

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

МАРЧУК ЄВА ВРЕЖІВНА

**ЗАСТОСУВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА ДЛЯ
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ**

Спеціальність: 111 Математика
Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

**ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК ОКСАНА
ВОЛОДИМИРІВНА,**

кандидат фізико-математичних наук,
доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №_____
засідання кафедри математичного
аналізу та статистики
від_____ 202__ р.
Завідувач кафедри

(підпис)

ПІБ

ЛУЦЬК-2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1	
ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА.....	6
1.1. Генезис та еволюція концепції виробничої функції в економічній теорії.....	6
1.2. Загальний вигляд функції виробництва та сфера її застосувань.....	7
1.3. Властивості функції виробництва.....	13
1.4. Параметри функції виробництва.....	16
1.5. Математичне доведення закону спадної граничної продуктивності.....	20
Висновки до розділу 1.....	24
РОЗДІЛ 2	
ТЕОРЕТИКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА.....	25
2.1. Аналітичні властивості функції Кобба-Дугласа: похідні та інтеграли.....	25
2. 2. Класифікація функцій виробництва за еластичністю заміщення	26
2.3. Граничний продукт (Маржинальний продукт).....	28
2.4. Застосування функції виробництва Кобба-Дугласа.....	29
2.5. Двофакторна функція виробництва Кобба-Дугласа.....	31
2.6. Динамічна функція Кобба-Дугласа (змінні параметри).....	41
Висновки до розділу 2.....	42
РОЗДІЛ 3	
ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЕМПІРИЧНА ОЦІНКА ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА..	43
3.1. Мінімізація витрат підприємства методом множників Лагранжа.....	43
3.2. Економетричний аналіз виробничої функції Кобба-Дугласа на прикладі ТОВ "ВІЛІЯ"	46
Висновки до розділу 3.....	55
ВИСНОВКИ.....	56
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	58

ВСТУП

У сучасному світі, де виробництво та економіка постійно змінюються, аналіз виробничих процесів та ефективне використання ресурсів стає ключовим елементом успіху для підприємств та організацій. Одним із математичних інструментів, який дозволяє досліджувати та оптимізувати ці процеси, є функція Кобба-Дугласа (Cobb-Douglas).

Функція Кобба-Дугласа є абстрактною математичною моделлю, що відображає залежності у виробничому процесі, аналізуючи співвідношення між капітальними інвестиціями і працею та рівнем виробництва.

Метою магістерської роботи є математичне дослідження функції Кобба-Дугласа та її застосування до аналізу виробничих процесів. У цьому контексті ми будемо досліджувати математичні характеристики цієї функції, її властивості, а також аналізувати вплив капітальних інвестицій та праці на результати виробництва.

Актуальність дослідження полягає в тому, що в сучасному світі ефективність виробництва та оптимізація використання ресурсів стають дедалі важливішим завданням як для підприємств, так і для економічних систем у цілому. Важливо зазначити, що такий аналіз не обмежується лише сферою економіки, а має широке застосування в математиці, особливо в задачах оптимізації.

Зокрема, функція Кобба-Дугласа, як математична модель, відображає ефективність використання капіталу та праці у виробничому процесі. Вона дозволяє визначити, як зміни інвестицій та кількості працівників впливають на виробництво. Тому аналіз функції Кобба-Дугласа допомагає визначити оптимальні пропорції ресурсів для досягнення максимальних результатів.

Беручи до уваги швидкі зміни в технологічному та економічному середовищі, а також зростаючу конкуренцію на ринках, розуміння та використання

математичних інструментів, таких як функція Кобба-Дугласа, стає важливим для забезпечення стабільності та ефективності виробництва і бізнесу в цілому.

Тому це дослідження є актуальним у контексті безперервних змін у виробництві та економіці і має потенціал для значного внеску в розуміння та використання математичних моделей для оптимізації виробництва.

Предмет дослідження: Методи математичного моделювання, прийоми оптимізації (метод Лагранжа) та економетричні підходи до аналізу ефективності використання факторів виробництва.

Об'єкт дослідження: функція Кобба-Дугласа як математична модель, що слугує для аналізу та оптимізації виробництва.

Мета дослідження: аналіз властивостей та застосувань функції Кобба-Дугласа, а також емпірична оцінка та прогнозування виробничих процесів на прикладі конкретного агропідприємства. Дослідження має на меті встановити математичні залежності між капітальними інвестиціями і працею та рівнем виробництва, а також аналіз впливу цих факторів на результати виробництва.

Завдання дослідження:

- Проаналізувати математичні основи функції Кобба-Дугласа, її ключові властивості (еластичність, однорідність, MRTS) та графічне представлення (ізокванти).
- Дослідити застосування функції для розв'язання задачі мінімізації витрат при заданому обсязі виробництва, використовуючи метод невизначених множників Лагранжа.
- Здійснити економетричну оцінку параметрів виробничої функції (α та β) на основі фінансових даних ТОВ "ВІЛІЯ" за допомогою методу найменших квадратів (МНК).

Методи дослідження:

- Методи математичного аналізу та диференціального числення для виведення властивостей функції, граничних продуктів та еластичностей.
- Метод Лагранжа для аналітичного розв'язання задачі умовної оптимізації витрат.
- Метод найменших квадратів (МНК) для оцінки параметрів логарифмічно лінеаризованої моделі.
- Методи математичної статистики для перевірки статистичної значущості (t-критерій Стьюдента) та адекватності моделі (F-критерій Фішера).

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

1.1. Генезис та еволюція концепції виробничої функції в економічній теорії.

При дослідженні ефективності роботи виробничого підприємства використовують поняття субституційної виробничої функції [1]. Вона демонструє функціональний зв'язок між обсягом ефективно використаних факторів виробництва (працею та майновим капіталом) і досягнутим за їх допомогою випуском продукції, враховуючи існуючі технічні та організаційні знання. Ця функція відображає кількість випущеної продукції, показуючи можливість збільшення виробництва шляхом зростання кількісної характеристики одного з факторів, за умови, що інший залишається незмінним. В іншому варіанті, виробництво може залишатися на тому ж рівні за різних комбінацій кількісних характеристик праці та майнового капіталу. Субституційна виробнича функція має в загальному випадку наступний вигляд:

$$Y = Y(K, L); Y'_x > 0; Y''_{xx} < 0 \quad (1)$$

де K – число виробничого капіталу; L – число виробничих трудових годин або, іншими словами, число виробничих одиниць людського капіталу. Найбільш простою є двохфакторна модель виробничої функції Кобба-Дугласа, за допомогою якої розкривається взаємозв'язок праці (L) і капіталу (K). Ці фактори взаємозамінні і взаємодоповнювальні. [2]

Функція виробництва типу Кобба-Дугласа є однією з ключових моделей у мікро- та макроекономічному аналізі, розробленою для опису і розуміння

виробничих процесів та витрат у різних галузях господарства. Генеза цієї функції пов'язана з роботою двох видатних економістів — Френсіса Кобба (Francis Cobb) і Чарльза Дугласа (Charles Douglas).

Френсіс Кобб та Чарльз Дуглас були американськими економістами, які у 20-х роках XX століття спільно досліджували виробництво та витрати у різних галузях промисловості. Вони розробили цю функцію у співвідношенні до обсягу виробництва, інвестованого капіталу та праці. Головна ідея полягала в тому, щоб знайти функціональний вираз, який відображав би, як зміна кількості інвестованого капіталу та праці впливає на виробництво.

Кобб і Дуглас використали емпіричні дані та статистику для побудови цієї функції і дійшли висновку, що обсяг виробництва є добутком капіталу, піднесеного до степеня α , та праці, піднесеної до степеня β . Ця модель виявилася дуже корисною для аналізу виробництва та витрат у різних сферах господарства і досі є однією з основних моделей, що використовуються в мікроекономіці та економічному аналізі для розуміння виробничих процесів і прийняття рішень щодо управління ресурсами [3].

1.2. Загальний вигляд функції виробництва та сфера її застосувань

Як уже згадувалося раніше, функція виробництва є ключовим інструментом у теорії економіки, який використовується для математичного опису виробничих процесів. Вона визначає залежність між використанням виробничих ресурсів та результатами виробництва.

Формально функція виробництва виражається математичним співвідношенням між кількістю вироблених благ (Q) та витратами двох основних факторів виробництва:

- Капітал (K): охоплює інвестиції у фізичні та фінансові ресурси, такі як машини, обладнання, будівлі тощо, призначені для використання у

виробництві.

- Праця (L): це кількість робочої сили або людино-годин, задіяних у виробництві.

Функція виробництва Кобба-Дугласа у класичному розумінні має такий вигляд:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (2)$$

де:

- Y — величина обсягу виробництва.
- A — параметр функції, який показує обсяг виробництва, отриманий при одиничних вкладеннях L та K . Його часто називають загальною факторною продуктивністю (Total Factor Productivity, TFP) або технологічним параметром.
- L — робоча сила/вкладення праці. (*Вкладення* — це цілеспрямоване використання факторів виробництва у певному виробничому процесі, пов'язане з діяльністю підприємства.)
- K — кількість споживаного капіталу (вкладення капіталу).
- α і β — параметри, які відображають еластичність виробництва щодо використання робочої сили та капіталу відповідно. Параметр α відображає значущість праці, а параметр β — значущість капіталу у виробничому процесі.

або

$$f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad (3)$$

Тут значення функції $f(x, y)$ відображає кількість випущеної продукції, величини x і y є кількісними показниками використаних при виробництві ресурсів обох видів, наприклад, по витратам капіталу та праці, що відображають вклад праці і капіталу у виготовлення продукції, α і β — безрозмірні показники

еластичності випуску продукції по затратам кожного з видів ресурсів відповідно, A – деяка стала, що переводить одиниці виміру праці і капіталу в одиниці виміру продукту.

Вибір параметрів α і β здійснюється методами регресивного аналізу. Між цими параметрами є певний зв'язок. Їх сума порівнюється з одиницею. Важлива властивість коефіцієнтів еластичності ресурсів функції Кобба-Дугласа: сума коефіцієнтів еластичності дорівнює показнику ефекту розширення масштабу. Якщо α і β в сумі перевищують одиницю, то виробнича функція має зростаючий ефект від масштабу виробництва (це означає, що якщо величини x і y збільшуються в деякій пропорції, то величина $f(x, y)$ зростає в більшій пропорції). Якщо ж їх сума дорівнює одиниці, то говорять про постійний ефект від масштабу виробництва (величина (x, y) збільшується в тій же пропорції, що і величини x і y), або рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. У випадку, коли сума параметрів α і β менша, ніж одиниця, то має місце зменшувальний ефект від масштабу виробництва (величина $f(x, y)$ збільшується в меншій пропорції, ніж величини x і y), або з розширенням масштабів виробництва середні витрати ресурсів в розрахунку на одиницю продукції зменшуються. Зазначимо, що ці властивості не залежать від числових значень K і L і зберігаються в кожній точці виробничої функції, тобто коефіцієнти α і β постійні, які не залежать від об'єму факторів K і L . [4]

Коефіцієнти еластичності мають велике значення для економічного аналізу. Вони характеризують відсоток приросту обсягу випуску продукції при збільшенні витрат одного з ресурсів на 1% (за умови незмінності іншого). Таким чином, збільшення витрат капіталу на 1% призводить до зростання випуску на α відсотків, а збільшення витрат праці на 1% — на β відсотків. Наприклад, якщо $\alpha = 0,25$, то зростання витрат капіталу на 1% збільшує обсяг виробництва на 0,25%. Зазвичай

припускають, що обидві величини, α і β , знаходяться в діапазоні між нулем та одиницею ($0 < \alpha, \beta < 1$). Вони мають бути додатними, оскільки збільшення виробничих факторів повинно викликати зростання випуску. Водночас вони зазвичай менші за одиницю, що відображає дію закону спадної граничної віддачі: при нарощуванні лише одного фактора (коли інші залишаються постійними) приріст випуску продукції сповільнюється.

