

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

МАКАШОВ АНДРІЙ МИХАЙЛОВИЧ

**АЛГЕБРА ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ,
ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ**

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ВОЛОШИНА ТЕТЯНА ВОЛОДИМИРІВНА

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Федунік-Яремчук О. В. _____

ЛУЦЬК - 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ	8
1.1 Лінійні оператори, їх матриці. Приклади.....	8
1.1.1 Основні властивості лінійних операторів.....	8
1.2 Власні вектори та власні значення лінійного оператора.....	12
1.3 Характеристичний многочлен лінійного оператора.....	13
1.4 Діагоналізація матриці лінійного оператора.....	16
РОЗДІЛ 2. АЛГЕБРА ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ.....	20
2.1. Поняття алгебри, її властивості. Приклади алгебр.....	20
2.1.1 Білінійність операції множення та алгебра над полем.....	21
2.1.2. Розмірність і структура алгебри.....	21
2.1.3. Одиниця та інші властивості алгебри.....	22
2.1.4 Ідемпотентність, нільпотентність і оборотність елементів.....	23
2.2 Алгебра лінійних операторів.....	25
2.3 Алгебра матриць.....	28
2.4 Мінімальний многочлен лінійного оператора. Приклади.....	33
2.5 Теорема Гамільтона–Келі.....	38
2.5.1 Практичне застосування.....	39
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ.....	42
3.1 Лінійні оператори як моделі геометричних перетворень.....	42
3.2 Лінійні оператори в розв’язанні систем лінійних рівнянь.....	43
3.3 Лінійні оператори в диференціальних рівняннях.....	44
3.4 Фізичні та інженерні застосування.....	44
3.5 Лінійні оператори в штучному інтелекті і нейронних мережах.....	45
ВИСНОВКИ.....	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	49

ВСТУП

Актуальність обраної теми зумовлена ключовою роллю, яку відіграють лінійні оператори та пов'язані з ними алгебраїчні структури у сучасній математиці, прикладних дослідженнях та численних галузях природничих наук. Лінійні оператори є фундаментальним інструментом для опису та моделювання різноманітних процесів — від класичних задач лінійної алгебри до квантової механіки, теорії керування, обробки сигналів і чисельних методів. Саме тому систематичний аналіз їхніх властивостей, зокрема структури операторної алгебри, власних значень, діагоналізованості чи поведінки окремих класів операторів, має як теоретичне, так і практичне значення.

Наукове значення дослідження полягає у поглибленні теорії лінійних операторів у скінченновимірних просторах, уточненні та систематизації властивостей основних типів операторів, аналізі їх зв'язку з матричними поданнями, а також у розкритті структури алгебри всіх лінійних перетворень простору. Практичне значення роботи виявляється у можливості застосування отриманих результатів при розв'язанні задач лінійної алгебри, при побудові чисельних алгоритмів, у навчальному процесі під час викладання курсів «Лінійна алгебра», «Функціональний аналіз», «Аналітична геометрія» та «Методи оптимізації».

Аналіз наукових літературних джерел показує, що питанням структури лінійних операторів присвячено значну кількість фундаментальних праць зарубіжних і вітчизняних математиків. Вагомий внесок у розвиток теорії зробили О. Шмідт, Д. Гілберт, Б. Л. Ван дер Варден, С. Ленг, а також сучасні дослідники, які розвивають ідеї операторної алгебри та спектральної теорії. У вітчизняній математичній школі питанням властивостей лінійних перетворень та їх матричним поданням приділяли увагу, О. М. Самойленко, М. О. Красносельський та інші. Попри значний здобутий науковий доробок, потребує подальшого розширення й

узагальнення аналіз структурних характеристик операторів у контексті сучасних задач лінійної алгебри.

Метою магістерської роботи є комплексне дослідження лінійних операторів у скінченновимірних векторних просторах, їхніх алгебраїчних властивостей, структури та можливостей застосування задля поглиблення теоретичних основ відповідного розділу математики.

Для досягнення поставленої мети визначено такі *завдання*: проаналізувати теоретичні засади алгебри лінійних операторів, охарактеризувати основні властивості лінійних операторів та їх матричних подань, дослідити ключові класи операторів: ідемпотентні, нільпотентні, оборотні, самоспряжені тощо, розглянути поняття власних значень, власних векторів, мінімального та характеристичного многочленів, проаналізувати умови діагоналізації та розкладу операторів, визначити можливості застосування лінійних операторів у математичних моделях та суміжних галузях.

Об'єктом дослідження є лінійні оператори у скінченновимірних векторних просторах.

Предметом дослідження є алгебраїчні, спектральні та структурні властивості лінійних операторів та їх матричних подань.

Методами дослідження є теоретичний аналіз і систематизація наукових джерел, методи лінійної алгебри, елементи спектральної теорії, а також структурний метод дослідження алгебраїчних систем.

Лінійна алгебра є однією з фундаментальних галузей сучасної математики, що формує інтелектуальну основу більшості природничих і технічних наук. Вона описує структури та процеси, які виникають у багатовимірних просторах, де математичні об'єкти можуть набувати складних форм, але водночас залишаються доступними для аналізу завдяки апарату матриць, векторів та лінійних перетворень. Сучасний науковий прогрес — у фізиці, інформатиці, економіці, техніці — значною мірою ґрунтується на методах, закладених у лінійній алгебрі. Це робить тему

дослідження не лише теоретично значущою, але й безпосередньо пов'язаною з актуальними технологічними викликами.

Поняття лінійності виникло задовго до того, як математика сформувалася у своїх сучасних формах. У працях стародавніх цивілізацій уже зустрічаються зачатки ідей, які сьогодні складають зміст лінійної алгебри. Зокрема, у китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» (II ст. до н.е.) описано способи розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою таблиць чисел — прообразів матриць. Там же фактично вперше застосовано алгоритмічні прийоми, що нагадують сучасні елементарні перетворення рядків.

У стародавньому Вавилоні для розв'язування задач землевимірювання й астрономії використовували числові схеми, які передбачали оперування лінійними залежностями. В античній Греції питання лінійних співвідношень розглядали у геометричному контексті, а праці Евкліда містили ідеї, що згодом стали основою для побудови координатних просторів.

Нове осмислення лінійності пов'язане з розвитком аналітичної геометрії в XVII столітті. Рене Декарт і П'єр Ферма сформулювали фундаментальну думку: геометричні об'єкти можна описувати алгебраїчно, а перетворення у просторі — через співвідношення між координатами. Цей підхід відкрив шлях до аналітичного представлення геометричних операцій, що фактично означало появу лінійних операторів у сучасному розумінні.

У XVIII столітті роботи Леонарда Ейлера та Жозефа-Луї Лагранжа значно розширили спектр задач, у яких виникали лінійні перетворення: від динаміки механічних систем до теорії варіацій. Саме тоді стало очевидним, що властивості систем можна зрозуміти через аналіз матриць, пов'язаних із лінійними рівняннями, та їхніх власних значень.

XIX століття стало вирішальним у становленні лінійної алгебри як окремої дисципліни. У цей період:

- Карл Фрідріх Гаус ввів метод послідовного виключення невідомих — ключовий інструмент у роботі з лінійними рівняннями.
- Вільям Гамільтон сформулював теорію кватерніонів, які природно інтерпретуються як лінійні оператори у чотиривимірному просторі.
- Артур Келі розробив концепцію матриці як самостійного об'єкта, незалежного від системи рівнянь, та сформулював твердження, яке згодом стало відомим як теорема Гамільтона–Келі.
- Фердинанд Фробеніус розвинув теорію характеристичних многочленів, власних значень і мінімальних многочленів.

Завдяки цим та іншим внескам лінійна алгебра отримала строгий теоретичний фундамент. Пізніше Джузеппе Пеано сформулював аксіоматику лінійних просторів, що дозволило розглядати лінійні оператори у загальному абстрактному вигляді.

У ХХ столітті лінійні оператори стали невід'ємним елементом теоретичної фізики. У квантовій механіці, започаткованій Гейзенбергом і Шредінгером, оператори на гільбертовому просторі інтерпретуються як фізичні спостережувані величини. У теорії коливань та контролю матриці визначають поведінку складних систем. У економіці вони застосовуються для моделювання міжгалузевих балансів.

