

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики**

На правах рукопису

Навальна Валерія Русланівна

Математичне моделювання ризиків інвестиційних проєктів

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:
Кравчук Ольга Мусіївна
к. пед. наук ,
доцент кафедри математичного
аналізу та статистики

РЕКОМЕНДОВАНО ДО
ЗАХИСТУ

Протокол № _____
засідання кафедри теорії
функцій та методики
навчання математики
від _____ 2025 р.
Завідувач кафедри

(підпис) ПБ

ЛУЦЬК-2025

Зміст

ВСТУП.....	2
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ...	5
1.1. Історичний розвиток теорії поверхонь другого порядку	5
1.2. Загальна математична модель поверхонь другого порядку	8
1.3. Основні типи поверхонь другого порядку та їх аналітичні властивості	12
1.4. Алгебраїчні та геометричні методи аналізу поверхонь	18
1.5. Використання диференціальних методів у дослідженні поверхонь другого порядку	23
Висновки до першого розділу	26
РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	28
2.1. Геометричні перетворення та їх вплив на рівняння поверхонь другого порядку	28
2.2. Визначення основних інваріантів поверхонь другого порядку	31
2.3. Алгоритми класифікації поверхонь другого порядку	35
2.4. Використання сучасних програмних засобів для моделювання поверхонь другого порядку.....	39
2.5. Практичні застосування поверхонь другого порядку у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці	48
Висновки до другого розділу	51
ВИСНОВКИ.....	53
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	55
Анотація.....	58

ВСТУП

Поверхні другого порядку належать до фундаментальних об'єктів вивчення у вищій математиці, зокрема в аналітичній та диференціальній геометрії. Вони формуються як геометричне відображення загальних квадратичних рівнянь з трьома змінними та охоплюють еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди й інші складні поверхні, що мають вагоме теоретичне та прикладне значення. Вивчення цих поверхонь бере початок ще з античних часів, коли окремі їх форми описувалися у працях математиків Стародавньої Греції. Подальший розвиток теорії відбувався завдяки працям Рене Декарта, Леонарда Ейлера, Жозефа Лагранжа та інших дослідників, які заклали основи аналітичного підходу до опису квадрик. У сучасний період поверхні другого порядку набули широкого застосування у природничих і технічних науках, оскільки дозволяють будувати математичні моделі різних фізичних, інженерних та технологічних процесів. Саме тому їх дослідження має не лише історичну, а й актуальну науково-практичну значущість.

Актуальність теми визначається тим, що поверхні другого порядку є базовим інструментом математичного моделювання у фізиці, архітектурі, комп'ютерній графіці, будівельній та механічній інженерії. Вони становлять основу для створення складних тривимірних моделей, що застосовуються у сучасних технологіях проєктування. Крім того, розвиток комп'ютерних обчислювальних засобів та програмного забезпечення робить можливим точне моделювання й аналіз властивостей таких поверхонь, що відкриває нові перспективи для практичного використання отриманих результатів.

Метою дослідження є системний аналіз загального рівняння поверхні другого порядку, його математичних властивостей, алгоритмів класифікації та практичних можливостей застосування у різних сферах науки й техніки.

Для досягнення цієї мети були поставлені такі **завдання**:

- простежити історичний розвиток теорії поверхонь другого порядку;
- вивчити і проаналізувати основні види поверхонь другого порядку

- дослідити загальну математичну модель поверхні другого порядку та її нормальні форми;
- визначити основні інваріанти, розробити алгоритми класифікації;
- проаналізувати можливості використання сучасних програмних засобів для візуалізації та практичного застосування.

Об'єкт дослідження: поверхні другого порядку як клас геометричних об'єктів, що визначаються загальним квадратичним рівнянням.

Предмет дослідження: методи аналізу, перетворення та класифікації цих поверхонь, а також їхнє практичне використання у сучасних наукових і прикладних галузях.

Гіпотеза дослідження ґрунтується на припущенні, що системний аналіз загального рівняння поверхні другого порядку у поєднанні з сучасними програмними засобами дозволяє розробити ефективні методи моделювання та класифікації, які можна застосувати для розв'язання складних завдань у фізиці, техніці та комп'ютерних технологіях.

Методи дослідження включають аналітичні підходи до вивчення квадратичних форм, алгебраїчні й геометричні методи класифікації поверхонь, а також використання програмних комплексів для комп'ютерного моделювання та візуалізації. Поєднання класичних математичних методів та сучасних обчислювальних технологій забезпечує повноту та багатогранність дослідження.

Наукова новизна роботи полягає у систематизації методів аналізу поверхонь другого порядку з акцентом на використанні їхніх інваріантів, а також у застосуванні сучасних програмних інструментів для практичної класифікації та моделювання. Робота поєднує класичні підходи з новітніми можливостями комп'ютерної математики, що створює передумови для вдосконалення існуючих алгоритмів дослідження квадрик.

Практична значущість дослідження виявляється у можливості застосування отриманих результатів у фізиці для опису руху тіл та оптичних явищ, в інженерії для проектування конструкцій, а також у комп'ютерній графіці для побудови реалістичних тривимірних моделей. Таким чином, робота має

міждисциплінарне значення і може бути використана як у навчальному процесі, так і в практичній діяльності.

Структура дослідження: робота складається зі вступу, двох розділів, які включають теоретичні та практичні аспекти дослідження поверхонь другого порядку, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1. Історичний розвиток теорії поверхонь другого порядку

Зародження уявлень про поверхні другого порядку відбулося ще в античності, коли математика перебувала на етапі формування як самостійна наука. Хоча античні мислителі не використовували сучасного поняття «поверхня другого порядку» у його алгебраїчному вигляді, саме в їхніх працях закладалися основи дослідження геометричних об'єктів, які згодом отримали назву квадрики. Давньогрецькі вчені приділяли значну увагу кривим другого порядку — параболі, еліпсу та гіперболі, — що стали передумовою для вивчення відповідних тривимірних поверхонь.

Одним із перших дослідників цих об'єктів був Менехм, учень Евдокса і сучасник Платона. Саме він відкрив параболу, еліпс і гіперболу як геометричні криві, отримані перетином конуса з площиною. Його праці стали основою для подальшого розвитку теорії конічних перетинів, яку пізніше систематизував Аполлоній Пергський. У своєму відомому трактаті «Конічні перетини» Аполлоній детально класифікував усі можливі варіанти перетину площини з конусом і ввів сучасні терміни «гіпербола», «парабола», «еліпс». Саме завдяки його дослідженням було сформовано розуміння, що ці криві мають не лише геометричне, а й глибоке математичне значення.

Архімед зробив суттєвий внесок у розвиток знань про квадрики, досліджуючи поверхні обертання параболи й гіперболи. Його роботи з визначення об'ємів тіл, утворених обертанням кривих другого порядку навколо осей, заклали підвалини інтегрального числення. Архімед, теж, вивчав властивості еліпсоїдів і параболоїдів обертання, які в сучасній термінології належать до поверхонь другого порядку.

Античні математики підходили до вивчення цих об'єктів переважно геометричними методами, спираючись на побудови та наочність. Їхні праці не містили алгебраїчних рівнянь, але заклали фундамент для розуміння просторових властивостей квадрик. Класифікація кривих, дослідження

властивостей стали важливим кроком до усвідомлення того, що аналогічні об'єкти існують і у тривимірному просторі.

Ідеї, закладені античними мислителями у вивченні кривих та поверхонь другого порядку, не зникли, а стали важливою складовою розвитку математичної науки нового часу. Виникнення аналітичної геометрії представила можливість поєднати геометричні побудови з алгебраїчними рівняннями, що суттєво змінило підхід до вивчення квадрик. Якщо античні дослідники спиралися переважно на інтуїтивні та наочні методи, то в XVII столітті почав формуватися строгий апарат для опису просторових поверхонь через систему координат.

Великий внесок у цей процес зробив Рене Декарт. У своїй праці «Геометрія» він запропонував новий підхід до вивчення кривих і поверхонь, пов'язавши їх опис із системою алгебраїчних рівнянь. Саме завдяки Декарту стало можливим уніфікувати геометричні об'єкти та розглядати їх у координатній площині й просторі. Поверхні другого порядку у такому підході почали тлумачитися як геометричні образи рівнянь із квадратичними виразами. Це дозволило не лише описувати їх точніше, а й властивість за допомогою алгебраїчних методів.

У XVIII столітті розвиток ідей Декарта отримав продовження у працях Леонарда Ейлера. Він запропонував загальний вигляд рівняння поверхні другого порядку в тривимірному просторі та показав, як за допомогою перетворень координат можна зводити його до простіших форм. Ейлер розробив методи класифікації квадрик, спираючись на знаки коефіцієнтів у рівняннях, а також дослідив властивості їхніх перетинів площинами.