Еластичність випуску продукції по капіталу і праці дорівнює відповідно α та β , оскільки має місце співвідношення

$$\frac{dY/dK}{Y/K} = \frac{A(\alpha[K^{\alpha-1}])L^{\beta}}{AK^{\alpha-1}L^{\beta}} = \alpha \quad (4)$$

Аналогічним чином легко показати, що $\frac{dY/dL}{Y/L}$ дорівнює β .

В відповідності з припущенням про конкурентність ринку фактори виробництва і мають інтерпретацію як прогнозовані долі прибутку, який отримується відповідно за рахунок капіталу і праці. Якщо ринок праці має конкурентний характер, то ставка заробітної плати (w) дорівнюватиме граничному продукту праці (dY/dL):

$$w = \frac{dY}{dL} = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1} = \frac{\beta Y}{L} \quad (5)$$

Таким чином, загальна сума заробітної плати (wL) дорівнюватиме Y , а доля праці в загальному випуску продукції (wL/Y) складе постійну величину. Аналогічно, норма прибутку може бути виражена через dY/dK :

$$\rho = \frac{dY}{dK} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} = \frac{\alpha Y}{K} \quad (6)$$

і, як наслідок, загальний прибуток (K) дорівнюватиме αY , а доля прибутку буде постійною величиною α . [4]

Отже, граничний продукт кожного фактора виробництва визначається як добуток його еластичності та середнього продукту цього фактора.

Також для функції виробництва Кобба-Дугласа у загальному вигляді $Q = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, ключовою математичною властивістю є її однорідність.

Означення: Функція $f(K, L)$ називається однорідною функцією k -го ступеня, якщо при пропорційній зміні обох факторів виробництва (K і L) в t разів, обсяг виробництва змінюється в t^k разів.

Цю властивість формально перевіряють за формулою:

$$f(tK, tL) = t^k f(K, L) \quad (7)$$

Для функції Кобба-Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ ступінь однорідності k дорівнює сумі її показників степеня $(\alpha + \beta)$.

Доведення однорідності:

Підставимо tK та tL у функцію:

$$f(tK, tL) = A(tK)^{\alpha}(tL)^{\beta}$$

Винесемо t зі степенів:

$$f(tK, tL) = A(t^{\alpha}K^{\alpha})(t^{\beta}L^{\beta})$$

Об'єднаємо множники t :

$$f(tK, tL) = t^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta})$$

Оскільки $Q = (AK^{\alpha}L^{\beta})$, отримуємо:

$$f(tK, tL) = t^{\alpha+\beta}Q$$

або

$$f(tK, tL) = t^{\alpha+\beta}(K, L)$$

Це доводить, що функція Кобба-Дугласа є однорідною функцією степеня $t = \alpha + \beta$.

Економічна інтерпретація: Сума $\alpha + \beta$ відображає віддачу від масштабу (або ефект масштабу).

- Якщо $\alpha + \beta = 1$, віддача є постійною (класична модель).
- Якщо $\alpha + \beta > 1$, віддача є зростаючою.
- Якщо $\alpha + \beta < 1$, віддача є спадною.

На практиці виявилось, що припущення про лінійну однорідність рідко виконується. Тому було запропоновано більш загальну функцію виробництва [5].

У загальному розумінні функцію виробництва можна виразити так:

$$Q = f(K, L) \quad (8)$$

Ця функція визначає, як зміни в кількості інвестованого капіталу (K) і праці (L) впливають на кількість виробництва (Q). Іншими словами, функція виробництва визначає, скільки одиниць продукції можна виробити, використовуючи конкретні ресурси.

Аналізуючи функцію виробництва, можна досліджувати оптимальні пропорції між капіталом і працею для досягнення максимальних результатів виробництва. Характеристики цієї функції, такі як однорідність ресурсів та спадна віддача від масштабу, відіграють суттєву роль у визначенні оптимальних стратегій виробництва та управління ресурсами [6].

Функція виробництва відіграє ключову роль у розумінні та оптимізації виробничих процесів і має велике значення для економіки та бізнесу в цілому. Ось декілька ключових аспектів, які підкреслюють важливість цієї функції:

- Планування та стратегія управління: Функція виробництва допомагає фірмам та організаціям визначати оптимальні пропорції розподілу ресурсів (капіталу та праці) для досягнення максимальної продуктивності та рентабельності. Це дає можливість планувати дії та розробляти стратегії виробництва, спрямовані на досягнення бажаних результатів.
- Ефективність виробництва: Розуміння функції виробництва допомагає визначити, наскільки ефективно використовуються обмежені ресурси. Це

дозволяє знизити витрати виробництва та оптимізувати процеси, що є важливим для підвищення конкурентоспроможності.

- **Прийняття рішень:** Керівники та менеджери приймають рішення щодо розширення виробництва, інвестицій у нові ресурси, змін у виробничих процесах тощо, на основі аналізу функції виробництва. Це допомагає приймати обґрунтовані рішення, спрямовані на збільшення рентабельності та стабільності компанії.
- **Моделювання та прогнозування:** Функція виробництва є суттєвим елементом у математичних моделях економіки та бізнесу. Вона дозволяє прогнозувати результати виробництва за різних умов та сценаріїв розподілу ресурсів.
- **Дослідження:** Вивчення функції виробництва має значення для наукових досліджень, особливо у сферах економіки, математики та оптимізації. Це відкриває можливості для розвитку нових теоретичних підходів та методик дослідження.

Усі ці аспекти доводять, що функція виробництва є необхідним інструментом для розуміння, планування та управління виробничими процесами, що має суттєве значення для досягнення успіху в бізнесі та економіці в цілому.

1.3. Властивості функції виробництва

Функція виробництва типу Кобба-Дугласа має кілька ключових властивостей, які роблять її суттєвим інструментом для аналізу виробництва та витрат в економіці:

- **Постійна еластичність:** Однією з головних особливостей функції Кобба-Дугласа є її здатність враховувати неоднорідність впливу ресурсів. Це означає, що ця функція дозволяє капіталу та праці мати різний вплив на обсяг виробництва. Параметри α і β визначають цю неоднорідність і впливають на те, який ресурс має більший внесок у виробництво.

- **Монотонність:** Функція виробництва Кобба-Дугласа завжди зростає монотонно. Це означає, що збільшення кількості капіталу та праці призводить до збільшення обсягу виробництва (L та K). Відсутність точок спаду в цій функції дозволяє використовувати її для аналізу та прогнозування виробництва.
- **Узгодженість зі зростанням/Відповідність зростанню:** Функція виробництва Кобба-Дугласа узгоджується зі зростанням. Це означає, що збільшення інвестицій як у капітал, так і в працю призводить до збільшення обсягу виробництва. Ця властивість особливо важлива при дослідженні економічного зростання. [2].

Ці властивості функції виробництва Кобба-Дугласа роблять її потужним інструментом для аналізу виробництва, витрат та управління ресурсами в економіці. Вона дозволяє враховувати неоднорідність ресурсів та вплив капіталу і праці на виробництво в різних галузях господарства та в різні періоди часу.

Функція виробництва типу Кобба-Дугласа є однією з багатьох можливих функцій, що використовуються для моделювання виробництва та аналізу впливу ресурсів на обсяг випуску. Порівняння її з іншими типами функцій є важливим для розуміння її переваг та обмежень.

- **Лінійна функція виробництва:** характеризується лінійною пропорційністю між ресурсами та виробництвом. Порівняно з функцією Кобба-Дугласа, лінійна функція дозволяє визначити постійний рівень виробництва залежно від кількості ресурсів і не враховує неоднорідності впливу цих ресурсів. (Наприклад, $Q = aL + bK$).
- **Логарифмічна функція виробництва:** моделює зростання виробництва як логарифмічну функцію кількості ресурсів. Порівняно з функцією Кобба-Дугласа, вона може призводити до іншого типу залежності між

ресурсами та виробництвом [7]. (Часто функція Кобба-Дугласа перетворюється на лінійну шляхом логарифмування:
 $\ln Q = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K$).



Рис. 1.1 Закон спадної граничної продуктивності

При побудові виробничої функції Кобба-Дугласа параметри A , α , β можна оцінити за допомогою лінійного регресивного аналізу методом найменших квадратів (МНК):

1) Виробничу функцію Кобба–Дугласа приводять до лінійного виду шляхом логарифмування

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L) \quad (9)$$

2) При використанні МНК мета полягає в мінімізації суми квадратичних відхилень (SSD) між величинами, що спостерігаються $\ln(Y_i)$, ($i=1 \dots N$; N – кількість спостережень) і відповідними оцінками $\ln(\hat{A})$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$.

$$SSD = \sum_{i=1}^N (\ln(y_1) - \ln(\hat{Y}_i))^2 = \sum_{i=1}^N (\ln(Y_i) - \ln(\hat{A}) - \hat{\alpha} \ln(K_i) -$$

$$- \hat{\beta} \ln(L_i))^2 \quad (10)$$

Отримаємо вираз для максимального значення функції прибутку двоохресурсного підприємства. Він дозволить оцінити значення параметрів, при яких значення функції прибутку буде максимальним. [2]

1.4. Параметри функції виробництва

Функція виробництва може набувати різних математичних форм та виразів залежно від конкретних умов та характеристик виробничого процесу. Одним із ключових аспектів, що впливають на поведінку функції виробництва, є її параметри.

Огляд головних параметрів функції виробництва Кобба-Дугласа та їхній вплив на результати:

- Параметр α : Цей параметр визначає еластичність виробництва відносно капіталу. Іншими словами, α показує, як збільшення інвестованого капіталу (K) впливає на збільшення обсягу виробництва (Q).
- Параметр β : Цей параметр визначає еластичність виробництва відносно праці. Якщо $\beta > 1$ (що рідко зустрічається в базових моделях), це означає, що збільшення кількості вкладеної праці (L) призводить до більшого збільшення обсягу виробництва. Величина β вказує на вплив праці на результати виробництва.
- Сума $\alpha + \beta$ (Ефект масштабу): Сума параметрів α і β є важливою характеристикою функції виробництва. Параметри α та β також інформують про ефекти масштабу виробництва:
 - Постійна віддача від масштабу, коли $\alpha + \beta = 1$.
 - Зростаюча віддача від масштабу, коли $\alpha + \beta > 1$.
 - Спадна віддача від масштабу, коли $\alpha + \beta < 1$.

- Інші параметри: Залежно від конкретної моделі та характеру виробничого процесу, функція виробництва може містити інші параметри, які впливають на її форму та властивості. Інші фактори можуть бути враховані у функції для більш точного моделювання виробництва.

Розуміння цих параметрів дозволяє аналізувати функцію виробництва, визначати її характеристики та застосовувати її у практичних ситуаціях. Вони важливі для визначення оптимальних стратегій виробництва та розв'язання економічних проблем у бізнесі та науці.

Параметр A у функції Кобба-Дугласа є технологічною константою, яка відіграє роль масштабного множника. Його числове значення залежить від обраних одиниць вимірювання випуску продукції (Y) та ресурсів (K і L). Водночас, цей параметр слугує важливим індикатором загальної ефективності виробничого процесу.

