

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

ПРИХОДЬКО СТАНІСЛАВ АНАТОЛІЙОВИЧ

**ЧИСЛА КАТАЛАНА: КОМБІНАТОРНІ ІНТЕРПРИТАЦІЇ ТА ЇХ
УЗАГАЛЬНЕННЯ**

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Наукові керівники :

ФІЛОЗОФ ЛЕОНТІЙ ІВАНОВИЧ

кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

СОЛІЧ КАТЕРИНА ВАСИЛІВНА

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри математичного
аналізу та статистики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Федунік-Яремчук О. В. _____

Луцьк – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 Теоретичні основи чисел Каталана.....	8
1.1. Визначення чисел Каталана.....	8
1.2. Історія вивчення та внесок провідних математиків.....	8
1.3. Основні властивості чисел Каталана.....	11
1.4. Аналітичні вирази та рекурентні співвідношення.....	15
1.5. Місце чисел Каталана у комбінаториці.....	17
Висновки до розділу 1.....	20
РОЗДІЛ 2. Комбінаторні інтерпретації чисел Каталана.....	21
2.1. Дужкові структури та правильні послідовності.....	21
2.2. Дерева та бінарні дерева.....	22
2.3. Побудова діагоналей у багатокутниках.....	24
2.4. Шляхові моделі (шляхи Діка)	25
2.5. Інші класичні комбінаторні об'єкти.....	26
2.6. Візуалізація інтерпретацій.....	28
Висновки до розділу 2.....	30
РОЗДІЛ 3. Узагальнення чисел Каталана.....	31
3.1. Узагальнення через q -аналог.....	31
3.2. k -узагальнення (k -Catalan numbers)	33
3.3. Матричні та багатовимірні узагальнення.....	34
3.4. Зв'язок з іншими спеціальними послідовностями (наприклад, числа Фібоначчі, числа Белла, числа Шредера тощо)	38
3.5. Алгебраїчні та топологічні узагальнення.....	40
3.6. Узагальнення в контексті теорії мов і граматик.....	42
Висновки до розділу 3.....	43
РОЗДІЛ 4. Застосування чисел Каталана та їх узагальнень.....	45
4.1. Застосування в теорії алгоритмів.....	45
4.2. Числа Каталана в інформатиці та програмуванні.....	47
4.3. Використання у геометрії та теорії вузлів.....	49

	3
4.4. Роль у біоінформатиці (моделі РНК-структур)	52
4.5. Можливості використання у сучасних дослідженнях та задачах.....	53
Висновки до розділу 4.....	56
ВИСНОВКИ.....	57
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	58
ДОДАТКИ.....	60

ВСТУП

Актуальність теми: Сучасна математика дедалі частіше звертається до об'єктів, що мають універсальний характер і зустрічаються у багатьох розділах науки. Одним із таких об'єктів є числа Каталана – відома послідовність натуральних чисел, яка має надзвичайно широке застосування у комбінаториці, теорії алгоритмів, інформатиці, теорії мов, алгебраїчній геометрії, біоінформатиці, топології та інших галузях.

Актуальність дослідження чисел Каталана зумовлена їхньою універсальністю та фундаментальним значенням у розв'язанні широкого спектру математичних задач. Завдяки своїм комбінаторним властивостям, ці числа слугують зручним інструментом для підрахунку структур, які виникають у задачах теорії дерев, дужкових виразів, розбиття багатокутників, шляхів на решітках тощо. Водночас зростає інтерес до узагальнень чисел Каталана, таких як k -числа Каталана, q -аналогічні послідовності, багатовимірні інтерпретації та алгебро-топологічні структури, що розширюють спектр застосувань.

Попри те, що класичні властивості чисел Каталана добре досліджені, їх новітні застосування та зв'язки з іншими математичними об'єктами (зокрема, числами Шредера, Белла, Фібоначчі) залишаються предметом активного наукового пошуку. Саме тому поглиблене дослідження як базових, так і узагальнених чисел Каталана є надзвичайно актуальним з позицій як теоретичної, так і прикладної математики.

Наукове та практичне значення роботи: Наукова цінність роботи полягає в систематизації та узагальненні знань про числа Каталана, їх комбінаторні інтерпретації та загальні формалізми. Практичне значення зумовлене широким застосуванням цих чисел у структурному аналізі алгоритмів, у моделюванні мов програмування, при розв'язанні задач обробки даних, а також у математичному моделюванні біологічних структур, зокрема РНК-складок.

Крім того, узагальнені числа Каталана дають змогу створювати нові моделі у фізиці, криптографії та теорії автоматів. Це підкреслює потенціал теми у розвитку сучасних міждисциплінарних досліджень.

Аналіз наукових літературних джерел: Питання, пов'язані з числами Каталана, досліджувалися у працях таких відомих математиків, як Л. Ейлер, Е. Каталан, Й. Сегнер, К. Гольдбах. У ХХ столітті значний внесок у вивчення цієї послідовності зробили Дж. Ріордан, Е. Т. Белл, Р. Стенлі, Г. Гулд, І. Пак та ін. У вітчизняній науці питанням комбінаторики та узагальнених послідовностей присвячено праці В. В. Мазура, А. В. Кашаніна, О. М. Шарової та інших дослідників.

Загалом, література містить значну кількість комбінаторних інтерпретацій чисел Каталана, але значно менше опрацьовано їхнє системне узагальнення та порівняльний аналіз з іншими послідовностями. У цьому контексті дана робота заповнює наукову нішу в галузі прикладної та теоретичної комбінаторики.

Мета та завдання дослідження: Метою магістерської роботи є систематизація класичних і новітніх комбінаторних інтерпретацій чисел Каталана, вивчення їхніх узагальнень та аналіз потенційних застосувань у різних галузях математики та суміжних наук.

Для досягнення поставленої мети було визначено такі **завдання**:

1. Дослідити історичні аспекти виникнення та вивчення чисел Каталана.
2. Проаналізувати основні властивості та аналітичні представлення чисел Каталана.
3. Розглянути класичні комбінаторні інтерпретації (дужки, дерева, шляхи, багатокутники).
4. Вивчити відомі та новітні узагальнення чисел Каталана: q -аналог, k -узагальнення, матричні моделі.
5. Показати застосування чисел Каталана у теорії алгоритмів, біоінформатиці, інформатиці, геометрії.

6. Сформулювати практичні приклади для ілюстрації комбінаторних моделей.

Методи дослідження: У процесі дослідження використовувалися такі методи:

- аналітичні методи дослідження рекурентних та породжувальних функцій;
- методи комбінаторного аналізу;
- елементи структурної теорії мов та граматик;
- графічне моделювання (візуалізація інтерпретацій);
- порівняльно-аналітичний метод для вивчення узагальнень.

Обчислення здійснювалися за допомогою інструментів комп'ютерної математики, а також комп'ютерного моделювання.

Об'єкт і предмет дослідження: Об'єктом дослідження є числові послідовності комбінаторної природи.

Предметом дослідження виступають числа Каталана, їх комбінаторні інтерпретації, властивості та узагальнення, а також застосування у прикладних задачах.

Наукова новизна полягає в систематизації відомих комбінаторних моделей чисел Каталана, узагальненні класичних підходів та аналізі їх потенціалу для вирішення складніших математичних задач.

Апробація результатів та публікації: Основні результати дослідження апробовані на кафедрі математичного аналізу та статистики Волинського національного університету ім. Л. Українки, а також у доповіді на Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Сучасна наука та освіта Волині” за темою «Практичне застосування чисел Каталана».

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків.

У першому розділі подано теоретичні основи чисел Каталана: означення, історію вивчення, властивості, аналітичні формули та місце у комбінаториці.

Другий розділ присвячено комбінаторним інтерпретаціям: дужковим структурам, деревам, шляхам Діка тощо. У третьому розділі досліджено різні узагальнення чисел Каталана: k -аналог, q -аналог, матричні, топологічні моделі та інші. У четвертому розділі розглянуто застосування чисел Каталана та їх узагальнень у різних сферах: інформатиці, геометрії, біоінформатиці та теорії алгоритмів.

У розділах подано приклади, завдання, графіки, обґрунтовано теоретичні висновки та наведено елементи практичного застосування.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

1.1. Визначення чисел Каталана

Числа Каталана — це послідовність натуральних чисел, які мають виняткове значення в дискретній математиці, зокрема в комбінаториці. Вперше вони з'явилися в роботах Леонарда Ейлера ще в XVIII столітті, однак систематичне вивчення і визнання дістали після праць Ежена Шарля Каталана [8, с. 508–516].

У загальному вигляді класична формула для n -го числа Каталана задається як:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, n \in N_0 \quad (1.1)$$

Перші члени послідовності:

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429 \dots$$

Ці числа описують кількість варіантів побудови структур, які задовольняють певні умови симетрії або вкладеності. Наприклад, вони відповідають кількості правильних дужкових послідовностей довжини $2n$, кількості шляхів Діка, що не перетинають діагональ, кількості бінарних дерев з n внутрішніми вузлами тощо [1, с. 14–18; 3, с. 219–230; 6, с. 128–135].

Завдання 1.1. Обчисліть значення C_6 за формулою (1.1):

Розв'язання

$$C_6 = \frac{1}{6+1} \binom{2 \cdot 6}{6} = \frac{1}{7} \binom{12}{6} = \frac{1}{7} \cdot 924 = 132.$$

1.2. Історія вивчення та внесок провідних математиків

Числа Каталана мають довгу і багатогранну історію дослідження, яка охоплює понад два з половиною століття математичної думки. Попри те, що назву вони отримали лише у XX столітті, їх поява в математичних задачах простежується ще з XVIII століття. Одним із перших, хто розглядав

обчислення, що нині пов'язані з числами Каталана, був китайський математик Мін'антун, який у 1730-х роках вивчав тригонометричні ряди. У його роботах трапляються формули, які сучасні дослідники інтерпретують як такі, що містять числа Каталана, хоча сам автор не використовував для них спеціального означення і не розглядав їхній комбінаторний зміст.

Найбільш ґрунтовні кроки у формалізації цих чисел було зроблено у працях Леонарда Ейлера [8, с. 508–512]. У своєму листуванні з Крістіаном Гольдбахом у 1751 році Ейлер розглядав задачі тріангуляції опуклих багатокутників – зокрема, питання про кількість способів розбиття $(n + 2)$ -кутника на трикутники. Ейлер обчислив перші значення послідовності для n до 8, емпірично сформулював гіпотезу щодо рекурентної залежності й припустив наявність замкненого аналітичного виразу. Гольдбах, у свою чергу, знайшов породжувальну функцію для цієї послідовності, перетворивши її на квадратне рівняння, що дозволило будувати подальші члени послідовності рекурсивно. Разом вони обчислили значення чисел Каталана до $n = 18$.

Ще один важливий внесок належить Йоганну Сегнеру, який у 1761 році опублікував перше відоме рекурентне співвідношення для задачі тріангуляції багатокутника. У своїй роботі він також навів таблицю значень, хоча деякі з них містили арифметичні похибки. Саме Сегнер першим запропонував загальну схему для обчислення кількості розбиттів, що нині відповідають числам Каталана.

Хоча математична суть послідовності вже формувалася в працях Ейлера та Сегнера, власне комбінаторне осмислення чисел було зроблено бельгійським математиком Еженом Шарлем Каталаном у 1838 році. Він першим запропонував трактувати ці числа як кількість правильних дужкових послідовностей, а також як число способів правильного парування дужок у виразах, що описують порядок виконання множення. Хоча Каталан сам назвав ці числа «числами Сегнера», згодом саме його ім'я закріпилося в науковій літературі.

Попри фундаментальні відкриття Ейлера, Сегнера і Каталана, термін «числа Каталана» увійшов до широкого вжитку лише у XX столітті. У 1901 році німецький математик Еуген Нетто вжив цей термін у своїй праці з комбінаторики, хоча тоді він ще не був загальноприйнятим. У подальші десятиліття завдяки працям таких авторів, як Едвард Т. Белл і Джон Ріордан, назва «числа Каталана» стала стандартною. Саме Ріордан у 1960-х роках через свої популярні комбінаторні огляди зробив цю назву загальновизнаною в академічному середовищі [6, с. 167–170].

У другій половині XX століття розпочався новий етап досліджень чисел Каталана, коли вони були виявлені у численних контекстах: від теорії графів до алгебри та топології. Зокрема, Вільям Браун у 1965 році систематизував різноманітні задачі, пов'язані з цією послідовністю, в тому числі узагальнення Ейлера-Сегнера та Пфаффа-Фусса. У 1971 році Генрі Гулд опублікував бібліографію, яка містила понад 465 джерел, що згадують числа Каталана. Його оновлена версія 2007 року охоплює ще ширший корпус літератури.

У сучасний період фундаментальну роль у систематизації знань про числа Каталана відіграє Річард Стенлі – один із провідних спеціалістів з комбінаторики. У своїй двотомній праці «Enumerative Combinatorics» він зібрав понад 200 комбінаторних інтерпретацій цієї послідовності, навів її зв'язки з алгеброю, геометрією, теорією вузлів, теорією мов, формальними граматиками та іншими галузями [3, с. 219–230]. Крім того, Ігор Пак здійснив ґрунтовне історико-математичне дослідження розвитку чисел Каталана, в якому детально висвітлив внесок кожного ключового математика впродовж понад двох століть [10, с. 5–15].

Таким чином, історія чисел Каталана – це не лише історія однієї математичної послідовності, а приклад еволюції математичної думки, де прості задачі дужкових послідовностей або триангуляцій багатокутників поступово відкривали глибокі структурні зв'язки у найрізноманітніших розділах математики.