Жозеф Лагранж, продовжуючи розвиток цієї тематики, поглибив методи аналізу квадратичних форм. Він розробив апарат, який дозволяв більш узагальнено підходити до питання класифікації поверхонь другого порядку та знаходження їх інваріантів. Ідеї Лагранжа щодо використання власних значень і власних векторів для дослідження квадратичних форм стали основою для подальшого розвитку лінійної алгебри та її застосування в аналітичній геометрії. Завдяки його працям стало зрозуміло, що аналіз квадрик є частиною більш

широкої проблематики, пов'язаної зі структурою багатовимірних алгебраїчних виразів.

Розвиток теорії в роботах Декарта, Ейлера та Лагранжа забезпечив перехід від геометричної інтуїції до строгого математичного апарату. Якщо у працях античних математиків поверхні другого порядку розглядалися як результат наочних побудов, то у працях цих мислителів вони виникли як об'єкти формалізованого аналітичного опису.

У ХХ столітті дослідження поверхонь другого порядку набуло нового змісту завдяки стрімкому розвитку лінійної алгебри, теорії матриць та чисельних методів. Квадрики почали розглядати не лише як геометричні об'єкти, а й як моделі для опису процесів у фізиці, механіці та інженерії. Для прикладу, еліпсоїди застосовуються для моделювання гравітаційних полів і форм планет, параболоїди – для опису траєкторій руху тіл та відображувальних поверхонь у радіолокаційних антенах, а гіперболоїди – у будівельних конструкціях завдяки їхнім унікальним механічним властивостям. Одночасно розвивалася і теоретична база: поняття інваріантів квадратичних форм, спектральний аналіз матриць коефіцієнтів та методи діагоналізації стали ключовими інструментами у класифікації поверхонь другого порядку.

Сучасний стан теорії поверхонь другого порядку тісно пов'язаний із використанням комп'ютерних технологій. Потужні обчислювальні системи та спеціалізоване програмне забезпечення дозволяють не лише аналітично, а й візуально досліджувати властивості квадрик. Такі інструменти, як MATLAB, Mathematica чи Python-бібліотеки (NumPy, Matplotlib, SymPy), забезпечують можливість автоматизованого аналізу рівнянь поверхонь, побудови їхніх тривимірних моделей та проведення множинних експериментів. Це значно розширює можливості застосування теорії, роблячи її доступною не тільки для математиків, а й для фахівців інших галузей науки та техніки.

Водночас, теорія поверхонь другого порядку зберігає своє фундаментальне значення у сучасній математиці. Вона виступає частиною ширшої проблематики алгебраїчної геометрії, теорії квадратичних форм і багатовимірної геометрії.

Дослідження квадрик відіграє важливу роль у розв'язанні задач оптимізації, у моделюванні фізичних процесів, у розробці комп'ютерних алгоритмів технічного зору та комп'ютерної графіки. Отже, сучасний стан розвитку теорії поверхонь другого порядку характеризується поєднанням класичних математичних підходів, новітніх обчислювальних технологій та широкого спектра практичних застосувань. Це підтверджує, що квадрики залишаються не лише об'єктом суто теоретичного інтересу, а й важливим інструментом у науці й техніці XXI століття.

1.2. Загальна математична модель поверхонь другого порядку

Інтегровані підходи лінійної алгебри та аналітичної геометрії дають змогу задати поверхню другого порядку не тільки геометрично, а й у вигляді однозначного алгебраїчного виразу, що відкриває шлях до систематичного аналізу її властивостей. У стандартній афінній системі координат (x, y, z) загальне рівняння поверхні другого порядку записується у вигляді многочлена другого степеня за координатами:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0, \quad (1.1.)$$

де $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ — дійсні коефіцієнти, що повністю визначають цю поверхню. Така форма є зручною для відкритого розгляду кожного члена: перші шість членів задають квадратичну частину, три наступні — лінійну частину, останній J — вільний член. Множники 2 перед пересічними та лінійними членами.

Компактніше та корисніше записувати це рівняння в матричній формі через квадратичну форму. Нехай $x = (x, y, z)^T$. Тоді квадратична частина задається симетричною матрицею $Q \in R^{3 \times 3}$:

$$Q = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}, \quad (1.2.)$$

і загальне рівняння відображається як

$$x^T Q x + 2p^T x + J = 0. \quad (1.3.)$$

Такий запис підкреслює розпад поверхні на квадратичну частину $x^T Q x$, лінійну частину $2p^T x$ і константу J . Матриця Q визначає власне квадратичну форму і містить усю інформацію про «квадратичний» характер поверхні, вектор p відповідає за зсув центру симетрії (якщо він існує).

Для уніфікації у проєктивній, або однорідній формі використовують розширену симетричну матрицю $M \in R^{4 \times 4}$ і однорідний вектор $X = (x, y, z, 1)^T$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$X^T M X = 0, \quad M = \begin{pmatrix} Q & p \\ p^T & J \end{pmatrix}. \quad (1.4.)$$

Ця форма є зручною для розгляду проєктивних перетворень, для аналізу виродженості поверхні через ранг матриці M , а також для одержання інваріантів під дією загальних лінійних перетворень.

Аналitична форма, наведена вище, одразу показує основні напрями її спрощення та зведення до канонічного вигляду. Якщо матриця Q невивроджена (обернена), то можна знайти центр поверхні $x_0 = -Q^{-1}p$ і виконати зсув координат $y = x - x_0$, після чого рівняння перетворюється в завершену квадратичну форму без лінійних членів:

$$y^T Q y + (J - p^T Q^{-1} p) = 0. \quad (1.5.)$$

Далі застосовна ортогональна діагоналізація матриці Q : існує ортонормальний перетворювач R , при якому $R^T Q R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Після подальшого перетворення координат на головні осі отримуємо простішу канонічну форму

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + C = 0, \quad (1.6.)$$

де $C = J - p^T Q^{-1} p$ і $u = R^T y$. Саме структура власних значень λ_i матриці Q (їхні знаки і нульові значення) та значення C визначають основну геометричну природу поверхні: центральні еліпсоїди та гіперболоїди, параболоїди, вироджені випадки тощо. Якщо Q вироджена (ранг менший за 3), пряма процедура інверсії Q^{-1} недоступна і для впорядкування застосовують розширені методи (часткове

доповнення до повного квадрата, аналіз рангів Q та M), що дає параболічні або циліндричні випадки.

Аналітична форма, теж, явно показує, як змінюються коефіцієнти при афінних перетвореннях координат: квадратична частина підлягає конгруентному перетворенню (наприклад, при обертаннях $Q' = R^T Q R$, а лінійна та вільна частини змінюються відповідно до зсуву та склеювання з квадратичною частиною. Завдяки цьому матричний підхід робить очевидними інваріанти поверхні (ранг, сигнатура квадратичної форми, значення поліномів інваріантів), що будуть використані надалі для класифікації та алгоритмічної обробки.

Запис рівняння поверхні другого порядку у матричній формі створює основу для більш глибокого і систематичного аналізу, оскільки дозволяє застосовувати методи лінійної алгебри та теорії матриць. Симетрична матриця квадратичної форми, що виникає у виразі $x^T Q x$, концентрує всю інформацію про квадратичні члени рівняння і виступає ключовим інструментом у дослідженні геометричних властивостей поверхонь другого порядку.

Властивість симетричності матриці Q гарантує наявність дійсних власних значень і ортонормованого базису власних векторів. Саме ці характеристики визначають положення головних осей поверхні, а також тип її канонічної форми. Знаковий склад власних значень (сигнатура матриці Q) дозволяє встановити природу поверхні: еліпсоїд, гіперболоїд, параболоїд, або інші випадки. Тому, матриця Q виконує роль своєрідного «ідентифікатора» форми, оскільки будь-яке ортогональне перетворення координат лише діагоналізує її, але не змінює кількість власних значень.

Крім визначення загальної геометричної структури, матриця квадратичної форми забезпечує зручний інструментарій для знаходження центру поверхні. Якщо матриця Q невироджена, то координати центру визначаються через систему лінійних рівнянь $Qx_0 = -p$. Це свідчить про те, що аналітичні властивості рівняння тісно пов'язані з алгебраїчними характеристиками матриці. У випадку, коли Q вироджена, аналіз проводиться шляхом дослідження її рангу та

підпросторів власних векторів, що відкриває перспективи класифікації вироджених поверхонь, зокрема циліндрів або конусів.

Важливою є й можливість використання інваріантів, пов'язаних із матрицею квадратичної форми. Серед них визначник $\det Q$, слід $\operatorname{tr} Q$, мінори та знакові характеристики головних мінорів. Ці величини не залежать від вибору координатної системи і дають змогу швидко встановити класифікацію рівняння до певного класу площин. Наприклад, знак визначника часто вказує на замкненість чи відкритість поверхні, тоді як ранг визначає ступінь її виродженості.