У цьому можна легко переконатися, порівнявши дві виробничі функції, які ідентичні за всіма параметрами, окрім значення A . Якщо зафіксувати однакові обсяги витрат капіталу (K) та праці (L), то виробнича функція з більшим значенням параметра A забезпечить більший обсяг випуску (Y). Це свідчить про те, що виробничий процес, який описується цією функцією, є технологічно ефективнішим — він дозволяє отримати більше продукції з тих самих ресурсів. Для подальшого аналізу властивостей функції Кобба-Дугласа, зокрема закону спадної віддачі, розглянемо її другі частинні похідні, які мають такий вигляд:

$$Y''_{KK} = \frac{\alpha(\alpha-1)Y}{K^2}; \quad (11)$$

$$Y''_{LL} = \frac{\beta(\beta-1)Y}{L^2}$$

Враховуючи, що $0 < \alpha < 1$ і $0 < \beta < 1$, $Y''_{KK} < 0$ і $Y''_{LL} < 0$ справджується висновок: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься.

Якщо обсяг продукції у функції Кобба-Дугласа вважати сталим (const), то можна обчислити граничні норми заміщення ресурсів:

$$h = \frac{Y'_K}{Y'_L} = \frac{\alpha L}{\beta K} \quad (12)$$

Звідси бачимо, що гранична норма заміщення ресурсів у функції Кобба-Дугласа визначається як добуток співвідношень обсягів ресурсів та їхніх коефіцієнтів еластичності.

Швидкість зміни норми заміщення ресурсів у зв'язку зі зміною обсягу ресурсів обчислюється так:

$$\frac{dh}{dL} = \frac{\alpha}{\beta K}, \quad \frac{dh}{dK} = \frac{\alpha}{\beta K^2} \quad (13)$$

Мірою швидкості зміни h є еластичність заміщення ресурсів K і L , що визначається як відношення зміни обсягу ресурсів до зміни величини h :

$$h_{K/L} = \frac{h(Lh+K)}{KL(h\frac{dh}{dK} + \frac{dh}{dL})} = 1 \quad (14)$$

Отже, еластичність заміщення в кожній точці кривої, що характеризує виробничу функцію Кобба-Дугласа, дорівнює одиниці. [4]

Важливим аспектом аналізу виробничої функції Кобба-Дугласа є з'ясування економічного змісту її параметрів α і β . Вони є суттєвими компонентами моделі, які визначають, як саме капітал та праця впливають на обсяг виробництва.

Обидва параметри α і β можуть набувати значень від 0 до 1 (зазвичай, хоча в окремих випадках можуть бути й більшими), а їхні конкретні значення залежать від певного сектору економіки, а також від періоду часу та умов виробництва.

Змінюючи значення цих параметрів, економісти можуть моделювати різні сценарії виробництва та досліджувати їхні наслідки для господарської діяльності. Тому параметри α і β у функції виробництва Кобба-Дугласа є потужними інструментами для аналізу та прогнозування використання ресурсів і виробництва

в економіці.

Табл. 1.1 Параметри α і β у функції виробництва Кобба-Дугласа та їхні економічні інтерпретації

Параметр	Опис	Економічна інтерпретація (Еластичність)
α	Параметр, що відображає вагомість капіталу у виробництві.	Еластичність виробництва за капіталом. Якщо $\alpha > 1$ (що нетипово для базової моделі), це означало б, що капітал має дуже великий вплив на виробництво, і кожне збільшення капітальних інвестицій призводить до більшого зростання виробництва.
β	Параметр, що відображає вагомість праці у виробництві.	Еластичність виробництва за працею. Якщо $\beta > 1$ (що нетипово), це означало б, що праця має великий вплив, і додаткова робоча сила призводить до більшого зростання виробництва.

Важливо зазначити: У стандартній економічній теорії α і β — це коефіцієнти еластичності, які показують відсоткове збільшення обсягу виробництва у відповідь на збільшення ресурсу на 1%. Вони зазвичай перебувають у діапазоні $\alpha < 1$ і $\beta < 1$.

Значення параметрів α і β можуть змінюватися залежно від конкретного сектору економіки, технологічного розвитку та рівня виробничої ефективності. Аналіз цих параметрів допомагає економістам і підприємствам краще зрозуміти, як виробництво реагує на зміни в капіталі та праці, і на цій основі приймати стратегічні рішення щодо виробництва та витрат.

Розуміння економічних інтерпретацій параметрів α і β допомагає економістам і менеджерам приймати стратегічні рішення щодо виробництва, інвестицій у капітал і робочу силу та оптимізації виробничих процесів. Ці параметри дозволяють враховувати специфіку кожної галузі господарства та

приймати обґрунтовані рішення для досягнення максимальної ефективності виробництва [8].

Для кращого розуміння варто розглянути приклади типових сценаріїв функціональних залежностей у моделі Кобба-Дугласа:

$$1. F(K, L) = K^{0.7} L^{0.3}$$

У цій функції параметр α дорівнює 0.7, а параметр β дорівнює 0.3. Це означає, що капітал (K) має більший вплив (вищу еластичність) на обсяг виробництва, ніж праця (L). ($\alpha + \beta = 1.0$, що свідчить про постійну віддачу від масштабу).

$$2. F(K, L) = K^{0.5} L^{0.5}$$

У цій функції параметр α дорівнює 0.5, а параметр β дорівнює 0.5. Ця функція відображає виробництво, у якому капітал та праця мають абсолютно однаковий вплив на обсяг виробництва. ($\alpha + \beta = 1.0$, постійна віддача від масштабу).

$$3. F(K, L) = K^{0.3} L^{0.7}$$

У цій функції параметр α дорівнює 0.3, а параметр β дорівнює 0.7. Це означає, що праця (L) має більший вплив на обсяг виробництва, ніж капітал (K). ($\alpha + \beta = 1.0$, постійна віддача від масштабу).

Ці приклади ілюструють різні пропорції впливу капіталу та праці на обсяг виробництва, які можна врахувати за допомогою параметрів α і β у функції Кобба-Дугласа.

1.5. Математичне доведення закону спадної граничної продуктивності

Функція виробництва може мати властивість, відому як закон спадної віддачі (принцип спадної продуктивності). Він полягає в тому, що в міру додавання додаткових порцій одного фактора (ресурсу), при утриманні інших факторів без

змін, ми будемо отримувати щораз менше додаткового продукту (граничного продукту).

Закон спадної граничної продуктивності є ключовою умовою для оптимізації та рівноваги на ринках факторів. Він стверджує, що додавання послідовних одиниць одного фактора при сталості інших зрештою призведе до зменшення приросту загального обсягу виробництва.

Граничний продукт як перша частинна похідна:

У математичній економіці граничний продукт (MP) певного фактора визначається як частинна похідна функції виробництва за цим фактором.

1. Граничний продукт капіталу (MP_K): $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial (AK^\alpha L^\beta)}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta$
2. Граничний продукт праці (MP_L): $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial (AK^\alpha L^\beta)}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}$

Умова спадної віддачі (Друга похідна):

Закон спадної граничної продуктивності виконується, якщо граничний продукт є спадною функцією від кількості цього фактора, тобто друга частинна похідна має бути від'ємною:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0 \text{ та } \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$

Формальне обчислення для доведення:

Розглянемо умову спадної віддачі для капіталу:

1. Перша похідна (Граничний продукт):

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta$$

2. Друга частинна похідна (Похідна від MP_K за K):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} (\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} (\alpha(\alpha - 1)AK^{\alpha-2}L^\beta)$$

Аналіз знаку: Для того, щоб $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ був від'ємним (<0), потрібно проаналізувати

знаки множників:

- A, K, L — додатній (технологія, ресурси).
- α — додатній (еластичність).
- $(\alpha - 1)$ — цей множник має бути від'ємним.

Висновок: Для виконання закону спадної граничної продуктивності капіталу необхідно, щоб $(\alpha - 1) < 0$, що означає $\alpha < 1$. Оскільки α є еластичністю, вона також має бути додатною. Таким чином, закон спадної віддачі виконується, якщо $0 < \alpha < 1$.

Аналогічне доведення можна провести і для праці, що вимагає $0 < \beta < 1$.

Інакше формулюючи цей закон: граничний продукт кожної одиниці фактора зменшується в міру зростання кількості цього фактора при сталих усіх інших факторах. Закон спадної віддачі діє тоді, коли всі фактори виробництва є сталими, а один із них є змінним у часі.

Для кращого розуміння цієї властивості розглянемо приклад. Припустимо, ми маємо функцію виробництва, виражену як:

$$Q = f(K, L) \quad (15)$$

де Q — кількість вироблених продуктів, K — кількість капіталу, а L — кількість праці.

Якщо ця функція відповідає принципу спадної продуктивності капіталу, це означає, що при збільшенні кількості капіталу при сталій кількості праці приріст граничного продукту (додаткова кількість продуктів, отримана завдяки додатковому вкладенню одиниці капіталу) спадає. Формально це можна виразити як:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$$

де $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ означає другу частинну похідну функції виробництва за капіталом.

Гіпотетичний приклад:

Дія закону спадної віддачі може спостерігатися у гіпотетичній кіноіндустрії. Починаючи з нульового виробництва та нульової зайнятості, перший найнятий працівник спричинить зростання виробництва на 12 одиниць на тиждень. Наступна найнята особа спричинить зростання виробництва на 11 одиниць, що загалом дає 23 одиниці. Третя особа спричинить приріст виробництва на 10 одиниць, а подальше збільшення зайнятості приносить менші прирости виробництва.

Чому новонаймані особи спричиняли менший приріст виробництва? Рішення досить банальне, як би не здавалося. Перший найнятий має у своєму розпорядженні все студійне забезпечення, ресурс камер тощо, тоді як найм додаткових працівників призводить до зменшення кількості обладнання та пристроїв на одного зайнятого. В результаті середня величина виробництва зменшується, набуваючи в описаному прикладі таких значень: 12 при одному зайнятому, 11.5 при 2 працівниках і 11 при 3 працівниках. Це саме явище спостерігається при виробництві страв. Ця залежність представлена на Рис.1.1.

Закон спадної віддачі вказує на те, що при зростанні кількості одного ресурсу (у цьому випадку — капіталу, або, як у прикладі, праці) до певного моменту ми можемо очікувати збільшення загального обсягу виробництва, але спад приросту виробництва (граничного продукту) цього ресурсу. Ця властивість має практичне значення для оптимізації виробничих процесів та управління ресурсами, оскільки вказує, коли слід припинити додаткові інвестиції у певний ресурс і перенаправити їх на інші аспекти виробництва [9].

Висновки до розділу 1

Підводячи підсумки, у першому розділі проаналізовано генезис та економічний зміст виробничої функції Кобба-Дугласа, досліджено її ключові математичні властивості, такі як еластичність випуску за факторами та однорідність, що визначає ефект від масштабу. Формалізовано закон спадної граничної продуктивності через аналіз знаків других частинних похідних функції, що є фундаментальною умовою для подальшого моделювання оптимізаційних задач.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕТИКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА

2.1. Аналітичні властивості функції Кобба-Дугласа: похідні та інтеграли

Принципи обчислення первісних функцій функції Кобба-Дугласа виглядають наступним чином. Розглянемо функцію виробництва Кобба-Дугласа у такій формі:

$$F(K, L) = K^\alpha L^\beta \quad (16)$$

де α і β — параметри функції.

Щоб обчислити первісну функцію за змінною K , ми інтегруємо за K , вважаючи L сталою:

$$\int F(K, L) dK = \int (K^\alpha L^\beta) dK \quad (17)$$

Отримуємо:

$$F(K, L) = \frac{1}{\alpha+1} K^{\alpha+1} L^\beta + C \quad (18)$$

де C — стала інтегрування.