1.3. Основні властивості чисел Каталана

Числа Каталана утворюють послідовність, яка має низку унікальних властивостей, що зумовлює їх важливість не лише в комбінаториці, але й у багатьох розділах математики, включаючи алгебру, теорію графів, теорію формальних мов, геометрію та інформатику [3, с. 219–224; 6, с. 128–135; 7, с. 5–10].

У цьому пункті зосередимо увагу на арифметичних, алгебраїчних, рекурентних і структурних властивостях послідовності C_n .

1) Арифметичні властивості:

1. Цілочисельність.

Незважаючи на складність виразу $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, значення C_n завжди є цілими числами: $C_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Це пояснюється тим, що знаменник $n + 1$ завжди ділить чисельник – так званий принцип Коші в теорії чисел [6, с. 69–70].

2. Асимптотичне зростання.

Послідовність зростає надзвичайно швидко.

При $n \rightarrow \infty$ вона має асимптотику:

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}} \quad (1.2)$$

Це не є експоненційне зростання у звичайному сенсі, однак воно значно перевершує поліноміальні темпи [3, с. 253–254; 7, с. 47–50].

3. Парність.

Для $n > 0$, число C_n парне тоді і тільки тоді, коли n не є степенем двійки [6, с. 132–133].

Наприклад:

$C_1 = 1$ – непарне;

$C_2 = 2$ – парне;

$C_4 = 14$ – парне;

$C_8 = 1430$ – парне;

але $C_{16} = 35357670$ – теж парне, оскільки 16 – степінь двійки.

Тобто ця властивість має складні винятки.

2) Алгебраїчні властивості

1. Алгебраїчність генеруючої функції.

Генеруюча функція чисел Каталана:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad \in \quad \text{алгебраїчною функцією, тобто}$$

задовольняє алгебраїчне рівняння:

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

Це рівняння відіграє фундаментальну роль у теорії формальних мов та контекстно-вільних граматик [3, с. 227–229; 6, с. 173–175].

2. Самоподібність.

Властивість рекурсивної самоподібності виявляється в тому, що багато структур, які описуються числами Каталана (дерева, дужкові послідовності), можна побудувати з менших об'єктів того ж типу [1, с. 20–23; 6, с. 130–133].

3) Рекурентні властивості

Класичне рекурентне співвідношення:

$C_0 = 1$, $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i}$ показує, що кожен член є результатом комбінацій усіх попередніх. Це відображає властивість розбиття складного об'єкта на дві менші частини, що має критичне значення в теорії дерев і рекурсивних структур [3, с. 220].

Також відома інша корисна рекурентна формула:

$$C_n = \frac{4n - 2}{n + 1} \cdot C_{n-1}$$

Вона зручна для обчислень та дозволяє швидко знаходити значення C_n не вдаючись до повної суми [6, с. 69–70].

4) Комбінаторна універсальність

1. Числа Каталана виникають у понад 200 різних комбінаторних задач: кількість правильних дужкових послідовностей, кількість бінарних дерев, кількість шляхів Діка, тріангуляції багатокутників, таблиці Юнга тощо [3, с. 221–232; 6, с. 128–135; 9; 13, с. 95–98].

2. Симетрія.

У деяких інтерпретаціях C_n описують об'єкти, інваріантні до симетрії, наприклад, відображення шляху в діагоналі квадрата [3, с. 226–229]. Це означає, що деякі задачі можна формулювати у двох дзеркальних варіантах, які все одно дають однакову кількість конфігурацій.

Завдання 1.3: Проаналізуйте, які властивості чисел Каталана можна виявити в таблиці значень. Побудуйте графік і зробіть висновки щодо характеру зростання.

n	C_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430

Розв'язання

З аналізу цієї таблиці можна зробити кілька важливих спостережень:

1. Монотонне зростання:

Починаючи з $n = 1$, значення C_n строго зростають, тобто:

$$C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_{10}$$

2. Прискорене зростання (суперлінійне):

Різниця між сусідніми значеннями збільшується нерівномірно, але загалом – дуже швидко.

Наприклад:

$$C_5 = 42, C_6 = 132 \Rightarrow \Delta = 90,$$

$$C_9 = 4862, C_{10} = 16796 \Rightarrow \Delta = 11934$$

3. Зростання є підекспоненційним:

Приблизне асимптотичне зростання чисел Каталана задається формулою (1.2). Це свідчить, що послідовність зростає швидше, ніж будь-який поліном, але повільніше, ніж експонента.

4. Цілочисельність та структурна регулярність:

Усі значення C_n – цілі додатні числа. Це пов'язано з їх комбінаторною природою: вони рахують об'єкти (дерева, шляхи, послідовності), що мають дискретну кількість.

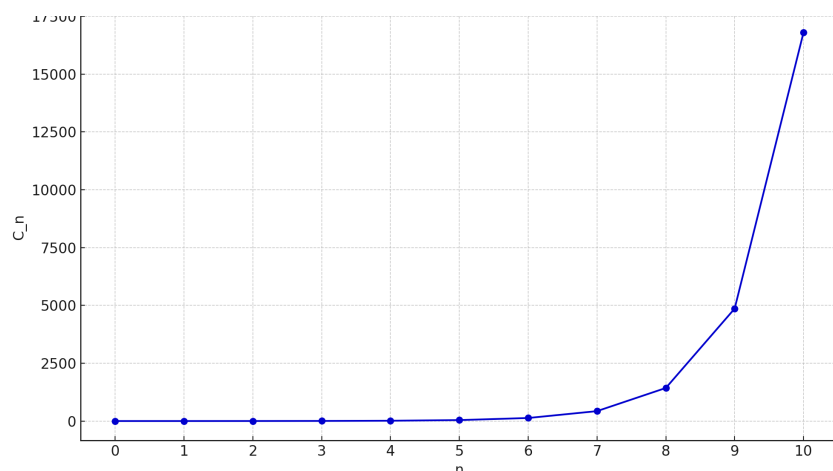


Рис. 1.1 Графік чисел Каталана при $n = 0 \dots 10$

Графік показує експоненційну форму зростання: крива різко зростає після $n = 5$, що ще раз підтверджує асимптотичну формулу.

Він демонструє стрімке зростання послідовності, яке підкреслює характерну суперлінійну поведінку цих чисел.

1.4 Аналітичні вирази та рекурентні співвідношення

У класичній комбінаториці однією з ключових особливостей чисел Каталана є те, що вони мають не лише замкнений аналітичний вираз, а й багатий арсенал рекурентних співвідношень, що робить цю послідовність гнучкою для аналітичного і числового дослідження [3, с. 219–221; 6, с. 66–72; 7, с. 5–10].

Явна формула, яку зазвичай приймають за означення

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

є результатом розв'язку відповідного рекурентного співвідношення та може бути отримана з комбінаторного підходу до правильного упорядкування дужок або розбиття багатокутників. З точки зору аналітичної комбінаторики, ця формула є прикладом гіпергеометричного виразу.

Також, аналітична форма може бути виведена з формули Чу-Вандермонда:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{n}$$

після відповідної підстановки.

В аналітичних застосуваннях важливо враховувати й альтернативні форми:

$C_n = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$, які дозволяють обчислювати C_n без факторіалів, що особливо зручно при великих n .

Ще одна формула:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad \text{свідчить про симетрію відносно}$$

центрального елемента в біноміальному трикутнику Паскаля.

Генеруюча функція

Генеруюча функція для чисел Каталана:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

є алгебраїчною, і виконує рівняння:

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

Це дає змогу формально трактувати числа Каталана як коефіцієнти при розкладі кореня алгебраїчного рівняння – що пов'язує їх із теорією алгебраїчних функцій.

Рекурентні співвідношення в узагальненому вигляді

Окрім класичного:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i}, \text{ існують інші рекурентні зв'язки.}$$

Наприклад, з використанням зсуву індексу:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} \cdot C_{n-1}, C_0 = 1 \quad (1.3),$$

що дозволяє отримувати значення C_n швидше, ніж через повну суму.

Альтернативні форми включають $(n+2)C_{n+1} = 2(2n+1)C_n$, які зручно застосовувати в асимптотичному аналізі та машинному обчисленні.

Рекурентні співвідношення чисел Каталана є надзвичайно зручними для індуктивних доведень, особливо при розгляді структур із рекурсивною природою (дерева, вкладені множини, граматичні структури) [3, с. 220–221; 6, с. 69–71; 7, с. 8–10]. Наприклад, правильне розміщення $n+1$ пар дужок можна розглядати як усі варіанти вставлення ще однієї пари в структуру з n парами – що і відображає суть рекурентності.

Завдання 1.4:

Знайти значення C_5 за формулою (1.3) ($C_4 = 14$):

Розв'язання

Знаючи, що $C_4 = 14$, маємо:

$$C_5 = \frac{4 \cdot 5 - 2}{5 + 1} \cdot 14 = \frac{18}{6} \cdot 14 = 3 \cdot 14 = 42.$$

Аналітичні вирази та рекурентні співвідношення чисел Каталана демонструють потужний зв'язок між формальними обчисленнями, комбінаторною інтерпретацією та глибокими алгебраїчними структурами. Рекурентність і генеруючі функції дозволяють не лише ефективно обчислювати значення, а й формалізувати процеси побудови дискретних структур, які виникають у широкому спектрі прикладних задач.

1.5. Місце чисел Каталана у комбінаториці

Числа Каталана є однією з найбільш відомих і фундаментальних послідовностей у комбінаториці. Їх універсальність і здатність описувати велику кількість структур пояснюють надзвичайно широке застосування цих чисел у дискретній математиці, теорії графів, формальних мовах, теорії алгоритмів, а також у різних прикладних галузях [3, с. 219–238; 6, с. 128–136; 9]. Їх часто називають «універсальною комбінаторною послідовністю» через надзвичайну кількість інтерпретацій.

Найбільш відомі ситуації, де числа Каталана природно виникають:

1. Кількість правильних дужкових виразів (із n парами дужок) [3, с. 219–221; 6, с. 128–130]:

Наприклад, для $n = 3$ існує 5 правильних дужкових виразів: $((()))$, $(())()$, $(())()$, $()(())$, $()()()$.

2. Кількість бінарних дерев із n внутрішніми вузлами:

У структурі бінарного дерева, де кожна вершина має 0 або 2 нащадки, число Каталана визначає кількість таких дерев [6, с. 130–133].

3. Кількість способів побудови діагоналей у опуклому $(n + 2)$ – кутнику, що не перетинаються:

Кількість таких тріангуляцій визначається числом Каталана [3, с. 221–222].

4. Кількість шляхів Діка (Dyck paths) довжини $2n$, які не опускаються нижче осі абсцис. Це шляхи з кроками вгору $(1,1)$ та вниз $(1,-1)$, що

починаються в точці $(0, 0)$, закінчуються в $(2n, 0)$, і не опускаються нижче осі x .

5. Кількість перестановок без заборонених підпоследовностей (pattern-avoiding permutations), які не містять підпоследовності типу 231.

6. Кількість лінійних упорядкувань множини з обмеженнями вкладеності (stack-sortable permutations).

7. Кількість можливих структур вкладеності у теорії граматики і мов, наприклад, при побудові дерев синтаксичного розбору контекстно-вільної граматики.

У OEIS A000108, яка присвячена числам Каталана, перелічено понад 200 інтерпретацій цієї послідовності. Це говорить про те, що вони є центральним об'єктом у комбінаториці [9].

Однією з причин такої універсальності є структурна рекурсивність об'єктів, які описують числа Каталана. Наприклад, бінарне дерево можна будувати, рекурсивно додаючи ліве й праве піддерево, а правильний дужковий вираз – шляхом вкладення коротших виразів у більші. Це дає змогу застосовувати формули чисел Каталана до великої кількості задач.

Формально, для великої кількості задач комбінаторного характеру, якщо можна побудувати об'єкт O_n розбивши його на дві незалежні частини O_k і O_{n-1-k} , то число таких об'єктів часто задовольняє рекурентне співвідношення чисел Каталана:

$$C_n = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-1-k}$$

Ця властивість дозволяє застосовувати числа Каталана в ситуаціях, де спостерігається така рекурсивна або симетрична структура [3, с. 220–221; 6, с. 69–71; 13, с. 95–98].

Таким чином, місце чисел Каталана в комбінаториці є центральним. Вони виступають універсальним інструментом для обчислення кількості структур, що мають вкладену, симетричну або рекурсивну природу. Їх значення важко

переоцінити – у багатьох задачах чисел Каталана просто не уникнути. Це пояснює, чому вони є об'єктом активного наукового дослідження і мають численні узагальнення.

Завдання 1.5.

Для $n = 4$ визначте:

1. Кількість правильних дужкових виразів з 4 парами дужок.
2. Кількість бінарних дерев із 4 внутрішніми вузлами.
3. Кількість способів триангуляції опуклого шестикутника (тобто з 6 вершинами).
4. Побудуйте один приклад Дуск-шляху довжини 8.

Розв'язання

В усіх перелічених випадках кількість об'єктів задається числом Каталана:

$$C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$$

1. Кількість правильних дужкових виразів із 4 парами дужок:

Таких виразів – 14. Ось приклади деяких із них:

$((((()))$, $(((()))$, $((()))$, $((()))$, $((()))$, $((()))$

(усього 14 — легко знайти всі за допомогою рекурсивної генерації)

2. Кількість бінарних дерев із 4 внутрішніми вузлами:

Також 14. Це деревовидні структури, де кожен вузол має або двох нащадків, або жодного. Усі різні за структурою.