В поєднанні з лінійною частиною рівняння матриця квадратичної форми дозволяє дослідити симетрії та геометричні особливості об'єкта, включно з можливістю його впорядкування до простих канонічних форм. Це суттєво спрощує як теоретичний розгляд, так і практичне використання у прикладних задачах комп'ютерної графіки, архітектури чи інженерного моделювання.

Також, варто розглянути питання про спрощення рівняння поверхні шляхом вибору зручної системи координат. Адже, попри компактність матричного запису, вихідне рівняння поверхні другого порядку у загальному вигляді може містити велику кількість членів, включно зі змішаними добутками змінних. Це суттєво ускладнює як аналітичний розгляд, так і геометричну інтерпретацію. Саме тому в математичній практиці виникла необхідність у методах доведення рівняння до нормальних, або канонічних форм за допомогою перетворень координат.

Основна ідея полягає у виконанні ортогональних перетворень, які зберігають відстань та взаємні кути, але водночас дозволяють усунути члени перемішаними добутками, тобто діагоналізувати матрицю квадратичної форми. Для цього використовується власний базис матриці Q , у якому вона набуває діагонального вигляду. В новій системі координат рівняння поверхні виражається у значно простішій формі, де кожна змінна входить окремо, без перемішування з іншими. Це дає можливість безпосередньо бачити геометричну

природу поверхні, адже форма рівняння визначає, до якого типу квадрик належить об'єкт.

Разом з ортогональними перетвореннями часто застосовуються й паралельні перенесення, що дозволяють позбутися лінійних членів у рівнянні. Це особливо важливо у випадку, коли поверхня має центр симетрії, і його положення не збігається з початком координат. Зміщення системи координат у точку центру дозволяє будувати рівняння до вигляду, де присутні лише квадратичні та вільний член. Такий підхід відкриває можливість аналізу поверхонь із різними властивостями, включаючи вироджені випадки, як-от циліндри чи конуси.

В результаті виконаних перетворень отримують канонічні рівняння поверхонь другого порядку. Вони слугують універсальними зразками для класифікації квадрик. Так, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди чи конуси можна ідентифікувати безпосередньо за канонічною формою їхніх рівнянь. В сучасних дослідженнях процес приведення до нормальної форми часто автоматизується за допомогою комп'ютерних обчислювальних систем, що дозволяє не лише отримати прості вирази, але й одразу здійснити їхню візуалізацію.

1.3. Основні типи поверхонь другого порядку та їх аналітичні властивості

Поверхні другого порядку займають важливе місце в аналітичній геометрії, оскільки описують широкий клас тривимірних об'єктів, що виникають у математиці, фізиці та техніці. Серед них особливу роль відіграють, вище згадані: еліпсоїд, гіперболоїд і параболоїд, які належать до канонічних форм і мають чітко визначені аналітичні властивості.

Еліпсоїд

Еліпсоїд є тривимірним аналогом еліпса. Його рівняння у канонічній формі має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.7.)$$

де $a, b, c > 0$ – параметри, що визначають довжини півосей.

Основні характеристики еліпсоїда:

- замкненість поверхні, тобто всі точки обмежені певною областю;
- симетрія відносно всіх трьох координатних площин;
- усічення площинами дають еліпси, а при рівності двох параметрів – кола.

За співвідношенням параметрів виділяють сферу та сфероїди (обертання еліпса навколо осі).

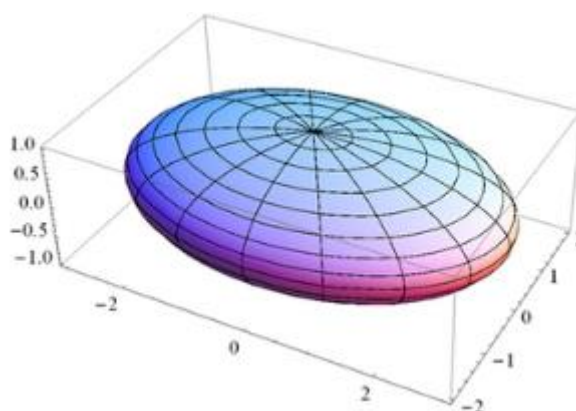


Рис. 1.1 Еліпсоїд

Гіперболоїд

Гіперболоїд буває одно- та двопорожнинний. Його канонічні рівняння відповідно:

- однопорожнинний:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.8.)$$

— двопорожнинний:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.9.)$$

Основні характеристики:

- однопорожнинний гіперболоїд є нескінченною поверхнею з гіперболічними перетинами, що має вигляд «гіперболічної вежі»;
- двопорожнинний складається з двох відокремлених частин (рис. 1.2);
- поверхня симетрична відносно всіх координатних площин;
- перерізи площинами можуть давати еліпси, гіперболи або прямі.

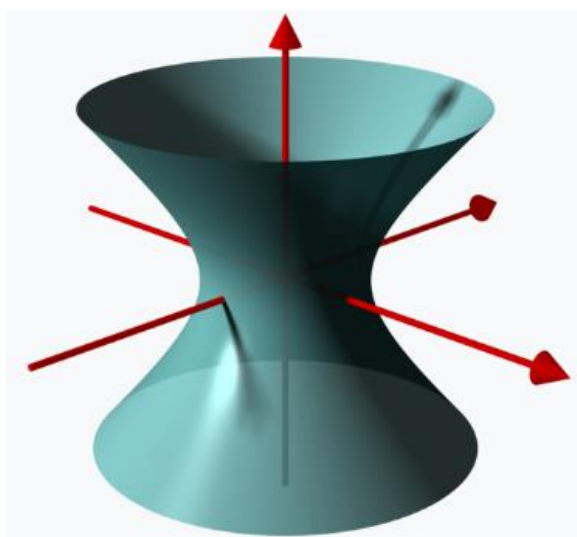


Рис. 1.2 Гіперболоїд

Параболоїд

Параболоїд буває еліптичний та гіперболічний.

— Еліптичний параболоїд задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad (1.10.)$$

де поверхня має форму «чаші», відкрита в нескінченність у напрямі однієї осі.

— Гіперболічний параболоїд має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (1.11.)$$

що утворює «сідлоподібну» форму. (рис. 1.3)

Основні характеристики параболоїдів:

- відсутність замкненості – поверхня нескінченна;
- симетрія відносно координатних площин;
- зрізи площинами можуть утворювати параболи, еліпси чи гіперболи;
- еліптичний параболоїд має лише одну вершину – точку мінімуму або максимуму, тоді як гіперболічний характеризується сідловою точкою.

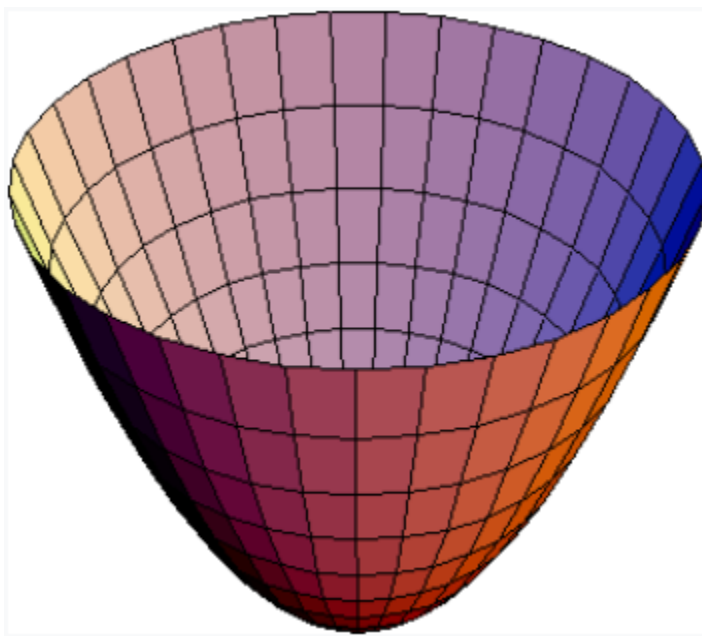


Рис. 1.3 Параболоїд

В цілому, еліпсоїд, гіперболоїд і параболоїд відрізняються замкненістю чи відкритістю поверхні, формою перерізів та типом симетрії, що дозволяє застосовувати їх у різних розділах науки та техніки для моделювання просторових форм і процесів.

Розглядаючи властивості еліпсоїда, гіперболоїда та параболоїда, важливо звернути увагу на те, що рівняння поверхонь другого порядку можуть описувати не лише реально існуючі у тривимірному просторі об'єкти, але й так звані уявні поверхні. Якраз цей поділ є принциповим для класифікації поверхонь, адже воно визначається тим, чи мають дані рівняння розв'язки у дійсній області чисел.