Справжній прорив настав у ХХІ столітті — у зв'язку зі стрімким розвитком штучного інтелекту. Сьогодні матриці та лінійні оператори лежать в основі:

- глибоких нейронних мереж,
- трансформерів і механізмів уваги,
- методів оптимізації,
- алгоритмів зниження розмірності,
- спектрального аналізу графів,
- лінійних регресій і моделей прогнозування.

Це привело до безпрецедентного підвищення значущості теоретичних результатів, таких як теорема Гамільтона–Келі, яка встановлює фундаментальний зв'язок між матрицею та власним характеристичним многочленом.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

1.1 Лінійні оператори, їх матриці. Приклади

Нехай V - скінченновимірний лінійний векторний простір над полем P . Відображенням φ множини V у саму себе називається правило, яке кожному елементу

$a \in V$ ставить у відповідність певний елемент $\varphi(a) \in V$. Таке відображення записується у вигляді

$$\varphi : V \rightarrow V.$$

Елемент $\varphi(a)$ називають образом вектора a при відображенні φ , а якщо для деякого $b \in V$ існує вектор $a \in V$, такий що $\varphi(a) = b$, то a називають прообразом елемента b . Прообраз може бути єдиним, кількома або взагалі не існувати.

Відображення $\varphi: V \rightarrow V$ називається лінійним оператором, якщо воно задовольняє такі дві умови:

1. Адитивність:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \in V;$$

2. Однорідність:

$$\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a), \quad \forall a \in V, \lambda \in P.$$

Інакше кажучи, лінійний оператор - це таке відображення, яке зберігає структуру лінійного простору: додавання та множення на скаляр.

1.1.1 Основні властивості лінійних операторів

Властивість 1. Лінійність відносно комбінацій

Для будь-яких $x, y \in V$ і чисел $\alpha, \beta \in F$:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Це - головна властивість, яка узагальнює обидві попередні (адитивність і однорідність). Якщо оператор діє лінійно на кожен елемент і зберігає коефіцієнти, то будь-яка лінійна комбінація векторів після дії оператора залишається лінійною комбінацією їхніх образів. [1]

Приклад:

Нехай $A(x,y) = (2x,3y)$

Тоді:

$$\begin{aligned} A(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) &= A(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = (2(\alpha x_1 + \beta x_2), 3(\alpha y_1 + \beta y_2)) \\ &= \alpha(2x_1, 3y_1) + \beta(2x_2, 3y_2) = \alpha A(x_1, y_1) + \beta A(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Отже, оператор лінійний.

Властивість 2. Збереження нульового елемента

$$A(0) = 0$$

Доведення: підставимо у властивість однорідності $\alpha = 0$;

$$A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0$$

Тому нульовий вектор переходить у нульовий вектор.

Приклад:

Якщо $A(x,y) = (2x,3y)$, то $A(0,0) = (0,0)$

Властивість 3. Лінійність композиції

Якщо $A : V \rightarrow W$, $B : W \rightarrow U$ - лінійні оператори, тоді їх композиція $C = B \circ$

$A : V \rightarrow U$ також лінійна.

Доведення:

$$C(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha A(x) + \beta A(y)) = \alpha B(A(x)) + \beta B(A(y)) = \alpha C(x) + \beta C(y)$$

Приклад:

Якщо

$$A(x) = 2x \text{ і } B(x) = x + 1, \text{ то } B \circ A(x) = B(2x) = 2x + 1.$$

Оператор B тут не лінійний, бо не зберігає нуль, отже й композиція буде нелінійною.

Але якщо $B(x) = 3x$, тоді $B \circ A(x) = 6x$ - лінійний оператор.

Властивість 4. Лінійність суми операторів

Якщо A і B – лінійні оператори з V у W , то їх сума:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

також є лінійним оператором.

Доведення:

$$\begin{aligned} (A+B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha(A(x) + B(x)) + \beta(A(y) + B(y)) = \\ &= \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y) \end{aligned}$$

Приклад:

$$A(x) = 2x, B(x) = 3x \Rightarrow (A + B)(x) = 5x$$

Властивість 5. Добуток оператора на число

Якщо A - лінійний оператор і λ - число, то оператор (λA) , що діє за правилом

$$(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x)$$

теж лінійний.

Приклад:

Нехай $A(x) = 2x$, тоді $3A(x) = 3(2x) = 6x$ - знову лінійний оператор.

Властивість 6. Лінійні оператори утворюють векторний простір

Множина всіх лінійних операторів із простору V у простір W позначається як $A(V, W)$. На цій множині можна визначити додавання та множення на число (як у попередніх властивостях), і вона задовольняє всі аксіоми векторного простору. [2]

Властивість 7. Лінійний оператор у координатній формі

Якщо простір $V = R^n$, то будь-який лінійний оператор можна подати у вигляді множення матриці на вектор

$$A(x) = A \cdot x$$

де A - матриця розміру $m \times n$, x - стовпчик-координати вектора.

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Це - типовий лінійний оператор у матричній формі.

Властивість 8. Оператор тотожний і нульовий

Тотожний оператор: $I(x) = x$ - лінійний, бо зберігає всі властивості.

Нульовий оператор: $O(x) = 0$ - теж лінійний.

Геометричний зміст лінійних операторів

У просторі $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$ лінійні оператори можуть зображати: повороти, розтягнення/стискання, дзеркальні відображення, проєкції на пряму або площину.

Приклади: $A(x,y)$

1. $A(x,y) = (x, -y)$ - відображення відносно осі Ox .
2. $A(x,y) = (2x, 2y)$ - гомотетія (розтягнення у 2 рази).
3. $A(x,y) = (x,y)$ симетрія відносно прямої $y = x$

Ці відображення - лінійні, бо вони зберігають початок координат і структуру простору.

Матриця лінійного оператора. Якщо у просторі V зафіксовано базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ то для кожного базисного вектора e_j відомо його образ:

$$f_j = \varphi(e_j).$$

Кожен f_j можна записати як лінійну комбінацію базисних векторів:

$$\varphi(e_j) = \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \dots + \alpha_{nj}e_n.$$

Коефіцієнти a_{ij} , утворюють матрицю лінійного оператора у вибраному базисі:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кожен k -й стовпець матриці містить координати образу базисного вектора e_k при дії оператора φ .

1.2 Власні вектори та власні значення лінійного оператора

Нехай V - скінченновимірний векторний простір над полем P а $\varphi: V \rightarrow V$ - лінійний оператор. Число $\lambda \in P$ називають власним значенням оператора φ , якщо існує ненульовий вектор $a \in V$, для якого виконується рівність

$$\varphi(a) = \lambda a. \quad (1)$$

Вектор a при цьому називають власним вектором лінійного оператора φ , а говорять що він відповідає власному значенню λ . Важливо, що власне значення повинно належати полю P , над яким визначено простір V . Звернемо увагу, що рівність (1) також справедлива для нульового вектора і будь-якого числа $\lambda \in P$. Через це нульовий вектор формально можна вважати власним вектором для будь-якого власного значення, якщо воно існує. Ненульовий власний вектор завжди відповідає лише одному власному значенню. Дійсно, якщо для $a \neq 0$ виконується:

$$\varphi(a) = \lambda_1 a = \lambda_2 a,$$

то відніманням однієї рівності від іншої маємо:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2.$$

Для нульового вектора такої однозначності немає, тому деякі автори нульовий вектор власним вектором не вважають.

Приклади лінійних операторів та їх власних векторів

1. Оператор диференціювання на многочленах

Нехай V - простір всіх многочленів степеня не вище n над полем P , і розглянемо оператор диференціювання D , який кожному многочлену ставить у відповідність його похідну. Для многочленів ненульового степеня рівність $D(f) =$

λf неможлива для будь-якого λ . Натомість для константних многочленів і нульового многочлена маємо $D(f) = 0 = 0 \cdot f$. Тому $\lambda = 0$ - єдине власне значення оператора D , а власними векторами є всі константні многочлени разом із нульовим.