3. Кількість способів триангуляції шестикутника:

В опуклому багатокутнику з $n + 2 = 6$ вершинами, кількість способів провести неперетинні діагоналі, які розбивають його на трикутники, – також 14.

4. Приклад Дуск-шляху довжини 8:

Один із можливих Дуск-шляхів (U – крок вгору, D – крок вниз):

U U D U D D U D

Він відповідає правильному дужковому виразу:

$((()())())$

Завдяки одному і тому ж числу C_4 ми змогли визначити кількість об'єктів у чотирьох різних, але пов'язаних комбінаторних задачах. Це яскраво демонструє універсальність чисел Каталана та їх ключову роль у комбінаториці.

Висновки до розділу 1

Числа Каталана є центральною темою у багатьох комбінаторних проблемах. Вони поєднують алгебраїчні, геометричні та аналітичні підходи. Їх рекурсивна природа дозволяє ефективно описувати дужкові структури, шляхи, дерева та перестановки.

РОЗДІЛ 2. КОМБІНАТОРНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

2.1. Правильні дужкові послідовності

Числа Каталана мають широке застосування у комбінаториці, і однією з найвідоміших їх інтерпретацій є кількість правильних дужкових послідовностей, утворених з n пар круглих дужок. Така інтерпретація є не лише класичною, а й однією з найбільш інтуїтивно зрозумілих [1, с. 14–18; 3, с. 219–221; 6, с. 128–130; 11, с. 185–188].

Правильна дужкова послідовність – це послідовність дужок «(» і «)», яка відповідає наступним умовам:

- кожна відкрита дужка має відповідну закрити;
- жодна закрита дужка не з'являється раніше за свою відповідну відкриту;
- загальна кількість відкритих і закритих дужок дорівнює n пар.

Формально, правильна дужкова послідовність – це така, у якій у жодному її початковому фрагменті кількість закриваючих дужок не перевищує кількість відкриваючих:

$\forall k \in \{1, \dots, 2n\}: \# "(" \geq \# ")"$ на перших k позиціях.

Число таких послідовностей для n пар дужок дорівнює числу Каталана C_n .

Наприклад:

Для $n = 1$: ()

Для $n = 2$: () (), (())

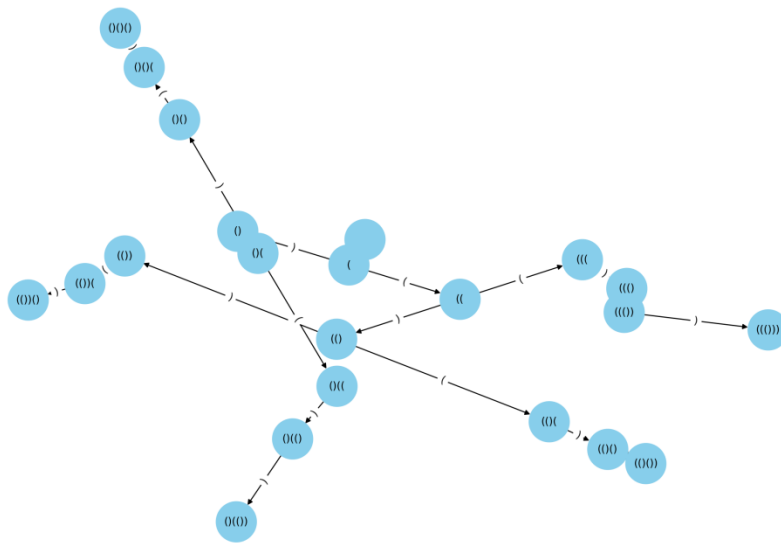
Для $n = 3$: ((())), (()) (), (()) (), (()) (), (()) ()

Загалом:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Ця інтерпретація чисел Каталана має надзвичайно велике значення в інформатиці, зокрема при побудові парсерів, синтаксичних дерев, аналізі

структур у мовах програмування та компіляторах, де важливо правильно вкладати дужки, оператори та блоки [3, с. 227–229; 9; 11, с. 190–195].



Мал. 2.1 – Дерево генерації правильних дужкових послідовностей ($n = 3$)

Ось дерево генерації правильних дужкових послідовностей для $n = 3$, яке демонструє всі можливі шляхи побудови коректної структури за допомогою рекурсивного додавання дужок.

На Мал. 2.1 зображено дерево рекурсивної побудови всіх правильних дужкових послідовностей, що складаються з трьох пар дужок. Кожен вузол дерева відповідає проміжному стану рядка дужок, а кожне ребро – додаванню відкриваючої або закриваючої дужки. Візуалізація демонструє, що на кожному кроці дотримуються умови правильності: кількість відкриваючих дужок не перевищує n , а кількість закриваючих – не перевищує кількість відкриваючих.

2.2. Деревя та бінарні деревя

Деревя – це фундаментальні об’єкти в теорії графів та комбінаториці, які застосовуються для опису ієрархічних структур у різних галузях: від інформатики й біології до лінгвістики. Формально, деревя – це зв’язний ациклічний граф. Якщо зафіксувати один із вузлів як корінь, отримаємо кореневе деревя, в якому кожен вузол має унікального батьківського вузла (крім кореня) [4, с. 145–150; 11, с. 190–195].

Особливим класом дерев є бінарні дерева, де кожен вузол має не більше двох дітей – лівого та правого нащадка. Упорядковані бінарні дерева мають значну кількість комбінаторних застосувань, зокрема в побудові структур даних та синтаксичних аналізаторах.

У комбінаториці кількість планарних впорядкованих бінарних дерев з n внутрішніми вузлами описується n – им числом Каталана:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, n \in N_0$$

Відповідно, кількість усіх можливих структур бінарних дерев росте експоненціально.

n (внутрішні вузли)	C_n – кількість дерев
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429

Таб. 2.1 – Кількість бінарних дерев для перших n

Бінарні дерева зручно описуються рекурсією:

$$C_n = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-1-k}, C_0 = 1.$$

Це означає, що кожне дерево можна отримати як комбінацію лівого та правого піддерев різної глибини. Наприклад, дерево з 3 внутрішніми вузлами можна подати у вигляді п'яти структур:

1. $((\bullet \bullet) (\bullet \bullet))$
2. $(\bullet ((\bullet \bullet) \bullet))$
3. $((\bullet (\bullet \bullet)) \bullet)$
4. $(\bullet \bullet) (\bullet (\bullet \bullet))$

5. $(\bullet(\bullet(\bullet\bullet)))$

(де $\bullet$ – внутрішній вузол)

Бінарні дерева – це окремий випадок k -арних дерев, де кожен вузол має не більше k нащадків. Кількість таких дерев із n внутрішніми вузлами обчислюється за формулою узагальнених чисел Каталана:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{(k-1)n+1} \binom{kn}{n}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Це так звані Fuss–Catalan числа (див. розділ 3), які охоплюють багато типів деревних структур, що застосовуються у моделюванні, геометрії та обчисленнях.

Приклад застосування:

- Інформатика: бінарні дерева використовуються для реалізації бінарних дерев пошуку (BST), дерев виразів, пріоритетних черг (кучі).
- Лінгвістика: для побудови дерев синтаксичного аналізу речень.
- Математика: для опису рекурсивних структур, операцій над поліномами, множинних вкладень.

2.3. Побудова діагоналей у багатокутниках

Одним із класичних застосувань чисел Каталана є підрахунок кількості способів розбиття опуклого багатокутника на трикутники неперетинними діагоналями. Це завдання має глибокі зв'язки з геометричною комбінаторикою та алгебраїчними структурами, такими як асоціатори, триангулювання та політопи [1, с. 22–25; 3, с. 221–222; 9].

Кількість таких триангуляцій дорівнює C_n – n -му числу Каталана:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Геометрична інтерпретація:

- $n + 2$ – кількість вершин багатокутника

- n – кількість діагоналей, які потрібно провести
- n – також дорівнює кількості трикутників у триангуляції

Завдання 2.3:

Скількома способами можна розбити правильний шестикутник на трикутники неперетинними діагоналями?

Розв'язання

У цьому випадку:

$$n + 2 = 6 \Rightarrow n = 4$$

$$\text{Шукаємо } C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$$

Отже, існує 14 різних триангуляцій опуклого шестикутника.

Кількість вершин $v = n + 2$	n	C_n – кількість триангуляцій
3	1	1
4	2	2
5	3	5
6	4	14
7	5	42
8	6	132
9	7	429

Таб. 2.2 – Кількість триангуляцій для $(n + 2)$ – кутника

2.4. Шляхові моделі (шляхи Діка)

Одним із найвідоміших комбінаторних тлумачень чисел Каталана є модель шляхів Діка (Dyck paths). Вона забезпечує глибокий зв'язок між комбінацією, геометрією та теорією формальних мов, дозволяючи застосовувати числа Каталана для розв'язання задач із дискретної математики, теорії алгоритмів і комп'ютерних наук [1, с. 19–22; 3, с. 224–229; 4, с. 75–77; 6, с. 133–135].

Означення: Шляхом Діка довжини $2n$ називається послідовність кроків на площині, що починається в точці $(0,0)$, закінчується в точці $(2n, 0)$ і не опускається нижче осі абсцис, де дозволені лише два типи кроків:

підйом $U = (1,1)$

спуск $D = (1,-1)$.

Таким чином, Диск-шлях – це правильна дужкова послідовність у графічній формі [2, с. 65–67; 9].

Нехай $n = 3$, тоді кількість Диск-шляхів довжини 6 дорівнює:

$$C_3 = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$$

Можливі Диск-шляхи для $n = 3$:

1. U U U D D D
2. U U D U D D
3. U U D D U D
4. U D U U D D
5. U D U D U D

Диск-шлях	Графічне представлення	Відповідна дужкова структура
U U U D D D	↑↑↑↓↓↓	((()))
U U D U D D	↑↑↓↑↓↓	((()))
U U D D U D	↑↑↓↑↓↑	(())()
U D U U D D	↑↓↑↑↓↓	()()
U D U D U D	↑↓↑↓↑↓	()()

Застосування Диск-шляхів:

Інформатика: автоматна теорія, синтаксичний аналіз (наприклад в мовах програмування).

Формальні мови: граматика Діка як базова модель правильно вкладених структур.

Фізика: моделювання конфігурацій у системах з обмеженням зниження енергії.

Теорія ймовірностей: стохастичні процеси з відбиттям.

2.5. Інші класичні комбінаторні об'єкти

1. Кореневі впорядковані дерева (ordered rooted trees)

Кореневе дерево – це дерево з виділеною кореневою вершиною, у якому порядок нащадків кожної вершини має значення. Тобто, якщо у вершини є кілька нащадків, то їх порядок важливий (наприклад, лівий та правий порядок) [1, с. 26–27; 3, с. 236–238; 4, с. 111–114; 11, с. 186–189].

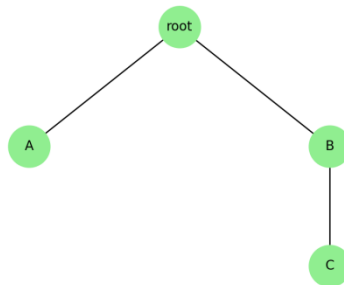
Кількість корневих впорядкованих дерев з n ребрами дорівнює числу Каталана C_n .

Завдання 2.5.1:

Побудуйте всі кореневі впорядковані дерева з 3 ребрами.

Розв'язання

Для $n = 3$ кількість таких дерев дорівнює $C_n = 5$.



Мал. 2.2 – Кореневе впорядковане дерево ($n = 3$)

2. Пари хорд, що не перетинаються, які з'єднують $2n$ точок на колі

Розглянемо $2n$ точок, розміщених на колі. Потрібно з'єднати всі ці точки попарно хордою так, щоб жодні дві хорди не перетиналися всередині кола [1, с. 27–28; 3, с. 229–232; 9; 10, с. 38–40].

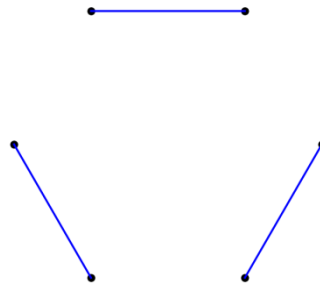
Кількість способів такої неперетинаючої розбивки пар дорівнює числу Каталана C_n .

Завдання 2.5.2:

Накресліть усі неперетинаючі пари хорд для $n = 3$.

Розв'язання

Для $n = 3$, існує $C_n = 5$ варіантів.



Мал. 2.3 – Неперетинаючі хорди ($n = 3$)

3. Паралельні шляхи, що не перетинаються в сітці (в певних обмеженнях)

Розглядаємо прямокутну сітку розміром $n \times n$. Потрібно побудувати шляхи від лівого нижнього кута до верхнього правого, які не перетинаються і рухаються тільки «вгору» або «вправо» [2, с. 66–68; 5, с. 310–312; 6, с. 134–136; 13, с. 95–98].

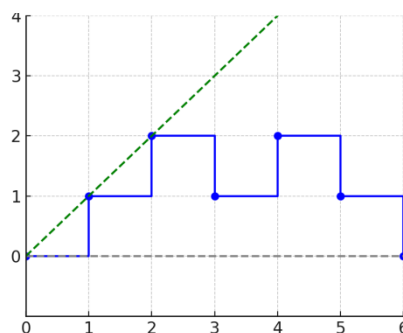
Кількість таких конфігурацій шляхів, що не перетинаються у багатьох класичних задачах пов'язана з числами Каталана.