Дійсні поверхні

До дійсних належать ті поверхні, які мають хоча б єдину множину точок з дійсними координатами, що задовольняють їхнє канонічне рівняння. Інакше кажучи, у просторі вони відображаються як геометрично видимі об'єкти. Прикладами дійсних поверхонь є:

- еліпсоїд, який завжди існує як замкнена поверхня, якщо всі коефіцієнти у знаменниках додатні;

- однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, що формують нескінченні просторові структури;
- еліптичний і гіперболічний параболоїди, які також утворюють нескінченні поверхні;
- конус та циліндр, що належать до окремих випадків рівнянь другого порядку.

Характерною особливістю дійсних поверхонь є можливість побудови їх графічного зображення у просторі, а також наявність конкретних перетинів з координатними площинами, що мають зрозумілу геометричну інтерпретацію (еліпси, параболи, гіперболи).

Уявні поверхні

Уявними називають ті поверхні, рівняння яких не мають жодного розв'язку у дійсних координатах. Вони виникають тоді, коли алгебраїчна форма рівняння не дозволяє побудувати реальну множину точок у тривимірному просторі. Прикладами таких поверхонь є:

- уявний еліпсоїд, рівняння якого набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (1.12.)$$

що не має дійсних розв'язків, адже сума квадратів завжди невід'ємна;

- уявний конус, для якого замість дійсного просторового об'єкта отримується лише точка в початку координат;
- уявний циліндр, рівняння якого також не дає жодних дійсних точок.

Уявні поверхні не мають геометричної інтерпретації у звичному сенсі, проте їх важливість полягає в тому, що вони зберігають алгебраїчну структуру рівняння. У процесі класифікації саме вони дозволяють виділити повну систему можливих канонічних форм.

Поділ на дійсні та уявні поверхні допомагає не лише описати ті об'єкти, що реально існують у просторі, але й зрозуміти повноту класифікації поверхонь

другого порядку. Це має значення як для математичної теорії, так і для практичного застосування, адже дозволяє відокремити рівняння, які мають фізичний або геометричний зміст, від тих, що є лише формальними алгебраїчними конструкціями.

1.4. Алгебраїчні та геометричні методи аналізу поверхонь

Тепер, варто розглянути питання як саме алгебраїчна структура квадратичної матриці дозволяє формалізовано отримувати ці форми та робити геометричні висновки. В цьому контексті спектральна теорема і пов'язана з нею робота з власними значеннями й власними векторами матриці Q відіграють ключову роль: вони дають ідеальну «алгебраїчну лінзу» для розгляду форми, впорядкування її до діагонального вигляду і подальшої класифікації поверхні.

Нехай загальне рівняння квадрики задане в матричній формі

$$x^T Q x + 2p^T x + J = 0 \quad (1.13.)$$

де Q — симетрична 3×3 - матриця, $p \in R^3$, $J \in R$. Якщо матриця Q не вироджена (іншими словами $\det Q \neq 0$, то центр квадрики визначається розв'язком лінійної системи

$$Qx_0 = -p. \quad (1.14.)$$

Записавши $x = y + x_0$ і розгорнувши вираз, одержимо завершену квадратичну форму

$$(x - x_0)^T Q (x - x_0) + C = 0, \quad (1.15.)$$

$$C = J - p^T Q^{-1} p. \quad (1.16.)$$

Цей запис демонструє: аналіз квадрики зводиться до вивчення квадратичної форми $y^T Q y$ і константи C .

Спектральна теорема для дійсних симетричних матриць стверджує, що існує ортонормальний базис власних векторів і ортогональна матриця V така, що

$$Q = V\Lambda V^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (1.17.)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — дійсні власні значення. Переписавши $y = Vu$ (тобто перейшовши до координат у власному базисі), отримуємо діагоналізовану форму рівняння:

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + C = 0. \quad (1.18.)$$

Це перетворення ліквідує перемішані члени й робить явними алгебраїчні та геометричні властивості поверхні. З математичної точки зору важливими є кілька взаємопов'язаних результатів і наслідків.

По-перше, спектральний розклад дає розгорнуте подання квадратичної форми

$$x^T Q x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (v_i^T x)^2 \quad (1.19.)$$

що однозначно інтерпретує внесок кожного власного напрямку v_i у загальну «кривину» чи «прискорення росту» форми. Геометрично власні вектори v_i задають головні осі квадрики, а власні значення λ_i визначають співвідношення «жорсткості» у кожному з цих напрямків: для центральних квадрик (коли $p = 0$) у канонічних рівняннях часто виникає співвідношення $\lambda_i = 1/a_i^2$, де a_i — довжини півосей, тому велике власне значення відповідає малому півосі. Отже, модуль власного значення прямо пов'язаний з масштабом осі; при цьому знак власного значення впливає на локальну природу (еліптичну чи гіперболічну) по відповідному напрямку.

По-друге, сигнатура матриці Q (кількість додатних, від'ємних і нульових власних значень) є інваріантом узгодженою зміною координат (закономірність, відома як теорема Сілвестра про інерцію). Це означає, що при довільному невивродженому перетворенні вигляду $Q \mapsto S^T Q S$ кількості додатних/від'ємних/нульових власних значень не змінюються. Практичний

наслідок: тип квадрики (еліптичний, гіперболічний, параболічний або вироджений) визначається саме цією сигнатурою у поєднанні зі значенням константи C . Технічно, класифікація зводиться до аналізу трьох чисел (n_+ , n_- , n_0) — числа додатних, від’ємних і нульових λ_i — та відношення C до нуля після впорядкування форми.

По-третє, повторюваність власних значень має ясну геометричну інтерпретацію: кратність власного значення веде до додаткової геометричної симетрії. Якщо дві власні величини рівні, поверхня має обертальну симетрію навколо напрямку, відповідного іншому власному вектору; якщо всі три рівні — поверхня має сферичну симетрію. Це дає зручний критерій для виявлення ізотропії (ротаційних або більш сильних симетрій) без об’ємних координатних перетворень.

Випадок виродження (коли хоча б одне $\lambda_i = 0$) вимагає окремого розгляду. Якщо, наприклад, $\text{rank} Q = 2$, то у власному базисі рівняння має вид

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \underbrace{0 \cdot u_3^2}_{=0} + C = 0 \quad (1.20.)$$

i компонента по нульовому власному вектору дає лінійну або вільну складову після зсуву; геометрично це відповідає параболічним або циліндричним випадкам. Практична процедура полягає в образі проблеми на підпростір, де квадратична частина не вироджена, і в подальшому розгляді залишкового лінійного чи вільного члена. У випадку однієї нульової власної величини часто отримуємо параболоїд, у випадку двох — циліндр або пару паралельних площин, залежно від додаткових коефіцієнтів в розширеній матриці M .

З прикладної точки зору використання спектральної теореми, теж, є алгоритмічно вигідним. Послідовність дій під час аналізу конкретної квадрики така: обчислити матрицю Q і вектор p ; якщо $\det Q \neq 0$, знайти центр $x_0 = -Q^{-1}p$; обчислити константу $C = J - p^T Q^{-1}p$; діагоналізувати Q ; перейти до координат і інтерпретувати отриману канонічну форму шляхом аналізу знаків і величин λ_i та

знаку C . Для випадків $\det Q = 0$ аналогічно використовують спектральний розклад із врахуванням нульових власних значень і додаткових умов на ранги розширеної матриці M .

Слід зазначити практичні зауваги: для чисельних реалізацій важливо застосовувати стійкі алгоритми для обчислення власних значень (наприклад, метод Джекобі або QR-алгоритм для симетричних матриць), особливо коли власні значення близькі між собою або коли матриця майже вироджена. В таких випадках невелика похибка може суттєво змінити інтерпретацію (наприклад, спричинити помилкове вважання параболоїда центральною квадрикою), тому бажано аналізувати не лише числові значення, а й їх співвідношення і відносні похибки.

Підсумовуючи: спектральна теорема дає формалізований механізм переходу від загального квадратичного рівняння до канонічної форми, робить очевидними головні осі й масштабні характеристики поверхні, забезпечує інваріантну класифікацію через сигнатуру матриці Q і надає практично ефективний алгоритм для розпізнавання типу квадрики та виявлення її симетрій.

Для повного розуміння сутності квадрик не менш важливим є їхній геометричний розгляд, який дозволяє пояснити характер поведінки поверхні через властивості симетрії та інваріанти. Якщо алгебраїчні методи розкривають внутрішню структуру рівняння, то геометричний підхід показує, як ця структура проявляється у просторі.