2. Оператор проєкції векторів площини

Нехай V - простір всіх векторів площини з початком у точці O , l - фіксована пряма через O , m - ненульовий напрямний вектор, не паралельний l . Визначимо оператор φ , що проєктує вектори на пряму l паралельно m . Геометрично рівність $\varphi(a) = \lambda a$ означає, що a та його образ колінеарні. Ненульові вектори, які не лежать на l та не колінеарні m , не можуть стати колінеарними при проєкції. Вектори колінеарні m проєктуються в нульовий, тому для них $\lambda_1 = 0$. Вектори, що лежать на l , проєктуються самі на себе, тобто $\lambda_2 = 1$.

3. Оператор повороту векторів площини

Нехай V - простір всіх векторів площини, розглянутий над полем дійсних чисел, а оператор φ повертає вектори на кут α навколо спільного початку проти годинникової стрілки. Якщо $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ненульові вектори та їх образи не колінеарні, тому дійсних власних значень немає. Якщо $\alpha = 0$, оператор тотожний, всі вектори власні з $\lambda = 1$. Якщо $\alpha = \pi$, кожен вектор переходить у протилежний, $\lambda = -1$, а власними векторами є всі ненульові вектори.

З цього прикладу видно, що не кожний лінійний оператор має власні значення.

1.3 Характеристичний многочлен лінійного оператора

Нехай V - n -вимірний лінійний простір над полем P , і нехай

$$A : V \rightarrow V$$

лінійний оператор.

Якщо в просторі V вибрано базис то оператор A можна подати матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Многочлен

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

називається характеристичним многочленом лінійного оператора (або його матриці), де E - одинична матриця розміру $n \times n$, а λ - змінна (скаляр). [3]

Властивості характеристичного многочлена

1. Степінь і нормованість

Для матриці A розміру $n \times n$ визначаємо

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n).$$

Тоді:

- $\deg p_A(\lambda) = n$.
- $p_A(\lambda)$ - нормований

2. Залежність коефіцієнтів від сліду та детермінанта

Формально можна записати:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^0 \det(A)$$

де $\text{Tr}(A)$ - слід матриці, $\det(A)$ - її детермінант. А слід матриці це сума елементів її головної діагоналі, це означає, що найвищий коефіцієнт та найнижчий (вільний член) мають чітку інтерпретацію:

- Вільний член дорівнює $\det(A)$ (з урахуванням знаку)
- Коефіцієнт при λ^{n-1} дорівнює сліду матриці, взятої із знаком плюс або мінус.

3. Корені характеристичного многочлена дорівнюють власним значенням

Число λ_0 є власним значенням матриці A (або оператора) тоді й тільки тоді,

КОЛИ

$$p_A(\lambda_0) = 0.$$

Це означає, що існує ненульовий вектор v із $Av = \lambda_0 v$. Переписавши $(A - \lambda_0 E)v = 0$, бачимо, що матриця $A - \lambda_0 E$ є виродженою, а отже, її детермінант дорівнює 0, саме це і буде умовою.

4. Інваріантність відносно вибору базису (подібність)

Якщо A і A' - матриці того самого лінійного оператора в різних базисах. то A' подібна до A (тобто $A' = S^{-1}AS$ для невиродженої S). Тоді

$$p_{A'}(\lambda) = p_A(\lambda).$$

Іншими словами - характеристичний многочлен не залежить від вибору базису. Ця властивість важлива, бо гарантує, що характеристичний многочлен – це властивість саме лінійного оператора (а не випадкової матриці) та його спектра.

5. Форма для трикутних матриць (діагональних елементів)

Якщо A - верхня (або нижня) трикутна матриця, тоді

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$$

тобто корені - це діагональні елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Оскільки детермінант трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, то визначник $A - \lambda E$ дорівнює добутку $(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$

6. Відношення з іншими многочленами оператора (мінімальний, анулюючий)

Характеристичний многочлен є прикладом анулюючого многочлена для оператора A , тобто такого, що $p_A(A) = 0$. Це означає, що матриця задовольняє свій власний характеристичний многочлен. Це дає потужний інструмент для аналізу оператора (наприклад, діагоналізації, розкладу, обчислень). [3]

7. Зв'язок з детермінантом і слідом при добутках (степенях)

Додаткові формули дають зв'язок між слідами оператора, степенями A^k та коефіцієнтами характеристики. Наприклад:

$$\det(f(A)) = \prod_{i=1}^n f(\lambda_i),$$

де λ_i - корені характеристичного многочлена.

Крім того, існують алгоритмічні формули для обчислення коефіцієнтів характеристичного многочлена через $\text{Tr}(A^k)$.

8. Множення матриць і характеристичний многочлен

Наприклад, якщо A та B - такі що AB і BA визначені, тоді AB і BA мають однаковий характеристичний многочлен (у випадку квадратних відповідних розмірів). Ця властивість часто використовується при аналізі операторів блокової форми, або коли розглядаємо лінійне відображення у різних підпросторах.

1.4 Діагоналізація матриці лінійного оператора

Нехай V - скінченновимірний векторний простір над полем P , і нехай

$$T : V \rightarrow V$$

є лінійним оператором. Вибравши базис, маємо матрицю A розміру $n \times n$, яка представляє T . Оператор T (або матриця A) називається діагоналізованим, якщо існує базис простору V , у якому матриця T має діагональний вигляд, тобто

$$P^{-1}AP = D,$$

де P - невироджена матриця, а D - діагональна матриця.

Або еквівалентно: існує базис із власних векторів оператора T .

*Критерій діагоналізації

*Теорема. Квадратна матриця A порядку $n \times n$ є діагоналізованою тоді і тільки тоді, коли вона має n лінійно незалежних власних векторів.

Якщо $A = PDP^{-1}$ з діагональною D , стовпці P - власні вектори A і вони лінійно незалежні (бо P невироджена).

І навпаки, якщо є базис із n власних векторів, то взявши їх як стовпці P , власні значення на діагоналі формують D і $A = PDP^{-1}$.

Властивості та додаткові умови:

- Рівність алгебраїчної і геометричної кратності.

Якщо λ - власне значення, його алгебраїчна кратність - кратність у характеристичному многочлені; геометрична кратність - розмірність відповідного власного простору. Діагоналізація можлива лише коли для кожного λ геометрична дорівнює алгебраїчній.

- Повна множина власних векторів.

Сумарна геометрична кратність всіх власних значень має бути n .

- Подібність до діагональної матриці.

Якщо A діагоналізована, то існує невироджена P , діагональна D такі, що $A = PDP^{-1}$.

Переваги діагоналізації.

- Обчислення степенів: $A^k = PD^kP^{-1}$, а D^k – піднесення діагональних елементів до степеня
- Спрощує аналіз експонент, розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь.
- Чітке розуміння структури: власні значення на діагоналі, власні вектори – відповідний базис.
- Не кожену матрицю можна діагоналізувати.

Наприклад, якщо алгебраїчна кратність більше геометричної для деякого власного значення - тоді не існує достатньої кількості власних векторів, виходить матриця не діагоналізована.

- Ортогональна (унітарна) діагоналізація. Для будь-якої унітарної матриці виконується рівність $Q^{-1} = Q^T$.

Оскільки у випадку матриць симетричних над R (або ермітованих над C) існує базис із ортонормованих власних векторів, вони діагоналізуються за допомогою унітарного (або ортогонального) перетворення:

$$A = QDQ^{-1} = QDQ^T$$

Приклад. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення та перевіримо можливість діагоналізації.

Характеристичний многочлен:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21.$$

Корені: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$.

Для $\lambda_1 = 3$: власний простір утворюють розв'язки $(A - 3E)v = 0$. Маємо $v_1 = (1, -1)$.

Для $\lambda_2 = 7$ маємо $v_2 = (1, 1)$.

Оскільки є два лінійно незалежні вектори (для $n = 2$), матриця діагоналізована.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм процедури діагоналізації:

1. Знайти всі власні значення (розв'язати $\det(A - \lambda E) = 0$).
2. Для кожного власного значення знайти відповідний простір власних векторів.
3. Перевірити, чи сума розмірностей всіх власних просторів дорівнює n . Якщо так - існує базис із власних векторів.
4. Побудувати матрицю переходу P із цих власних векторів як стовпців. Побудувати діагональну матрицю D із відповідних власних значень на діагоналі.
5. Перевірити $A = PDP^{-1}$.