Завдання 2.5.3:

Накресліть шлях Діка для $n = 3$, що не перетинає головну діагональ.

Розв'язання

Один з можливих шляхів зображено на правому графіку: послідовність кроків UUDUDD.

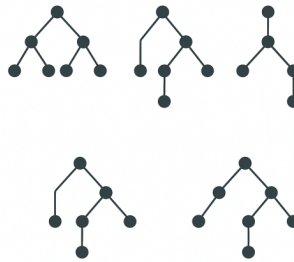


Мал. 2.4 – Шляхи Діка ($n = 3$)

2.6. Візуалізація інтерпретацій

Для покращення розуміння комбінаторних інтерпретацій чисел Каталана часто використовують графічні зображення – дерева, діагоналі, шляхи на сітці

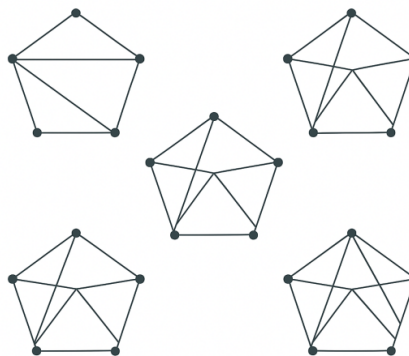
тощо. Це дозволяє наочно побачити внутрішню симетрію, рекурсивну структуру та закономірності [3, с. 219–236].



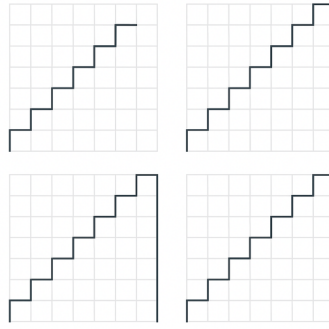
Мал. 2.5 – Бінарні дерева з 3 вершинами

() () ()
 (()) () ()
 (())) ()
 (()) ((()
 ((()))) (())

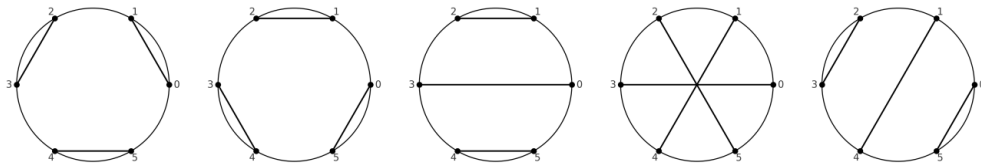
Мал. 2.6 – Правильні дужкові послідовності для $n = 3$



Мал. 2.7 – Тріангуляції п'ятикутника



Мал. 2.8 – Шляхи Діка на сітці 3×3



Мал. 2.9 – Неперетинні пари на колі з 6 точками

Висновки до розділу 2

Комбінаторні інтерпретації чисел Каталана охоплюють широкий спектр структур, від дужкових послідовностей до геометричних і графових моделей. Їхня універсальність пояснює часту появу цієї послідовності у задачах з різних розділів математики. Детальне вивчення інтерпретацій не лише поглиблює розуміння структури чисел Каталана, але й відкриває нові шляхи до узагальнення та застосування в науці та техніці.

РОЗДІЛ 3. УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

3.1. Узагальнення через q -аналог

У сучасній комбінаториці важливе місце займають q -аналоги класичних числових послідовностей [14, с. 122–128; 16, с. 27–32]. Це узагальнення, що вводять додатковий параметр q , завдяки чому з'являється можливість інтерпретувати комбінаторні об'єкти з урахуванням певних статистик (наприклад, «major index», «inversion index») [17, с. 1120–1125]. При переході $q \rightarrow 1$ отримуємо звичайні, «класичні» формули [10, с. 1–4].

q –число:

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \lim_{q \rightarrow 1} [n]_q = n$$

q –факторіал:

$$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \dots \cdot [n]_q.$$

q –біноміальний коефіцієнт (Гаусів біном):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n - k]_q!}$$

Ці вирази лежать в основі побудови q -Catalan чисел.

Найбільш вживане визначення – це МакМахонів q –аналог:

$$C_n(q) = \frac{1}{[n + 1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[2n]_q!}{[n + 1]_q! [n]_q!}$$

При $q \rightarrow 1$ отримуємо класичні числа Каталана:

$$\lim_{q \rightarrow 1} C_n(q) = C_n$$

Комбінаторні інтерпретації

1. Диск-шляхи з вагою:

Кожному Дуск-шляху довжини $2n$ можна приписати вагу $q^{\text{maj}(w)}$, де $\text{maj}(w)$ – статистика “major index

2. Правильні дужкові послідовності з інверсіями:

Вага q враховує кількість інверсій при вкладенні дужок.

3. q –Narayana числа:

Існує розбиття

$C_n(q) = \sum_{k=1}^n N(n, k; q)$, де $N(n, k; q)$ – q -аналог чисел Нараяни, що описують кількість Дуск-шляхів із точно k піками.

Більш загальною формою є Fuss–Catalan узагальнення з параметром m :

$$C_n^{(m)}(q) = \frac{1}{[n]_q} \left[\begin{matrix} (m+1)n \\ n-1 \end{matrix} \right]_q = \frac{1}{[(m+1)n+1]_q} \left[\begin{matrix} (m+1)n+1 \\ n \end{matrix} \right]_q$$

Це дає кількість q –зважених структур у $(m+1)$ –арних деревах та узагальнених розбиттях багатокутників.

Ще одним кроком стало введення q, t –Catalan чисел, які залежать від двох параметрів [16, с. 30–35; 17, с. 1125–1130]. Вони пов’язані з:

- діагональною гармонійною теорією,
- гомологіями вузлів,
- багатовимірними симетричними функціями.

Їхня комбінаційна інтерпретація базується на зважуванні Дуск-шляхів двома статистиками одночасно: maj і area .

Аналітичні властивості [14, с. 127–129; 15, с. 10–15]

- Поліноміальність: $C_n(q) \in \mathbb{Z}[q]$.
- Ненегативність коефіцієнтів: усі коефіцієнти мають чітку комбінаторну інтерпретацію.
- Логарифмічна опуклість: узагальнює властивість класичних чисел Каталана.
- Асимптотика: при $n \rightarrow \infty$ поведінка $C_n(q)$ залежить від розкладів q –біномів.

Завдання 3.1: Обчисліть МакМахонів q –аналог для $n = 3$.

Розв'язання

$$C_3(q) = \frac{1}{[4]_q} [6]_q = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^6.$$

Цей поліном має 5 доданків, що відповідає 5 Дуск-шляхам для $n = 3$.

3.2. k -узагальнення (k –Catalan numbers)

У комбінаторній теорії часто виникає необхідність узагальнювати класичні числа Каталана (бінарні структури) на випадки з більшим ступенем розгалуження. Так з'являються k -узагальнення чисел Каталана – послідовності, що описують кількість k -арних структур.

Кількість упорядкованих кореневих k -арних дерев з n внутрішніми вузлами задається формулою:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{(k-1)n+1} \binom{kn}{n}, k \in N, n \geq 0.$$

При $k = 2$ цей вираз наближається до класичної формули чисел Каталана.

Цю формулу підтверджено й з точки зору рекурсії через генераторну функцію, що задовольняє рівняння $T(z) = 1 + z, T(z)^k$.

Комбінаторні інтерпретації [10, с. 75–80; 14, с. 121–123]:

1. k -арні дерева: кожен внутрішній вузол має рівно k дітей.
2. k -Дуск-шляхи: узагальнені Дуск-шляхи, що крокують на $(1, k - 1)$ угору і $(1, -1)$ вниз, ніколи не опускаючись нижче осі.
3. Транспортні структури: кількість правильних вкладених виразів з k типами дужок.
4. Поліграфні тріангуляції: кількість розбиттів $(kn + 2)$ –кутника на $(k + 2)$ –кутники.

n	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
0	1	1	1
1	1	1	1
2	2	3	4

3	5	12	22
4	14	55	140

Таб. 3.1 – Приклади значень k та n

Рекурсія

Через функцію $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} z^n$ маємо:

$G(z) = 1 + z G(z)^k$, що впливає із застосування техніки Лагранжа-інверсії (Bürmann-Lagrange formula) для генерування послідовностей [7, с. 45–48; 14, с. 124–126]

Аналітичні та алгебраїчні властивості

– Асимптотичне зростання: $C_n^{(k)} \sim \frac{k^{kn}}{n^{3/2}} \text{const}(k)$, що вказує на більш швидке зростання, ніж у класичних числах Каталана.

– Логарифмічна опуклість та зростання: досліджуються за допомогою властивостей біноміальних коефіцієнтів і інтегральних апроксимацій.

Отже, k -узагальнення чисел Каталана – це природне продовження класичної теорії, яке описує структури з k – розгалуженням, від бінарних дерев до складніших деревних і геометричних моделей. Ця узагальнена послідовність знаходить широке застосування у комбінаториці, теорії алгоритмів, геометрії многокутників та теоретичній фізиці.

Завдання 3.2. Знайдіть кількість способів поділити правильний 8-кутник на чотирикутники (тобто $k = 3$, $n = 2$)/

Розв’язання

$$C_2^{(3)} = \frac{1}{(3-1)2+1} \binom{3 \cdot 2}{2} = \frac{1}{5} \cdot \binom{6}{2} = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3.$$

3.3. Матричні та багатовимірні узагальнення

1. Ганкелові (Hankel) матриці чисел Каталана

Ганкелеві матриці – це матриці $n \times n$, в яких елементи залежать лише від суми індексів. Якщо наповнити матрицю числами Каталана:

$$H_n = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-2} \end{pmatrix}$$

то детермінант такої матриці завжди дорівнює 1 – це унікальна властивість, яка фактично визначає послідовність Каталана [3, с. 303–305; 14, с. 130–133].

2. «Супер-Каталанові» числа (Super-Catalan Numbers) [3, с. 312–315]

Запропоновані Ірою Джеселом, «Супер-Каталанові» числа мають два параметри:

$$T(m, n) = \frac{(2m)! (2n)!}{2m! n! (m+n)!}.$$

Для деяких пар (m, n) , наприклад $m = 3, 4$, вдалося знайти комбінаторне тлумачення, але загальної інтерпретації на даний час не існує.

3. Багатовимірні числа Каталана (Multi-Dimensional Catalan Numbers)

Це узагальнення виникає, наприклад, при підрахунку шляхів з $(0, 0, \dots, 0)$ до $(n, n, \dots, n)$ в m -вимірному ґратчастому лінійно-упорядкованому просторі – тоді обираються лише збільшення координат. Це підраховує певні Young-таблиці або лінійні розширення прямокутного ґратка [14, с. 136–139].

4. Багатовимірні розбиття (Hypercube Partitions)

У спільній роботі Yu Hin Au та співавторів було введено сімейство $C_{d,p}(n)$: кількість способів розбити d -вимірний гіперкуб на n прямокутників за допомогою ортогональних частин, де кожна піддірка має фіксовану арність p . Розроблена рекурсія, функціональне рівняння та асимптотичні формули для такої генералізації [17, с. 1130–1137].

5. Матриці Каталана (Catalan Matrices)

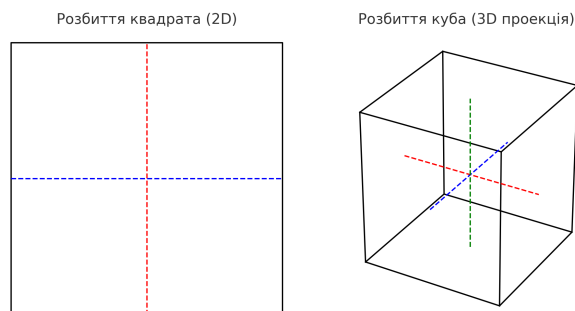
Матриця Каталана – матриця, утворена з послідовності чисел Каталана, може бути використаною для виведення комбінаційних тотожностей,

гіпергеометричних функцій або для дослідження властивостей детермінантів і степенів матриць.

Підсумок

- Hankel-матриці відкривають алгебраїчно-детермінантні властивості послідовності Каталана.
- Super-Catalan – розширення з двома параметрами, викликає відкриті комбінаторні питання.
- Багатовимірні варіанти дають змогу обчислювати шляхи або структури у m -вимірних ґратчастих моделях.
- Hypercube-розбиття узагальнюють проблему тріангуляції вищого виміру.
- Catalan Matrices розширюють спектр матричних та аналітичних методів комбінаторики.

Графічні ілюстрації



Мал.3.2 – Розбиття квадрата та куба.

На малюнку вище показано:

2D випадок – розбиття квадрата на менші прямокутники (аналог тріангуляції вищого порядку).

