функції $g(x)$ на цьому інтервалі.

Таким чином можна вважати, що

$$g(x) = kx,$$

де k – деяка стала.

Із рівності (1.1.14) отримуємо

$$f(x) = a^{kx}$$

Оскільки,

$$f(1) = a, \text{ то } k = 1,$$

тому розв'язком рівняння буде $f(x) = a^x$.

Варто зазначити, що єдина функція f , яка не дорівнює нулю, неперервна на множині дійсних чисел і задовольняє рівняння (1.1.13) – показникова функція $f = a^x$.

Розв'язувати функціональні рівняння можна різними способами. Але слід запам'ятати такий факт:

Функція $f: R \rightarrow R$ називається алгебраїчною на області визначення, якщо для деякого натурального n і деяких многочленів

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots, P_n(x) \neq 0 \text{ виконується рівність}$$

$$P_0(x) + P_1(x)f(x) + P_2(x)f^2(x) + P_3(x)f^3(x) + \dots + P_n(x)f^n(x) \equiv 0.$$

Алгебраїчна функція може бути розв'язком системи алгебраїчних рівнянь. В основу класифікації елементарних функцій покладено принцип дихотомії.

Дихотомія – це особливий вид ділення, коли дане поняття ділять на два суперечливі.

Наприклад:

Елементарні функції:

А) Трансцендентні функції;

Б) Алгебраїчні функції:

а) Ірраціональні функції

б) Раціональні функції:

1) Цілі функції;

2) Дробові функції.

Трансцендентні функції – це клас показникових, тригонометричних, логарифмічних, обернених тригонометричних та інших функцій, які не є алгебраїчними.

1.2. Поняття функції, означення оберненої функції

Означенням функції, яким ми користуємося на даному етапі вивчення математики, сформувалось порівняно недавно – у першій половині XIX століття. Воно формувалося більше 200 років під впливом бурхливих суперечок великих математиків кількох поколінь.

Видатні французи П'єр Ферма і Рене Декарт, англійський вчений Ісаак Ньютон, російський математик Микола Лобачевський і німецькі дослідники Георг Лейбніц та Петер Густав Лежен Діріхле залишили вагомий внесок у розвиток теорії функцій.

Сучасне трактування функції – це правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної.

Якщо кожному значенню x з деякої множини E за певним правилом поставлене у відповідності деяке число y , то кажуть, що y є функція від x і пишуть $y = f(x)$, де f – правило, за яким кожному x відповідає y , а $f(x)$ – означає саме число y , що відповідає x . Множина E називається областю визначення функції. Множина Y усіх значень y , таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in E$ називається множиною значень функції f .

Функцію можна задати за допомогою аналітичного виразу, що описує послідовність обчислень, які треба виконати з числом x , щоб дістати число y ;

або функцію можна також задати таблицею, де явно число y відповідає числу x .

Слова функція, відображення, оператор, відповідність, перетворення – синоніми. Слід взяти до уваги те, що позначення $f: D(f) \rightarrow E(f)$ вказує на відображення області визначення функції на область значення. Наприклад: запис $f: R \rightarrow R$ означає, що функція визначена на множині дійсних чисел.

Функція f є відображенням числової множини E в числову множину Y , що символічно позначають так:

$$f: E \rightarrow Y.$$

Елемент $x \in E$ називають аргументом функції, а елемент $y \in Y$ – значенням функції.

Для деяких функцій можна задати обернену функцію, вона допоможе розв'язати функціональне рівняння та проводити перетворення.

Нехай f – функція

$$f: X \rightarrow Y.$$

Тоді g – відображення

$$g: Y \rightarrow X$$

називається оберненою функцією, якщо композиція $f g$ є тотожним відображенням. Обернену функцію до заданої функції означають f^{-1} . Обернена функція g існує тоді, коли відображення множини X в Y взаємно однозначне.

Графіки взаємно обернених дійсних функцій $y = g(x)$ і $y = f(x)$, дійсного аргументу x , якщо в оберненій функції позначення x і y змінено на y і x , симетрично розміщені щодо прямої $x = y$, яка містить бісектриси 1-го і 3-го кутів на координатній площині.

Важливо пам'ятати, що обернена функція кожне своє значення приймає тільки один раз, а графік у декартовій системі координат не має точок із різними абсцисами, але однаковими ординатами.

Властивості оберненої функції:

1. Обернена до оберненої функції є даною функцією

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

2. Обернена до складеної функції шукається як композиція обернених компонентів справа наліво

$$(f(p))^{-1} = p^{-1}(f^{-1})$$

Правило знаходження оберненої функції:

Якщо функція f задана формулою $y = f(x)$, то для знаходження оберненої функції до даної достатньо розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно x та зробити заміну на y .

Наведемо приклад взаємно обернених функцій:

$$f = x^2 \text{ та } f^{-1} = \sqrt{x}, \quad f = ax + b \text{ та } f^{-1} = \frac{x-b}{a}$$

Існують функції, які обернені самі до себе. До них належать такі функції:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = \frac{(x+1)}{(x-1)}.$$

Приклад. Знайти функцію, обернену до $f(x) = -2x + 5$.

Розв'язання.

Спочатку з'ясуємо, чи дана функція може мати обернену. Якщо припустити, що дана функція немає оберненої, то повинні існувати такі значення $x_1 = x_2$, для яких $f(x_1) = f(x_2)$.

Тоді $-2x_1 + 5 = -2x_2 + 5$, звідси, $x_1 = x_2$ ця суперечність доводить, що дана функція має обернену. Розпочнемо конструювати взаємно обернену функцію. Нехай $y = -2x + 5$, замінімо x на y , а потім виразимо y через x , $x = -2y + 5$. Звідси $-2y = x - 5$, остаточно $y = -0,5x + 2,5$.

Таким чином,

$$f(x) = -2x + 5 \text{ та } f^{-1}(x) = -0,5x + 2,5.$$

Виконаємо перевірку:

$$f^{-1}(f(x)) = -0,5x(2x + 5) + 2,5 = x - 2,5 + 2,5 = x$$

Отже, ми отримали однозначну відповідність.

Відповідь: $f^{-1}(x) = -0,5x + 2,5$.

1.3. Знаходження та побудова композиції елементарних функцій

Нехай дано відображення

$$f: M \rightarrow N,$$

$$g: N \rightarrow L,$$

Отже, $f(x) \in N$ і $g(y) \in L$ для будь-якого $x \in M$ і $y \in N$.

Тоді композиція відображення f і g називає нове відображення: $M \rightarrow L$, яке позначається $g \circ f$ і визначається для будь-якого $x \in M$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Під операцією композиції розуміють складену функцію $f(g(x))$.

Композиція $g(f(x))$ читається справа наліво: композиція функції f та g . Зауважимо, що, як правило,

$$g(f(x)) \neq f(g(x)).$$

Термін «композиція» на перший погляд може здаватися складним, але це означає, що в першу функцію замість її аргументу досить підставити аргумент другої функції. Розглянемо це на прикладі.

Приклад. Знайти композиції функцій $g(x) = p(f(v(x)))$, якщо

$$f(x) = \frac{x}{1+x}; \quad p(x) = \frac{-x}{2}; \quad v(x) = -2x.$$

Розв'язання

Розпочнемо конструювати композицію для даної функції:

$$f(v(x)) = k(x).$$

Щоб знайти композицію функції $f(v(x))$ – потрібно у функцію $f(x)$ замість аргументу підставити функцію $v(x)$. Таким чином,

$$k(x) = \frac{-2x}{1-2x};$$

будемо конструювати композиції далі: $p(k(x)) = g(x)$; аналогічно:

$$g(x) = \frac{2x}{1-2x} : 2 = \frac{x}{1-2x}.$$

Відповідь: $g(x) = \frac{x}{1-2x}$.