Отже, діагоналізація – потужний інструмент, але вимагає достатньої кількості власних векторів. Якщо матриця не діагоналізується, її можна вивчати через форму Жордана. Діагоналізація залежить від поля F . Наприклад, матриця може бути діагоналізована над полем C , але не над полем дійсних чисел R . У випадку операторів на скінченновимірному просторі зі скалярним добутком, симетричність або нормальність гарантують діагоналізованість із ортонормальним базисом (спектральна теорема).

РОЗДІЛ 2

АЛГЕБРА ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

2.1. Поняття алгебри, її властивості. Приклади алгебр

Алгебра є однією з фундаментальних галузей сучасної математики, що вивчає структури, операції та взаємозв'язки між елементами різних математичних об'єктів. Під терміном «алгебра» розуміють не лише дисципліну, а й певну алгебраїчну структуру, яка поєднує в собі властивості векторного простору і множення, узгодженого з діями цього простору над полем.

Алгеброю (лінійною алгеброю) над полем P називається векторний простір A , у якому визначена бінарна операція множення елементів (векторів), причому виконуються аксіоми:

1. Асоціативність множення:

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in A.$$

2. Дистрибутивність зліва та справа відносно додавання векторів

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

3. Асоціативність відносно числового множника

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \quad \forall \alpha \in P, a, b \in A.$$

Якщо в алгебрі є одиниця $e \in A$ така, що

$$ea = ae = a \quad \forall a \in A,$$

то кажуть, що алгебра є унітарною (має одиницю). [4]

Інше означення: алгебра над полем — це кільце з одиницею, яке одночасно є векторним простором над цим полем. Розмірність векторного простору A називається розмірністю алгебри. Алгебра може бути скінченновимірною або нескінченновимірною залежно від базису в просторі.

2.1.1 Білінійність операції множення та алгебра над полем

Нехай A — алгебра над полем P . Тобто A є векторним простором над P , у якому визначено бінарну операцію множення

$$A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto ab$$

що задовольняє властивість білінійності відносно дій у векторному просторі.

Множення в алгебрі A називається білінійним, якщо воно лінійне за кожним аргументом окремо, тобто для будь-яких $a, b, c \in A$ і всіх $\alpha, \beta \in P$ виконується:

$$(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \cdot c = \alpha \cdot (a \cdot c) + \beta \cdot (b \cdot c),$$

$$a \cdot (\alpha \cdot b + \beta \cdot c) = \alpha \cdot (a \cdot b) + \beta \cdot (a \cdot c).$$

Білінійність гарантує узгодженість множення з операціями векторного простору. Іншими словами, множення елементів алгебри не порушує лінійної структури простору. Саме ця властивість відрізняє алгебру над полем від інших структур, де множення не є лінійно узгодженим. [5]

Приклад. У алгебрі матриць $M_n(P)$ множення матриць білінійне:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC,$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B),$$

де $\alpha \in F$ а $A, B, C \in M_n(P)$. Ці властивості ілюструють саме білінійність операції множення в алгебрі над полем.

Таким чином, білінійність є однією з ключових аксіом, що поєднує в собі лінійну та множильну структури простору. Вона гарантує, що будь-які лінійні комбінації елементів алгебри узгоджуються з її множенням, що робить алгебру над полем фундаментальним об'єктом у сучасній математичній структурі.

2.1.2. Розмірність і структура алгебри

Розмірність алгебри визначається як розмірність відповідного векторного простору. Якщо вона скінченна, то алгебра називається скінченновимірною, інакше

— нескінченновимірною. Нехай у векторному просторі A задано базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Тоді будь-які два елементи $a, b \in A$, можна записати як

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j.$$

Добуток $a \cdot b$ визначається множенням базисних елементів:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k,$$

де $C_{ij}^k \in P$ — структурні константи алгебри. Вони повністю визначають її структуру.

Якщо для всіх i, j, k, l , виконуються рівності

$$\sum_m C_{ij}^m C_{mk}^l = \sum_m C_{jk}^m C_{im}^l,$$

то операція множення в алгебрі є асоціативною.

2.1.3. Одиниця та інші властивості алгебри

У структурі алгебри над полем важливу роль відіграє поняття одиниці (нейтрального елемента відносно множення). Воно забезпечує узгодженість множення та

дозволяє розглядати алгебри як узагальнення кілець з одиницею.

Елемент $e \in A$ називається одиницею алгебри, якщо для всіх $a \in A$ виконується:

$$ea = ae = a.$$

Якщо такий елемент існує, алгебра називається унітарною. Якщо ні — неунітарною.

Прикладом унітарної алгебри є алгебра квадратних матриць $M_n(F)$, одиницею якої є одинична матриця E_n .

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

бо для будь-якої матриці $A \in M_n(P)$ виконується:

Для $n=2$ одинична матриця має вигляд:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot E_2 = E_2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Алгебра многочленів $F[x]$ також має одиницю — число 1.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Алгебра строго верхніх трикутних матриць одиниці не має.

2.1.4 Ідемпотентність, нільпотентність і оборотність елементів

Ідемпотентним називається елемент $a \in A$, для якого $a^2 = a$. Такі елементи часто використовуються для побудови проекторів, тобто операторів, що «витягують» певну підпросторову складову з простору.

Приклад: проектор P у лінійному просторі, який задовольняє $P^2 = P$

Нільпотентним називається елемент $a \in A$, для якого існує натуральне число n , таке, що $a^n = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Важливими властивостями елементів алгебри є ідемпотентність, нільпотентність та оборотність. Елемент a називається ідемпотентним, якщо $a^2 = a$, нільпотентним — якщо існує n , що $a^n = 0$, а оборотним — якщо існує b , для якого $ab = ba = e$.

Алгебра називається комутативною, якщо $ab = ba$ для всіх $a, b \in A$, і некомутативною в іншому випадку. Більшість алгебр є асоціативними, проте існують і неасоціативні, як-от алгебра кватерніонів чи октоніонів.

Алгебра кватерніонів H — це чотиривимірна алгебра над полем дійсних чисел R , елементи якої мають вигляд:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

де $a, b, c, d \in R$, i, j, k , — уявні одиниці, для яких виконуються співвідношення:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

У цій алгебрі одиницею є елемент

$$1 = 1 + 0i + 0j + 0k,$$

оскільки для будь-якого кватерніона $q \in H$:

$$1 \cdot q = q \cdot 1 = q.$$

Кватерніони — це некомутативна алгебра, тобто порядок множення має значення:

$$i \cdot j \neq j \cdot i.$$

Проте наявність одиниці зберігається — вона виконує роль нейтрального елемента щодо множення.

Цікаво, що кватерніони можна інтерпретувати як узагальнення комплексних чисел для опису просторових обертань у тривимірному просторі. [6]

Алгебра октоніонів O (її ще називають алгеброю Келі — Діксона) є восьмивимірним розширенням кватерніонів.

Кожен елемент октоніонів має вигляд:

$$x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7,$$

де $a_i \in R$, $e_0 = 1$ — одиниця алгебри, а інші e_i задовольняють спеціальні правила множення, які можна подати у вигляді схеми Фано (орієнтованої семикутної діаграми).

Основні властивості множення:

$$e_i^2 = -1 \text{ для } i = 1, \dots, 7,$$

а добутки різних базисних елементів визначаються з правил Фано, наприклад:

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2,$$

та аналогічно для інших трійок, заданих діаграмою. Одиницею в алгебрі октоніонів є базисний елемент

Центром алгебри A називається множина всіх елементів, що комутують з усіма іншими елементами алгебри:

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az, \forall a \in A\}.$$

У комутативній алгебрі A центр збігається з усією алгеброю: $Z(A)=A$. У алгебрі матриць $M_n(F)$, центром є множина всіх скалярних матриць λE , де $\lambda \in F$.