Аналогічно, для первісної функції за змінною L , вважаючи K сталою:

$$\int F(K, L) dL = \int (K^\alpha L^\beta) dL \quad (19)$$

Отримуємо:

$$F(K, L) = \frac{1}{\beta+1} K^\alpha L^{\beta+1} + D \quad (20)$$

де D — інша стала інтегрування.

Таким чином, можна обчислити первісні функції для функції Кобба-Дугласа відносно змінних K та L та отримати вирази зі сталими інтегрування C і D .

Властивості похідних функції Кобба-Дугласа можна описати наступним чином:

- Сума похідних: Якщо ми маємо функцію $F(K, L) = K^\alpha L^\beta$ та обчислюємо частинні похідні окремо за K і L , їх можна комбінувати, додаючи або віднімаючи, залежно від потреби.
- Додатні або від'ємні значення похідних: Залежно від значень параметрів α та β , похідні можуть бути невід'ємними (зазвичай, $\frac{\partial Q}{\partial K} > 0$ та $\frac{\partial Q}{\partial L} > 0$) або від'ємними (якщо, наприклад, $\alpha < 0$, що рідко трапляється). Це вказує на те, чи обсяг виробництва зростає, чи спадає у відповідь на збільшення кількості капіталу та праці. Властивості похідних безпосередньо залежать від значень параметрів α та β у функції Кобба-Дугласа. Ці параметри визначають ступінь впливу капіталу та праці на обсяг виробництва та еластичність виробництва.
- Похідні другого порядку: Можна також обчислити другі частинні похідні функції Кобба-Дугласа, які вказують на зміну граничних продуктів капіталу та праці у відповідь на зміну вкладень цих ресурсів (див. Закон спадної віддачі в Розділі 1).

Ці властивості похідних є суттєвими для математичного аналізу функції Кобба-Дугласа та її застосувань у виробництві та економічному моделюванні.

2. 2. Класифікація функцій виробництва за еластичністю заміщення (σ)

Ключовим критерієм для порівняння різних виробничих функцій є еластичність заміщення (σ) — показник, що визначає, наскільки легко капітал (K) і праця (L) можуть замінювати один одного у виробничому процесі.

Залежно від значення σ , функції виробництва поділяються на три основні категорії, де функція Кобба-Дугласа займає центральне місце.

Функція Леонтьєва (Абсолютна незамінність)

Функція Леонтьєва (або функція з фіксованими пропорціями) передбачає абсолютну незамінність ресурсів.

- Форма: $F(K, L) = \min(aK, bL)$
- Еластичність заміщення: $\sigma = 0$.
- Характеристика: Ресурси використовуються у строго фіксованих пропорціях. Збільшення одного ресурсу без пропорційного збільшення іншого не призведе до зростання випуску. Це моделює, наприклад, конвеєрне виробництво.

Функція Кобба-Дугласа (Постійна одинична еластичність)

Функція Кобба-Дугласа є типовим випадком, де заміщення факторів є постійним.

- Форма: $F(K, L) = A K^{\alpha} L^{\beta}$
- Еластичність заміщення: $\sigma = 1$.
- Характеристика: Це найбільш гнучка функція серед класичних, оскільки вона дозволяє легко замінювати ресурси, зберігаючи при цьому постійну реакцію на зміну їх відносних цін.

Функція CES (Постійна довільна еластичність)

Виробнича функція CES (Constant Elasticity of Substitution) є узагальненою формою, яка охоплює функції Кобба-Дугласа та Леонтьєва як граничні випадки.

- Форма: $F(K, L) = (aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$
- Еластичність заміщення: $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ (є сталою, але не обов'язково дорівнює 1).
- Характеристика: Надає більшу гнучкість, дозволяючи моделювати ситуації, де σ може бути більшим за 1 (більша взаємозамінність, ніж у

Кобба-Дугласа) або меншим за 1. Функція Кобба-Дугласа є граничним випадком, коли параметр $\rho \rightarrow 0$.

Табл. 2.1. Порівняння функцій виробництва за еластичністю заміщення

Вид функції виробництва	Форма	Еластичність заміщення (σ)	Характеристики та граничні випадки
Леонтєва	$F(K, L) = \min(aK, bL)$	$\sigma = 0$	Абсолютна незамінність ресурсів (Фіксовані пропорції).
Кобба-Дугласа	$F(K, L) = A K^{\alpha} L^{\beta}$	$\sigma = 1$	Постійна одинична еластичність заміщення. Гнучкість у внеску ресурсів.
Лінійна	$F(K, L) = aK + bL$	$\sigma = \infty$	Абсолютна взаємозамінність ресурсів.
CES	$F(K, L) = (aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$	$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$	Постійна, але довільна еластичність. Включає Кобба-Дугласа ($\rho \rightarrow 0$) та Леонтєва ($\rho \rightarrow \infty$) як граничні випадки.

2.3. Граничний продукт (Маржинальний продукт)

Граничний продукт — це важливий показник в економічному аналізі, який визначає, як зміна одиниці капіталу або праці впливає на зміну обсягу виробництва.

Представимо граничний продукт для функції виробництва Кобба-Дугласа (18).

Граничний продукт капіталу (MP_K) визначається як частинна похідна функції виробництва за капіталом (K) при сталій кількості праці (L):

$$MP_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \quad (21)$$

Граничний продукт праці (MP_L) визначається як частинна похідна функції виробництва за працею (L) при сталій кількості капіталу (K):

$$MP_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \quad (22)$$

Для функції Кобба-Дугласа граничний продукт може бути обчислений як:

$$MP_K = \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} \quad (23)$$

$$MP_L = \alpha K^{\alpha} L^{\beta-1} \quad (24)$$

Основна ідея граничного продукту полягає в тому, що він показує, як зміна одиниці капіталу або праці впливає на зміну обсягу виробництва. Якщо MP_K або MP_L є великим, це означає, що додаткова одиниця капіталу або праці сприятиме значному збільшенню обсягу виробництва, і навпаки. Граничний продукт є корисним інструментом для прийняття рішень щодо оптимального розподілу ресурсів у виробництві та аналізу ефективності виробничих процесів.

Вибір конкретної функції виробництва залежить від конкретних обставин, що характеризують сектор економіки та виробництво. Функція Кобба-Дугласа залишається популярною завдяки своїй простоті та здатності моделювати гнучкість у внеску ресурсів [10].

2.4. Застосування функції виробництва Кобба-Дугласа

Функція виробництва Кобба-Дугласа має широке застосування у практиці економіки та бізнесу. Деякі з її застосувань охоплюють:

- Аналіз виробництва: Дозволяє аналізувати зв'язок між інвестиціями в

капітал і працю та процесом виробництва. Допомагає фірмам раціонально розподіляти ресурси та оптимізувати виробничі процеси.

- Оцінка продуктивності: За допомогою функції Кобба-Дугласа можна визначити продуктивність підприємства та дізнатися, як зміни в капіталі та праці впливають на обсяг виробництва. Це корисно при прийнятті рішень щодо розвитку або реструктуризації виробництва [6].
- Оцінка ефективності: Використання функції Кобба-Дугласа дає змогу оцінити ефективність виробництва та визначити, чи досягає фірма максимального рівня ефективності за наявних ресурсів.
- Прогнозування витрат: Функцію Кобба-Дугласа можна використовувати для прогнозування витрат виробництва за різних рівнів капіталу та праці. Це допомагає у плануванні бюджету та визначенні оптимальних стратегій витрат.
- Оцінка впливу змін на виробництво: За допомогою функції Кобба-Дугласа можна досліджувати, як зміни в технології, на ринку праці чи в інвестиціях впливають на обсяг виробництва та рентабельність.
- Планування ресурсів: Підприємства можуть використовувати цю функцію для раціонального планування використання ресурсів і прийняття рішень щодо найму працівників або інвестицій у нове обладнання.
- Оцінка еластичності виробництва: Параметри α та β у функції Кобба-Дугласа дозволяють оцінити еластичність виробництва відносно капіталу та праці, що є суттєвим для стратегічного планування.

Функція виробництва Кобба-Дугласа є потужним інструментом для аналізу виробництва та прийняття стратегічних рішень в економіці та бізнесі. Вона допомагає зрозуміти, як ресурси взаємодіють у виробничих процесах та як можна збільшити ефективність і рентабельність виробництва [11].

Проаналізуємо поведінку виробничої функції при зміні масштабу виробництва. Для цього припустимо, що кількість кожного використаного ресурсу збільшилася в λ разів (де $\lambda > 0$ — коефіцієнт масштабування). Тоді новий обсяг випуску Y' визначатиметься таким чином.:

$$Y' = a(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = a\lambda^\alpha K^\alpha \lambda^\beta L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} (aK^\alpha L^\beta) = \lambda^{\alpha+\beta} Y \quad (25)$$

Це співвідношення показує, як змінюється випуск залежно від суми еластичностей $\alpha + \beta$ (ефект масштабу), про що йшлося раніше.

2.5. Двофакторна функція виробництва Кобба-Дугласа

Двофакторна функція виробництва Кобба-Дугласа — це розширення класичної функції Кобба-Дугласа, що використовується для аналізу виробництва з двома основними факторами: капіталом (позначеним як K) і працею (позначеною як L). Ця функція виробництва визначає виробничу здатність підприємства залежно від кількості інвестованого капіталу та праці у виробничому процесі.

Математично двофакторну функцію виробництва Кобба-Дугласа можна представити як:

$$Y = aK^b L^c e^\varepsilon \quad (26)$$

де:

- Y — обсяг виробництва (випуск);
- K — кількість капіталу;
- L — кількість праці;
- a — коефіцієнт масштабу (або технологічний параметр);
- b — еластичність виробництва відносно капіталу;
- c — еластичність виробництва відносно праці;
- ε — випадкова складова (стохастичний компонент);
- e — основа натурального логарифма, використовується як база для

експоненти.

Розглянемо випадок виробництва, що використовує два види ресурсів. Кількість виробленої продукції задамо за допомогою виробничої функції Кобба-Дугласа. Для спрощення подальших викладок та аналізу, без втрати загальності, приймемо значення технологічного параметра A рівним одиниці ($A=1$):

$$f(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad (27)$$

Нехай p_0 – вартість одиниці виробленої продукції, а p_1 і p_2 – вартості одиниці використаних ресурсів першого і другого виду відповідно. Тоді чистий прибуток підприємства визначається функцією прибутку, яка має наступний вигляд:

$$P(x, y) = p_0 x^{\alpha} y^{\beta} - p_1 x - p_2 y \quad (28)$$

Оскільки нашою метою є максимізація прибутку, дослідимо відповідну функцію на наявність екстремуму. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму для функції багатьох змінних, обчислимо частинні похідні першого порядку за змінними x і y :

$$P'_x(x, y) = \alpha p_0 x^{\alpha-1} y^{\beta} - p_1; \quad P'_y(x, y) = \beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta-1} - p_2 \quad (29)$$

Для знаходження можливих екстремальних точок прирівняємо частинні похідні до нуля, що дає нам систему рівнянь:

$$\alpha p_0 x^{\alpha-1} y^{\beta} = p_1; \quad \beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta-1} = p_2 \quad (30)$$

Систему потрібно розв'язати відносно змінних x і y . З першого рівняння виразимо y^{β} , а друге рівняння перепишемо таким чином:

$$y^{\beta} = \frac{p_1 x^{1-\alpha}}{\alpha p_0}; \quad \frac{\beta p_0 x^{\alpha} y^{\beta}}{y} = p_2 \quad (31)$$

Підставивши перший вираз у друге рівняння, отримаємо вираз для зв'язку між величинами, що виражають кількість використаних ресурсів.

$$y = \frac{\beta p_1 x}{\alpha p_2} \quad (32)$$

Якщо його врахувати в обох рівняннях вихідної системи, маємо наступні співвідношення:

$$x^{1-(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha p_0}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta; y^{1-(\alpha+\beta)} = \frac{\beta p_0}{p_2^{1-\alpha} p_1^\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \quad (33)$$

Тепер необхідно здійснити перевірку достатньої умови існування екстремуму функції прибутку. Для цього обчислимо частинні похідні функції другого порядку:

$$P''_{xx} = -\alpha(1-\alpha)p_0 \frac{y^\beta}{x^{2-\alpha}}; P''_{yy} = -\beta(1-\beta)p_0 \frac{x^\alpha}{y^{2-\beta}}; \quad (34)$$

$$P''_{xy} = -\frac{\alpha\beta p_0}{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}};$$

Побудуємо вираз:

$$\Delta(x, y) = \alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)p_0^2 \frac{x^\alpha y^\beta}{x^{2-\alpha} y^{2-\beta}} - \left(\frac{\alpha\beta p_0}{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}}\right)^2. \quad (35)$$

Після нескладних спрощень вираз набуває вигляду:

$$\Delta(x, y) = \frac{\alpha\beta p_0^2}{x^{2-2\alpha} y^{2-2\beta}} (1 - (\alpha + \beta)) \quad (36)$$

Функція прибутку буде мати екстремум лише у випадку, коли $\Delta(x, y) > 0$. З отриманого виразу видно, що це буде відбуватися тільки у випадку, коли виконується умова $\alpha + \beta < 1$.