1.4. Знаходження розв'язку функціональних рівнянь лінійного виду

Функціональне рівняння виду

$$g_1(x)f(x) = g_2(x), \quad (1.4.1)$$

де $f: R \rightarrow R$ є невідомою функцією, а функції $g_1: R \rightarrow R$, $g_2: R \rightarrow R$ є відомими, називається рівнянням лінійного виду.

Розв'язком функціонального рівняння (1.4.1) будемо вважати функцію $f(x)$, яка не порушує знак рівності та не обмежує умов існування функцій $g_1(x)$, $g_2(x)$.

Розв'язують функціональні рівняння лінійного виду таким чином:

1) розглядають випадок $0 f(x) = 0$, тобто знаходять таку множину A значень аргументу, коли $g_1^2(x) + g_2^2(x) = 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння розв'язком є будь-яка визначена на множині A .

2) розглядають випадок $0 f(x) = k$, де $k \neq 0$, тобто знаходять таку множину B значень аргументу, коли $g_1(x) = 0$ і $g_2(x) \neq 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння не існує розв'язку, що визначений на множині B .

3) розглядають випадок

$$kf(x) = 0, \text{ де } k \neq 0$$

тобто знаходять множину C значень аргументу, коли $g_1(x) \neq 0$ і $g_2(x) = 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння існує розв'язок, що визначений на множині C , але при умові $f(x) = 0$ для будь-яких $x \in C$.

4) розглядають випадок

$$kf(x) = a, \text{ де } k \neq 0 \text{ та } a \neq 0$$

тобто знаходять множину D значень аргументу, коли $g_1(x) \neq 0$ і $g_2(x) \neq 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння існує розв'язок, що визначений на множині D , але при умові

$$f(x) = \frac{g_2}{g_1}$$

для будь-яких $x \in D$.

Застосуємо композицію взаємно обернених функцій до розв'язку функціональних рівнянь лінійного виду при тій умові, що невідома функція $f: R \rightarrow R$ представлена у вигляді складеної, тобто

$$g_1(x)f(p(x)) = g_2(x), \quad (1.4.2)$$

де $g_1: R \rightarrow R \setminus \{0\}$, $g_2: R \rightarrow R$, $p: R \rightarrow R$.

Якщо до аргументу невідомої функції в рівнянні (1.4.2) формально застосувати композицію взаємно обернених функцій, тобто

$$g_1(p^{-1}(x))f(p^{-1}(p(x))) = g_2(p^{-1}(x)), \quad (1.4.3)$$

отримаємо рівняння виду (1.4.1). Таким чином, якщо для аргументу $p(x)$ невідомої функції у рівнянні (1.4.2) вдається знайти обернену функцію, то виконавши заміну аргументу на композицію взаємно обернених функцій отримаємо формальний розв'язок функціонального рівняння:

$$f(x) = \frac{g_2(p^{-1}(x))}{g_1(p^{-1}(x))}. \quad (1.4.4)$$

Взагалі центральним питанням теорії найпростіших функціональних рівнянь є не стільки практичний пошук розв'язків, скільки питання про існування на певній множині операцій з функціями розв'язку.

Варто звернути увагу на те, що проблема рівносильних перетворень функціональних рівнянь завжди актуальна під час практичного пошуку розв'язків. Тому перетворювати функціональне рівняння треба так, аби не зникли його розв'язки.

Приклад 1.

Знайти функцію $f: R \rightarrow R$, якщо $(1 + x^2)f(2x - 6) = 1 - x$.

Розв'язання:

Розпочнемо конструювати взаємно обернену функцію. Нехай $y = 2x - 6$. Замінімо x на y , а потім виразимо y через x

$$x = 2y - 6,$$

звідси

$$2y = x + 6,$$

остаточно $y = 0,5x + 3$. Таким чином, $p^{-1}(x) = 0,5x + 3$ та

$p(x) = 2x - 6$ є взаємно оберненими функціями. Тепер застосуємо композицію, тобто, замінімо x на $0,5x + 3$

$$(1 + (0,5x + 3)^2) f(2(0,5x + 3) - 6) = 1 - (0,5x + 3)$$

$$(0,25x^2 + 3x + 10)f(x) = -0,5x - 2$$

остаточно,

$$f(x) = \frac{(-0,5x - 2)}{0,25x^2 + 3x + 10}.$$

Перевіряємо, безпосередньо підставивши знайдену функцію у дане рівняння.

$$\text{Відповідь: } f(x) = \frac{(-0,5x - 2)}{0,25x^2 + 3x + 10}.$$

Приклад 2.

Функція $f(x)$ задовольняє умову: для будь-яких чисел a та b виконується рівність

$$f\left(\frac{a + 2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}.$$

Знайти значення функції $f(1999)$, якщо $f(1) = 1, f(4) = 7$.

Для розв'язання функціонального рівняння, введемо нову невідому функцію $g(x) = f(x) - f(0)$. Ця функція задовольняє рівність

$$g\left(\frac{a + 2b}{3}\right) = \frac{g(a) + 2g(b)}{3}. \quad (1.4.5)$$

і додаткову умову $g(0) = 0$, які ми будемо використовувати пізніше.

Покладаючи в (*) $b = 0$, одержимо

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3}g(a), \quad a \in R.$$

Якщо в (1.4.5) замінити a числом 0, то ми отримаємо

$$g\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{2}{3}g(b), \quad b \in R.$$

Ці рівності дозволяють виносити (і вносити) коефіцієнти $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ за знак функції g . З їх допомогою можна додатково встановити наступну властивість:

$$g(2b) = 3 \frac{1}{3} g(2b) = 3g\left(\frac{2b}{3}\right) = 3 \frac{2}{3} g(b) = 2g(b).$$

Отже, за знак функції g можна виносити і коефіцієнт 2.

За допомогою цих властивостей функції $g(x)$ функціональне рівняння (1.4.5) можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a+2b}{3}\right) &= \frac{g(a) + 2g(b)}{3}. \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{3}g(a+2b) &= \frac{g(a) + 2g(b)}{3} \\ &\Leftrightarrow \\ g(a+2b) &= g(a) + 2g(b) \\ &\Leftrightarrow \\ g(a+2b) &= g(a) + g(2b) \end{aligned}$$

Замінюючи $2b$ на c , отримаємо

$$g(a+c) = g(a) + g(c), \quad a, c \in R.$$

Як ми довели вище, загальний розв'язок цього рівняння для раціональних значень аргументу задається формулою

$$g(x) = kx.$$

Відповідно загальний розв'язок функціонального рівняння для раціональних значень аргументу задається формулою

$$f(x) = f(0) + kx, \quad x \in Q.$$

За допомогою умови $f(1) = 1, f(4) = 7$ можна встановити параметри $f(0)$ і k :

$$f(0) = -1, \quad k = 2,$$

що дасть наступну лінійну функцію:

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in Q,$$

зараз ми зможемо підрахувати шукану величину $f(1999)$: вона рівна 3997.

Відповідь: $f(1999) = 3997$

1.5. Функціональна характеристика показникової і логарифмічної функцій

В основу для функціональної характеристики показникової функції розглянемо тотожність $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Наступна задача безпосередньо містить відповідно цій тотожності функціональне рівняння (на множині раціональних чисел)

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y). \quad (1.5.1)$$

В процесі розв'язання цієї задачі ми викладемо теорію Коші для розв'язання функціонального рівняння (6.1)

Приклад.