Розуміння основних властивостей алгебри — таких як наявність одиниці, комутативність, асоціативність, ідемпотентність, нільпотентність, оборотність, існування центрів, підалгебр та ідеалів — є фундаментальним для її класифікації.

Ці властивості визначають, як саме елементи алгебри взаємодіють між собою, і лежать в основі побудови більш складних структур, таких як алгебри Лі, операторні алгебри, групові алгебри тощо.

Вони також мають велике прикладне значення: алгебри матриць і операторів застосовуються в лінійній алгебрі, фізиці, механіці, теорії диференціальних рівнянь і навіть у комп'ютерній графіці.

2.2 Алгебра лінійних операторів

Множину всіх лінійних операторів у скінченновимірному векторному просторі V_n над полем P позначимо через $L(V_n)$. Зазначена множина природним чином набуває структури векторного простору. Дійсно, для будь-яких операторів $A, B \in L(V_n)$ та будь-якого вектора $\vec{x} \in L(V_n)$. операція додавання визначається правилом:

$$(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}.$$

Ця операція є коректною і задовольняє основні аксіоми: асоціативність, комутативність, існування нульового оператора O , для якого $O\vec{x} = \vec{0}$, та існування протилежного оператора $-A$. [6]

Множення оператора на скаляр $\lambda \in P$ задається формулою:

$$(\lambda A)\vec{x} = \lambda(A\vec{x}),$$

що гарантує лінійну залежність оператора від скаляра.

З огляду на ізоморфізм між $L(V_n)$ та простором квадратних матриць $M_n(P)$, а саме:

$$L(V_n) \cong M_n(P),$$

впливає, що розмірність простору лінійних операторів дорівнює:

$$\dim L(V_n) = n^2.$$

Для переходу до повної алгебраїчної структури вводиться третя операція — композиція (або множення) операторів. Під добутком $A, B \in L(V_n)$ двох лінійних операторів розуміють їхнє послідовне застосування як відображень, що діє на вектор:

$$(AB)C = A(BC),$$

Ця операція є коректною, оскільки композиція двох лінійних відображень сама є лінійним відображенням. Введена операція володіє рядом властивостей, які перетворюють $L(V_n)$ на кільце. Зокрема, вона є асоціативною:

$$(AB)C = A(BC),$$

і задовольняє дистрибутивним законам відносно додавання:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Існує також нейтральний елемент щодо множення — тотожний лінійний оператор $\mathcal{E}$, що не змінює вектор:

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

У загальному випадку композиція не є комутативною:

$$AB \neq BA, \quad n \geq 2.$$

Отже, $L(V_n)$ утворює не комутативне асоціативне кільце з одиницею. [7]

Після встановлення узгодженості між композицією та множенням на скаляр, множина $L(V_n)$ набуває статусу асоціативної некомутативної алгебри з одиницею над полем P . Особливий інтерес становить питання оберненого оператора. Обернений оператор існує лише для тих операторів A , які є невиродженими, тобто здійснюють взаємно однозначне відображення простору V_n на самого себе:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{E}.$$

Критерій оберненості у матричному поданні:

$$A - \text{оборотний} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Приклад

Нехай лінійний оператор $A: R^4 \rightarrow R^4$ задано матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіримо, чи є оператор A оборотним. Для цього обчислюємо визначник матриці:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Розклад за першим рядком дає:

$$\det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Обчислимо ці три визначники:

1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 \cdot 1 - (-2)(-1)) - 4(1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) + (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) \\ &= 2(1 - 2) - 4(1) + (-1) = 2(-1) - 4 - 1 = -7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(1 \cdot 1 - (-2)(-1)) - 4(0 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) + (0 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= -1(1 - 2) - 4(6) - 3 = -1(-1) - 24 - 3 = 1 - 24 - 3 = -26 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) - 2(0 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) + 4(0 \cdot 0 - 1 \cdot 3) \\ &= -1(-1) - 2(-3) + 4(-3) = 1 + 6 - 12 = -5 \end{aligned}$$

$$\det(A) = 2(-7) - 1(-26) + 3(-5) = -14 + 26 - 15 = -3$$

$$\det(A) = -3 \neq 0$$

Отже, матриця A є невідродженою, а оператор A є оборотним, тобто для нього існує обернений A^{-1}

2.3 Алгебра матриць

Перші систематизовані результати, пов'язані з матрицями, були отримані В. Гамільтоном та А. Келі в середині XIX століття. Їхні роботи заклали підвалини сучасної теорії матриць — одного з ключових інструментів лінійної алгебри. Сьогодні матриці застосовуються в численних науках: механіці, економіці, моделюванні, оптимізації, обчислювальній техніці, статистиці, фізиці тощо. Їхня популярність пояснюється тим, що матриці забезпечують компактний і водночас універсальний спосіб запису складних лінійних відношень і операцій.

Матрицею над полем P називається таблиця чисел розміру $m \times n$:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елемент $a_{i,j}$ розташований у i -му рядку та j -му стовпці. Якщо число рядків збігається з числом стовпців ($m=n$), матриця є квадратною, а число n називається її порядком. Лише для однотипних матриць вводять операцію додавання. Результат визначається поелементно:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Тобто кожен елемент суми утворюється додаванням відповідних елементів вихідних матриць.

$$\begin{aligned}
 A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Властивості додавання матриць:

- **Комутативність:**

$$A+B=B+A$$

Додавання матриць зводиться до додавання чисел у відповідних позиціях. Оскільки додавання чисел комутативне, порядок доданків не має значення. Це означає, що перестановка матриць не впливає на результат.

- **Асоціативність:** $(A+B)+C=A+(B+C)$

Групування доданків не змінює суми. У багатовимірних обчисленнях це особливо зручно, оскільки дозволяє оптимізувати обчислення, не змінюючи результат.

- **Нейтральний елемент — нульова матриця O**

Матриця, у якій усі елементи рівні нулю, не змінює жодну іншу матрицю при додаванні: $A+O=A$. Це аналог нуля для чисел у звичайній арифметиці.

- **Протилежна матриця: $-A$**

Елементи матриці $-A$ є протилежними до відповідних елементів A : $A+(-A)=O$

Це дозволяє вводити операцію віднімання, як у звичайній алгебрі.

Наступною операцією є множення матриці на число з поля. Множення матриці на скаляр визначається так:

$$(tA)_{ij} = t \cdot a_{ij}.$$

Тобто кожен елемент масштабується одним і тим самим числом.

$$tA = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \cdots & ta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості множення на число:

- **Дистрибутивність щодо додавання матриць:**

$$t(A+B) = tA + tB$$

Масштабування всієї матриці одночасно дає такий самий результат, як спочатку додати матриці, а потім помножити на число. [8]

- **Дистрибутивність щодо додавання чисел:**

$$(s + t)A = sA + tA$$

Скалярна сума впливає на матрицю так, якби ми здійснювали окремі масштабування і потім додали результати.

Розглядають ще одну дію – матричне множення. Нехай A має розмір $m \times k$, а B має розмір $k \times n$. Добуток матриць $C=AB$ визначається формулою:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}.$$

Як впливає з означення матричного множення, для того щоб добуток $A \cdot B$ був коректно визначений, необхідною умовою є рівність: кількість стовпців матриці A має збігатися з кількістю рядків матриці B . Лише за такої узгодженості розмірностей можна виконати покомпонентне множення та сумування, яке лежить в основі операції матричного добутку.

З цієї умови одразу можна зробити важливий висновок: навіть якщо добуток $A \cdot B$ існує, це зовсім не гарантує існування добутку $B \cdot A$. Причина полягає в тому, що матриці можуть мати несумісні розміри у протилежному порядку, що робить операцію множення недопустимою.

Більше того, навіть коли обидві матриці є квадратними та одного й того ж порядку — а отже, обидва добутки $A \cdot B$ і $B \cdot A$ існують — вони, як правило, не збігаються. Матричне множення не є комутативним, і різниця порядку множення суттєво впливає на результат, змінюючи як числові значення, так і структуру отриманої матриці.