Однією з ключових характеристик квадрик є їхня пропорційність. Більшість поверхонь другого порядку мають одну чи кілька площин симетрії, що істотно полегшує їхнє дослідження. Для прикладу, еліпсоїд має три взаємно перпендикулярні площини симетрії, пов'язані з головними осями, а також центр симетрії, що робить його однією з найгармонійніших форм у тривимірному просторі. Подібні властивості притаманні й гіперболоїдам: однопорожнинний гіперболоїд має осьову симетрію, а двопорожнинний зберігає центральну

симетрію. Параболоїди, теж, характеризуються наявністю площин симетрії, але без центра симетрії, що визначає їх відмінність від центральних поверхонь.

Симетрії тісно пов'язані з інваріантами, тобто величинами, які не змінюються при перетвореннях координат. У випадку квадрик головними інваріантами є сліди та визначники, пов'язані з коефіцієнтами матриці квадратичної форми. Вони дозволяють не лише встановити характер поверхні, але й оцінити, які геометричні властивості зберігаються незалежно від обраної системи координат. Завдяки інваріантам стає можливим визначати тип квадрики ще до виконання діагоналізації, що має велике значення у теоретичних дослідженнях і практичних обчисленнях.

Геометрична інтерпретація інваріантів проявляється у таких характеристиках, як наявність центра симетрії, кількість осей симетрії та особливості кривини. Наприклад, якщо всі власні значення додатні, то поверхня має замкнену форму й характеризується виключно еліптичними перерізами. Якщо ж одне значення від'ємне, то pojawiaються гіперболічні властивості, що відображаються у зміні опуклості поверхні в різних напрямках. Таким чином, поєднання інформації про симетрії та інваріанти дозволяє зрозуміти геометричний образ поверхні ще на рівні аналізу рівняння, без побудови графічної моделі.

Завдяки цьому підходу алгебраїчні та геометричні дослідження квадрик доповнюють одна одну. Симетрії визначають зовнішні властивості об'єкта, а інваріанти гарантують стабільність цих властивостей при зміні системи координат. Разом вони формують універсальну основу для аналізу, яка забезпечує повне уявлення про природу поверхонь другого порядку та їхні властивості.

1.5. Використання диференціальних методів у дослідженні поверхонь другого порядку

Розгляд геометричних та алгебраїчних методів вивчення квадрик створив загальну картину їхньої будови, однак для глибшого розуміння властивостей поверхонь важливо дослідити їх поведінку у малих околах окремих точок. Тут ключову роль відіграють диференціальні методи, які дозволяють описати локальні характеристики поверхонь другого порядку через поняття кривини, нормалей та дотичних площин. Ці характеристики допомагають вивчати не тільки форму поверхні як цілого, а й її детальну структуру на рівні точкових властивостей.

Однією з базових локальних характеристик є нормаль до поверхні, яка визначається у кожній регулярній точці. Геометрично нормаль є прямою, що перпендикулярна до дотичної площини в даній точці. Вона відіграє важливу роль у розв'язанні практичних задач, зокрема у визначенні напрямів відбиття або заломлення світла на поверхні, аналізі силових полів, що діють на тіла, або у тривимірному комп'ютерному моделюванні. Нормаль задає орієнтацію поверхні у просторі й використовується для побудови нормалізованих векторних полів, необхідних для чисельних обчислень і графічної візуалізації.

Не менш важливою є характеристика кривини, яка описує, наскільки сильно поверхня відхиляється від дотичної площини у певній точці. Для поверхонь другого порядку особливого значення набувають поняття головних кривин та головних напрямів. В кожній точці поверхні можна виділити два взаємно перпендикулярні напрямки, вздовж яких кривина набуває екстремальних значень. Відповідні значення називають головними кривинами. Саме вони визначають локальну форму поверхні: якщо обидві кривини додатні, точка має еліптичний характер (наприклад, на поверхні еліпсоїда), якщо вони різного знака — точка гіперболічна (як у сідловій області гіперболоїда), а якщо одна з кривин дорівнює нулю, то точка параболічна (характерна для параболоїда).

З кривиною пов'язане поняття кривини Гаусса, яка визначається як добуток головних кривин, та середньої кривини, що дорівнює їхньому середньому арифметичному. Ці інваріантні характеристики дозволяють класифікувати локальні області поверхні незалежно від вибору системи координат. Для прикладу, додатна гаусова кривина свідчить про опуклість поверхні в околі точки, від'ємна — про сідловий характер, а нульова — про перехідну область між різними типами кривини.

Вивчення локальних характеристик поверхні через кривини та нормалі дозволяє не лише оцінювати загальну форму та поведінку поверхні в околі точки, а й відокремлювати на ній особливі точки, де геометричні властивості змінюються особливим чином. Такі точки, що включають екстремуми, сідлові точки, точки перегину та точки нульової кривини, є ключовими для розуміння структури поверхні та її подальшого аналізу в різних застосуваннях.

Використання похідних у цьому контексті дозволяє формалізовано визначати місцезнаходження цих особливих точок. Перші похідні функції, що задає поверхню, визначають напрямки та наявність локальних екстремумів, а нульові значення градієнта вказують на потенційні критичні точки. Другі похідні дають інформацію про кривину в цих точках і дозволяють класифікувати їх за характером: додатні значення другого порядку визначають локальні мінімальні або максимальні точки (еліптичні області), а зміна знаку — сідлові точки (гіперболічні області).

Диференціальні методи дозволяють, також, визначати точки перегину, де змінюється тип кривини, а також точки із нульовою гаусовою кривиною, що відповідають перехідним областям між опуклою та сідловою частинами поверхні. Аналіз похідних забезпечує точне розташування таких точок у просторі, що має велике значення для класифікації квадрик, побудови графічних моделей та оптимізації інженерних конструкцій.

Застосування похідних дає можливість систематично виділяти критичні ділянки поверхні другого порядку, що дозволяє не лише виявляти її геометричні особливості, а й робити висновки про стабільність конструкцій, траєкторії руху по поверхні, а також вплив локальної кривини на фізичні процеси, пов'язані з поверхнею.

Також, після розгляду особливих точок поверхні другого порядку через похідні варто згадати й більш загальний та системний підхід, який реалізується у методах диференціальної геометрії. Ці методи дозволяють не лише локально аналізувати поверхню в околі окремих точок, а й розглядати її властивості у глобальному масштабі, враховуючи кривину, топологію та взаємозв'язки між різними областями поверхні.

Диференціальна геометрія дає можливість визначати інваріанти, які залишаються незмінними при гладких перетвореннях координат, такі як гауссова кривина, середня кривина та напрямки головних кривин. Вони є ключовими для класифікації поверхонь другого порядку, оскільки дозволяють виділити області еліптичного, гіперболічного та параболічного типів, незалежно від конкретного положення або орієнтації поверхні у просторі. Тому, ці інваріанти забезпечують об'єктивну характеристику поверхні, яка не залежить від вибору системи координат, і дозволяють зіставляти різні поверхні за їхньою геометричною природою.

Методи диференціальної геометрії включають й дослідження властивостей кривих на поверхні, зокрема ліній кривини, нормальних перетинів і геодезичних ліній. Вивчення таких кривих дає змогу зрозуміти, як поверхня «поводиться» у просторі: як відбувається зміна напрямків, які траєкторії є мінімальними, та які області мають підвищену кривину. Це особливо важливо для прикладних задач, де поверхня взаємодіє з фізичними процесами, наприклад, у механіці, оптиці чи комп'ютерному моделюванні.

Крім того, диференціальна геометрія дозволяє ефективно інтегрувати локальний та глобальний аналіз. Використовуючи похідні високих порядків, можна виявляти точки перегину, оцінювати гладкість та безперервність кривини, а також формувати чисельні моделі поверхонь із високою точністю. Це дає змогу не лише теоретично класифікувати поверхні, а й практично застосовувати їх у комп'ютерній графіці, інженерних розрахунках та фізичних симуляціях.

Загалом, застосування методів диференціальної геометрії забезпечує глибоке розуміння структурних і локальних властивостей поверхонь другого порядку, поєднуючи аналітичний, алгебраїчний та геометричний підходи в єдину узгоджену систему.

Висновки до першого розділу

Перший розділ роботи дав комплексне уявлення про теоретичні основи дослідження поверхонь другого порядку, поєднуючи історичний, алгебраїчний та диференціальний підходи. Було показано, що розвиток теорії квадрик пройшов значний шлях: від античних спроб описати криві та поверхні до систематичного аналізу у працях Декарта, Ейлера та Лагранжа, і далі до сучасних підходів, які враховують аналітичну, алгебраїчну та геометричну структуру рівнянь другого порядку.

Загальна математична модель поверхні другого порядку представлена через квадратичну форму з можливістю приведення до канонічного вигляду за допомогою перетворень координат. Було детально розглянуто роль матриці квадратичної форми та її власних значень у класифікації поверхонь, що дозволяє виділити головні осі, масштабні характеристики та тип поверхні. Канонічні форми еліпсоїда, гіперболоїда та параболоїда демонструють різноманітність геометричних властивостей і надають наочний інструмент для подальшого аналізу.