Задана функція f , причому $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для всіх раціональних чисел x, y . Відомо, що $f(4) = 16$. Знайти $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

В загальних рисах ідея розв'язання рівняння полягає в його логарифмуванні, що для $g(x) = \ln f(x)$ (основа логарифма не грає ролі) дасть рівняння $g(x + y) = g(x) + g(y)$ можна стверджувати, що $g(x) = kx$ при всіх $x \in Q$, що рівносильно рівності $f(x) = e^{kx} \equiv a^x$ при всіх раціональних x (тут $a = e^k$). Умова $f(4) = 16$ дозволяє визначити:

$$a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2.$$

Тому $f(x) = 2^x$ при всіх раціональних x . Зокрема,

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Проте всі ці міркування працюють тільки тоді, коли ми зможемо зробити перший крок розв'язання – прологарифмуємо початкове рівняння. Для цього потрібно довести, що $f(x) > 0$ при всіх (раціональних) x – це насправді є найбільш важка частина задачі. Для доведення покладемо в рівнянні (1.5.1) $y = 4 - x$ (число x – довільне): $f(x) \cdot f(4 - x) = f(4) = 16$. Звідси випливає, що $f(x)$ в жодній точці не перетворюється в нуль. Далі, якщо в рівнянні (1.5.1) замінимо x та y на $\frac{x}{2}$, то отримаємо, що $f(x) = (f(\frac{x}{2}))^2$, звідси випливає додатність $f(x)$ для всіх (раціональних) x . Зазначимо, що проведене

міркування практично не зміниться, якщо замість умови $f(4) = 16$ передбачити, що $f(x)$ відмінна від нуля в будь-якій точці x_0 .

Якщо додатково до умови цієї задачі, припустити, що рівняння (1.5.1) виконується при всіх дійсних x і що $f(x)$ неперервна (і звичайно зберігаючи умову, що $f(x)$ відмінна від нуля хоча б в одній точці), то тоді функція $g(x) = \ln f(x)$ визначена, задовольняє умову $g(x + y) = g(x) + g(y)$ при всіх $x \in R$ і неперервна. Отже, $g(x) = kx$ при всіх $x \in R$, і тому $f(x) = e^{kx} \equiv a^x$ при всіх $x \in R$.

Для логарифмічної функції $y = \log_a x$ функціональною характеристикою є функціональний аналог відомої тотожності

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Справедливе таке твердження:

Якщо функція $f(x)$ визначена при всіх $x \in R$, неперервна на цій множині, відмінна від нуля хоча б в одній точці $x_0 \neq 1$ і задовольняє функціональну рівність

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in R_+$$

то існує дійсне число a , не рівне 1, таке, що $f(x) = \log_a x$.

Для доведення розглянемо функцію $g(x) = f(e^x)$. Вона визначена при всіх $x \in R$ (так як $e^x > 0$) неперервна (як композиція двох неперервних функцій) і крім того,

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

$g(x)$ задовольняє рівняння $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при всіх дійсних x . Тоді $g(x) = kx$ для деякого k .

Тепер можна знайти $f(x)$. Якщо $x > 0$, то

$$f(x) = f(e^{\ln x}) = g(\ln x) = k \ln x.$$

Умова $f(x_0) \neq 0$, для деякого дійсного $x_0 \neq 1$ $k \neq 0$. Тоді число $a = e^{\frac{1}{k}}$ додатне і не дорівнює 1. Тому отриману формулу $f(x)$ можна записати в іншому вигляді:

$$f(x) = k \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

1.6. Знаходження розв'язків функціональних рівнянь у вигляді многочленів

Звертаємо особливу увагу на те, що у даному розділі запропоновано спосіб розв'язування функціональних рівнянь, що використовує конструктивний характер розв'язку, за допомогою способу невизначених коефіцієнтів. Але зазначаємо, що функціональне рівняння – це, як правило, співвідношення, що задає деякий клас функцій, за якоюсь формальною властивістю (формулою) та додатковими обмеженнями на шукану функцію. Тому розв'язування функціональних рівнянь потребує не лише побудови якоїсь однієї функції, а й знаходження всієї множини функцій або доведенню, що розв'язків не існує. Таким чином, зразки розв'язувань функціональних рівнянь даного розділу не будуть містити доведення того, що рівняння не мають інших розв'язків

Приклад 1.

Знайти всі многочлени

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

степені n , тобто з коефіцієнтом $a_n \neq 0$ задовольняє тотожність

$$P(x^2) \equiv (P(x))^2, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (1.6.1)$$

щоб розв'язати цю задачу, представимо $P(x)$ у вигляді $Q(x) + a_n x^n$, де

$$Q(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Степінь многочлена $Q(x)$ нам не відома, так як не можна виключити що деяке (або навіть всі) із його коефіцієнтів рівні 0. Але абсолютно точно можна стверджувати, що степінь многочлена $Q(x)$ не перевищує $n - 1$. Позначимо цей степінь через k ; при цьому припустимо, що хоча б один з коефіцієнтів многочлена $Q(x)$ не дорівнює 0. Тоді тотожність (1.6.1) матиме вигляд

$$Q(x^2) + a_n x^{2n} = (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x) + a_n^2 x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (1.6.2)$$

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях змінної (зокрема, співпадають і степені многочленів). Степінь многочлена $Q(x^2)$ рівний $2k$, степінь многочлена $(Q(x))^2$ рівний $2k$,

ступінь многочлена $2a_n x^n Q(x)$ рівний $n + k$. Отже, звідси слідує, що членами степеня $2n$ в рівності (8.2) будуть тільки $a_n x^{2n}$ (в лівій частині) і $a_n^2 x^{2n}$ (в правій частині), і тому $a_n = a_n^2$. Оскільки $a_n \neq 0$, звідси слідує, що $a_n = 1$. Це дозволяє представити тотожність (1.6.2) у вигляді:

$$Q(x^2) = (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Як ми вже відмічали, ступінь многочлена $Q(x^2)$ рівний $2k$, ступінь многочлена $(Q(x))^2$ рівний $2k$, ступінь многочлена $2a_n x^n Q(x)$ рівний $n + k$. Оскільки $k < n$, ступінь многочлена в правій частині більший степеня многочлена в лівій частині і рівність неможлива.

Але ці міркування проводились на припущенні, що хоча б один з коефіцієнтів многочлена $Q(x)$ не дорівнює 0. Якщо ж всі коефіцієнти многочлена $Q(x)$ дорівнюють 0, то $Q(x) \equiv 0$. Тоді тотожність (8.2) матиме вигляд:

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Що рівносильно рівності

$$a_n = 1.$$

Отже, єдиним розв'язком функціонального рівняння (1.6.1) в класі многочленів степеня n — це $P(x) = x^n$.

Приклад 2.

Розв'язати функціональне рівняння $f: R \rightarrow R$

$$f(x) + f(x + 5) = 10x + 11. \quad (1.6.3)$$

Розв'язання.

Розпочнемо конструювати розв'язок у вигляді лінійної функції

$$f(x) = ax + b, \text{ де } a \in R, b \in R. \quad (1.6.4)$$

Підставимо в аргумент шуканої функції $x + 5$

$$f(x + 5) = a(x + 5) + b = ax + 5a + b, \quad (1.6.5)$$

додамо праві частини рівностей, щоб отримати ліву частину рівняння (1.6.3):

$$ax + b + ax + 5a + b = 10x + 11,$$

$$2ax + 5a + 2b = 10x + 11.$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x та вільні члени, отримаємо два рівняння

$$2a = 10 \text{ та } 5a + 2b = 11.$$

З першого та другого рівняння знайдемо значення коефіцієнту $a = 5$, підставивши його у друге рівняння отримаємо $b = -7$. Легко переконатися, що отримана $f(x) = 5x - 7$ задовольняє дане рівняння.