Наприклад:

Розглянемо дві квадратні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер добуток BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відразу видно, що добутки AB і BA — різні

Властивості множення матриць:

- **Некомутаивність:**

$$AB \neq BA.$$

Причина в тому, що при перемноженні використовуються різні комбінації рядків та стовпців, а їхнє розташування змінюється при перестановці матриць. Більш того, добуток BA може взагалі не існувати, якщо розміри не збігаються.

- **Асоціативність:**

$$(AB)C = A(BC).$$

Це ключова властивість, яка дозволяє об'єднувати матриці у довгі послідовності множень і групувати їх зручним чином, не змінюючи результату. Завдяки цьому можливо визначати степені матриць, обчислювати оператори, будувати складні композиції перетворень.

- **Одинична матриця E :**

$$AE = EA = A.$$

Це матриця з одиницями на головній діагоналі й нулями в інших позиціях. Вона виконує роль нейтрального елемента. Одинична матриця діє подібно до числа 1 у звичайному множенні - вона зберігає структуру матриці незмінною.

- **Сумісність із множенням на число:**

$$t(AB) = (tA)B = A(tB).$$

Скаляр можна винести за знак множення в будь-якому місці оскільки множення чисел і матриць взаємодіють лінійно.

- **Дистрибутивність щодо додавання:**

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Множення матриць—це лінійна операція, тому вона «розподіляється» по додаванню, зберігаючи лінійність.

2.4 Мінімальний многочлен лінійного оператора. Приклади

Нехай V — скінченновимірний векторний простір над полем P . Для будь-якого лінійного оператора $\varphi: V \rightarrow V$ завжди існує деякий ненульовий многочлен,

підставлення якого в оператор занулює його. Такий многочлен називають анулюючим. Іншими словами, існує многочлен $f(x) \neq 0$, що задовольняє умові:

$$f(\varphi) = 0.$$

Мінімальним многочленом оператора φ називають такий анулюючий многочлен, який серед усіх ненульових анулюючих многочленів має найменший можливий степінь. Його позначають зазвичай $m_\varphi(x)$.

Анулюючий многочлен оператора φ буде мінімальним многочленом φ тоді й тільки тоді, коли цей многочлен є дільником довільного анулюючого многочлена φ

Доведення. Припустимо, що $m(x) \in P(x)$ – мінімальний многочлен оператора φ . Візьмемо довільний анулюючий многочлен

$$f(x) \in P[x], \quad f(\varphi) = 0.$$

та поділимо $f(x)$ на $m(x)$ з остачею:

$$f(x) = m(x)q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg m(x).$$

Підставимо оператор:

$$f(\varphi) = m(\varphi)q(\varphi) + r(\varphi).$$

Оскільки $m(\varphi) = 0$, то маємо:

$$0 = f(\varphi) = r(\varphi).$$

Тоді $r(x)$ також є анулюючим многочленом оператора. Але його степінь менший, ніж степінь $m(x)$, що суперечить мінімальності. Отже, остача повинна бути нульовою,

$$r(x) = 0,$$

а це означає, що $f(x)$ ділиться на $m(x)$.

Зворотне твердження очевидне: степінь довільного дільника деякого многочлена не більший за степінь самого цього многочлена

Характеристичний многочлен оператора $\chi_\varphi(x)$ завжди ділиться на його мінімальний многочлен. Це випливає з попереднього твердження і теореми Гамільтона–Келі, яка гарантує, що

$$\chi_\varphi(\varphi) = 0.$$

Розглянемо ситуацію, коли характеристичний многочлен оператора повністю розкладається на лінійні множники над полем P . У такому разі для оператора існує жорданова нормальна форма. Позначимо власні значення через $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, а для кожного власного значення λ_i нехай найбільший розмір жорданових клітин дорівнює k_i . [9]

У цих умовах мінімальний многочлен оператора φ має вигляд:

$$m_\varphi(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_m)^{k_m}.$$

Доведення. Спершу розглянемо випадок, коли жорданова форма оператора складається лише з однієї жорданової клітини $J_n(\lambda)$. Тоді характеристичний многочлен дорівнює:

$$\chi_\varphi(x) = (x - \lambda)^n.$$

У такому випадку, мінімальним многочленом φ буде деякий дільник цього многочлена, тобто многочлен вигляду:

$$m_\varphi(x) = (x - \lambda)^k, \quad k \leq n.$$

Підставимо оператор $(\varphi - \lambda I)$ у степінь k . У жордановому базисі це матриця:

$$(J_n(\lambda) - \lambda I)^k = J_n(0)^k.$$

Для будь-якого $k < n$ матриця $J_n(0)^k$ ненульова, а тому многочлен $(x - \lambda)^k$ не є анулюючим для φ . Отже, в такому випадку мінімальний многочлен оператора φ збігається з його характеристичним многочленом і дорівнює $(x - \lambda)^n$

Приклад 1. Нехай дана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний многочлен, спочатку обчисливши детермінант:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda) - 0 \cdot 1) - 1(0 \cdot (2 - \lambda) - 1 \cdot 1) + 1(0 \cdot 0 - (3 - \lambda) \cdot 1) \\ &= (2 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda)) - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-(3 - \lambda)) \\ &= (2 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda)) + 1 - (3 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(6 - 5\lambda + \lambda^2) + (\lambda - 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + (\lambda - 2) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 12 + \lambda - 2 \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 10 \\ &= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 10 \quad (\text{помножимо на } -1) \end{aligned}$$

Отже, характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 10.$$

В цьому випадку, якщо матриця діагоналізується, всі власні значення прості, тоді мінімальний многочлен збігається з характеристичним. Для даної матриці мінімальний многочлен:

$$m_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 10.$$

Приклад 2. Нехай дана матриця

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця блочно-діагональна (верхній лівий блок 2×2 і окремий елемент 3), характеристичний многочлен обчислюється як добуток характеристичних многочленів блоку та одиничного елемента:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Для одиночного елемента 3 характеристичний множник $(3 - \lambda)$.

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$

$\lambda = 3$ - алгебраїчна кратність 2

$\lambda = 1$ - алгебраїчна кратність 1

Для $\lambda=3$:

Розв'язуємо систему $(B - 3E)x=0$:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь:
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Отже, $x_1=x_2$, а x_3 — набуває довільного значення.

Для A власний вектор з $\lambda=3$ можна вибрати $(1,1,0)^T$. Крім того, третій стандартний базисний вектор $e_3=(0,0,1)^T$ (також є власним вектором із власним значенням 3). Тому геометрична кратність $\lambda=3$ дорівнює 2.

Для $\lambda=1$ розв'язуємо $(B - 1I)x=0$:

$$B - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система дає $x_1+x_2=0$, $x_3=0$. Отже, власні вектори мають вигляд $t(1, -1, 0)^T$.

Геометрична кратність для $\lambda=1$ дорівнює 1.

Отже, сумарно маємо 3 лінійно незалежні власні вектори, це означає, що матриця діагоналізується. За визначенням, мінімальний многочлен містить кожне власне значення у степені, що дорівнює максимальному розміру жорданової клітки

для цього значення. Оскільки для $\lambda=3$ найбільший жордановий блок має розмір 1 (бо геометрична кратність дорівнює алгебраїчній дорівнює 2), множник $(\lambda-3)$ входить у мінімальний многочлен у першому степені. Для $\lambda=1$ - теж у першому степені.

Отже,

$$m_B(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

2.5 Теорема Гамільтона–Келі

У сучасній лінійній алгебрі теорема Гамільтона–Келі є одним із фундаментальних результатів, що встановлює глибокий зв'язок між лінійним оператором та його спектральними характеристиками. Теорема стверджує, що кожна квадратна матриця задовольняє власний характеристичний многочлен, тобто підстановка матриці у свій характеристичний поліном приводить до нульової матриці. Це твердження лежить в основі багатьох важливих методів у теорії матриць: побудови функцій від оператора, аналізу його структури, обчислень степенів матриць і розв'язання систем лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Перед формулюванням самої теореми доцільно розглянути низку ключових понять — многочлени від оператора, характеристичний та мінімальний многочлени — оскільки саме вони задають теоретичне підґрунтя для розуміння змісту та наслідків теореми Гамільтона–Келі. Розгляд многочленів від матриці є природним кроком у вивченні алгебраїчних властивостей лінійних операторів. Якщо задано многочлен

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

то відповідний многочлен від матриці $A \in M_n(R)$ визначається як

$$p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Таке означення дозволяє проводити з матрицями операції, аналогічні до операцій над поліномами від звичайної змінної, що значно розширює

інструментарій роботи з лінійними операторами. Многочлени від матриці застосовують для обчислення функцій від оператора, моделювання динамічних систем, розв'язування рекурентних рівнянь тощо. [10]

Цей підхід створює передумови для визначення характеристичного та мінімального многочленів, які фактично описують алгебраїчну поведінку матриці і відіграють ключову роль у формулюванні теореми Гамільтона–Келі.