Особлива увага приділена розподілу поверхонь на дійсні та уявні, що дозволяє визначати, які рівняння мають реальну геометричну інтерпретацію, а

які зберігають лише алгебраїчну структуру. Алгебраїчні та геометричні методи, зокрема спектральний аналіз матриці квадратичної форми та вивчення симетрій і інваріантів, забезпечують надійну основу для класифікації та аналізу поверхонь другого порядку.

Диференціальні методи дали змогу розкрити локальні властивості поверхні через нормалі, кривини та особливі точки, що дозволяє оцінити поведінку поверхні в околі кожної точки та визначити області еліптичного, гіперболічного і параболічного типів. Визначення диференціальних інваріантів та застосування методів диференціальної геометрії дозволяють поєднати локальний і глобальний аналіз поверхні, забезпечуючи повне розуміння її структури та властивостей.

В цілому, перший розділ сформував міцну теоретичну основу для подальшого практичного аналізу та застосування поверхонь другого порядку, об'єднавши історичний, алгебраїчний, геометричний та диференціальний підходи в єдину систему, що дозволяє не лише класифікувати поверхні, а й прогнозувати їхню поведінку у різних прикладних задачах.

РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1. Геометричні перетворення та їх вплив на рівняння поверхонь другого порядку

У дослідженні поверхонь другого порядку важливу роль відіграє вибір системи координат, адже від нього залежить аналітична форма рівняння та складність подальшого аналізу. Лінійні та афінні перетворення координат

дозволяють перейти від загального рівняння до більш зручного вигляду, зберігаючи при цьому геометричну природу поверхні. Це дає можливість не лише спростити вираз, але й виокремити головні характеристики, які визначають форму квадрики.

Лінійні перетворення описуються матричною заміною змінних:

$$x = Ay, \quad (2.1.)$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор старих координат, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ – нових, а A – невинроджена матриця розміру 3×3 . Таке перетворення включає операції повороту, відбиття та масштабування. В загальному рівнянні поверхні другого порядку

$$x^T Q x + 2p^T x + r = 0, \quad (2.2.)$$

після підстановки $x = Ay$ квадратична частина набуває вигляду

$$y^T (A^T Q A) y, \quad (2.3.)$$

тобто, матриця квадратичної форми змінюється за правилом конгруентного перетворення:

$$Q \mapsto A^T Q A. \quad (2.4.)$$

Саме завдяки цьому можна обрати таке A , щоб спростити структуру матриці Q , наприклад усунути змішані члени та отримати діагональну форму.

Афінні перетворення є узагальненням лінійних і включають додатковий зсув:

$$x = Ay + b, \quad (2.5.)$$

де $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ – вектор переносу. На відміну від чисто лінійних, афінні перетворення дозволяють змістити поверхню у просторі так, щоб її центр (наприклад, центр еліпсоїда чи гіперболоїда) збігався з початком координат. Після підстановки такого перетворення до рівняння квадрики отримаємо

$$(y^T A^T Q A y) + 2(p^T A y + p^T b) + (b^T Q b + 2p^T b + r) = 0. \quad (2.6.)$$

Тут додаткові члени, пов'язані з вектором b , дозволяють усунути лінійну частину рівняння. В результаті рівняння набуває канонічної форми, де залишаються лише квадрати змінних і константа.

Практичне значення таких перетворень полягає у тому, що вони роблять класифікацію поверхонь другого порядку можливою й ефективною. За допомогою лінійних перетворень виділяють головні осі поверхні, визначають відносини між ними та тип квадрики (еліпсоїд, гіперболоїд чи параболоїд). Афінні перетворення, у свою чергу, дають можливість розглядати поверхню у найбільш природній системі координат, що значно спрощує як теоретичний аналіз, так і побудову графіків у програмному середовищі.

В процесі дослідження поверхонь другого порядку важливу роль відіграють різні типи геометричних перетворень, які дають змогу не лише змінювати положення поверхні у просторі, а й розкривати її внутрішні властивості. Серед них особливе значення мають повороти, паралельні переноси та розтяги, оскільки вони дозволяють аналізувати взаємозв'язок між різними представленнями однієї й тієї самої поверхні та спрощувати подальші обчислення.

Повороти координатної системи допомагають усунути члени рівняння, що містять добутки змінних, та перейти до більш зручної канонічної форми. Завдяки цьому стає можливим чіткіше побачити геометричну природу поверхні, відокремивши вплив орієнтації від її внутрішніх характеристик.

Паралельні переноси не змінюють форми поверхні, але впливають на положення її центра чи вершин відносно початку координат. У такий спосіб можна зосередити увагу саме на геометричних властивостях, абстрагуючись від їхнього розташування у просторі.

Розтяги або стискання уздовж координатних осей дозволяють змінювати пропорції поверхні, що дає змогу краще досліджувати симетрії, а також приводити рівняння до більш простих виглядів для аналізу. Вплив цих перетворень особливо помітний у випадку еліпсоїдів та гіперболоїдів, де вони визначають характерні параметри поверхні.

Узгоджене використання поворотів, переносів і розтягів формує цілісну систему прийомів, завдяки якій дослідження поверхонь другого порядку набуває системного характеру. Це забезпечує можливість переходу від загальних рівнянь

до їхніх канонічних форм, що істотно спрощує класифікацію та подальший аналіз.

В ході розгляду впливу поворотів, переносів та розтягів на рівняння поверхонь другого порядку поступово проявляється важливість окремого класу перетворень, які поєднують у собі простоту застосування та глибокий математичний зміст. Йдеться про ортогональні перетворення, що забезпечують особливий підхід до спрощення рівнянь та збереження їхніх основних геометричних характеристик.

Ортогональні перетворення охоплюють усі можливі повороти та відображення у просторі, які не змінюють відстаней між точками та кутів між прямими. Завдяки цій властивості поверхня зберігає свою форму, розміри та взаємне розташування елементів, тоді як рівняння набуває більш зручного вигляду для подальшого аналізу. Особливо важливим є той факт, що ортогональні перетворення не впливають на значення власних чисел і власних векторів матриці квадратичної форми, а отже, дозволяють зберегти незмінними головні геометричні характеристики поверхні.

Одним із ключових застосувань таких перетворень є усунення змішаних членів у рівнянні другого порядку. Завдяки цьому рівняння можна привести до діагонального вигляду, що одразу відкриває його канонічну форму. Наприклад, у випадку еліпсоїда чи гіперболоїда ортогональні перетворення допомагають визначити головні осі поверхні, на яких розташовується симетрія, і зафіксувати їх у вигляді простих квадратичних співвідношень між змінними.

Крім того, роль ортогональних перетворень виходить за межі суто технічного спрощення. Вони створюють основу для класифікації поверхонь другого порядку за інваріантними ознаками, оскільки такі перетворення залишають незмінними ключові величини, як-от визначник і ранг матриці квадратичної форми. Це робить їх одним із найпотужніших інструментів математичного апарату у вивченні геометрії поверхонь.

Отже, застосування ортогональних перетворень не лише полегшує роботу з рівняннями, але й забезпечує більш глибоке розуміння внутрішньої структури

поверхонь другого порядку. Вони дозволяють виявити природну симетрію, відокремити головні осі та зробити рівняння максимально наочним і придатним для подальшого дослідження.

2.2. Визначення основних інваріантів поверхонь другого порядку

Важливим етапом у дослідженні поверхонь другого порядку є виділення тих характеристик, які залишаються незмінними під час лінійних і, зокрема, ортогональних перетворень координат. Такі величини отримали назву інваріантів. Вони є фундаментальним інструментом для класифікації квадрик і дозволяють описати їхню геометричну природу незалежно від конкретного вигляду рівняння у вибраній системі координат.

Рівняння поверхні другого порядку у загальному вигляді можна записати так:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0, \quad (2.7.)$$

де $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ — дійсні коефіцієнти. Його квадратична частина описується матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \quad (2.8.)$$

Саме з цією матрицею пов'язані основні квадратичні інваріанти. До найважливіших належать:

1. Слід матриці

$$I_1 = \text{tr}(Q) = A + B + C. \quad (2.9.)$$

Він дорівнює сумі власних значень матриці Q . Геометрично ця величина відображає сумарний внесок основних координат у визначення поверхні.

2. Сума головних мінорів другого порядку

$$I_2 = AB + AC + BC - (D^2 + E^2 + F^2). \quad (2.10.)$$

Цей інваріант характеризує взаємозв'язки між різними координатними напрямками і теж може бути виражений через добутки власних значень матриці, взяті по двоє.