Отже, один з усіх можливих розв'язків функціонального рівняння (1.6.3) буде функція $f(x) = 5x - 7$.

Приклад 3.

Розв'язати функціональне рівняння $f: R \rightarrow R$

$$f(x) - f(1 - x) = -1. \quad (1.6.6)$$

Розв'язання.

Припустимо, що це рівняння має розв'язок $f(x) = c$, де $c \in R$. Легко впевнитися в тому, що ця функція не є розв'язком функціонального рівняння (1.6.6). Дійсно, якщо $f(1 - x) = c$, то $f(x) - f(1 - x) = 0 \neq -1$.

Тепер припустимо, що знайдеться розв'язок у вигляді лінійної функції

$$f(x) = ax + b, \quad \text{де } a \in R, b \in R.$$

Матимемо:

$$f(x) - f(1 - x) = ax + b - a(1 - x) - b = -1,$$

$$2ax - a = -1,$$

отже $2a = 0$ і $-a = -1$, але значення a не може одночасно приймати два значення.

Тому маємо висновок, що сконструювати розв'язок у вигляді лінійної функції не можна. Нехай розв'язок функціонального рівняння (1.6.6) матиме такий вигляд:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{де } a \in R, b \in R, c \in R.$$

У цьому випадку маємо:

$$\begin{aligned} f(x) - f(1 - x) &= ax^2 + bx + c - a(1 - x)^2 - b(1 - x) - c = \\ &= 2(a + b)x - a. \end{aligned}$$

Тобто

$$2(a + b)x - a = -1.$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x до нуля та вільні члени, отримаємо, що $a = 1$, $b = -1$. Легко переконатися, що отримана $f(x) = x^2 - x$ задовольняє дане рівняння. Отже, один з усіх можливих розв'язків функціонального рівняння (1.6.3) буде така функція $f(x) = x^2 - x$.

Узагальнимо певні міркування. Аби бути повністю коректним, то розв'язок функціонального рівняння варто наполегливо шукати, лише для тих видів рівнянь, для яких доведено, що даний вид рівнянь за певних умов розв'язне, адже будувати вид розв'язку варто тоді, коли наперед знаєш, рівняння має розв'язок

1.7. Застосування поняття групи для знаходження розв'язку функціонального рівняння.

Термін «група» ввів французький математик Е. Галуа. Він здобув перші серйозні результати в теорії груп. Пізніше теорію групи вивчали інтенсивно. І до 1916 року, з виходом книжки російського математика О. Ю. Шмідта «Абстрактна теорія груп», теорія групи остаточно сформувалася як самостійна галузь математики.

У сучасній теорії груп виділилося ряд напрямків, пов'язаних із певними обмеженнями, внесенням додаткових відношень та узагальнення в різних напрямках.

Означення групи функцій.

Довільна множина G функцій, визначених на деякій множині M називається групою відносно операції композиції, якщо вона володіє такими властивостями:

1. Для будь-яких двох функцій з множини G їх композиція також належить G .
2. Функція $f(x) = x$ теж належить множині G .
3. Для будь-якої функції $f(x)$ з множини G існує обернена функція $f^{-1}(x)$, яка належить множині G .

Наведемо приклади таких груп функцій:

а) Множина лінійних функцій $p_n(x) = ax + b$, де $a \neq 0, b \in R$;

б) $p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{1}{1-x}, p_3(x) = \frac{x-1}{x}$

в) $p_1 = x, p_2 = a - x$;

г) $p_1 = x, p_2 = \frac{a}{x}$;

д) $p_1 = x, p_2 = \frac{a}{x}; p_3 = -x, p_4 = \frac{a}{x}$;

е) $p_1 = x, p_2 = \frac{1}{x}; p_3 = -x, p_4 = -\frac{1}{x}; p_5 = \frac{(x-1)}{(x+1)}, p_6 = \frac{(1+x)}{(x-1)}$;

$p_7 = \frac{(1-x)}{(x+1)}, p_8 = \frac{(1+x)}{(1-x)}$;

є) $p_1 = x, p_2 = \frac{a^2}{x}; p_3 = a - x, p_4 = \frac{ax}{(x-a)}; p_5 = \frac{(ax-a^2)}{x}, p_6 = \frac{a^2}{(a-x)}$.

У функціональному співвідношенні чи рівнянні виду

$$K_1 f(p_1) + K_2 f(p_2) + K_3 f(p_3) + \dots + K_n f(p_n) = M \quad (1.7.1)$$

вирази, які стоять під знаком невідомої функції $f(x)$, є елементами групи G , яка складається із n функцій:

$$\{p_1(x) = x, p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x), p_6(x), \dots, p_n(x)\} \in G$$

причому коефіцієнти $K_1, K_2, \dots, K_n$, та M – довільні функції, що задовольняють додатковим обмеженням на рівняння.

Припустимо, що функціональне рівняння (1.7.1) має розв'язок.

Виконаємо послідовні композиції, тобто виконаємо підстановку $x \rightarrow p_2(x)$

$$p_1 \circ p_2, p_2 \circ p_2, p_3 \circ p_2, \dots, p_n \circ p_2.$$

Остання послідовність складається з елементів групи. Продовжимо виконувати послідовні підстановки,

$$x \rightarrow p_3(x), x \rightarrow p_4(x), x \rightarrow p_5(x)$$

щоб отримати систему із n лінійних функціональних рівнянь.

Якщо вдається розв'язати цю систему, то слід перевірити розв'язок, чи задовольняє він рівняння (1.7.1).

Приклад. Знайти розв'язок $f: R/\{0; 1\} \rightarrow R$, якщо

$$2x f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2x.$$

Розв'язання.

Множина функцій $p_1 = x$, $p_2 = \frac{1}{1-x}$, $p_3 = \frac{x-1}{x}$ утворюють групу. Виконаємо заміну x на $\frac{1}{1-x}$, та згодом на $\frac{x-1}{x}$. Отримаємо систему трьох рівнянь відносно невідомих $f(x)$, $f(\frac{1}{1-x})$, $f(\frac{x-1}{x})$. Розв'язавши утворену систему рівнянь, отримаємо

$$f(x) = \frac{6x-2}{7x}.$$

Виконати перевірку потрібно обов'язково.

$$\text{Відповідь: } f(x) = \frac{6x-2}{7x}.$$

РОЗДІЛ 2. Функціональні рівняння в просторі

2.1. Визначення функціонального рівняння для простору

Функціональне рівняння – рівняння (лінійне чи нелінійне), у якому невідомим є елемент якого-небудь банахового простору, конкретного (функціонального) чи абстрактного, тобто рівняння вигляду

$$P(x) = y, \quad (2.1.1)$$

де $P(x)$ – якийсь, взагалі кажучи, нелінійний оператор, що переводить елементи простору X типу B в елементи простору Y того ж типу. Якщо функціональне рівняння містить ще і числовий (чи загальний функціональний) параметр λ , то замість (2.1.1) пишуть

$$P(x; \lambda) = y,$$

де $x \in X$, $y \in Y$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — простір параметрів.