Теорема ґрунтується на понятті характеристичного многочлена, який визначається як:

$$\chi_A(t) = \det(A - tE),$$

де A — матриця оператора $\mathcal{A}$, а E — одинична матриця. Характеристичний многочлен завжди має степінь n , де n - вимірність простору.

Кожен лінійний оператор $\mathcal{A}$ (або його матриця A) є коренем свого власного характеристичного многочлена.

Іншими словами, якщо підставити оператор $\mathcal{A}$ у $\chi_A(t)$, отримаємо нульовий оператор:

$$\chi_A(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

Якщо характеристичний многочлен записати у вигляді:

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$

підстановка дає рівність:

$$(-1)^n \mathcal{A}^n + a_{n-1} \mathcal{A}^{n-1} + \dots + a_1 \mathcal{A} + a_0 \mathcal{E} = \mathcal{O}.$$

Теорема гарантує, що характеристичний многочлен завжди є анулюючим многочленом для оператора A . З властивості подільності випливає, що мінімальний многочлен $\mu_A(t)$ ділить $\chi_A(t)$, що обмежує його степінь числом n . Це створює фундамент для аналізу спектральних властивостей оператора та структури його жорданових блоків. [11]

2.5.1 Практичне застосування

Найбільша практична цінність теореми Гамільтона–Келі полягає у здатності знижувати степені матриці, що важливо для обчислень у прикладних задачах.

Теорема дозволяє виразити A^n через нижчі степені до A^{n-1} та тотожний оператор $\mathcal{E}$:

$$(-1)^n A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0\mathcal{E}.$$

Помноживши обидві частини на A , можна обчислити A^{n+1} і будь-яку вищу степінь A^k ($k \geq n$) як лінійну комбінацію $\{\mathcal{E}, A, \dots, A^{n-1}\}$. Це суттєво спрощує розрахунки матричних функцій, необхідних, наприклад, для розв'язання систем диференціальних рівнянь.

Якщо матриця A невинроджена ($\det(A) = a_0 \neq 0$), теорема дає ефективний спосіб обчислення оберненої матриці. Від рівності

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0E = 0$$

виділяємо член із a_0E :

$$a_0E = -[(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A].$$

Ділимо на a_0 і множимо на A^{-1} :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} [(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1E].$$

Це дозволяє обчислити обернену матрицю без використання традиційних алгебраїчних доповнень, лише знаючи коефіцієнти характеристичного многочлена та степені самої матриці. [12]

Приклад

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Це верхня трикутна матриця з діагоналлю, що складається з трьох двійок, тому її характеристичний многочлен має вигляд:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8.$$

Згідно теореми Гамільтона–Келі маємо:

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0.$$

Нехай $N := A - 2I$

Тоді N - нільпотентна матриця з одиницями над діагоналлю:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Оскільки $A = 2I + N$, маємо $(A - 2I)^3 = 0$. Отже, многочлен $(\lambda - 2)^3$ анулює матрицю A , тобто $\chi_A(A) = 0$.

З рівності

$$A^3 = 6A^2 - 12A + 8I$$

маємо, що будь-яку степінь A^k при $k \geq 3$ можна звести до лінійної комбінації матриць I, A, A^2 .

Формула для оберненої матриці. Оскільки $\det A = 2^3 = 8 \neq 0$ це означає, що матриця A - невироджена. Візьмемо характеристичний многочлен і підставимо в нього матрицю A :

$$\chi_A(A) = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на A (домножимо на A^{-1}):

$$A^2 - 6A + 12I - 8A^{-1} = 0.$$

Звідси:

$$-8A^{-1} = -A^2 + 6A - 12I,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} (A^2 - 6A + 12I).$$

Отже, обернена матриця A^{-1} виражається у вигляді полінома від A , що повністю узгоджується з методом Гамільтона–Келі.

РОЗДІЛ 3 ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

3.1 Лінійні оператори як моделі геометричних перетворень

Поняття лінійного оператора є одним із центральних у лінійній алгебрі та функціональному аналізі. Оскільки будь-який лінійний оператор можна представити матрицею у вибраному базисі, його властивості мають фундаментальне значення не лише для абстрактної теорії, але й для широкого кола прикладних задач. У цьому розділі розглянемо найбільш поширені сфери застосування лінійних операторів, починаючи з геометричних перетворень і завершуючи аналізом динамічних систем та задачами фізики і техніки.

Одним із найбільш інтуїтивних та найбільш поширених застосувань лінійних операторів є опис геометричних перетворень у векторних просторах. Багато класичних перетворень у геометрії — такі як повороти, відображення, розтягнення та стискання — є саме лінійними операціями. [13]

Зокрема, у просторі R^2 поворот на кут φ описується оператором з матрицею

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а симетрія відносно прямої або осі координат реалізується оператором, матриця якого має власні значення 1 та -1 .

Така інтерпретація дозволяє досліджувати геометричні властивості перетворення за допомогою спектра оператора, його мінімального многочлена, а також жорданової форми. Наприклад, відсутність уявних власних значень у матриці повороту означає, що у дійсному базисі вона завжди має блокову структуру.

3.2 Лінійні оператори в розв’язанні систем лінійних рівнянь

Будь-яку систему лінійних рівнянь можна інтерпретувати як задачу знаходження прообразу вектора відносно лінійного оператора. Нехай система має вигляд:

$$Ax = b,$$

де A — матриця лінійного оператора. Властивості оператора (інверсність, ранг, ядро, образ) визначають існування та кількість розв’язків.

Якщо оператор є невиродженим, тобто $\det A \neq 0$, існує єдиний розв’язок:

$$x = A^{-1}b.$$

У випадку виродженості аналіз ядра оператора дозволяє встановити, чи система несумісна, чи має нескінченно багато розв’язків. Лінійні оператори забезпечують формальний апарат для вивчення таких систем, а також дозволяють ефективно використовувати алгоритми зниження степенів матриці, зокрема через теорему Гамільтона–Келі.

Спектр лінійного оператора (множина його власних значень) відіграє ключову роль у багатьох прикладних задачах. Власні значення характеризують внутрішню структуру оператора, а власні вектори описують “сталі напрямки” дії перетворення. [14]

Спектральний аналіз широко застосовується у:

- квантовій механіці, де власні значення операторів спостережуваних відповідають можливим результатам вимірювання;
- динаміці систем, де власні значення матриці системи визначають тип рівноваги (стійка, нестійка, центр);
- обробці сигналів, де аналіз власних мод дозволяє здійснювати розклади сигналів і знаходити домінуючі компоненти;
- методах машинного навчання, зокрема PCA, де власні значення ковариаційної матриці визначають головні напрямки варіації даних.

Таким чином, спектр оператора є одним із найпотужніших інструментів у прикладній математиці.

3.3 Лінійні оператори в диференціальних рівняннях

Одна з найглибших сфер застосування лінійних операторів — розв’язання систем лінійних диференціальних рівнянь. Систему:

$$x'(t) = Ax(t)$$

можна розглядати як дію оператора A на вектор-функцію $x(t)$.

Завдяки теоремі Гамільтона–Келі будь-який степінь A^k (для $k \geq n$) можна звести до лінійної комбінації нижчих степенів. Це дозволяє будувати матричну експоненту

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

більш ефективно — через вираження високих степенів.

У випадку, коли матриця приводиться до жорданової нормальної форми, розв’язок системи може бути записаний у замкненому вигляді, що дає повний опис поведінки динамічної системи.