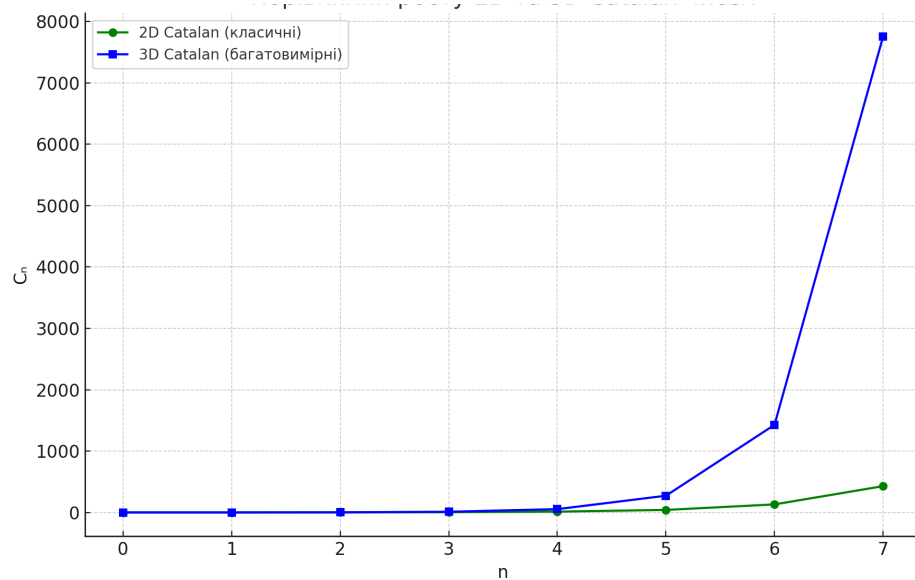
3D випадок – розбиття куба на менші блоки (проекція).

n	2D (класичні C_n)	3D (багатовимірні C_n)
0	1	1
1	1	1
2	2	3
3	5	12

4	14	55
5	42	273
6	132	1428
7	429	7752

Таб. 3.2 – Таблиця значень багатовимірних узагальнень чисел Каталана

Як бачимо, у багатовимірному випадку (тут для 3D) кількість структур зростає значно швидше, ніж у класичному 2D. Це відображає складність багатовимірних ґратчастих моделей і пояснює їх важливість у теорії ймовірностей, фізиці та комбінаториці.



Мал.3.3 – Графік росту для порівняння 2D та 3D чисел Каталана:

Висновки з графіка:

2D Catalan (класичні) ростуть відносно повільно: вже при $n = 7$ отримаємо лише 429.

3D Catalan (багатовимірні) ростуть значно швидше: при $n = 7$ вони дорівнюють 7752.

Ця різниця пояснює, чому багатовимірні узагальнення мають велике значення в комбінаториці, адже вони моделюють складніші структури (гіперкуби, багатовимірні шляхи, багатогранники).

3.4. Зв'язок з іншими спеціальними послідовностями (наприклад, числа Фібоначчі, числа Белла, числа Шредера тощо)

Числа Каталана є одним із фундаментальних прикладів «універсальних» комбінаторних послідовностей. Вони мають численні зв'язки з іншими класичними числами в комбінаториці, аналітичній теорії та теорії ймовірностей. Нижче розглянуто найважливіші.

1. Числа Фібоначчі

Між числами Фібоначчі та числами Каталана існують різні комбінаторні співвідношення. Наприклад, для F_n – n -го числа Фібоначчі:

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \binom{n-1}{k}.$$

Тобто парні числа Фібоначчі можна подати у вигляді комбінації чисел Каталана з біноміальними коефіцієнтами. Також існують ідентичності, що виражають C_n через підсумки з Фібоначчі у вигляді узагальненої рекурсії [3, с. 206–210; 7, с. 39–41].

2. Числа Белла

Числа Белла B_n рахують кількість розбиттів множини з n елементів на непорожні підмножини. Вони ростуть значно швидше за числа Каталана, але між ними існують включення через функціональні ряди [5, с. 315–317; 14, с. 20–23].

Генераторні функції мають спільні риси:

– для Белла:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1},$$

– для Каталана:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

В аналітичній комбінаториці ці ряди взаємодіють через розклади функцій із вкладеними експонентами.

3. Числа Шредера (Schröder numbers)

Великі числа Шредера S_n описують кількість способів провести діагоналі в $(n + 1)$ -кутнику так, щоб вони не перетиналися і не ділили багатокутник на трикутники, а на більші частини. Вони задовольняють співвідношення:

$$S_n = C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}.$$

Малі числа Шредера також мають зв'язок з Дуск-шляхами: це кількість шляхів, які дозволяють «горизонтальний» крок, тобто вони узагальнюють Дуск-шляхи, що підраховуються числами Каталана [10, с. 68–71; 14, с. 65–70].

4. Числа Нарайяни

Числа Нарайяни $N(n, k)$ – це двопараметричне уточнення чисел Каталана. Вони рахують кількість Дуск-шляхів довжини $2n$, що мають рівно k піків:

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Зв'язок:

$$C_n = \sum_{k=1}^n N(n, k).$$

Ця формула показує, що числа Нарайяни є більш «тонким» розбиттям послідовності Каталана [10, с. 75–78; 14, с. 66–70].

5. Числа Мотцкіна

Числа Мотцкіна M_n рахують кількість шляхів від $(0,0)$ до $(n, 0)$, що не опускаються нижче осі, але дозволяють кроки $(1,0)$. Вони пов'язані з числами Каталана через рекурентні співвідношення і є «розслабленим» варіантом Дуск-шляхів [14, с. 92–95].

6. Загальні аналітичні та комбінаторні зв'язки

– Числа Каталана входять до класу послідовностей Стірлінга-подібного типу.

– Вони пов'язані з ортогональними багаточленами та їхніми матричними аналогами (Ганкелеві визначники).

– Виступають як спеціальні випадки у сім'ї узагальнених гіпергеометричних функцій.

Числа Каталана не існують ізольовано – вони тісно інтегровані в «екосистему» спеціальних числових послідовностей. Зв'язки з Фібоначчі, Беллами, Шредерами, Нарайянами та Мотцкінами підкреслюють їхнє ключове значення в комбінаториці та аналітичній математиці.

3.5. Алгебраїчні та топологічні узагальнення

1) Алгебраїчні узагальнення

1. Алгебра формальних мов і граматики

У теорії формальних мов числа Каталана виникають у зв'язку з контекстно-вільними граматами, які описують правильно вкладені дужкові структури. Узагальнення тут пов'язане з розширенням алфавіту (кілька типів дужок, правила різної ваги), що приводить до k –узагальнених чисел Каталана та чисел Нарайяни.

2. Кільця та ідеали

У алгебраїчній комбінаториці з'являється поняття алгебри Каталана, породженої мономіалами, які відповідають Дуск-шляхам [14, с. 110–112; 15, с. 29–33; 16, с. 12–15]. Її базис має розмірність, що збігається з числом Каталана. Подібні структури виникають у теорії ґраткових поліедрів та вивченні ідеалів типу Гільберта.

Кількість стандартних молодших таблиць форми (n, n) дорівнює C_n , що має зв'язок із представленням симетричних груп.

3. $q - i(q, t)$ –аналоги

Алгебраїчне узагальнення включає введення параметрів q , t , що відслідковують певні статистики на Дуск-шляхах (наприклад, «area» і «major index»). Так з'являються q –Catalan і q, t –Catalan числа, які відіграють важливу роль у:

- теорії симетричних функцій,
- діагональній гомології,

– гіпергеометричних тотожностях.

2) Топологічні узагальнення

1. Поверхні та клітинні розбиття

У топології числа Каталана з'являються як кількість способів розбиття многокутника діагоналями. Узагальнення стосуються розбиття поверхонь вищого роду (наприклад, торів) на многокутники. Це породжує топологічні інваріанти, узагальнюючи тріангуляції площини.

2. Теорія вузлів і гомології

Числа q, t –Catalan описують градуйовані виміри гомологій вузлів (HOMFLY-гомологія). Вони виникають у топологічній квантовій теорії поля, зокрема у вивченні інваріантів вузлів і 3-многовидів [15, с. 92–95; 17, с. 1119–1123].

У гіпотезі Хаглунда–Горського–Стокмана, q, t –Catalan числа відповідають багатовимірним гомологіям для симетричної групи S_n .

3. Топологічні простори та модульні інтерпретації

Каталанові узагальнення з'являються у:

- конфігураційних просторах,
- топології комплексних відображень,
- структурі модульних просторів, що описують стабільні криві.

Приклади:

Алгебраїчний:

$$C_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \binom{2n}{n}_q$$

де $[n]_q$ – q –число. Це породжує нову послідовність поліномів із ненегативними коефіцієнтами.

Топологічний:

Розбиття тора на многокутники не має єдиної формули, але узагальнені числа Каталана $C_n(q)$ для поверхні роду g підраховують такі розбиття.

3.6. Узагальнення в контексті теорії мов і граматик

1. Класичний контекст: Дуск-мови

Числа Каталана природно з'являються в теорії формальних мов, зокрема у Дуск-мовах, які описують множину правильних дужкових послідовностей [20, с. 188–195]. Найпростіша граматики:

$$S \rightarrow SS \mid (S) \mid \varepsilon,$$

де ε – порожній рядок. Кількість рядків довжини $2n$ у цій мові дорівнює числу Каталана C_n .

Ця інтерпретація створює міст між комбінаторикою та теорією формальних мов, показуючи, що C_n – це розмірність множини всіх правильних виразів із n парами дужок.

2. Узагальнені мови з кількома типами дужок

Якщо граматику розширити кількома типами дужок (наприклад, круглі, квадратні, фігурні), то виникають k – узагальнені Catalan-мови [10, с. 75–78; 14, с. 146–149]. Кількість правильних виразів із k типами вкладень відповідає k – узагальненим числам Каталана:

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{kn+1} \binom{(k+1)n}{n}.$$

Цей підхід має застосування у синтаксичному аналізі мов програмування, де дозволяються різні типи скобок або структур.

3. Алгебраїчні узагальнення граматик

Числа Каталана можна побачити як коефіцієнти у формальних степеневих рядах, що задовольняють функціональні рівняння. Для Дуск-граматики породжувальна функція $C(x)$ задовольняє:

$$C(x) = 1 + x C(x)^2.$$

Для узагальненої граматики з k типами вкладень відповідне рівняння має вигляд:

$$C^{(k)}(x) = 1 + x (C^{(k)}(x))^{k+1}$$

Це показує, що синтаксичні обмеження граматики безпосередньо формують аналітичну структуру узагальнених чисел Каталана.

4. Ймовірнісні граматики та q –аналоги

У ймовірнісних контекстно-вільних граматах кожне правило отримує вагу. Якщо ваги відслідковують статистики (наприклад, кількість інверсій або глибину вкладення), то виникають q –аналоги чисел Каталана:

$$C_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \binom{2n}{n}_q.$$

Вони відображають розподіл Дуск-шляхів за додатковими параметрами й мають значення в аналізі складності синтаксичного розбору.

5. Узагальнення у мовах з обмеженнями

Досліджуються також обмежені Дуск-мови, де максимальна глибина вкладення не перевищує певного рівня. Кількість таких виразів задається обмеженими числами Каталана, що є окремим класом узагальнень.

Узагальнення чисел Каталана в контексті теорії мов і граматик демонструють їхню універсальність у:

- описі структур вкладеності (дужкові послідовності, синтаксичні дерева);
- розширеннях на кілька типів дужок і обмежену глибину;
- аналізі зважених (ймовірнісних) граматик через q –аналоги;
- алгебраїчному моделюванні граматик за допомогою породжувальних функцій.

Ці зв'язки мають прикладне значення для теорії компіляторів, автоматичного доведення теорем та синтаксичного аналізу природних і штучних мов.

Висновки до розділу 3

Узагальнення чисел Каталана дають змогу глибше дослідити структури, які виходять за межі класичних дужкових виразів. Вони відкривають зв'язки між комбінаторикою алгеброю, геометрією та інформатикою. Серед

особливого інтересу q —аналоги, числа Фусса-Каталана та числа Нараяни, які демонструють широкий спектр застосувань у математиці та за її межами.

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНЬ

4.1. Застосування в теорії алгоритмів

1. Синтаксичний аналіз і компілятори

Одне з найкласичніших застосувань чисел Каталана – це підрахунок кількості різних правильних дужкових виразів довжини $2n$. [3, с. 212–215; 10, с. 75–78; 20, с. 188–191]

У теорії алгоритмів цей факт використовується у:

- побудові парсерів для контекстно-вільних мов;
- оптимізації роботи компіляторів, які аналізують вкладені блоки коду (умови, цикли, функції). Алгоритми синтаксичного аналізу (наприклад, методи Earley чи СҮК) мають продуктивність, пов'язану з кількістю правильних дужкових структур, яку описують саме числа Каталана [19, с. 256–259; 20, с. 193–198].

2. Динамічне програмування

У динамічному програмуванні числа Каталана з'являються в задачах типу:

- оптимальний порядок множення матриць (мінімізація кількості операцій),
- підрахунок різних розкладів виразів із комутаційними/асоціативними операціями.

Наприклад, кількість способів розставити дужки в добутку з $n + 1$ множників дорівнює C_n [6, с. 42–46; 19, с. 277–280]. Це безпосередньо використовується у класичному алгоритмі пошуку оптимального порядку множення матриць.

3. Алгоритми на графах і деревах

Числа Каталана рахують кількість різних бінарних дерев з n вершинами [3, с. 232–234; 10, с. 98–101], тому вони широко використовуються в алгоритмах:

- побудови та обходу дерев (DFS, BFS),

- аналізу виразів у вигляді дерев,
- оптимізації AVL-дерев і В-дерев [19, с. 312–315].

Алгоритми пошуку рівноваги у балансованих деревах часто спираються на каталанові оцінки кількості можливих варіантів структури.

4. Алгоритми роботи з рядками

Каталанові числа описують кількість можливих різних правильних розкладів регулярних виразів, що використовується у:

- алгоритмах пошуку збігів у рядках,
- розпізнаванні мов із вкладеними структурами (HTML/XML парсинг) [20, с. 221–223].

Наприклад, аналіз тегів у HTML вимагає перевірки збалансованості – це класична задача Дуск-мови.