Рівняннями виду (2.1.1) є конкретні чи абстрактні диференціальні рівняння, звичайні і з частинними похідними, інтегральні рівняння, інтегро-диференціальні рівняння, функціонально-диференціальні і більш складні рівняння математичного аналізу, а також системи алгебраїчних рівнянь, скінченні та нескінченні, різницеві рівняння тощо.

У лінійному випадку розглядаються функціональні рівняння 1-го роду

$$Ax = y$$

і 2-го роду

$$x - \lambda Ax = y,$$

де A – лінійний оператор з X в Y , λ – параметр.

При цьому формально функціональне рівняння 2-го роду може бути записане у вигляді рівняння 1-го роду

$$Tx = y \quad (T = 1 - \lambda A).$$

Однак виділення тотожного оператора I виявляється доцільним, тому що оператор A може мати кращі властивості, чим оператор T , що дозволяє більш повно досліджувати розглянуте рівняння.

Якщо розв'язки функціональних рівнянь є елементами простору

операторів, то такі функціональні рівняння називаються операторними рівняннями, конкретними чи абстрактними. Тут також можуть бути алгебраїчні операторні рівняння, лінійні і нелінійні, диференціальні, інтегральні й інші операторні рівняння. Наприклад, нехай у нормованому кільці $[X] = [X \rightarrow X]$ лінійних операторів, що переводять простір X типу B в себе, розглядається звичайне диференціальне рівняння на нескінченному проміжку $0 \leq \lambda \leq \infty$:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -Ax \quad (= -xA), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1.2)$$

де $A, x_0 \in [X]$, $x(\lambda)$ – абстрактна функція зі значеннями в банаховому просторі $[X]$.

Це рівняння є найпростішим абстрактним лінійним диференціальним операторним рівнянням, воно виходить, наприклад, із застосування прямого методу варіації параметра до побудови операторів виду:

$$P(A) = e^{-A\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq \infty,$$

зокрема,

$$P(A) ([P(A)]^2 = P(A))$$

з одиничною нормою.

Проектори виду $P(A), P(AC)$ і $P(CA), C \in [X]$, застосовуються, наприклад, при побудові прямим методом варіації параметра явних і неявних псевдооборотних операторів і псевдорозв'язки лінійних функціональних рівнянь, а також власних елементів (власних підпросторів) оператора A . Зведення різних задач до задач для рівняння (2.1.2) є дуже зручним при розробці наближених методів розв'язання. Становлять інтерес також операторні рівняння вигляду:

$$\frac{dx}{d\lambda} = A(\lambda)x + F(\lambda) \quad (= xA(\lambda) + F(\lambda)), \quad x(0) = x_0,$$

де $A(\lambda), F(\lambda)$ – абстрактні функції зі значеннями з $[X]$, і інші лінійні і нелінійні операторні рівняння.

У деяких задачах, пов'язаних з диференціальними й інші рівняннями, доводиться досліджувати лінійні алгебраїчні операторні рівняння виду

$$Ax + xB = y$$

і подібні їм. Тут x – шуканий, а A, B, y – задані лінійні оператори, що приймають, бути може, і нульові значення.

Під функціональним рівнянням у вузькому розумінні цього слова розуміють рівняння, в яких шукані функції зв'язані з відомими функціями одного чи декількох змінних за допомогою операції утворення складної функції.

Наприклад, нехай $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, – задані функції і $\Psi(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, де C_i – довільні сталі.

Виключення C_i з $n + 1$ рівняння виду

$$\begin{aligned}\Psi(\varphi_v(x)) &= f(\varphi_v(x), C_1, C_2, \dots, C_n), \\ v &= 0, 1, 2, \dots, n, \quad \varphi_0(x) = x,\end{aligned}$$

призводить до функціонального рівняння виду

$$F[x, \Psi(x), \Psi(\varphi_1(x)), \Psi(\varphi_2(x)), \dots, \Psi(\varphi_n(x))] = 0, \quad (2.1.3)$$

яке буде мати розв'язок:

$$\Psi(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Побудова функціонального рівняння є прямою задачею функціонального числення, аналогічна з означенням похідних вищого порядку в диференціальному численні.

Виключення C_i з $n + 1$ рівняння виду

$$\begin{aligned}\Psi^{v+1}(x) &= f(\Psi^v(x), C_1, C_2, \dots, C_n), \quad v = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \Psi_0(x) &= x, \Psi^1(x) = \Psi(x), \Psi^2(x) = \Psi(\Psi^1(x)), \dots,\end{aligned}$$

призводить до функціонального рівняння виду

$$F[x, \Psi(x), \Psi^2(x), \dots, \Psi^{n+1}(x)] = 0, \quad (2.1.4)$$

яке буде мати розв'язок:

$$\Psi(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Іноді функціональні рівняння відрізняються за порядками і класами. Під

порядком рівняння розуміється порядок шуканої функції, що входить у рівняння, а під класом рівняння – число даних функцій, до яких застосовується невідома функція. Так, рівняння (2.1.3) є функціональним рівнянням 1-го порядку і $(n+1)$ -го класу. Рівняння (2.1.4) є функціональним рівнянням $(n+1)$ -го порядку і 1-го класу.

Співвідношення (2.1.3) і (2.1.4) є тотожностями відносно x , рівняннями їхній називають остільки, оскільки шуканою є функція $\Psi(x)$.

Рівняння (2.1.3) і (2.1.4) є функціональним рівнянням з однією незалежною змінною. Можуть розглядатися функціональні рівняння з декількома незалежними змінними, функціональні рівняння дробових порядків і інші, а також системи спільних функціональних рівнянь.

До систем функціональних рівнянь приходять, наприклад, при визначенні довільних функцій, що входять в інтеграли рівнянь з частинними похідними. Якщо в інтеграл входить n довільних функцій, то, підкоряючи їх n умовам, одержують n спільних функціональних рівнянь. Системи функціональних рівнянь у деяких випадках зручно записуються в більш короткому записі у вигляді векторного чи матричного функціонального рівняння.

Функціональні рівняння можна також розглядати як вираження властивості, що характеризує той чи інший клас функції. Наприклад, функціональне рівняння $f(x) = f(-x)(f(-x) = -f(x))$ – характеризує клас парних (непарних) функцій; функціональне рівняння $f(x+1) = f(x)$ – клас функцій, що мають період 1, і т.д.

Одними з найпростіших функціональних рівнянь є, наприклад, рівняння Коші

$$\left. \begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), f(x+y) = f(x)f(y), \\ f(xy) &= f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

неперервні розв'язки яких мають відповідно вид (у класі розривних функцій можуть бути й інші розв'язки):

$$f(x) = Cx, e^{Cx}, Cl x, x^c \text{ с } (x > 0).$$

Функціональні рівняння (2.1.5) можуть слугувати засобом для визначення зазначених функцій при додатковій вимозі неперервності. Розглядаються також узагальнені функціональні рівняння Коші щодо трьох і більш невідомих функцій і інші, а також функціональні рівняння в комплексній області.

Функціональні рівняння вигляду

$$F(f(x), f(y), f(x+y)) = 0$$

і

$$\Phi(f(x), f(y), f(xy)) = 0$$

називаються відповідно теорема додавання і теорема множення функції $f(t)$.

Найпростішими функціональними рівняннями, у яких шукана функція залежить від двох змінних, є, наприклад, рівняння:

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z) \quad \text{і} \quad \varphi(x, y)\varphi(y, z) = \varphi(x, z),$$

розв'язки яких мають відповідно вигляд

$$\varphi(y, z) = \Psi(y) - \Psi(z) \quad \text{і} \quad \varphi(x, y) = \frac{\Psi(y)}{\Psi(x)},$$

де Ψ – довільна функція.