3.4 Фізичні та інженерні застосування

У фізиці лінійні оператори використовуються для моделювання широкого спектра явищ — від обертання твердих тіл до хвильових процесів. У квантовій механіці оператори спостережуваних, такі як гамільтоніан або оператор імпульсу, визначають закони розвитку фізичної системи.

В інженерії лінійні оператори використовують у:

- теорії керування, де матриця стану описує поведінку системи;
- аналітичній механіці, де оператори відповідають перетворенням координат;
- електротехніці, зокрема при аналізі ланцюгів у частотній області;
- цифровій обробці сигналів, де лінійні фільтри моделюються лінійними операторами на просторах функцій або векторів.

У цих застосуваннях ключову роль відіграють спектральні характеристики оператора, оскільки вони визначають резонанси, стійкість і поведінку систем.

3.5 Лінійні оператори в штучному інтелекті і нейронних мережах

У сучасних моделях штучного інтелекту лінійні оператори відіграють ключову роль, адже майже всі обчислення в нейронних мережах можна розглядати як послідовність лінійних перетворень, до яких додаються прості нелінійні функції активації. Матриці ваг кожного шару — це і є конкретні представлення лінійних операторів у скінченновимірних просторах ознак.

Лінійний шар як матричний оператор

У найпростішому випадку повнозв'язаний шар мережі є відображенням

$$x \mapsto Wx + b,$$

де W — матриця ваг, частина Wx — це чистий лінійний оператор, який перетворює вхідний простір у простір наступного шару. Таке перетворення змінює базис ознак,

стискає або розтягує простір, зміщує напрямки головних компонент даних, може підсилювати або приглушувати певні напрямки. Усе це — типові властивості лінійних операторів у лінійній алгебрі.

Лінійні оператори у згорткових мережах. У CNN згортка теж є лінійним оператором. Хоча вона подається у вигляді фільтра, математично це множення на велику, специфічну матрицю (часто розріджену й структуровану). Її лінійність дозволяє:

- розкласти згортку у спектральні компоненти (через перетворення Фур'є),
- прискорювати обчислення,
- аналізувати стабільність мережі через спектр згорткових операторів.

Лінійні оператори у трансформерах. Трансформер — одна з найуспішніших архітектур. Його центральний механізм, **self-attention**, складається з трьох матричних операторів:

$$Q = XW_Q, \quad K = XW_K, \quad V = XW_V.$$

Фактично модель будує кілька різних лінійних операторів над одним і тим самим простором ознак.

Self-attention працює так само завдяки властивостям лінійних операторів:

- перехід у інший базис (через W_Q , W_K , W_V),
- проєкції,
- комбінування та зважування векторів.

Трансформер можна розглядати як складну композицію лінійних операторів, що працюють над однією множиною векторів.

ВИСНОВКИ

Поняття власних значень і власних векторів є одним із фундаментальних інструментів сучасної лінійної алгебри та теорії лінійних операторів. Їхня важливість зумовлена тим, що вони дозволяють розкрити внутрішню структуру лінійного перетворення, показуючи, як саме оператор діє на певні напрями у векторному просторі. Якщо для деякого ненульового вектора векторний образ під дією оператора відрізняється від початкового лише множителем, такий вектор є власним, а сам множник — власним значенням. Таким чином, власні значення характеризують масштабування, яке оператор здійснює у відповідних напрямках, тоді як власні вектори визначають ці напрями у просторі.

Знання власних значень і власних векторів дає змогу суттєво спростити дослідження властивостей оператора.

Одним із головних застосувань є діагоналізація — представлення оператора в такому базисі, де його матриця набуває діагонального вигляду. Це забезпечує значне полегшення математичних операцій, зокрема піднесення оператора до степеня, аналіз його спектральних властивостей, розв'язання систем диференціальних рівнянь, ітераційні процеси тощо. Крім того, спектральний аналіз дозволяє описати поведінку динамічних систем, стабільність процесів, структуру механічних коливань і навіть особливості квантових систем.

Важливо також відзначити, що власні значення пов'язані зі структурою матриці лінійного оператора через характеристичний многочлен. Корені цього многочлена формують спектр оператора — ключову характеристику, що відображає глибинні властивості перетворення. Власні значення можуть бути як дійсними, так і комплексними, що суттєво розширює можливості моделювання різних типів систем.

Таким чином, власні значення та власні вектори не лише дають інструмент для математичного опису лінійних операторів, але й мають фундаментальне значення у численних застосуваннях: від фізики та інженерії до комп'ютерних наук, статистики, економіки й сучасного машинного навчання. Їх вивчення дозволяє глибше зрозуміти природу лінійних структур та процесів, відкриваючи можливість ефективно аналізувати, спрощувати та розв'язувати складні задачі. Отже, оволодіння цими поняттями є невід'ємною складовою формування математичної культури та професійної компетентності майбутнього фахівця.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрійчук В.І. Забавський Б.В. Лінійна алгебра: навч. посіб. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2008. 226 с.
2. Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховничий О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. Конспект лекцій. К.: НТУУ «КПІ», 2014. 302 с.
3. Безущак О.О. Ганюшкін О.Г., Кочубінська Є.А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. 224 с.
4. Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. К.: Києво-Могилянська академія, 2010. 176 с.
5. Van der Waerden B. L. Modern Algebra. Vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1949. 367 p.
6. Волошина Т.В. Лінійна алгебра : навч. посіб. Луцьк: Вежа-Друк, 2021, 312 с.
7. Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. для студ. спец. «Інформатика». Луцьк: РВВ ВНУ імені Лесі Українки, 2010. 116 с.

8. Калужнін Л.А. Вишенський В.А., Шуб Ц.О. Лінійні простори: підручник. К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. 384 с.
9. Мазорчук В.С. Жорданова нормальна форма. К.: Видавництво Київського університету, 1998. 123 с.
10. Панасенко О.Б. Лекції з лінійної алгебри: електрон. навч. посіб. Вінниця, 2015. 273 с.
11. Романів О.М. Лінійна алгебра: навч. посіб. Львів: І.Е. Чижигов, 2014. 279 с.
12. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Львів: Бескид Біт, 2002. 256 с.
13. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підр. Львів: Бескид Біт, 2002. 262 с.
14. Чарін В.С. Лінійна алгебра : навч. посіб. К.: Техніка, 2004. 416 с.

АНОТАЦІЯ

Макашов А. М. Лінійні оператори, їх властивості та застосування. Магістерська робота для здобуття ступеня магістра за спеціальністю 111 «Математика». Волинський національний університет імені Лесі Українки. Кафедра математичного аналізу та статистики. Луцьк, 2025. 47 с..

Магістерська робота присвячена комплексному дослідженню теоретичних основ алгебри лінійних операторів, її структурних властивостей та ключових напрямів застосування в сучасній математиці. У роботі детально розглянуто лінійні оператори у скінченновимірних векторних просторах, їх матричні подання, досліджено структуру, ідемпотентні, нільпотентні та оборотні елементи, особливості алгебраїчних структур, пов'язаних із множиною всіх лінійних відображень, а також розглянуто різні застосування лінійних операторів в різних розділах математики та за її межами.

Ключові слова: лінійний оператор, алгебра операторів, власні значення, мінімальний многочлен, діагоналізація, матриця оператора, самоспряжений оператор.

ANNOTATION

Makashov A. M. Linear Operators, Their Properties and Applications. Master's Thesis for obtaining the degree of Master in specialty 111 "Mathematics". Lesya Ukrainka Volyn National University. Department of Mathematical Analysis and Statistics. Lutsk, 2025. 47 p.

The master's thesis is devoted to a comprehensive study of the theoretical foundations of the algebra of linear operators, its structural properties, and key areas of application in modern mathematics. The work provides a detailed examination of linear operators in finite-dimensional vector spaces, their matrix representations, the structure of operator algebras, idempotent, nilpotent, and invertible elements, as well as the specific features of algebraic structures related to the set of all linear mappings. Various applications of linear operators in different fields of mathematics and beyond are also considered.

Keywords: linear operator, operator algebra, characteristic value, minimal polynomial, diagonalization, operator matrix, self-adjoint operator.