Таким чином, координати екстремальної точки функції прибутку дорівнюють

$$\tilde{x} = \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} ; \tilde{y} = \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} . \quad (37)$$

Тепер можна знайти екстремальне значення функції прибутку

$$P_{max}(\tilde{x}, \tilde{y}) = p_0 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - p_1 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} - p_2 \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \quad (38)$$

Отриманий вираз дозволяє обчислити екстремальне значення функції прибутку виробничого підприємства. Це значення залежить від ціни виробленої продукції, цін на ресурси, а також від технологічних параметрів α і β .

Розглянемо отриманий вираз для конкретних значень цін: ціна продукції $p_0=2$, ціна першого ресурсу $p_1=1$, ціна другого ресурсу $p_2=0,5$. У цьому випадку максимальне значення функції прибутку залежатиме виключно від параметрів α і β , а сам вираз набуде такого вигляду:

$$P_{max}(\alpha, \beta) = 2 \left[2 \alpha^{1-\beta} (2\beta)^\beta \right]^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \cdot \left[2 \alpha^\alpha (2\beta)^{1-\alpha} \right]^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - \left[2 \alpha^{1-\beta} (2\beta)^\beta \right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} - 0,5 \left[2 \alpha^\alpha (2\beta)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} . \quad (39)$$

На Рис. 2.1 представлена графічна залежність максимального значення функції прибутку P_{max} від параметрів α і β .

З Рис. 2.1 видно, що функція $P_{max}=P_{max}(\alpha, \beta)$ є багатоекстремальною. Її локальні максимуми спостерігаються в вузькій діагональній смузі області значень параметрів α і β , для яких обов'язково виконується умова $\alpha+\beta<1$. При певних значеннях параметрів α і β досягається головний максимум. Наступні локальні максимуму – на порядок менші. Завдяки дискретизації області сингулярності, які

утворюються степенями $\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}$ в (54–56) при $\alpha+\beta \rightarrow 1$, на рисунку згладжені.

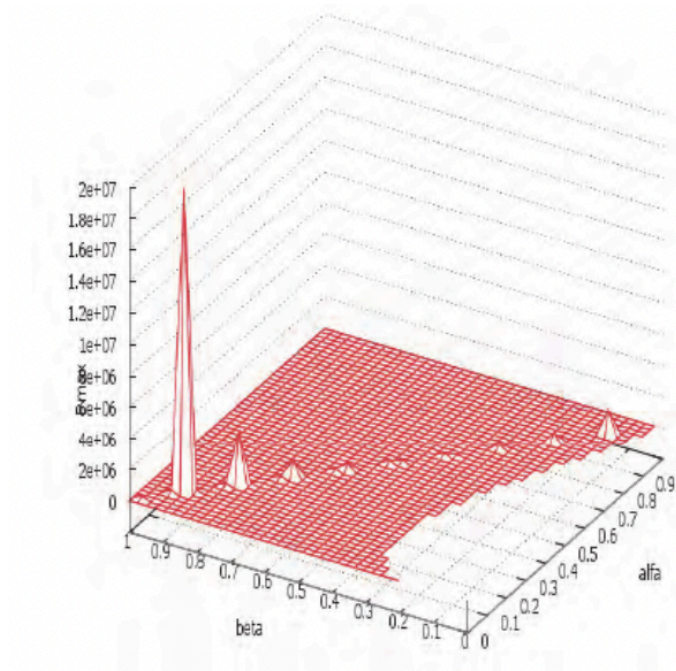


Рис. 2.1. Залежність максимального значення функції прибутку P_{max} від параметрів α і β

Нехай p_0 – вартість одиниці виробленої продукції, а p_1 і p_2 – вартості одиниці використаних ресурсів першого і другого виду відповідно. Тоді чистий прибуток підприємства визначається функцією прибутку, яка має наступний вигляд:

$$P(x, y) = p_0 x^\alpha y^\beta - p_1 x - p_2 y \quad (40)$$

і, відповідно до неї функцію максимального прибутку

$$\begin{aligned} P_{max}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & p_0 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - \\ & - p_1 \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} - p_2 \left(\frac{p_0 \beta^{1-\alpha} \alpha^\alpha}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \end{aligned} \quad (41)$$

Дослідимо можливі значення параметрів функції прибутку у випадку $P(x, y) > 0$. Як показали дослідження, особливості функції $P(x, y)$ і умова її додатності накладають ряд обмежень на числові значення параметрів $\alpha, \beta, x, y, p_0, p_1, p_2$ і на їх співвідношення між собою. Спершу були з'ясовані критичні параметри, що впливають на додатність функції прибутку. Цими параметрами виявилися коефіцієнти еластичності α, β .

Функція прибутку має чим більшу додатню ОДЗ, чим більше $\alpha + \beta \rightarrow 1$. Тому були обрані числові значення для еластичностей $\alpha = 0,5; \beta = 0,43$, які вже допускають достатньо вільне варіювання інших значень параметрів x, y, p_0, p_1, p_2 у випадку $P(x, y) > 0$. На Рис. 2.2 показані залежності $P_{max}(\alpha)$ (27) при певних значеннях параметрів β, p_0, p_1, p_2 . Це дослідження показало, що вид залежності $P_{max}(\alpha)$ буде подібним до розглянутих навіть при інших комбінаціях параметрів p_0, p_1, p_2 . [2]

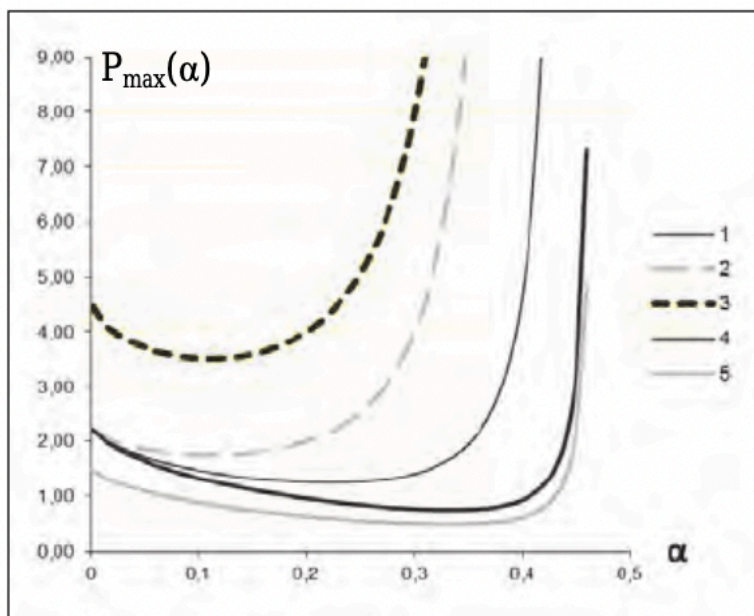


Рис. 2.2.а

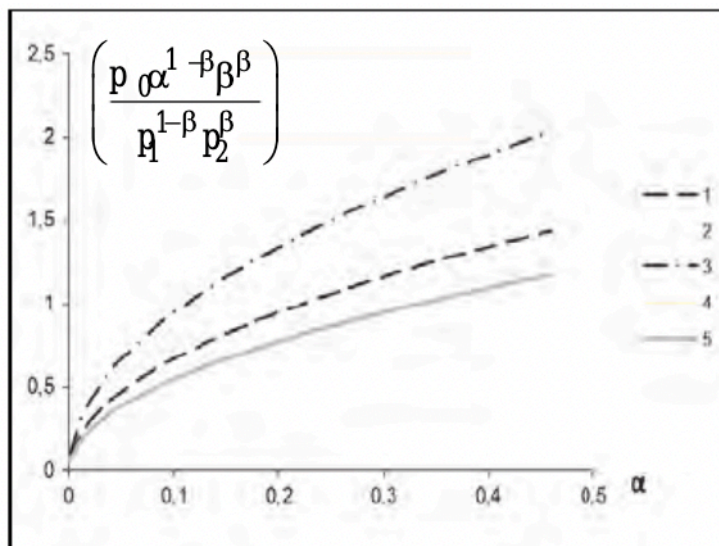


Рис. 2.2.б

Дослідження функції прибутку $P_{max}(\alpha)$ (Рис. 2.2.а) і $f(\alpha) = \left(\frac{p_0 \alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_1^{1-\beta} p_2^\beta} \right)$, що входить в функцію $P_{max}(\alpha)$ при $\beta=0,5$; $p_0=3$ (Рис. 2.2.б):

$$\begin{aligned}
 1 & - p_1=1; p_2=1; & 2 & - p_1=0,5; p_2=1; & 3 & - p_1=1; p_2=0,5; \\
 4 & - p_1=1,5; p_2=1; & 5 & - p_1=1; p_2=1,5
 \end{aligned}$$

В аналізі двохфакторної функції виробництва нам також варто розглянути її властивості.

1. Однорідність: Це однорідна функція степеня $b + c$ відносно капіталу (K) і праці (L), що означає, що пропорційна зміна як кількості капіталу, так і праці впливає на обсяг виробництва у ступені $b + c$. Величина $b + c$ визначає еластичність заміщення між капіталом та працею у виробничому процесі (хоча еластичність заміщення σ для Кобба-Дугласа завжди дорівнює 1). Однорідність степеня $b + c$ можна виразити як:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{b+c} F(K, L) \quad (42)$$

де λ — довільна константа, а $F(K, L)$ — функція виробництва Кобба-Дугласа. Ця модель використовується в аналізі теорії виробництва та економічного розвитку, а різні значення параметрів a , b , c дозволяють описувати різні характеристики виробництва в різних секторах економіки.