2.2. Методи розв'язання функціональних рівнянь

Методи розв'язання функціональних рівнянь – методи побудови точних чи наближених розв'язків функціональних конкретних чи абстрактних рівнянь, тобто рівнянь виду

$$P(x) = y, \tag{2.2.1}$$

Точні розв'язки у вигляді аналітичних виразів отримано лише для деяких типів функціональних рівнянь, тому особливо цінними є наближені методи розв'язання.

Для побудови розв'язків загальних функціональних рівнянь виду (2.2.1) розроблено ряд методів, наприклад, метод нескінченних степеневих рядів,

метод послідовних наближень, метод Гальоркіна (метод моментів), метод дотичних гіпербол, метод Чебишева (метод дотичних парабол), метод Ньютона-Канторовича і його модифікації, метод найшвидшого спуску й інші, а також методи варіації параметра (прямі, ітераційні і комбіновані) його різні модифікації, включаючи послідовні наближення до оберненого оператора. Загальні методи застосовано для розв'язання різних конкретних функціональних рівнянь математичного аналізу. Крім того, існують спеціальні методи для окремих функціональних рівнянь, включаючи числові методи, наприклад, сітковий метод. Метод варіації параметра, метод Ньютона-Канторовича та інші методи мають також теоретичне значення, оскільки дозволяють робити висновки про існування, єдиність і область розташування розв'язку функціонального рівняння без знаходження самого розв'язку, що іноді не менш важливо, ніж його явне значення. Як приклад розглядається прямий метод варіації параметра.

Нехай у банаховому просторі $[X] = [X \rightarrow X]$ лінійних обмежених операторів задане нелінійне операторне звичайне диференціальне рівняння на нескінченному інтервалі:

$$\frac{dx}{d\lambda} = x(I - Ax) = ((I - xA)x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.2.2)$$

де $A, x_0, I \in [X]$ A, x_0 – задані оператори,

I – тотожний оператор,

$x(\lambda)$ – абстрактна функція зі значеннями з $[X]$

X – простір типу B .

Проблема побудови оберненого оператора A^{-1} для оборотного оператора A , розв'язання лінійного операторного рівняння вигляду

$$I - Ax = 0$$

тощо зводяться до розв'язання рівняння (2.2.2) прямим методом варіації параметра.

Якщо спектр оператора Ax_0 (або відповідно x_0A) розташований у правій на півплощині, то задача (2.2.2) має єдиний розв'язок:

$$x(\lambda), x(0) = x_0, \quad \forall \lambda \in [0, \infty).$$

Аналітичне застосування до задачі Коші (2.2.2) методів чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь призводить до цілого класу прямих методів варіації параметра розв'язання операторного рівняння (2.2.2), а отже, і розв'язання тих задач, що зводяться до задачі (2.2.2). Наприклад, метод Ейлера з нерегулярним кроком h_k , призводить до наступного методу побудови оператора A^{-1} :

$$x_{k+1} = x_k + h_k x_k (I - Ax_k) + (h_k(I - x_k A)x_k), \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (2.2.3)$$

Кроки h_k у формулі (2.2.3) вибирають різними способами. Коли спектр оператора:

$$I - Ax_0 (I - x_0 A)$$

розташований на дійсній осі в інтервалі $[-p_0; 0]$, $0 < p_0 < \infty$, дуже ефективним є наступний спосіб вибору кроків h_k .

$$h_k = \frac{1}{1 + p_k}, \quad p_{k+1} = p_k L_k, \quad 4L_k = \frac{p_k}{(1 + p_k)},$$

$$k = 0, 1, 2 \dots, \quad h_k + 1 = \left(\frac{4h_k}{1+h_k}\right)^2. \quad (2.2.4)$$

При цьому швидкість збіжності методу (2.2.3) має порядок вище, ніж 2^k , норма нев'язання спадає за законом:

$$p_k + 1 = \frac{p_k^2}{4(1 + p_k)}.$$

Випадок інтервалу $[0, \bar{p}_0]$, $0 < \bar{p}_0 < 1$, може бути зведений, з певною перевагою, до однокрокового методу (2.2.3) при

$$h = \frac{1}{(1 - \bar{p}_0)}, \quad p_0 = \frac{\bar{p}_0^2}{4(1 - \bar{p}_0)}.$$

Щодо збіжності методу (2.2.3), (2.2.4) для конкретних операторних рівнянь можна сформулювати на підставі загальних фактів ті чи інші результати в залежності від того, який простір береться за основу.

До розв'язання задачі (2.2.2) зводяться також задача побудови проекторів виду:

$$P(Ax_0)(P(x_0A)), \quad P(K) = e^{-K\lambda} \Big|_{\lambda=\infty}, \quad K \in [X],$$

(випадок, коли спектр оператора

$$I - Ax_0(I - x_0A)$$

розташований в інтервалі $[-p_0, 1]$) і задача побудови псевдообернених операторів x^+ (відповідно ^+x) для оператора A таких, що

$$I - Ax^+ = P(Ax_0), \quad I - ^+x A = P(x_0A), \quad x^+ = ^+x.$$

Для безпосередньої побудови проекторів $P(A, x_0)$ (відповідно $P(x_0A)$) методи (2.2.3), (2.2.4) можна переписати у вигляді:

$$P_{k+1} = P_k + h_k P_k (P_k - I), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P_0 = I - Ax_0 (P_0 = I - x_0A).$$

У залежності від розташування спектра і властивостей оператора A в якості x_0 вибирають, наприклад, оператори I, A, A^* чи інші.

Використовуючи прямий метод варіації параметра, можна звести до абстрактного лінійного функціонального звичайного диференціального рівняння ($0 \leq \lambda \leq \infty$)

$$\frac{dx}{d\lambda} = x_0(b - Ay), \quad y(0) = y_0, \quad (2.2.5)$$

де $b, y_0 \in X, x_0, A \in [X]$, а $y(\lambda)$ – абстрактна функція зі значеннями в X , задачу прямої побудови псевдорозв'язків y^+ лінійних функціональних рівнянь виду:

$$b - Ay^+ = P(Ax_0)(b - Ay_0), \quad (2.2.6)$$

чи функціональних рівнянь

$$b - Ay^+ = 0$$

якщо

$$P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0.$$

До задачі (2.2.5) зводяться також і інші задачі, у тому числі задачі для диференціальних рівнянь звичайних і з частинними похідними, інтегральні рівняння й інші. Формула

$$y(\lambda) = e^{-x_0 A \lambda} y_0 + r(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x_0 A(\lambda-s)} ds,$$

дає єдиний розв'язок рівняння (2.2.5), що задовольняє початкову умову

$$y(0) = y_0$$

Застосування до задачі (2.2.5), наприклад, методу Ейлера з прямим кроком h_{k+1} призводить до наступного методу побудови псевдорозв'язків y^+ функціонального рівняння (2.2.6):

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1} x_0 (b - Ay_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.7)$$

Кроки h_{k+1} вибирають, наприклад, через корені многочленів Чебишова $T_N(t)$:

$$h_j = 2[M + m - (M - m)t_j]^{-1},$$

$$t_j = \cos \left[\frac{(2\mu_j - 1)\pi}{2N} \right], \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.8)$$