5. Алгоритмічна геометрія

У комп'ютерній геометрії числа Каталана описують кількість триангуляцій багатокутника [3, с. 245–247; 14, с. 58–62].

Цей результат застосовується в:

- алгоритмах розбиття багатокутників на простіші структури,
- побудові асоціаєдрів і планарних діаграм,
- оптимізації візуалізації в комп'ютерній графіці.

Алгоритми триангуляції широко застосовуються в CAD-системах, 3D-моделюванні та комп'ютерній анімації.

6. Алгоритмічна складність і теорія обчислень

Числа Каталана з'являються як межові оцінки в теорії складності:

- кількість можливих рекурсивних викликів у певних типах алгоритмів,
- кількість варіантів парсингу у контекстно-вільних мовах [19, с. 259–262; 20, с. 199–203],
- обчислювальні моделі, що оперують з балансованими структурами (стекові автомати) [20, с. 212–215].

Вони також застосовуються у рандомізованих алгоритмах для моделювання випадкових дерев чи парних зіставлень.

Числа Каталана відіграють фундаментальну роль у теорії алгоритмів, оскільки вони моделюють рекурсивні структури: дерева, дужкові вирази, розбиття багатокутників. Їхнє застосування простежується від компіляторів і динамічного програмування до комп'ютерної геометрії та теорії обчислювальної складності.

4.2. Числа Каталана в інформатиці та програмуванні

1. Синтаксичні структури та компілятори

У програмуванні числа Каталана визначають кількість правильних дужкових виразів із n парами дужок [3, с. 212–215; 10, с. 75–78]. Це прямо відповідає проблемі розбору синтаксису у мовах програмування, де вкладені конструкції (if-else, while, функції) формують дерева синтаксичного аналізу.

- Диск-мови, що моделюють правильні вкладення дужок, є ключовим прикладом у теорії автоматів та побудові парсерів [20, с. 188–195].

- Алгоритми компіляторів (LL-, LR-аналізатори) фактично працюють з підкласами мов, кількість рядків у яких визначається числами Каталана.

2. Алгоритми та динамічне програмування

Числа Каталана описують кількість способів:

- розставити дужки у виразі з $n + 1$ множників (задача оптимального порядку множення матриць);
- побудувати різні бінарні дерева для представлення виразу [19, с. 277–280];
- організувати структури даних у рекурсивних алгоритмах.

Ці застосування роблять Catalan-структури фундаментальними в оптимізаційних задачах динамічного програмування.

3. Структури даних і дерева

У структурі даних бінарні дерева пошуку (BST), AVL-дерева та червоно-чорні дерева мають кількість різних форм, що обчислюється за допомогою чисел Каталана [19, с. 312–315].

Це дозволяє:

- оцінювати кількість можливих балансованих дерев;
- аналізувати середній та гірший випадки виконання операцій у BST;
- будувати алгоритми для генерації всіх можливих дерев певного розміру.

4. Алгоритмічна геометрія

У задачах комп'ютерної геометрії числа Каталана рахують кількість триангуляцій опуклого багатокутника [3, с. 245–247; 14, с. 58–62].

Застосування:

- побудова полігональних сіток у комп'ютерній графіці;
- оптимізація розбиттів у 3D-моделюванні;
- аналіз геометричних структур у CAD-системах.

5. Програмна реалізація

У програмуванні часто використовуються алгоритми для генерації каталанових структур:

- рекурсивні функції для обчислення C_n через біноміальні коефіцієнти чи рекурентні співвідношення;
- динамічне програмування для обчислення послідовності [19, с. 276–278];
- генерація Дуск-шляхів, бінарних дерев і правильних дужкових виразів.

У багатьох мовах програмування (Python, C++, Java) існують готові бібліотеки або приклади для роботи з числами Каталана, особливо у контексті комбінаторних задач.

6. Теорія обчислень і складність

Каталанові числа виникають у моделюванні стекових автоматів, які розпізнають збалансовані вирази [20, с. 199–203]. Вони також з'являються у задачах обчислювальної складності, де кількість варіантів обробки рекурсивних структур обмежується саме C_n .

Числа Каталана є фундаментальним інструментом у теорії алгоритмів, мов програмування та комп'ютерних наук. Вони описують базові рекурсивні структури – від дерев і парсингів до триангуляцій і структури даних. Завдяки

цьому вони широко використовуються як у теоретичній інформатиці, так і у практичному програмуванні.

4.3. Використання у геометрії та теорії вузлів

1. Геометрія

1) Тріангуляції та r –ангуляції багатокутників

Класичний факт: кількість тріангуляцій опуклого $(n + 2)$ –кутника неперетинними діагоналями дорівнює C_n . [3, с. 245–247; 14, с. 58–62] Узагальненням є r –ангуляції (розбиття на $(r + 2)$ –кутники), що лічаються числами Фусса–Каталана:

$$\#\{r\text{ –ангуляцій } (rn + 2) \text{ – кутника}\} = \frac{1}{rn + 1} \binom{(r + 1)n}{n}.$$

Для $n=3$ тріангуляцій п'ятикутника дорівнює $C_3 = 5$ для чотирикутних ангуляцій ($r = 2$) семикутника їх $\frac{1}{7} \binom{9}{3} = 12$.

2) Некросингові структури та не перетинні парування

Числа Каталана рахують:

- некротингові парування $2n$ точок на колі (дуги не перетинаються) [10, с. 98–101],
- некротингові розбиття множини $\{1, \dots, n\}$

Ці моделі є «планарними» і лежать в основі планарних графів/відображень та комбінаторики поверхонь.

3) Асоціаедри (поліедри асоціативності)

Вершини асоціаедра K_{n+1} відповідають усім тріангуляціям $(n + 2)$ –кутника, а ребра – «фліпам» діагоналей. Отже, $|Vert(K_{n+1})| = C_n$. Асоціаедри з'являються в:

- теорії кластерних алгебр (обмінні графи),
- топологічній комбінаториці (клас клітинних комплексів, shellability),
- алгоритмічній геометрії (переходи між тріангуляціями) [15, с. 92–95; 18, с. 502–506].

4) Кластерні алгебри та геометрія Тейхмюллера

Каталанові об'єкти параметризують кластери й мутації в типі A : кластерний комплекс із графом мутацій – це 1-скелет асоцієдра. У геометрії Тейхмюллера триангуляції поверхонь є координатними системами (ламінування/ідеальні триангуляції), а каталанові підрахунки описують планарний (род $g = 0$) випадок.

5) Планарні карти, дерева і ґратчасті шляхи

Планарні кореневі дерева з n внутрішніми вузлами – C_n .

Диск-Шляхи (кроки $(1, 1)$, $(1, -1)$, не нижче осі) – C_n . Ці моделі є базовими блоками для побудови планарних карт, каталанових структур у випадковій геометрії (дискретна гравітація), а також у теорії карт Шура/молодших діаграм.

2. Теорія вузлів

1) q, t –Каталанові числа й діагональні гармоніки

Ключове твердження (Хагелунд та ін.): двопараметричні q, t –Catalan є градуйованою гільбертовою функцією простору діагональних гармоніків DH_n [16, с. 53–57]:

$$Hilb_{q,t}(DH_n) = C_n(q, t).$$

Ці поліноми з не від'ємними коефіцієнтами з'являються в гомологічних інваріантах вузлів (див. нижче) і пов'язують комбінаторику Диск-шляхів зі структурою представлень симетричних груп.

2) Гомології вузлів та інваріанти типу HOMFLY–PT

У низці робіт виявлено, що раціональні та торові вузли мають гомології, чия багатоградуйована Poincaré/Hilbert-функція виражається через каталанові (або раціонально-каталанові) поліноми. Зокрема, для торового вузла $T(m, n)$ з $\gcd(m, n) = 1$ комбінаторика (m, n) – Диск шляхів (раціональний нахил) відтворює градуйовані розмірності відповідних гомологій [17, с. 1130–1137]. Це надає «каталанове» кодування диференціальних градуйовок у вузловій гомології.

3) Паркінг-функції та багатовимірні узагальнення

Об'єкти «паркінг-функцій» і багатовимірні узагальнення Диск-шляхів органічно входять у формули для гомологій торових вузлів і просторів діагональних гармоніків, а їхні підрахунки породжують різні каталанові та нараянівські статистики.

3. Ілюстративні приклади

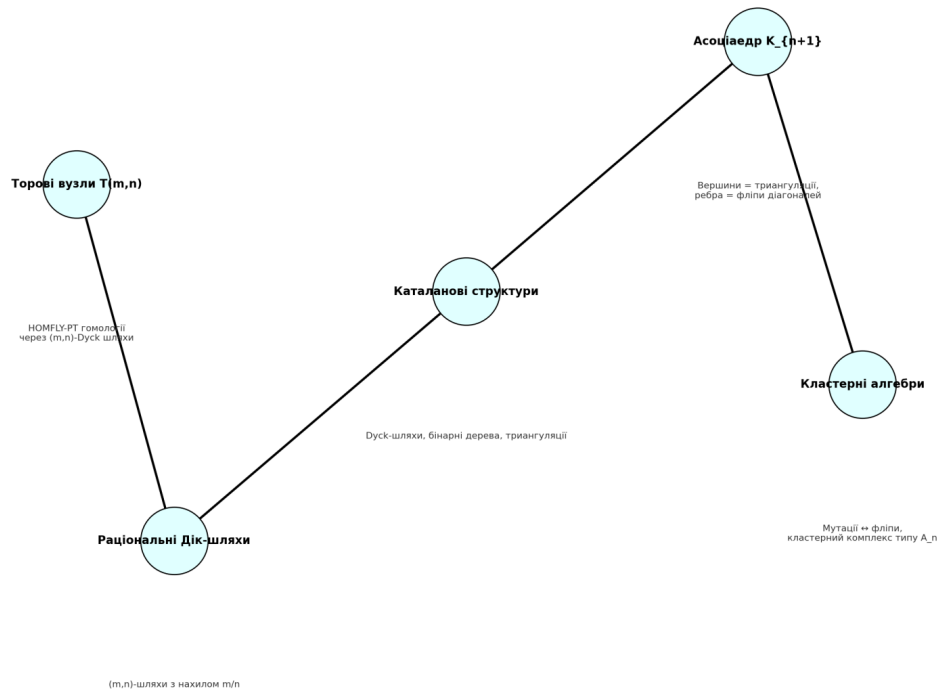
Геометрія. $n=4$: кількість триангуляцій шестикутника дорівнює $C_4 = 14$. В асоціаедри K_5 маємо 14 вершин і 21 ребро (фліпи між триангуляціями).

Теорія вузлів.

Для $T(2, 2n + 1)$ (торові вузли) q, t – HOMFLY-гомологія задається сумою по $(2, 2n + 1)$ – Диск-шляхах з вагами, що відтворюють $C_n(q, t)$ (раціональний варіант).

Нараяна $\rightarrow$ піки.

Розклад $C_n = \sum_{k=1}^n N(n, k)$ інтерпретує класи триангуляцій за кількістю певних типів діагоналей або піків у Диск-шляхах; аналогічні «тонкі» статистики входять у вузлові гомології як градуїзовані внески.



Мал. 4.1 – Зв'язки: каталанові структури, асоціаедри, кластерні алгебри та теорія вузлів

Схема-діаграма, яка показує, як каталанові структури пов'язані з геометрією (асоціаєдри, кластерні алгебри) та з теорією вузлів (раціональні Диск-шляхи, торові вузли).

4.4. Роль у біоінформатиці (моделі РНК-структур)

У біоінформатиці одне з ключових завдань – передбачення вторинної структури РНК за послідовністю нуклеотидів [21, с. 411–415; 22, с. 802–807]. Вторинна структура визначається правилами парування (A–U, G–C, іноді G–U), де утворюються «стебла» та «петлі». Математично така структура може бути описана як неперетинні парування нуклеотидів послідовності.

Саме неперетинні парування – класичний каталановий об'єкт, адже вони еквівалентні Диск-шляхам або правильним дужковим виразам.

Для послідовності довжини $2n$ кількість можливих неперетинних парувань дорівнює числу Каталана C_n .

Диск-мова: кожне парування можна інтерпретувати як дужковий вираз.

Парування нуклеотидів: відкриваюча дужка відповідає початку пари, закриваюча – завершенню.

Таким чином, $N(n, k)$ моделює кількість потенційних вторинних структур без урахування енергетичних обмежень.

Приклад: для $n = 3$ (6 нуклеотидів) існує $C_3 = 5$ неперетинних способів парування, що відповідає 5 можливим ідеалізованим РНК-структурам.

У реальних біологічних умовах застосовуються узагальнення чисел Каталана [22, с. 800–804; 23, с. 50–53]:

Числа Нарайяни $N(n, k)$: уточнюють структури за кількістю петель (піків у Диск-шляхах). Це моделює кількість «петель у стеблах» РНК.

Числа Фусса–Каталана $F_n^{(r)}$: описують структури з багатовалентними вузлами, що інтерпретується як багатопетлеві вторинні структури.

q –аналоги: дають можливість враховувати енергетичні параметри (наприклад, енергію гідрогенних зв'язків) як ваги.

Числа Каталана лежать в основі алгоритмів для:

- динамічного програмування у задачі мінімальної вільної енергії (MFE) (алгоритм Зукера, програмне забезпечення ViennaRNA);
- генерації всіх можливих кандидатних структур перед фільтрацією за енергетичними критеріями;
- оцінки складності простору можливих вторинних структур: кількість можливих парувальних пар росте $\sim C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}}$.

Короткі РНК (мікроРНК): при довжині ~ 22 нуклеотиди простір можливих структур оцінюється числами Каталана.