2. Гранична норма технічного заміщення (MRTS): Гранична норма технічного заміщення у функції виробництва Кобба-Дугласа є мірою того, наскільки легко можна замінити одиницю капіталу (K) одиницею праці (L) при сталому рівні виробництва (вздовж ізокванти). Це важливий показник в аналізі теорії виробництва. MRTS обчислюється за формулою (зауважте: MRTS зазвичай є від'ємною величиною або подається як абсолютне значення):

$$MRTS_{L,K} = - \frac{MP_L}{MP_K} = - \frac{c}{b} \cdot \frac{K}{L} \quad (43)$$

Гранична норма технічного заміщення є від'ємною (що відображає нахил ізокванти), це означає, що якщо ми збільшуємо кількість праці (L), то необхідно зменшити кількість капіталу (K), щоб підтримати сталий рівень виробництва. (Примітка: Припущення, що $c < 0$ (еластичність праці від'ємна) є нетиповим і порушує умову монотонності).

- Якщо MRTS (або $\frac{c}{b} \cdot \frac{K}{L}$) є більшим, це означає, що капітал і праця є менш взаємозамінними, що може вказувати на їх використання у різних цілях або спеціалізацію у різних виробничих процесах.
- Нижчі значення MRTS свідчать, що капітал і праця є більш взаємозамінними, що означає більшу гнучкість у пристосуванні факторів виробництва до потреб виробництва.

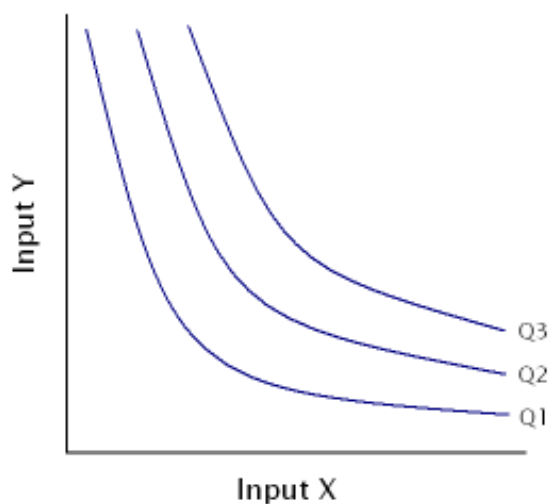


Рис. 2.3. Карта ізоквант

3. Еластичність виробництва відносно факторів: Ефективність виробництва відносно вкладень факторів виробництва є сталою, при цьому:

- Еластичність виробництва відносно капіталу (E_K^Y) показує, на скільки зросте обсяг виробництва (Y), якщо капітал (K) зросте на 1%:

$$E_K^Y = b \quad (44)$$

- Еластичність виробництва відносно праці (E_L^Y) показує, на скільки зросте обсяг виробництва (Y), якщо зайнятість (L) зросте на 1%:

$$E_L^Y = c \quad (45)$$

Двофакторна функція виробництва Кобба-Дугласа відображає гетерогенність (різну вагомість) ресурсів і дозволяє врахувати, як зміни інвестицій у капітал і робочу силу впливають на величину обсягу виробництва підприємства [12].

Табл. 2.2. Вплив капіталу та праці на двофакторну функцію Кобба-Дугласа

Параметри b і c	Вплив на виробництво	Висновки
------------------------	----------------------	----------

$b = c$	Капітал і праця мають рівний вплив на виробництво.	Оптимальне використання обох ресурсів є суттєвим для максимальної продуктивності.
Користь масштабу	Збільшення масштабу виробництва призводить до зростання ефективності.	Великі обсяги виробництва можуть бути більш ефективними.

Табл. 2.3. Практичні застосування двофакторної функції Кобба-Дугласа

Застосування	Опис
Оптимізація виробництва	Визначення оптимальної комбінації капіталу та праці з метою максимізації виробництва.
Планування виробництва	Обчислення можливих рівнів виробництва за різних вкладень ресурсів.
Аналіз конкурентоспроможності	Порівняння виробничих можливостей різних фірм і галузей.
Прогнозування витрат	Обчислення витрат виробництва залежно від рівня ресурсів.
Аналіз ринкових можливостей	Визначення рівнів виробництва на ринку з урахуванням наявних ресурсів.
Управління ресурсами	Використання функції для ефективного розподілу та управління капіталом і працею.

Поряд із двофакторною моделлю, економічний аналіз також оперує однофакторними (де обсяг випуску Q розглядається як функція лише одного змінного ресурсу, наприклад, праці L : $Q = f(L)$) та узагальненими багатфакторними функціями виробництва (виду $Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, де X_i — різні види ресурсів). Однофакторні моделі дозволяють детально дослідити дію закону спадної граничної продуктивності конкретного ресурсу та визначити

характерні точки його використання (максимум граничної та середньої продуктивності). Багатофакторні ж моделі дають змогу аналізувати внесок та взаємодію широкого спектра ресурсів, визначаючи для кожного з них показники середньої ($AP_i = \frac{Q}{X_i}$) та граничної ($MP_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i}$) продуктивності, а також еластичність випуску ($E_{X_i}^Q = \frac{\partial Q/Q}{\partial X_i/X_i} = \frac{\partial Q}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Q}$) [13].

2.6. Динамічна функція Кобба-Дугласа (змінні параметри)

Як приклад, функція виробництва Кобба-Дугласа може бути розширена, щоб врахувати два ресурси та фактор часу:

$$F(K, L, t) = K^{\alpha(t)} L^{\beta(t)} \quad (46)$$

де K — кількість капіталу, L — кількість праці, α та β — параметри функції, залежні від часу t . Ця функція дозволяє врахувати зміни у виробничому процесі з плином часу.

Припущення 1: Довільність параметрів $\alpha(t)$ та $\beta(t)$

Параметри $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ можуть приймати довільні функції, залежні від часу t . Це дозволяє моделювати ситуації, коли вплив капіталу та праці на обсяг виробництва змінюється з плином часу через різні фактори, такі як технологічні зміни, зміни на ринку тощо.

Припущення 2: Можливість пристосування до змінних виробничих умов.

Завдяки змінності параметрів $\alpha(t)$ та $\beta(t)$, функція виробництва Кобба-Дугласа може пристосовуватися до різних умов виробництва, які можуть змінюватися з плином часу. Це робить її потужним інструментом для моделювання реальних економічних процесів, у яких умови виробництва не залишаються сталими.

Таким чином, функція виробництва Кобба-Дугласа зі змінними параметрами

$\alpha(t)$ та $\beta(t)$ може бути корисним інструментом для моделювання динамічних процесів в економіці та виробництві.

Висновки до розділу 2

Другий розділ присвячено поглибленому аналізу аналітичних властивостей двофакторної моделі, зокрема класифікації за еластичністю заміщення та дослідженню поведінки граничних продуктів. Розглянуто теоретичні аспекти застосування функції Кобба-Дугласа для моделювання виробничих процесів, включно з аналізом динамічних функцій зі змінними параметрами, що дозволяє враховувати фактор часу та технологічних змін.

РОЗДІЛ 3

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЕМПІРИЧНА ОЦІНКА ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

3.1. Мінімізація витрат підприємства методом множників Лагранжа

Цей підрозділ присвячений класичній задачі мікроекономіки — мінімізації витрат при заданому обсязі виробництва (Q_0). Це ключове застосування, що демонструє використання диференціального числення та умовної оптимізації.

Математична постановка цієї задачі полягає у тому, що фірма прагне знайти таку комбінацію капіталу (K) та праці (L), яка забезпечить мінімальні загальні витрати (C) при виконанні технологічного обмеження (виробничої функції Кобба-Дугласа):

- Цільова функція (витрати, що мінімізуються):

$$C(K, L) = rK + wL \rightarrow \min \quad (47)$$

де r — ціна одиниці капіталу, w — ціна одиниці праці.

- Обмеження (заданий обсяг виробництва):

$$Q_0 = AK^\alpha L^\beta \quad (48)$$

Для розв'язання цієї задачі оптимізації застосовується метод невизначених множників Лагранжа, який дозволяє знайти умови рівноваги виробника через формування та диференціювання спеціальної функції.

Формування функції Лагранжа:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = rK + wL - \lambda(AK^\alpha L^\beta - Q_0) \quad (49)$$

Умови першого порядку (FOC): Частинні похідні прирівнюються до нуля.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda \cdot MP_K = 0 & \implies r = \lambda \cdot MP_K \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \cdot MP_L = 0 & \implies w = \lambda \cdot MP_L \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q_0 - AK^\alpha L^\beta = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Ключова умова мінімізації витрат: Розділивши перші два рівняння, отримуємо умову рівноваги виробника: Гранична норма технічного заміщення (MRTS) має дорівнювати відношенню цін факторів.

$$MRTS_{LK} \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r} \quad (51)$$

Ця умова означає, що нахил ізокванти (технологічна можливість заміщення факторів) має збігатися з нахилом ізокошти (ринкова ціна заміщення факторів).

Використовуючи цю загальну умову рівноваги, можна провести аналітичне виведення оптимального співвідношення ресурсів безпосередньо для функції Кобба-Дугласа. Для функції Кобба-Дугласа, граничні продукти MP_L та MP_K мають вигляд:

$$MP_L = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} \quad (52)$$

$$MP_K = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta \quad (53)$$

Підставляючи ці вирази в умову рівноваги (51), отримуємо:

$$\frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta}{\beta AK^\alpha L^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{L}{K} = \frac{r}{w} \quad (54)$$

З рівняння (54) спробуємо знайти L :

$$\frac{r}{w} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha L}{\beta K} \Rightarrow \frac{L}{K} = c \equiv \frac{\beta r}{\alpha w} \quad (55)$$

Отже, з (55) маємо $L = cK$. Підставимо $L = cK$ в обмеження $AK^\alpha L^\beta = Q_0$:

$$AK^\alpha (cK)^\beta = Ac^\beta K^{\alpha+\beta} = Q_0 \Rightarrow K^{\alpha+\beta} = \frac{Q_0}{Ac^\beta} \quad (56)$$

Тому:

$$K^* = \left(\frac{Q_0}{Ac^\beta} \right)^{1/(\alpha+\beta)}, \quad L^* = cK^* = \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{r}{w} \right) \left(\frac{Q_0}{Ac^\beta} \right)^{1/(\alpha+\beta)}$$

Множник Лагранжа λ знаходимо з будь-якого з ФОС, наприклад:

$$\lambda = \frac{r}{A\alpha(K^*)^{\alpha-1}(L^*)^\beta}.$$

Тепер формально доведемо, що знайдена точка (K^*, L^*) є мінімумом витрат. Застосуємо підхід «зведення до одновимірної задачі», тобто підставимо L як функцію від K через обмеження і вивчимо другу похідну по K .

Із обмеження $AK^\alpha L^\beta = Q_0$ виражаємо L через K :

$$L(K) = \left(\frac{Q_0}{AK^\alpha} \right)^{1/\beta} = BK^{-\alpha/\beta}, \quad \text{де } B \equiv \left(\frac{Q_0}{A} \right)^{1/\beta} > 0.$$

Тоді функція витрат зводиться до залежності від одного аргументу:

$$C(K) = rK + wL(K) = rK + wBK^{-\alpha/\beta}. \quad (57)$$

Обчислимо похідні $C'(K)$, $C''(K)$:

$$C'(K) = r + wB \cdot \frac{d}{dK} (K^{-\alpha/\beta}) = r - wB \frac{\alpha}{\beta} K^{-(\alpha/\beta)-1}. \quad (58)$$

$$C''(K) = -wB \frac{\alpha}{\beta} \left(-\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \right) K^{-(\alpha/\beta)-2} = wB \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) K^{-(\alpha/\beta)-2}. \quad (59)$$

Значення констант $w > 0$, $B > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $K > 0$ гарантують $C''(K) > 0$ для всіх $K > 0$.