коли $x_0 A$ є самоспряженим оператором, ненульова частина спектра якого лежить у відрізку $[m, M]$, $0 < m \leq M$, $P_N = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ — деяка перестановка чисел $1, 2, \dots, N$, вибрана так, щоб обчислення було стійким, N — це степінь потрібного многочлена. Метод (2.2.7), (2.2.8) дає оптимальну оцінку збіжності тільки на N -му кроці. При $N = 2^i$ (чи $\approx 2^i$) дуже ефективним є вибір кроків у (2.2.7) дуже ефективний, якщо вони по черзі залежать від коренів многочленів Чебишова

$$T_2(t) - T_0(t), T_1(t), T_1(t), T_2(t), T_2(t), \dots, \dots, T_2^{i-2}(t), T_2^{i-2}(t)$$

замість многочлена $T_N(t)$, що істотно спрощує задачу упорядкування кроків h_j і підвищує ефективність обчислень, особливо при великих N . У цьому випадку похибка оптимально зменшується після використання всіх впорядкованих коренів кожного многочлена, що є важливим для спрощення контролю обчислень. У випадку, якщо

$$P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0,$$

то

$$P(x_0 A)(y^+ - y_0) = 0;$$

більше того, якщо $P(x_0 A)$ — ортопроектор, то $y^+ - y_0$ є нормальним розв'язком функціонального рівняння

$$A(y^+ - y_0) = b - Ay_0.$$

З іншого боку, з (2.2.7) випливає

$$b - Ay_{k+1} = U_{k+1}(b - Ay_0),$$

$$U_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} (I - h_i Ax_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому, якщо $P(Ax_0)$ – проектор, то

$$\|U_k - P(Ax_0)\| \leq \frac{2q^k}{(1 + q^{2k})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$q = \frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}$$

Існують також прямі методи варіації параметра типу методу Ейлера, що використовують рекурентні співвідношення для многочленів Чебишева і близьких до них (без явного використання коренів цих многочленів); для таких методів похибка зменшується на кожному кроці. Це багатокрокові методи з підвищеною швидкістю збіжності.

Застосування методу Ейлера із зворотним кроком h_{k+1} до задачі (2.2.5) назад дає наступний ефективний клас методів

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1}(I + h_{k+1} x_0 A)^{-1} x_0 (b - Ay_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

звідки

$$b - Ay_{k+1} = W_{k+1}(b - Ay_0),$$

$$W_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} (I + h_i Ax_0)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому, якщо $P(Ax_0)$ – проектор і $h_i > 0$ такі, що для будь-якого i

$$\|(I - P(Ax_0))(I + h_i Ax_0)^{-1}\| \leq \rho_i < 1,$$

то

$$\|W_k - P(Ax_0)\| \leq \prod_{i=1}^k \rho_i \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Існують аналогічні методи і для розв'язання нелінійних функціональних рівнянь і операторних рівнянь, а також методи з підвищеним ступенем точності типу методів Рунге-Кутти s -го порядку точності й інших типів.

Розв'язки функціональних рівнянь у вузькому розумінні цього слова і системи таких рівнянь можуть бути як конкретними функціями, так і класами функцій, що залежать від довільних параметрів чи довільних функцій. У теорії

функціональних рівнянь відомо мало загальних методів розв'язання таких рівнянь. Тому в кожному окремому випадку необхідно, як правило, досліджувати ступінь загальності отриманого розв'язку.

Одним з більш-менш загальних методів розв'язання функціональних рівнянь є метод зведення їх до розв'язання рівнянь у скінченних різницях. Нехай, наприклад, є функціональне рівняння n -го порядку і 1-го класу виду

$$F(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^n(x)) = 0, \quad (2.2.9)$$

де функція F задана, функція $\varphi(x)$ – шукана;

$$\varphi^0(x) = x, \varphi^1(x) = \varphi(x), \varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)), \dots$$

При цьому вважають

$$x = u_z, \varphi(x) = u_{z+1}.$$

Тут перехід від x до $\varphi(x)$ замінюється введенням нової змінної z і зміною z на 1 в функції u_z . Після такої заміни рівняння (2.2.9) набуває вигляду

$$F(u_z, u_{z+1}, \dots, u_{z+n}) = 0. \quad (2.2.10)$$

Розв'язки рівняння (2.2.10) в скінченних різницях n -го порядку дає вираз для u_z через z і n довільних періодичних функцій C_i від z з періодом рівним 1. Розв'язок функціональних рівнянь (2.2.9) у самому загальному вигляді представляється системою двох рівнянь

$$\begin{cases} u_z = x = f(z, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ u_{z+1} = \varphi(x) = f(z+1, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Вибираючи в якості C_i конкретні значення, можна з (2.2.11) виключити z і одержати в такий спосіб частинний розв'язок рівняння (2.2.9). Наприклад, для функціонального рівняння 2-го порядку

$$\varphi[\varphi(x)] + a\varphi(x) + bx = 0 \quad (2.2.12)$$

Загальний розв'язок (2.11) приймає вигляд

$$\begin{cases} u_z = x = C_1 \lambda_1^z + C_2 \lambda_2^z, \\ u_{z+1} = \varphi(x) = C_1 \lambda_1^{z+1} + C_2 \lambda_2^{z+1}, \end{cases} \quad (2.2.13)$$

де λ_1 і λ_2 – корені квадратного рівняння

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

C_1 і C_2 – довільні фіксовані періодичної функції з періодом рівним 1. Якщо для C_1 і C_2 дати значення довільних сталих і виключити z з (2.2.13), то виходить повний розв’язок функціонального рівняння (2.2.12):

$$\frac{x\lambda_2 - \varphi(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} = C_1 \left[\frac{x\lambda_1 - \varphi(x)}{C_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right]^\gamma,$$

$$\gamma = \frac{\ln \lambda_1}{\ln \lambda_2}.$$

Метод зведення до скінченних різниць рівнянь застосовується також і при розв’язанні прямих задач функціонального числення.

Нехай, наприклад, задана функція

$$\varphi(x) = a + bx$$

і нехай потрібно побудувати вираз для

$$\varphi^n(x) \quad (\varphi^i(x) = \varphi(\varphi^{i-1}(x))).$$

При цьому вважають

$$\varphi^n(x) = u_n$$

і записують рівняння в скінченних різницях

$$u_{n+1} = a + bu_n,$$

розв’язком якого є

$$u_n = Cb^n + \frac{a}{(1-b)}.$$

Звідси при $n = 0$ одержують

$$u_0 = x = C + \frac{a}{(1-b)},$$

тобто

$$C = x - \frac{a}{(1-b)}.$$

Таким чином,

$$\varphi^n(x) = \alpha_n + \beta_n x, \quad \alpha_n = \frac{a(b^n - 1)}{(b - 1)}, \quad \beta_n = b^n.$$

Тут же при бажанні можна записати і функціональне рівняння виду

$$\varphi^n(x) = \beta_{n-1}\varphi(x) + \alpha_{n-1}$$

яке матиме розв'язок $\varphi(x)$ для будь-якого n .

Розв'язуючи це рівняння тим самим методом, можна побудувати й інші розв'язки $\varphi(x)$. Зокрема, для непарних n виникає інший дійсний розв'язок:

$$\varphi(x) = -bx + \frac{a(1+b)}{(1-b)}.$$

Для розв'язання функціональних рівнянь застосовується також метод підстановок. Нехай, наприклад, задане функціональне рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y. \quad (2.2.14)$$

Застосовуючи послідовно підстановки

$$x = 0, \quad y = t; \quad x = \frac{\pi}{2} + t, \quad y = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2} + t,$$

з (2.2.14) одержують відповідно рівняння

$$f(t) + f(-t) = 2a \cos t, \quad f(\pi + t) + f(t) = 0$$

і

$$f(\pi + t) + f(-t) = 2b \cos \left(\frac{\pi}{2} + t \right) = -2b \sin t,$$

де позначено $f(0) = a, f(\frac{\pi}{2}) = b$. Віднімаючи третє рівняння від суми перших двох, дістанемо:

$$2f(t) = 2a \cos t + 2b \sin t.$$

Загальним розв'язком вихідного функціонального рівняння (2.2.14) є функція

$$f(x) = a \cos x + b \sin x.$$

Цей метод застосуємо також і до інших рівнянь типу

$$H(f(x+y), f(x-y), f(x), x, y) = 0$$

при деяких припущеннях щодо функції H . До рівнянь інших типів застосовуються різні інші підстановки.