3. Визначник матриці

$$I_3 = \det(Q) = ABC + 2DEF - AF^2 - BE^2 - CD^2. \quad (2.11.)$$

Знак і значення цього інваріанта відіграють ключову роль у класифікації поверхонь. Наприклад, для еліпсоїда характерним є $I_3 > 0$ і всі власні значення одного знаку, тоді як для гіперболоїда власні значення різних знаків і визначник може бути від'ємним.

Ці три інваріанти (I_1 , I_2 , I_3) є незалежними від вибору системи координат і тому дозволяють робити висновки про властивості поверхні навіть до зведення рівняння до канонічної форми. Наприклад:

- Якщо $I_3 = 0$, то поверхня є виродженою (може зводитися до площини, пари площин або прямої).
- Якщо всі власні значення додатні й $I_3 > 0$, то рівняння описує еліпсоїд.
- Якщо власні значення різних знаків, то поверхня є гіперболоїдом або конусом.

Квадратичні інваріанти становлять основу для систематичної класифікації поверхонь другого порядку. Вони дозволяють досліднику одразу визначити ключові властивості об'єкта, уникнувши складних обчислень, пов'язаних із переходом до нормальних форм.

З огляду на значення квадратичних інваріантів, особливе місце серед них займають визначник та слід матриці коефіцієнтів, оскільки саме вони найбільш безпосередньо відображають структуру та властивості поверхонь другого порядку. Ці характеристики належать до числа найбільш інформативних і водночас простих у використанні, що робить їх базовим інструментом у класифікації та дослідженні квадрик.

Слід матриці виражає суму діагональних елементів, тобто суму коефіцієнтів при квадратичних членах рівняння поверхні. Його значення дозволяє визначити загальний характер внеску змінних у формування геометрії поверхні. Якщо слід є додатним, це свідчить про переважання еліптичних властивостей, тоді як від'ємне значення вказує на гіперболічну природу. Окрім того, аналіз співвідношення між слідом та іншими інваріантами допомагає відокремлювати вироджені випадки від повноцінних тривимірних поверхонь.

$$\text{tr } A = \text{Sp } A = \sum_i a_{ii} \quad (2.12.)$$

Рис. 2.1 Слід матриці

Визначник матриці коефіцієнтів виступає ще більш наочним критерієм. Його знак та величина пов'язані з розподілом власних значень, а отже, з топологією самої поверхні. Додатний визначник свідчить про те, що всі власні значення одного знаку, що відповідає замкненим поверхням типу еліпсоїда. Якщо ж визначник від'ємний, це означає, що серед власних значень є як додатні, так і від'ємні, що характерно для відкритих поверхонь, наприклад, гіперболоїдів. У випадку, коли визначник дорівнює нулю, поверхня втрачає просторову повноту і переходить у вироджений стан, наприклад, у площину чи конус.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 2.2 Приклад визначника матриці (3x3)

В поєднанні зі слідом визначник дозволяє отримати цілісне уявлення про тип поверхні та її геометричні властивості. Так, для еліпсоїдів одночасно характерні додатний визначник та додатний слід, тоді як для однопорожнинного гіперболоїда визначник буде від'ємним, а слід може змінювати знак залежно від орієнтації поверхні. Для параболоїдів ключовим критерієм стає нульовий

визначник, але значення сліду при цьому допомагає розмежувати еліптичний та гіперболічний випадки.

Розглянувши роль сліду та визначника матриці коефіцієнтів, стає очевидним, що інваріанти в цілому мають фундаментальне значення для систематизації та розмежування різних типів поверхонь другого порядку. Якраз вони виконують функцію своєрідних «маркерів», які не змінюються під час перетворень координат і дозволяють незалежно від форми рівняння визначити геометричну природу поверхні. Тому, інваріанти виступають критеріями класифікації, які забезпечують надійну основу для побудови єдиної теорії квадрик.

Серед усіх можливих інваріантів саме квадратичні інваріанти, а також визначник і слід матриці коефіцієнтів, формують комплекс характеристик, достатніх для чіткої класифікації поверхонь. Їх поєднання дозволяє відокремити еліптичні поверхні від гіперболічних, а також визначити випадки параболоїдів чи вироджених структур. Для прикладу, аналіз знаку визначника разом із характером сліду та величиною проміжних інваріантів дозволяє без зведення рівняння до канонічної форми зробити висновок про тип поверхні. Це особливо важливо у практичних задачах, де повний обчислювальний перехід до нормальної форми може бути надмірно складним чи ресурсозатратним.

Класифікаційна роль інваріантів, теж, полягає у можливості виявлення симетрій та специфічних властивостей, які відрізняють один клас поверхонь від іншого. Так, у випадку еліпсоїдів усі власні значення додатні, а отже, інваріанти мають строго визначені знакові характеристики. Для гіперболоїдів обов'язково присутні власні значення різних знаків, що відображається у від'ємному визначнику. Для параболоїдів нульовий визначник стає головним критерієм, тоді як інші інваріанти уточнюють належність до еліптичного чи гіперболічного випадку.

В цілому, використання інваріантів як критеріїв класифікації забезпечує системність у підході до вивчення поверхонь другого порядку. Вони дозволяють не лише скоротити складність обчислень, а й побудувати універсальний підхід,

який працює для будь-якої квадрики. Це робить інваріанти не допоміжним, а центральним елементом у теорії поверхонь другого порядку, на якому ґрунтуються як теоретичні узагальнення, так і прикладні методики дослідження.

2.3. Алгоритми класифікації поверхонь другого порядку

Використання власних значень матриці квадратичної форми є одним із найефективніших методів класифікації поверхонь другого порядку. Оскільки будь-яке рівняння квадрики може бути подане у вигляді симетричної матриці, її власні значення зберігають усю необхідну інформацію про геометричну природу поверхні. Найважливішою властивістю є те, що знаки власних значень залишаються інваріантними відносно ортогональних перетворень координат, що дозволяє визначати тип поверхні незалежно від її розташування у просторі.

Суть підходу полягає у тому, що кількість додатних, від’ємних і нульових власних значень визначає клас поверхні. Якщо всі власні значення додатні, поверхня є еліпсоїдом, що характеризується замкненою формою і симетрією відносно всіх координатних осей. Якщо серед власних значень є як додатні, так і від’ємні, виникають поверхні гіперболічного типу, наприклад гіперболоїд однопорожнинний чи двопорожнинний. Якщо одне з власних значень дорівнює нулю, а решта мають однаковий знак, формується параболоїд, який характеризується відкритою структурою. Тому, власні значення є прямим і зручним інструментом для розмежування між еліптичними, гіперболічними та параболічними поверхнями.

Для прикладу, розглянемо матрицю квадратичної форми:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (2.13.)$$

Власні значення цієї матриці — 2, 3, 5. Всі вони додатні, тому рівняння описує еліпсоїд.

Інший приклад:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.14.)$$

Тут власні значення — 1, -2, 3. Оскільки є як додатні, так і від'ємні, поверхня відноситься до гіперболоїдів.

Ще один випадок:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15.)$$

У цьому разі власні значення — 1, 1, 0. Нульове значення свідчить про те, що поверхня є параболоїдом.

Загальна схема класифікації будується за принципом:

- усі власні значення одного знаку → еліпсоїд;
- власні значення різних знаків → гіперболоїд або конус;
- наявність нульового власного значення → параболоїд чи вироджена поверхня.

Класифікація за знаками власних значень забезпечує простий і надійний механізм визначення типу квадрики, дозволяючи швидко орієнтуватися у різноманітті поверхонь другого порядку.

Подальше уточнення типів поверхні можна здійснити за допомогою канонічних рівнянь. Перехід до канонічної форми дозволяє представити поверхню у максимально спрощеному вигляді, де відсутні змішані члени, і кожна змінна відповідає конкретній осі симетрії. Це дає змогу наочно визначити геометричний тип поверхні та її основні характеристики.

Канонічні рівняння мають стандартні форми для різних класів квадрик. Для еліпсоїда це рівняння у вигляді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, де a, b, c — параметри довжин головних осей. Для гіперболоїда однопорожнинного канонічна форма виглядає як $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, тоді як для гіперболоїда двопорожнинного — $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Параболоїди приймають вигляд $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ або $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, залежно від еліптичного чи гіперболічного типу.

Використання канонічних рівнянь дозволяє не лише точно ідентифікувати тип поверхні, але й порівнювати різні квадрики між собою. Наприклад, якщо два рівняння після перетворення у канонічну форму збігаються по знаках та параметрах, це свідчить про геометричну еквівалентність поверхонь, незалежно від початкового розташування у просторі або складності початкового рівняння.

Крім того, канонічні форми полегшують подальше дослідження властивостей поверхні, таких як симетрія, розташування вершин, наявність асимптот чи характер перетинів із площинами. Це особливо корисно при практичних завданнях моделювання та обчислення параметрів поверхні у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці.