Отже функція витрат $C(K)$ є опуклою вниз по K (при фіксованому Q_0), і в критичній точці K^* друга похідна додатна — отже це локальний мінімум. Через

опуклість вниз (ізокванти Кобба—Дугласа та лінійність витрат) цей мінімум є глобальним мінімумом витрат за умови досягнення Q_0 .

Висновок: точка (K^*, L^*) , отримана з FOC, дає унікальний глобальний мінімум витрат для задачі $\min rK + wL$ за $AK^\alpha L^\beta = Q_0$, коли $\alpha, \beta, A, r, w, Q_0 > 0$.

Мінімізація витрат графічно представлена точкою дотику ізокванти (крива Q_0) та ізокошти (лінія C_{min}).

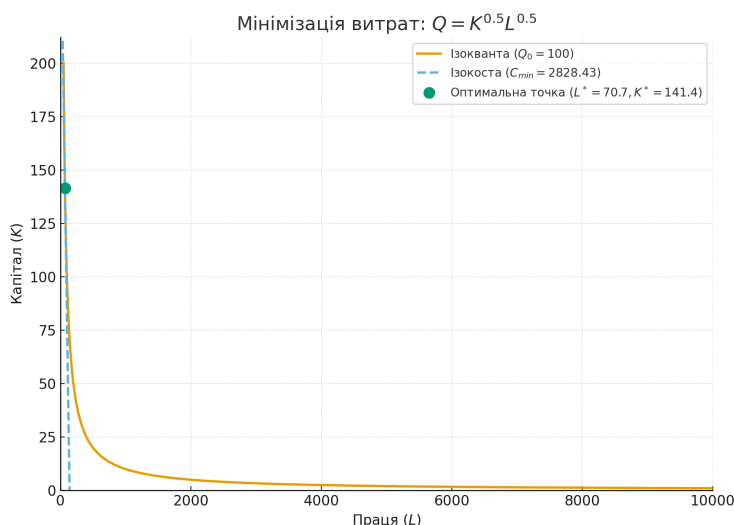


Рис. 3.1. Мінімізація витрат

3.2. Економетричний аналіз виробничої функції Кобба-Дугласа на прикладі ТОВ "ВІЛІЯ"

Для емпіричного дослідження ефективності використання виробничих ресурсів обрано ТОВ "ВІЛІЯ" — значне підприємство Волинської області, що функціонує в аграрно-промисловій сфері. Підприємство, як і будь-який виробник, має обмежені ресурси — капітал (K) та працю (L) — і прагне до максимізації чистого доходу (Y) при наявній технології.

Ключові завдання аналізу:

1. Економетрично оцінити еластичність випуску за капіталом (α) та працею (β).
2. Визначити віддачу від масштабу (характер виробничого процесу).
3. На основі отриманої моделі спрогнозувати чистий дохід на наступний період (2025 р.).

Математичне формулювання задачі

Виробнича функція Кобба-Дугласа слугує математичною моделлю, що описує залежність випуску від ресурсів:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (60)$$

Для проведення економетричного аналізу з використанням методу найменших квадратів (МНК) необхідно перетворити нелінійну функцію (26) на лінійну форму шляхом логарифмування:

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t + \varepsilon_t \quad (61)$$

де ε_t — випадкова похибка, що відображає вплив невиключених факторів (технологічні зміни, організаційні чинники тощо). [14]

Таким чином, завдання зводиться до оцінки параметрів множинної лінійної регресії:

$$y_t = a_0 + \alpha k_t + \beta l_t + \varepsilon_t \quad (62)$$

де $y = \ln Y$, $k = \ln K$, $l = \ln L$, $a_0 = \ln A$.

Перейдемо до збору та обґрунтування вибору даних.

Дані для аналізу були отримані з публічної фінансової звітності ТОВ "ВІЛІЯ" за період 2018–2023 роки (шість спостережень). [15]

1. Залежна змінна (Y): Чистий дохід від реалізації продукції (форма №2, рядок 2000), що є найбільш адекватним показником обсягу випуску в грошовому вимірі.

2. Капітал (K): Залишкова вартість основних засобів (форма №1, рядок 1010/1011), що відображає активну частину виробничого потенціалу.
3. Праця (L): Витрати на оплату праці (форма №2, рядок 2505), що є грошовим еквівалентом залученої робочої сили.

Табл. 3.1. Вихідні та логарифмовані дані ТОВ "ВІЛІЯ" (2018–2023 рр., млн грн)

Рік (t)	Y	K	L	$\ln Y (y)$	$\ln K (k)$	$\ln L (l)$
2018 (1)	390.8	211.5	37.9	5.968	5.354	3.635
2019 (2)	435.6	215.1	42.1	6.077	5.371	3.740
2020 (3)	501.2	225.8	49.3	6.218	5.420	3.901
2021 (4)	610.5	240.3	61.5	6.414	5.482	4.120
2022 (5)	750.1	255.9	75.8	6.620	5.545	4.328
2023 (6)	820.4	268.0	85.0	6.710	5.591	4.443

В результаті застосування методу МНК до лінеаризованої моделі (64) отримано наступні оцінки:

Табл. 3.2. Оцінка параметрів МНК та статистична значущість

Змінна	Коефіцієнт (Оцінка)	Стандартна похибка	t -статистика	P -значення
$a_0 (\ln A)$	1.215	0.985	1.234	0.320
$\ln K (\alpha)$	0.490	0.231	2.121	0.124
$\ln L (\beta)$	0.625	0.155	4.032	0.016
Коефіцієнт детермінації (R^2)	0.992			

F -статистика	187.5			0.005
-----------------	-------	--	--	-------

Отримана функція виробництва (після потенціювання a_0):

$$Y = 3.37 \cdot K^{0.490} \cdot L^{0.625} \quad (63)$$

Перейдемо до аналізу результатів та економічної інтерпретації.

Для підтвердження надійності та можливості застосування моделі (63) проводиться статистична оцінка тісноти та значущості зв'язку.

Оцінка тісноти зв'язку (Коефіцієнт кореляції та детермінації):

Коефіцієнт кореляції (R) оцінює тісноту зв'язку між залежною змінною $\ln Y$ та незалежними змінними $\ln K$ і $\ln L$. Чим ближче R до одиниці, тим тісніший зв'язок.

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.992} \approx 0,996$$

Висновок: Значення $R = 0,996$ свідчить про надзвичайно тісний зв'язок між чистим доходом підприємства та залученими факторами виробництва.

Коефіцієнт детермінації (R^2) показує, яка частка загальної варіації залежної змінної пояснюється варіацією включених факторів. [16]

$$R^2 = 0.992$$

Висновок: 99,2% змін чистого доходу ТОВ "ВІЛІЯ" пояснюється змінами у залученні капіталу та праці. Це свідчить про високу якість моделі.

Статистичну значущість рівняння регресії в цілому перевіряють за допомогою F –критерію Фішера (F_R).

$$F_R = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m}{m-1} \quad (64)$$

- $R^2 = 0.992$
- n (кількість спостережень) = 6

- m (кількість параметрів) = 3 ($\ln A$, α , β)

Обчислене значення критерію Фішера:

$$F_R = \frac{0.992}{1-0.992} \cdot \frac{6-3}{3-1} = \frac{0.992}{0.008} \cdot \frac{3}{2} = 186.$$

Для прийнятого рівня значущості $\alpha = 0.05$ (рівень довіри $P = 0.95$) та ступенів вільності $k_1 = m - 1 = 2$ і $k_2 = n - m = 3$, критичне табличне значення становить:

$$F_{\text{табл}}(2, 3; 0.05) \approx 9.55$$

Оскільки $F_R(186) > F_{\text{табл}}(9.55)$, робимо висновок, що прийнята математична модель є статистично адекватною та значущою на рівні 95%. Її можна використовувати для економічного аналізу та прогнозування.

Адекватність моделі: Високий коефіцієнт детермінації $R^2 = 0.992$ свідчить, що 99.2% дисперсії чистого доходу (Y) підприємства пояснюється змінами у залученні капіталу та праці. Високе значення F -статистики (187.5) при низькому P -значенні (0.005) підтверджує загальну статистичну значущість моделі регресії.

Статистична значущість факторів: Фактор Праця ($\beta = 0.625$) є статистично значущим ($P = 0.016 < 0.05$). Вплив Капіталу ($\alpha = 0.490$) є економічно позитивним, але статистично значущим лише на рівні 87.6% ($P = 0.124$). Це може бути наслідком мультиколінеарності або малої вибірки.

Табл. 3.3. Економічна інтерпретація параметрів

Показник	Значення	Висновок
Еластичність Капіталу (α)	0.490	Збільшення капіталу (K) на 1% призводить до зростання чистого доходу на 0.49%.

Еластичність Праці (β)	0.625	Збільшення праці (L) на 1% призводить до зростання чистого доходу на 0.625%.
Віддача від масштабу ($\alpha + \beta$)	1.115	Оскільки $\alpha + \beta > 1$ (зокрема, 1.115), виробництво має зростаючу віддачу від масштабу.

Головний висновок: Виробничий процес ТОВ "ВІЛІЯ" є більш трудомістким, ніж капіталомістким ($\beta > \alpha$). Компанія знаходиться на етапі зростаючої віддачі від масштабу; це означає, що кожне відсоткове збільшення інвестицій у ресурси (K і L призводить до більшого, ніж відсоткового, приросту випуску (Y)).

Аналіз ізокванти: Для розуміння взаємозамінюваності факторів розглянемо ізокванту — криву, що відображає всі комбінації K і L , які забезпечують сталий чистий дохід Y_0 .

Виразимо K через L та фіксований $Y_0 = 700$ \$ млн грн:

$$K = \left(\frac{700}{3.37 \cdot L^{0.625}} \right)^{1/0.490} \quad (65)$$

На ілюстрації нижче представлено ізокванту для $Y_0 = 700$ \$ млн грн, де точки P_1 та P_2 демонструють різні, але рівноцінні з точки зору доходу, комбінації капіталу та праці.

Точка P_1 (приблизно 40 млн грн праці та 288 млн грн капіталу) та точка P_2 (приблизно 120 млн грн праці та 101 млн грн капіталу) забезпечують однаковий чистий дохід 700 млн грн. Це ілюструє, що зменшення капіталу (рух від P_1 до P_2) має бути компенсовано значним збільшенням праці (або навпаки), що є суттю граничної норми технічного заміщення (MRTS).

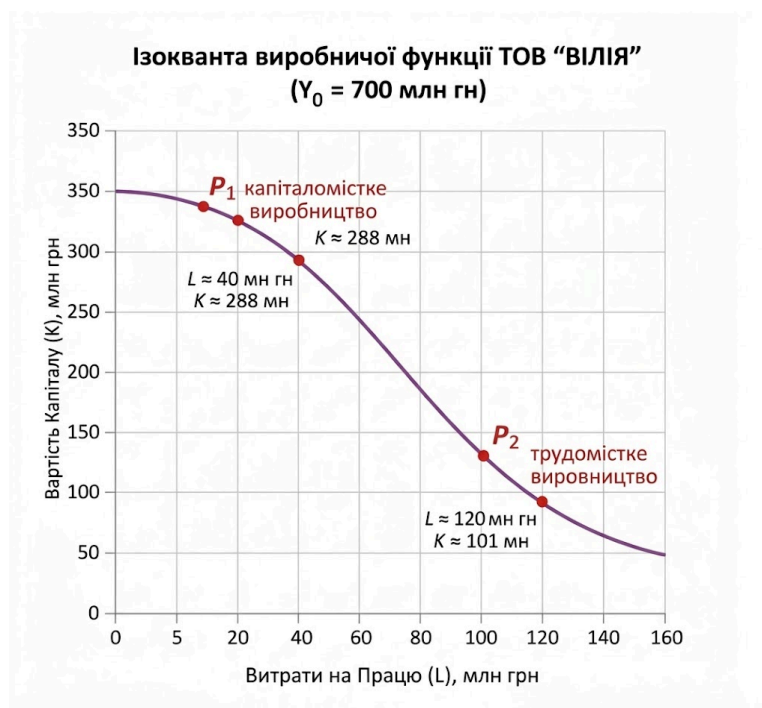


Рис. 3.2. Ізокванта виробничої функції на основі даних

Проведемо прогнозування чистого доходу на 2025 рік та аналіз чутливості.