Метод підстановок використовують і для зведення функціональних рівнянь до інших рівнянь того ж типу, зокрема до таких, розв'язки яких відомі. Наприклад, функціональне рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2} \quad (2.2.15)$$

може бути зведене до функціонального рівняння Коші

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad (2.2.16)$$

яке має неперервний розв'язок

$$f(x) = Cx.$$

З цією метою підставляють у (2.2.15) $x+y$ замість x і 0 замість y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2} + \frac{a}{2}, \quad a = f(0).$$

Порівнюючи це з вихідним функціональним рівнянням (2.2.15), одержують функціональне рівняння виду

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a,$$

звідки

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(x) = f(x) - a \quad \text{і} \quad \varphi(x) = Cx.$$

Розв'язком є функція

$$f(x) = Cx + a.$$

Для зведення до інших функціональних рівнянь того ж типу застосовують також логарифмування й інші прийоми. Наприклад, розв'язування рівняння

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2.2.17)$$

шляхом логарифмування можна звести до розв'язування функціональних рівнянь (2.2.16). Неперервна функція $f(x)$, що задовольняє функціональне рівняння (2.2.17), завжди строго додатна, а функція $\varphi(x) = \ln f(x)$ — неперервна (як результат суперпозиції неперервних функцій) і задовольняє умову

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(x) = Cx.$$

Розв'язком є функція

$$f(x) = e^{Cx} = ax.$$

У багатьох випадках для розв'язання функціональних рівнянь застосовується також метод зведення їх до диференціальних рівнянь.

Наприклад, функціональне рівняння (2.2.14) можна звести до рівняння виду

$$f^n(x) = -f(x).$$

До цього рівняння зводяться й інші функціональні рівняння. Цей метод дає лише розв'язки, що належать класу диференційовних функцій. Розв'зок, наприклад, функціональних рівнянь Коші (2.2.16) за умови диференційовності функції $f(x)$ можна знайти в такий спосіб. Диференціюючи (2.2.16) по x , одержують

$$f'(x+y) = f'(x),$$

і тому що y тут довільне, то

$$f'(x) = C.$$

Тоді інтегрування дає

$$f(x) = Cx + C_1,$$

де C_1 – нова стала. Підставляючи знайдений вираз для $f(x)$ знову у функціональних рівняннях (2.2.16), встановлюємо, що при всіх значеннях x і y має бути $C_1=0$. Розв'язком є функція

$$f(x) = Cx.$$

ВИСНОВКИ

У ході виконання магістерської роботи було розглянуто основні теоретичні аспекти теорії функціональних рівнянь та проаналізовано різні методи їх розв'язування. Було встановлено, що функціональні рівняння є важливим інструментом для дослідження властивостей функцій і побудови нових математичних моделей.

У роботі узагальнено основні поняття, пов'язані з функціональними рівняннями, розглянуто класичні приклади рівнянь Коші та інших типових функціональних рівнянь. Показано, що додаткові умови, такі як неперервність, обмеженість або монотонність функції, відіграють вирішальну роль у знаходженні єдиного розв'язку.

Окрему увагу було приділено функціональній характеристиці показникової та логарифмічної функцій, а також методам пошуку розв'язків у вигляді многочленів. Розглянуті приклади підтверджують ефективність алгебраїчних методів, зокрема методу невизначених коефіцієнтів.

У другому розділі досліджено функціональні рівняння в просторі та наведено їх зв'язок з операторами в банахових просторах. Це дозволяє розглядати функціональні рівняння в більш загальному контексті та показує їх значення для сучасного математичного аналізу.

Отримані результати можуть бути використані в подальших наукових дослідженнях, а також у навчальному процесі при викладанні математичного аналізу, алгебри та спеціальних курсів з теорії функціональних рівнянь. Робота підтверджує, що тема функціональних рівнянь залишається актуальною та перспективною для подальшого вивчення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Негода С. Найпростіші функціональні рівняння. Вінниця. 2003. 26 с.
2. Федак І.В. Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге). Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. 144с.
3. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, методи математичної індукції. Харків: Основа, 2005. 94 с.
4. Брайман В. Б., Кукуш О. Г. Відкриті студентські олімпіади механікоматематичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: 1995–2014: навчальний посібник. К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. 188 с.
5. Войцехівська В. Функціональні рівняння. К.: ТОВ «Праймдрук», 2012. 48 с.
6. Вороний О.М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: Методичний посібник. Кіровоград: РВВ КДПУ імені В. Винниченка, 2010. 68 с.
7. Гринчук Л.В., Сорока О.О. Функціональні рівняння та методи їх розв'язування. Хмельницький: ОППО, 2012. 40 с.
8. Мітельман І. М. Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного. Одеса: ТЕС, 2014. 67 с.
9. Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С. Функційні рівняння: Методичний посібник. Львів: РВВ Львів. ун-ту, 1998. 112 с.
10. Themistocles M. Rassias (ed.) Functional Equations, Inequalities and Applications. Springer Books, 2003. Springer number 978-94-017-0225-6.
11. Christopher G. Small. Functional equations and how to solve them. Springer New York, NY, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48901-8>
12. У світі математики. Випуск 9. «Радянська школа», 1983 р.
13. У світі математики. Випуск 10. «Радянська школа», 1983 р.
14. У світі математики. Випуск 14. «Радянська школа», 1983 р.
15. Мантурив О. В., Соркін Ю. І., Федін М. Г. Математика в поняттях, означеннях і термінах. Київ: Радянська школа, 1986. 456 с.

АНОТАЦІЯ

Бондисєв А.О. Функціональні рівняння та методи їх розв'язування. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 41 с.

У магістерській роботі розглянуто основні поняття та властивості функціональних рівнянь. Наведено класифікацію функціональних рівнянь, подано основні методи їх розв'язування, зокрема метод підстановок, метод зведення до рівнянь Коші, метод зведення до диференціальних і різницьових рівнянь, а також використання груп перетворень. Окрему увагу приділено функціональним та операторним рівнянням у банахових просторах. У роботі подано приклади розв'язування функціональних рівнянь різних типів, що ілюструють теоретичні положення.

Магістерська робота містить 41 сторінку, список використаної літератури налічує 15 джерел.

Ключові слова: функціональні рівняння, операторні рівняння, рівняння Коші, банахів простір, метод підстановок, функціональні перетворення.

ABSTRACT

Bondysiev A.O. Functional equations and methods of their solution. Master's thesis. Lutsk, 2025. 41 p.

The master's thesis deals with the basic concepts and properties of functional equations. The classification of functional equations is presented and the main methods of their solution are considered, including the method of substitutions, reduction to Cauchy's functional equations, reduction to differential and difference equations, and the use of transformation groups. Special attention is paid to functional and operator equations in Banach spaces. The thesis also contains examples of solving functional equations of various types that illustrate the theoretical material.

The master's thesis contains 41 pages, and the list of references includes 15 sources.

Keywords: functional equations, operator equations, Cauchy functional equation, Banach space, substitution method, functional transformations.