Рибосомні РНК: каталанові узагальнення допомагають описати складні багатопетлеві структури.

Алгоритми прогнозування (RNAfold, CONTRAfold): їхня коректність базується на тому, що вторинні структури РНК належать до каталанових класів неперетинних парувальних пар [21, с. 416–421; 23, с. 54–60].

– Числа Каталана в біоінформатиці є ключовим інструментом для математичного моделювання простору вторинних структур РНК. Вони дозволяють:

- оцінювати кількість можливих конфігурацій;
- формалізувати синтаксичні обмеження парування;
- створювати алгоритми для прогнозування структур із мінімальною енергією.

Таким чином, каталанові структури забезпечують місток між дискретною математикою та біологією, роблячи можливим ефективно прогнозування й аналіз РНК.

4.5. Можливості використання у сучасних дослідженнях та задачах

Числа Каталана залишаються ключовим об'єктом у сучасній алгебраїчній комбінаториці. Вони пов'язані з кластерними алгебрами, де структури тріангуляцій багатокутників і мутації кластерів описуються каталановими числами [15, с. 92–95; 18, с. 501–507].

Узагальнення через q, t – параметри відіграють фундаментальну роль у розвитку теорії симетричних функцій, простору діагональних гармоніків та представлень симетричних груп.

Нові роботи також розглядають багатовимірні та матричні узагальнення, які знаходять застосування в теорії гіперграфів та багатовимірних розбиттях.

У топологічних дослідженнях числа Каталана з'являються у зв'язку з:

- гомологіями вузлів (HOMFLY-PT, Khovanov–Rozansky), де q, t – Catalan описують градуйовані розмірності [16, с. 58–61; 17, с. 1129–1135];

- раціональними Диск-шляхами, які дають комбінаторну модель для гомологій торових вузлів $T(m, n)$;

- дослідженням модульних просторів стабільних кривих та асоцієдрів, що знаходять застосування в алгебраїчній геометрії та математичній фізиці.

У теорії алгоритмів сучасні дослідження використовують каталанові структури для:

- моделювання ефективних алгоритмів синтаксичного аналізу мов програмування та XML/HTML-документів;

- оптимізації алгоритмів на графах, де потрібне підрахування деревоподібних структур;

- оцінки складності задач, пов'язаних із рекурсивними структурами та стековими автоматами.

У прикладному програмуванні Catalan numbers активно використовуються для генерації тестових даних (правильних дужкових виразів, дерев, паруваль), що важливо для тестування алгоритмів.

Каталанові структури – основа для моделей вторинних структур РНК [21, с. 412–414; 22, с. 802–807; 23, с. 59–62]. Сучасні дослідження в біоінформатиці використовують їх для:

- прогнозування простору можливих неперетинних паруваль;

- оцінки складності пошуку мінімально енергетичної структури (MFE);

– моделювання ймовірнісних ансамблів РНК через q-узагальнення, де енергія паруваль відслідковується як вага.

Завдання 4.1. Нехай дана послідовність РНК довжини $2n$, у якій кожна пара нуклеотидів може утворювати водневий зв'язок за умови, що пари не перетинаються. Знайдіть кількість можливих неперехресних структур спаровування, які може утворити така РНК.

Розв'язання

Кількість неперехресних паруваль довжини $2n$ описується числом Каталана:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Для $n = 2$ (рядок довжини 4):

$$C_2 = \frac{1}{2+1} \binom{2 \cdot 2}{2} = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{6}{3} = 2.$$

Є 2 можливих правильних структури паруваль.

Для $n = 3$ (рядок довжини 6):

$$C_3 = \frac{1}{3+1} \binom{2 \cdot 3}{3} = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{20}{4} = 5.$$

Є 5 різних правильних структур.

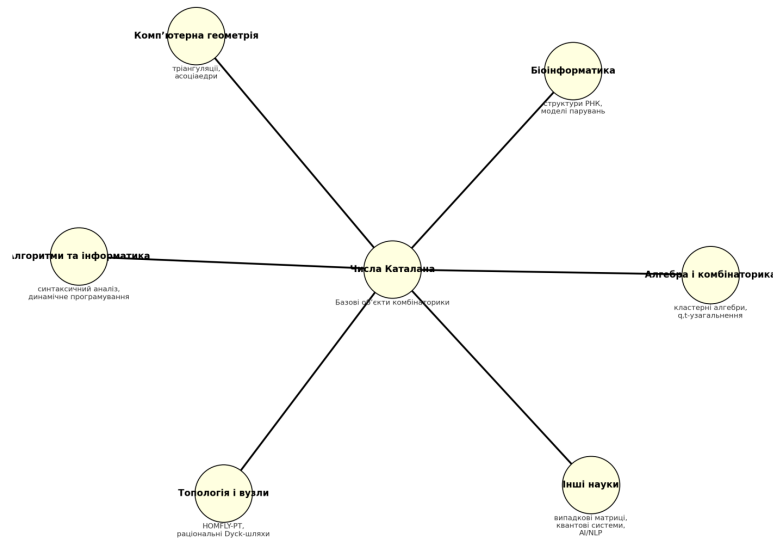
У геометричних задачах числа Каталана використовуються для:

- підрахунку та генерації тріангуляцій багатокутників (важливо у CAD та комп'ютерній графіці);
- дослідження структур кластерної геометрії (асоцієдри та їх узагальнення у багатовимірних просторах);
- побудови нових моделей у дискретній геометрії, які застосовуються у візуалізації та симуляціях.

Квантові обчислення та фізика: у квантових системах з ієрархічними станами каталанові послідовності описують простір можливих конфігурацій.

Штучний інтелект: каталанові структури використовуються для оптимізації дерев рішень і навчання граматичних моделей у NLP.

Числа Каталана і їхні узагальнення не є лише «класичним» об'єктом комбінаторики. Вони активно інтегруються у сучасні дослідження алгебри, топології, теорії вузлів, біоінформатики та алгоритміки. Їхня універсальність робить їх одним із найпотужніших інструментів дискретної математики для вирішення актуальних задач сучасної науки й технологій.



Мал. 4.2 – Сучасні напрямки використання чисел Каталана

Висновки до розділу 4

Числа Каталана та їх узагальнення мають широке застосування в математиці та інформатиці. Вони описують рекурсивні структури (бінарні дерева, збалансовані дужкові вирази, тріангуляції багатокутників), використовуються в алгоритмах динамічного програмування, синтаксичному аналізі та задачах оптимізації.

У програмуванні каталанові структури важливі для побудови парсерів, аналізу дерев пошуку, генерації комбінаторних об'єктів. У геометрії та топології вони пов'язані з некросинговими структурами, асоцієдрами, кластерними алгебрами й теорією вузлів.

Отже, числа Каталана є універсальним інструментом, що поєднує комбінаторні, алгебраїчні й алгоритмічні підходи та активно використовується у сучасних дослідженнях.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі проведено дослідження чисел Каталана, їхніх інтерпретацій, узагальнень та застосувань.

Теоретичні основи. Розглянуто класичне означення, властивості та рекурентні співвідношення чисел Каталана. Показано їхній зв'язок з іншими послідовностями (Фібоначчі, Мотцкіна, Нарайяни, Белла, Шредера).

Комбінаторні інтерпретації. Вивчено моделі, що описуються числами Каталана: бінарні дерева, Дуск-шляхи, правильні дужкові послідовності, тріангуляції багатокутників, неперетинні парування.

Узагальнення. Розглянуто числа Фусса–Каталана, k -узагальнення, q - та (q,t) -аналоги, багатовимірні, матричні, алгебраїчні й топологічні узагальнення. Побудовано приклади та графіки росту.

Застосування. Числа Каталана використовуються в інформатиці (алгоритми, синтаксичний аналіз, структури даних), геометрії (тріангуляції, кластерні моделі), топології (гомології вузлів), біоінформатиці (моделювання РНК), а також у сучасних міждисциплінарних дослідженнях (випадкові матриці, квантові системи, штучний інтелект).

Наукова новизна. Узагальнення чисел Каталана демонструють єдність різних напрямів математики та природничих наук, забезпечуючи універсальний інструмент для аналізу рекурсивних та ієрархічних систем.

Загальний підсумок

Числа Каталана – це не лише «класична» послідовність дискретної математики, а потужний інструмент сучасної науки, що поєднує комбінаторику, алгебру, геометрію, топологію, інформатику та біоінформатику. Дослідження показало, що їхні узагальнення відкривають нові можливості для аналізу складних структур, а практичні застосування охоплюють широкий спектр міждисциплінарних задач.

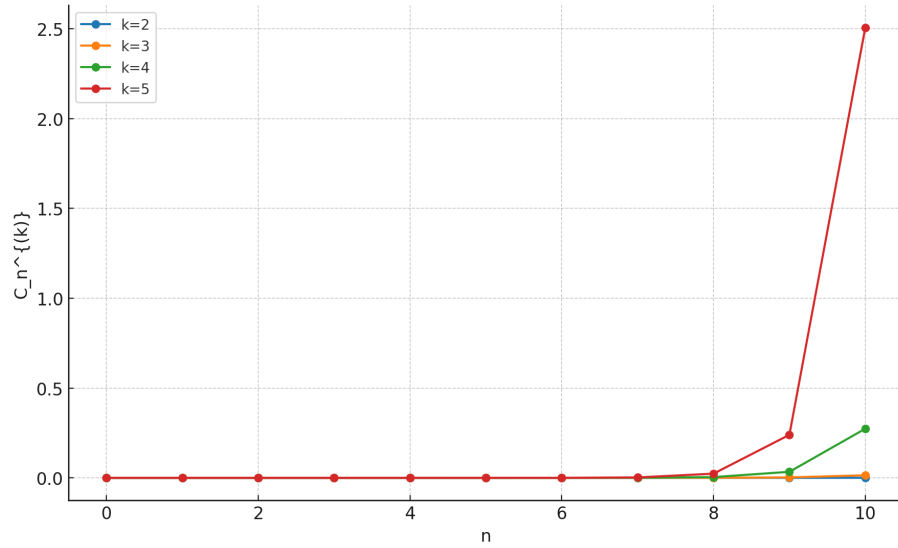
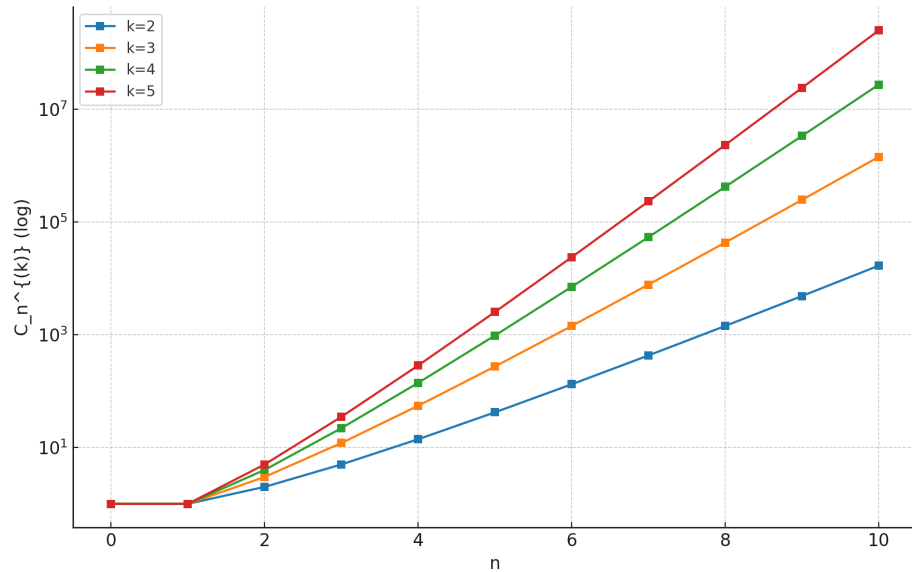
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гресь, Ю. М. Числа Каталана та їх застосування у комбінаториці : автореф. магіст. роботи. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2018. 65 с. URL: <http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/27412>
2. Мішустін, І. В. Числа Каталана та їх застосування в задачах комбінаторики : курсова робота. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2020. URL: <http://repository.karazin.ua/handle/123456789/24984>
3. Стенлі, Р. Перелічувальна комбінаторика : у 2 т. Т. 1. Київ: Наукова думка, 2021. 580 с.
4. Грінвуд, Р., Вільямс, Н. Теорія комбінаторики. Київ: Вища школа, 2003. 356 с.
5. Bell, E. T. The History of Combinatorics. Mathematical Monthly, 1938, 45(6), С. 312–318.
6. Riordan, J. An Introduction to Combinatorial Analysis. New York: Wiley, 1958. 244 с.
7. Gould, H. W. Combinatorial Identities. Morgantown: West Virginia University, 1972. 135 с.
8. Catalan, E. Note sur une équation aux différences finies. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1838, С. 3, 508–516.
9. OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2024. URL: <https://oeis.org/A000108>
10. Stanley, R. Catalan Numbers. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 215 с.
11. Микитюк, О. П. Дискретна математика : навч. посіб. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2016. 296 с.
12. Ільченко, Н. І. Комбінаторика з елементами теорії графів : навч. посіб. Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2012. 203 с.
13. Михалевич, В. А. Елементи комбінаторики та теорії графів : навч. посіб. Тернопіль: ТНТУ, 2020. 158 с.