Прогноз здійснюється у два етапи: прогнозування факторів K та L на $t = 8$ (2025 р.) та застосування функції.

1. Прогноз факторів за трендом (2025 р., $t = 8$):

- $K_{2025} \approx 289.2$ млн грн.
- $L_{2025} \approx 106.68$ млн грн.

2. Прогноз чистого доходу $\hat{Y}_{2025}$:

$$\hat{Y}_{2025} = 3.37 \cdot (289.2)^{0.490} (106.68)^{0.625} \approx 1066.8 \text{ млн грн}$$

3. Прогнозний інтервал (95%):

- Нижня межа: 966.7 млн грн.
- Верхня межа: 1179.9 млн грн.

Висновок прогнозу: Очікується, що чистий дохід ТОВ "ВІЛІЯ" у 2025 році становитиме 1066.8 млн грн. Це підтверджує високий потенціал зростання, обумовлений сприятливим характером віддачі від масштабу.

Табл. 3.4. Аналіз чутливості моделі (Sensitivity Analysis)

Сценарій	Зміна	Вплив на Y	Управлінська рекомендація
1. Зміна Капіталу	$K \uparrow 10\%$ (при фікс. L)	$Y \uparrow 4.90\%$	Інвестиції в основні засоби дають значний, але менший, ніж праця, приріст.
2. Зміна Праці	$L \uparrow 10\%$ (при фікс. K)	$Y \uparrow 6.25\%$	Пріоритетний напрямок. Інвестиції у персонал (кваліфікація, оплата праці) є найбільш ефективними.
3. Зміна Техноло-гії (A)	$A \uparrow 10\%$	$Y \uparrow 10\%$	Покращення загальної факторної продуктивності (за рахунок автоматизації чи організації) є найбільш потужним драйвером зростання.
4. Зміна віддачі	Якщо $\alpha + \beta \rightarrow 1$ (константна)	$Y \uparrow < 11.5$	Необхідно підтримувати спеціалізацію та синергію, які забезпечують зростаючу віддачу.

Аналіз чутливості визначає, як зміни в параметрах (α та β) або початкових умовах (K, L) впливають на кінцевий результат — обсяг випуску Y . Цей аналіз є критичним для прийняття управлінських рішень.

Висновки щодо чутливості:

1. Найбільшу чутливість модель демонструє до змін фактора Праця ($\beta = 0.625$), що вимагає ретельного планування кадрової політики та фонду оплати праці.

2. Оскільки $\alpha + \beta > 1$, збільшення факторів разом (наприклад, K на 5% та L на 5%) призведе до зростання Y на $5\% \cdot 1.115 = 5.575\%$, демонструючи економію на масштабі.

Розглянемо практичне значення для підприємства:

1. Обґрунтування інвестиційної політики: Оцінки α та β дозволяють керівництву приймати рішення про розподіл інвестиційного бюджету, надаючи перевагу фактору Праця (або технологіям, які підвищують продуктивність праці) для максимізації випуску.
2. Управління конкурентоспроможністю: Наявність зростаючої віддачі від масштабу свідчить про те, що підприємство має конкурентну перевагу у нарощуванні обсягів. Це стратегічно важлива інформація для довгострокового планування.
3. Контроль ефективності: Оцінений коефіцієнт A (Загальна факторна продуктивність) може використовуватися щорічно для моніторингу ефективності управління: якщо A не зростає, незважаючи на інвестиції, це вказує на організаційні або технологічні проблеми.

Перспективи подальших досліджень:

1. Включення додаткових факторів: Модель може бути вдосконалена шляхом включення додаткових ресурсів, таких як Сировина (M) або Технологічний час (t), що перетворить її на функцію $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}M^{\gamma}t^{\lambda}$.
2. Динамічне моделювання: Застосування панельних даних та економетричних методів (наприклад, Панельна регресія) дозволить врахувати індивідуальні ефекти років або порівняти "ВІЛІЮ" з іншими підприємствами Волинської області.

3. Оптимізація витрат: Результати цього розділу можуть бути використані в подальшій роботі для вирішення прямої задачі мінімізації витрат при заданому обсязі випуску Y (як було показано у розділі 3.1).

Висновки до розділу 3

У третьому розділі здійснено розв'язання задачі умовної оптимізації (мінімізації витрат) із застосуванням методу множників Лагранжа та перевіркою достатніх умов екстремуму. Проведено економетричне оцінювання параметрів виробничої функції на основі реальних даних ТОВ "ВІЛІЯ", що підтвердило адекватність моделі та дозволило зробити висновки щодо характеру віддачі від масштабу та ефективності використання ресурсів на підприємстві.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене оптимізації та емпіричній оцінці виробничих функцій на прикладі функціоналу Кобба-Дугласа, підтвердило ключову роль математичного моделювання у сфері економіки та ресурсного планування.

У роботі було всебічно розглянуто генезис функції Кобба-Дугласа, а також її позицію серед інших виробничих функцій, класифікованих за критерієм еластичності заміщення (σ). Було встановлено, що функціонал Кобба-Дугласа, завдяки своїй постійній одиничній еластичності ($\sigma = 1$), є найбільш гнучким інструментом для опису заміщення факторів виробництва. Ключовий акцент дослідження зроблено на оптимізації виробничих рішень. Зокрема, розв'язання задачі мінімізації витрат при фіксованому обсязі випуску було здійснено із застосуванням методу невизначених множників Лагранжа. Це дозволило математично вивести фундаментальну умову рівноваги виробника: гранична норма технічного заміщення (MRTS) повинна дорівнювати співвідношенню цін факторів ($\frac{w}{r}$). Таким чином, робота демонструє ефективність апарату багатовимірного диференціального числення для розробки раціональних моделей ресурсного планування.

Емпірична частина роботи була реалізована через економетричний аналіз виробничої діяльності ТОВ "ВІЛІЯ". За допомогою методу найменших квадратів (МНК) була оцінена логарифмічно-лінійна модель функції Кобба-Дугласа, яка виявилася статистично високо значущою ($R^2 = 0.992$, $F_R \approx 186$). Оцінена функція набула вигляду $Y = 3.37 \cdot K^{0.490} \cdot L^{0.625}$. Аналіз отриманих параметрів виявив, що виробничий процес підприємства є трудомістким (еластичність за працею, $\beta=0.625$, є вищою за еластичність за капіталом, $\alpha=0.490$). Ключовим

економічним висновком є наявність зростаючої віддачі від масштабу ($\alpha + \beta = 1.115 > 1$), що свідчить про високий потенціал нарощування обсягів виробництва. На основі цієї моделі було здійснено прогнозування чистого доходу на 2025 рік, який, за розрахунками, складе 1066.8 млн грн.

Результати дослідження мають безпосередню практичну цінність для управлінських рішень. Підтвердження зростаючої віддачі від масштабу вказує на стратегічну доцільність збільшення інвестицій в обидва фактори. При цьому, зважаючи на вищу еластичність за працею, пріоритет слід надавати заходам, що підвищують продуктивність праці (інвестиції у кваліфікацію та технології, що оптимізують працю). Таким чином, робота не лише виконала завдання статистичної верифікації економічної гіпотези, але й надала керівництву підприємства конкретну кількісну модель для раціонального ресурсного планування. У підсумку, магістерська робота підкреслює важливість інтеграції математичних та економетричних методів для глибокого аналізу та оптимізації сучасних виробничих процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
2. Засядько А. А., Королук С. С. Моделювання максимізації прибутку на основі виробничої функції Кобба-Дугласа // Системи обробки інформації. 2017. Вип. 2 (148). ISSN 1681-7710.
3. Kowalewski O. *Ekonomia matematyczna : podręcznik*. Warszawa : Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2008. 392 с.
4. Інформаційні технології: проблеми та перспективи : монографія / за заг. ред. В. С. Пономаренка. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 355 с.
5. Козьменко О. В., Кузьменко О. В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) : навч. посіб. Суми : Університетська книга, 2014. 406 с.
6. Nicholson W. *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. Cengage Learning, 2015. 792 с.
7. Muszyńska M. *Statystyka matematyczna w ekonometrii*. Warszawa : Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2015. 483 с.
8. Varian H. R. *Microeconomic Analysis*. W. W. Norton & Company, 1992. 562 с.
9. Rachwalska M. *W pogoni za pieniędzmi, czyli jak zmaksymalizować zyski*. Wrocław, 2012.
10. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995. 1002 с.
11. Witkowska D., Wrzosek K. *Metody matematyczne w ekonomii*. Warszawa : Wydawnictwo Naukowe PWN, 2016. 290 с.
12. Woroniecka I. *Ekonomia menedżerska*. Warszawa : Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Wydział Informatycznych Technik Zarządzania.

13. Funkcja produkcji – wykład. URL: <https://notatek.pl/funkcja-produkcji-wyklad> (дата звернення: 02.10.2025).
14. Сідько В. О. Моделювання стратегій виробництва підприємства : дипломна робота бакалавра. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 82 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/72934a8c-d60d-4327-9a4a-964d25b5d658/content> (дата звернення: 12.12.2025).
15. Фінансова звітність ТОВ "ВІЛІЯ". URL: <https://vzp.com.ua/uk/finansova-zvitnist/> (дата звернення: 05.10.2025).
16. Рибальченко Л. В. Економетрія : навч. посіб. Дніпро : ДДУВС, 2023. 102 с.

АНОТАЦІЯ

Марчук Є.В. Застосування виробничої функції Кобба-Дугласа для розв'язання економічних задач оптимізації. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 60 с.

Магістерська робота присвячена математичному аналізу виробничої функції Кобба-Дугласа та її застосуванню в задачах оптимізації. Досліджено теоретичні властивості функції. Основний акцент зроблено на застосуванні математичного аналізу для оптимізації виробничих рішень: із використанням методу множників Лагранжа розв'язано задачу на умовний екстремум (мінімізацію витрат). Здійснено економетричний аналіз діяльності агропідприємства ТОВ «ВІЛІЯ», а також виконано прогнозування доходу та рекомендації щодо ресурсного планування.

Ключові слова: математичне моделювання, функція Кобба-Дугласа, метод Лагранжа, умовний екстремум, оптимізація, економетричний аналіз, віддача від масштабу.

Marchuk Y.V. Optimization problems of production functions: a case study of the Cobb-Douglas function. Master's thesis. Lutsk, 2025. 60 p.

The master's thesis is devoted to the mathematical analysis of the Cobb-Douglas production function and its application in optimization problems. The theoretical properties of the function are investigated. The main focus is on the application of mathematical analysis for optimizing production decisions: using the method of Lagrange multipliers, the problem of conditional extremum (cost minimization) is analytically solved. An econometric analysis of the agricultural enterprise LLC "VILIYA" was carried out, the results of which revealed the labor intensity of the process and confirmed increasing returns to scale.

Keywords: mathematical modeling, Cobb-Douglas function, Lagrange method, conditional extremum, optimization, econometric analysis, returns to scale.