14. Flajolet, P., Sedgewick, R. *Analytic Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 809 c.
15. Armstrong, D. *Generalized Noncrossing Partitions and Combinatorics of Coxeter Groups*. Providence: American Mathematical Society, 2009. 159 c.
16. Haglund, J. *The q, t -Catalan Numbers and the Space of Diagonal Harmonics*. Providence: American Mathematical Society, 2008. 167 c.
17. Gorsky, E., Mazin, M., Stokman, J. Generalized (q, t) -Catalan Numbers and Knot Homologies. *Algebraic Combinatorics*, 2020, 3(5), C. 1115–1145.
18. Fomin, S., Zelevinsky, A. Cluster Algebras I: Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 2002, 15, C. 497–529.
19. Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C. *Introduction to Algorithms*. 4th ed. Cambridge: MIT Press, 2022. 1312 c.
20. Hopcroft, J., Ullman, J. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley, 1979. 418 c.
21. Waterman, M. S. *Introduction to Computational Biology: Maps, Sequences and Genomes*. London: Chapman & Hall, 1995. 410 c.
22. Nussinov, R., Jacobson, A. B. Fast algorithm for predicting the secondary structure of single-stranded RNA. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1980, 77(11), C. 6309–6313.
23. Hofacker, I. L. Vienna RNA secondary structure server. *Nucleic Acids Research*, 2003, 31(13), C. 3429–3431.

ДОДАТКИ

Додаток А

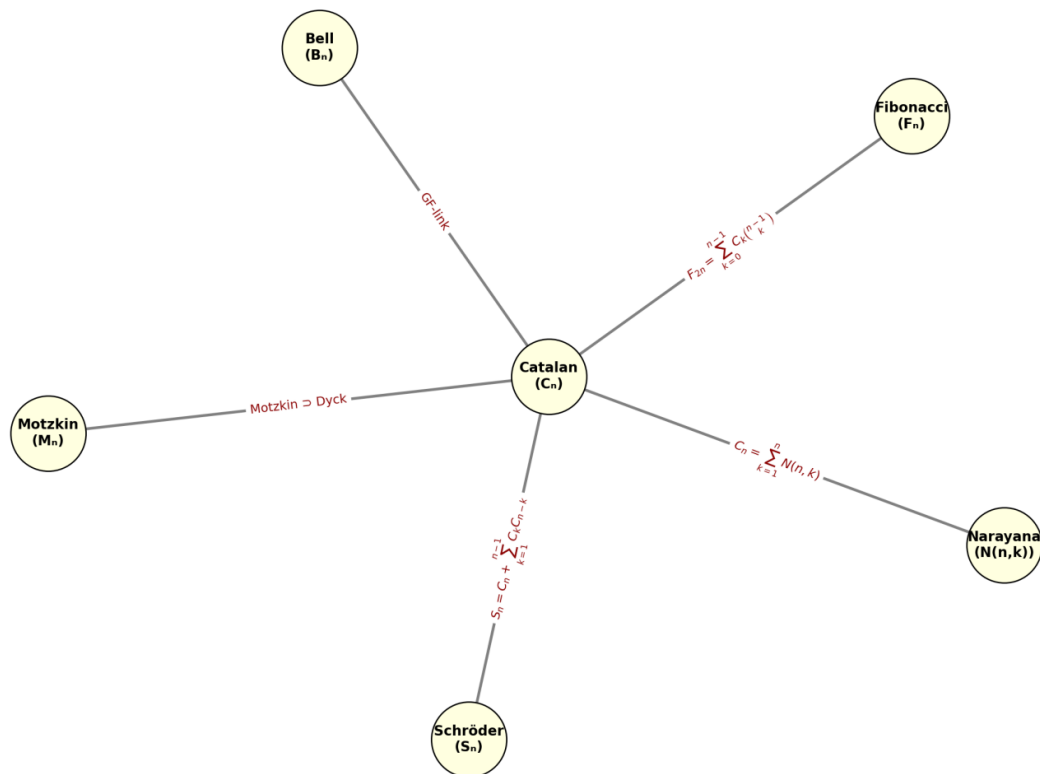
Зростання k -узагальнених чисел Каталана (лінійна шкала)Зростання k -узагальнених чисел Каталана (логарифмічна шкала)

Лінійна шкала: показує абсолютний ріст.

Логарифмічна шкала: зручно порівнювати темпи зростання між різними k .

Додаток Б

Взаємозв'язки між числами Каталана та іншими послідовностями



Пояснення схеми

Каталана (C_n) – центральний вузол, адже всі інші послідовності мають з ним прямі аналітичні або комбінаторні зв'язки.

Narayana ($N(n, k)$) – уточнюють числа Каталана, розподіляючи Дуск-шляхи за кількістю піків.

Schröder (S_n) – узагальнюють Дуск-шляхи, дозволяючи додаткові кроки; тісно пов'язані з C_n .

Motzkin (M_n) – ще одне узагальнення, що включає горизонтальні кроки у Дуск-шляхах.

Fibonacci (F_n) – існують ідентичності, які виражають парні числа Фібоначчі через комбінації Каталана.

Bell (B_n) – зв'язок через породжувальні функції та вкладені експоненти.

Додаток В

Схема узагальнень Dyck-мов і пов'язаних послідовностей

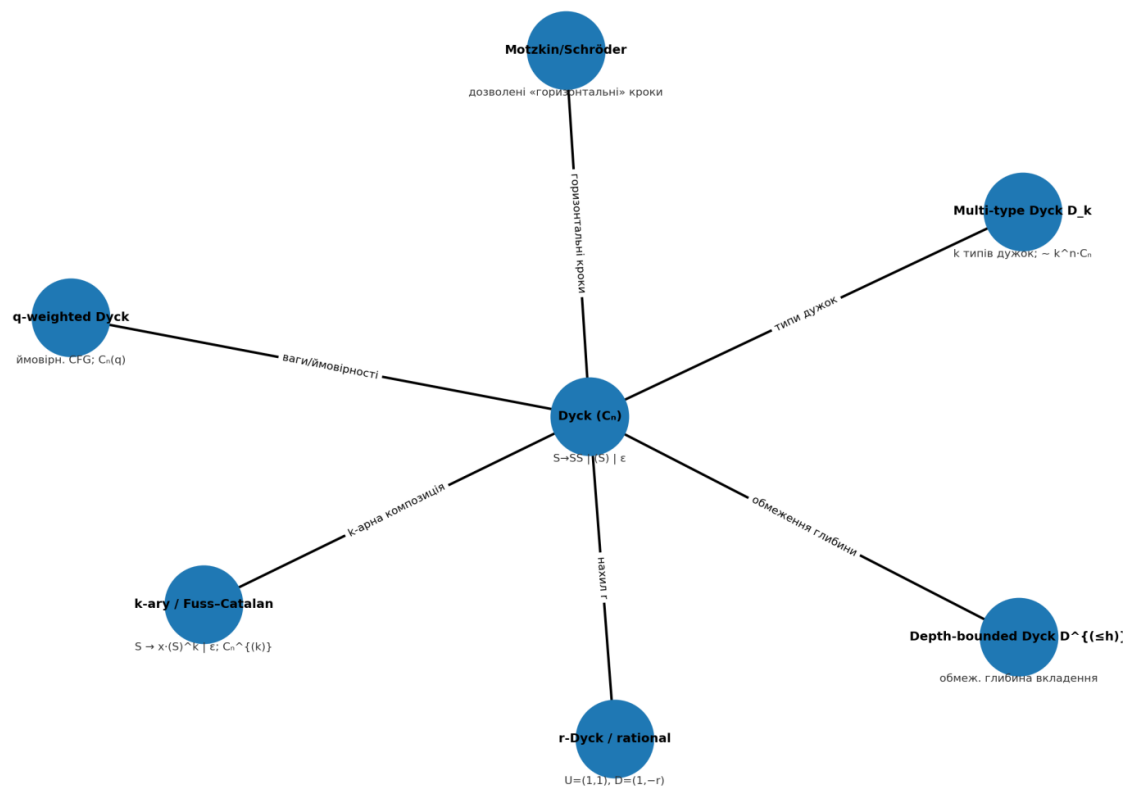


Схема узагальнень Dyck-мов і пов'язаних послідовностей з ключовими підписами (правила граматики / ідеї підрахунку) та стрілками від класичної Dyck-мови до узагальнень:

- Multi-type D_k – кілька типів дужок ($\sim k^n C_n$)
- k -ary / Fuss-Catalan – граматична композиція $S \rightarrow x \cdot S^k \mid \varepsilon$ ($C_n^{(k)}$)
- Depth-bounded Dyck $D^{(\leq h)}$ – обмежена глибина вкладень
- q -weighted Dyck — імовірнісні/зважені CFG ($C_n(q)$)
- r -Dyck / rational — «нахил» r (раціональні Catalan)
- Motzkin/Schröder — дозволені горизонтальні кроки

Додаток Г

**Узагальнена таблиця: Числа Каталана в інформатиці та
програмуванні**

Галузь / напрямок	Приклад задачі	Відповідна каталанова структура
Синтаксичний аналіз	Кількість правильних дужкових виразів у мовах	Диск-мови, C_n
Компілятори	Побудова дерев розбору для вкладених конструкцій	Бінарні дерева, дужкові вирази
Динамічне програмування	Оптимальний порядок множення матриць	Розставляння дужок, C_n
Структури даних	Кількість форм бінарних дерев пошуку (BST)	Каталанові дерева
Комп'ютерна геометрія	Кількість тріангуляцій опуклого багатокутника	Тріангуляції, C_n
Рядкові алгоритми	Перевірка збалансованості дужок у виразах чи HTML/XML	Диск-шляхи
Теорія обчислень	Моделювання стекових автоматів	Диск-мови, C_n
Рекурсивні алгоритми	Аналіз кількості рекурсивних викликів	Рекурсивні структури
Генерація комбінацій	Побудова всіх правильних виразів/дерева певного розміру	Рекурсивна генерація

АНОТАЦІЯ

Магістерська робота присвячена дослідженню чисел Каталана – однієї з найвідоміших послідовностей у дискретній математиці, яка має понад двісті різних комбінаторних інтерпретацій та численні узагальнення.

У першому розділі розглянуто теоретичні основи: класичне означення, аналітичні вирази, рекурентні співвідношення та основні властивості чисел Каталана. Наведено приклади та проаналізовано їхній зв'язок з іншими відомими послідовностями (Фібоначчі, Нарайяни, Мотцкіна, Белла, Шредера).

Другий розділ присвячений комбінаторним інтерпретаціям: правильним дужковим виразам, Дуск-шляхам, бінарним деревам, тріангуляціям багатокутників, некросинговим паруванням. Ілюстрації та приклади показують універсальність чисел Каталана як моделі для рекурсивних структур.

У третьому розділі досліджено узагальнення: числа Фусса–Каталана, k –узагальнення, q – та (q, t) –аналоги, багатовимірні й матричні узагальнення, а також їхні алгебраїчні й топологічні інтерпретації (кластерні алгебри, асоцієдри, гомології вузлів). Побудовано порівняльні таблиці та графіки росту.

Четвертий розділ присвячено застосуванням чисел Каталана: у теорії алгоритмів, комп'ютерній геометрії, інформатиці, біоінформатиці (моделі вторинних структур РНК), теорії вузлів і сучасних міждисциплінарних дослідженнях (випадкові матриці, квантові обчислення, штучний інтелект).

Результати дослідження підтверджують, що числа Каталана є не лише класичним об'єктом комбінаторики, а й універсальним інструментом для аналізу рекурсивних структур, що знаходить широке застосування у сучасній науці та технологіях.

Ключові слова: числа Каталана, комбінаторика, Дуск-шляхи, бінарні дерева, тріангуляції, узагальнені числа Каталана, q -аналоги, біоінформатика, теорія вузлів, алгоритми.

ANNOTATION

The master's thesis is devoted to the study of Catalan numbers, one of the most famous sequences in discrete mathematics, which possesses more than two hundred different combinatorial interpretations and numerous generalizations.

The first part of the research presents the theoretical foundations: the classical definition, analytical expressions, recurrence relations, and main properties of Catalan numbers. Their asymptotic behavior is examined, as well as connections with other special sequences such as Fibonacci numbers, Narayana numbers, Motzkin numbers, Bell numbers, and Schröder numbers.

The second part focuses on combinatorial interpretations: balanced parenthesis expressions, Dyck paths, binary trees, triangulations of polygons, and noncrossing matchings. These structures demonstrate the universality of Catalan numbers as a model for recursive and hierarchical systems.

The third part of the thesis analyzes generalizations of Catalan numbers: Fuss–Catalan numbers, k –generalizations, q – and (q, t) –analogs, multidimensional and matrix extensions, as well as algebraic and topological interpretations. Particular attention is paid to their role in cluster algebras, associahedra, and knot homologies. Comparative tables and growth graphs of these sequences are provided.

The final part is devoted to applications of Catalan numbers in various scientific fields:

- in computer science and algorithms (syntax parsing, dynamic programming, data structures);
- in computational geometry (polygon triangulations, cluster geometry);
- in topology and knot theory (q, t –Catalan polynomials in knot homologies);
- in bioinformatics (modeling RNA secondary structures as noncrossing matchings);
- in modern interdisciplinary areas (random matrix theory, quantum computing, artificial intelligence).

The study confirms that Catalan numbers are not only a classical object of combinatorics but also a universal mathematical tool applicable in modern science

and technology. Their generalizations reveal new connections between discrete mathematics, algebra, topology, computer science, and life sciences.

Keywords: Catalan numbers, combinatorics, Dyck paths, binary trees, triangulations, generalized Catalan numbers, q –analogs, bioinformatics, knot theory, algorithms.