Аналізуючи класифікацію поверхонь другого порядку за канонічними рівняннями, стає зрозуміло, що для сучасних практичних задач надзвичайно важливо мати методику, яка дозволяє визначати тип поверхні автоматично, без ручного розв'язання рівнянь і перетворення координат. Автоматизовані алгоритми класифікації поєднують точність математичного аналізу з ефективністю комп'ютерного обчислення, що робить їх незамінними в інженерних проєктах, комп'ютерній графіці, фізичному моделюванні та прикладній математиці. Завдяки таким алгоритмам можна опрацьовувати великі масиви даних або складні поверхні, які містять численні змішані квадратичні члени, без ризику втратити критичну інформацію про геометричну природу об'єкта.

Практичні алгоритми починаються зі створення матриці квадратичної форми з коефіцієнтів заданого рівняння поверхні. Потім обчислюються основні інваріанти — слід, визначник, сума мінорів другого порядку, а також власні значення матриці. На цьому етапі алгоритм аналізує знаки власних значень та співвідношення інваріантів, що дозволяє здійснити первинну класифікацію поверхні. Для прикладу, якщо всі власні значення додатні і визначник від’ємний, система розпізнає поверхню як еліпсоїд; якщо є як додатні, так і від’ємні власні значення — гіперболоїд; якщо одне з власних значень дорівнює нулю, поверхня класифікується як параболоїд. Такий підхід забезпечує високий рівень точності навіть у випадках, коли початкове рівняння містить змішані квадратичні члени або нетипові коефіцієнти.

На наступному етапі алгоритм виконує приведення рівняння до канонічної форми за допомогою ортогональних перетворень. Це здійснюється шляхом обчислення власних векторів матриці квадратичної форми і побудови системи координат, у якій усі змішані члени зникають. Після цього алгоритм зіставляє отримані канонічні коефіцієнти з шаблонними формами для еліпсоїдів, гіперболоїдів, параболоїдів та вироджених поверхонь. Така перевірка дозволяє остаточно визначити геометричний тип поверхні, а також виявити вироджені випадки, коли поверхня може зводитися до площини, прямої або точки.

В практичному застосуванні алгоритми можуть бути реалізовані у вигляді покрокової процедури: спершу перевірка на виродженість через нульовий визначник, далі обчислення знаків власних значень і інваріантів, після чого проводиться приведення до канонічної форми і остаточне зіставлення з типами поверхні. Цей підхід дозволяє автоматично обробляти великі набори рівнянь, аналізувати складні поверхні і швидко отримувати класифікацію без ручного втручання.

Завдяки автоматизованим алгоритмам класифікації досягається не лише швидкість і точність, а й можливість інтеграції у сучасні програмні середовища для моделювання та графіки, такі як CAD-системи або пакети для комп’ютерного

геометричного аналізу. Вони дозволяють досліджувати властивості поверхні, прогнозувати її поведінку при різних перетвореннях, моделювати інженерні конструкції та візуалізувати об'єкти у тривимірному просторі.

2.4. Використання сучасних програмних засобів для моделювання поверхонь другого порядку

У сучасних дослідженнях поверхонь другого порядку використання таких програмних засобів, як MATLAB та Mathematica, набуває особливого значення. Вони дозволяють об'єднати аналітичні розрахунки, чисельні методи та візуалізацію результатів у єдине інтегроване середовище. Це робить дослідження не лише більш ефективним з наукової точки зору, але й наочним, що важливо як для глибокого розуміння теоретичних аспектів, так і для навчального процесу.

MATLAB вирізняється насамперед своєю орієнтацією на числові обчислення та побудову тривимірних моделей. В ньому можна легко створювати сітки точок, обчислювати значення рівнянь у цих точках і будувати поверхні у вигляді кольорових тривимірних графіків. Зручність MATLAB полягає у тому, що він дозволяє відображати поверхні як у параметричній, так і в неявній формах, надаючи змогу порівнювати різні способи представлення одного й того самого об'єкта. Дослідник може змінювати параметри поверхні та одразу бачити, як це впливає на її форму, що особливо цінно для аналізу впливу геометричних перетворень. Важливо й те, що MATLAB легко працює з матрицями та великими масивами даних, що дає можливість проводити експерименти з поверхнями різних типів, аналізувати їх стійкість до змін параметрів та відображати результати у вигляді інтерактивних тривимірних моделей. Крім того, у середовищі MATLAB можна налаштовувати освітлення, колірну гаму, прозорість, що робить візуалізацію більш наочною та придатною для наукових публікацій чи презентацій.

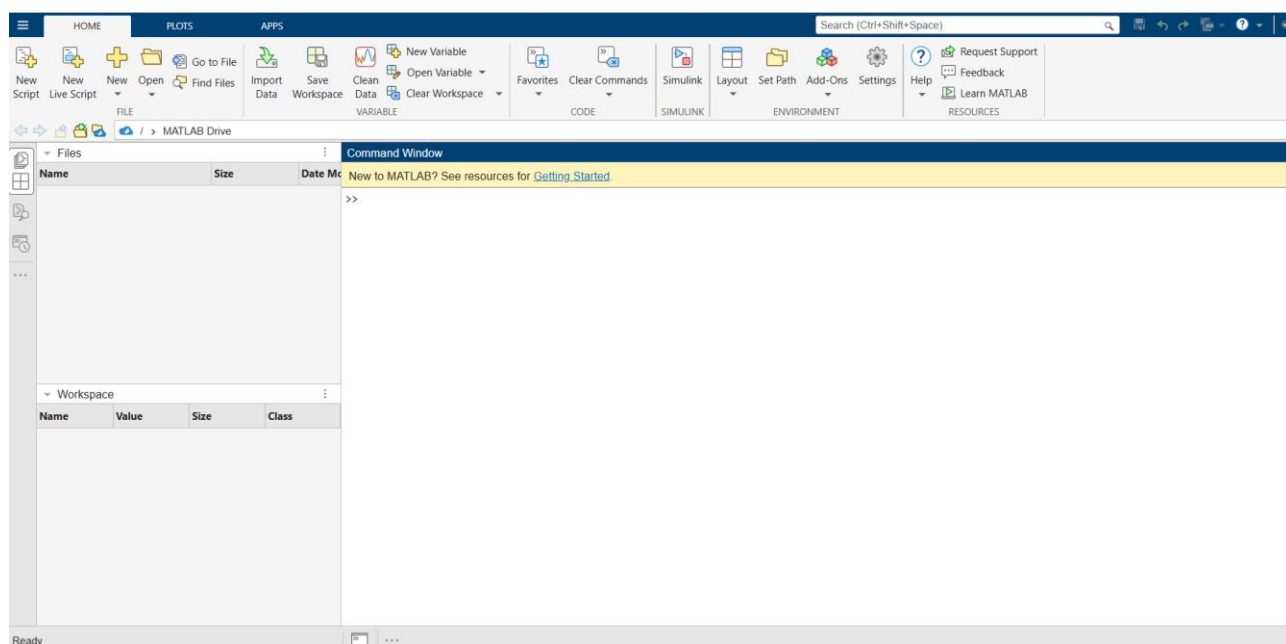


Рис. 2.3 Інтерфейс Matlab-online

Гіперболоїд одного листа: $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)-(z^2/c^2)=1$

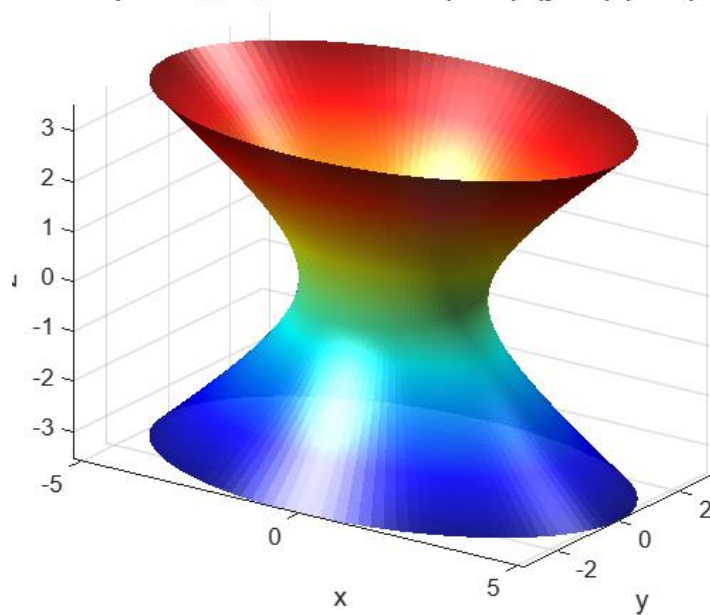


Рис. 2.4 Побудова еліптичного гіперболоїда одного листа (MATLAB)

Гіперболічний параболоїд: $z = (x^2/a^2) - (y^2/b^2)$

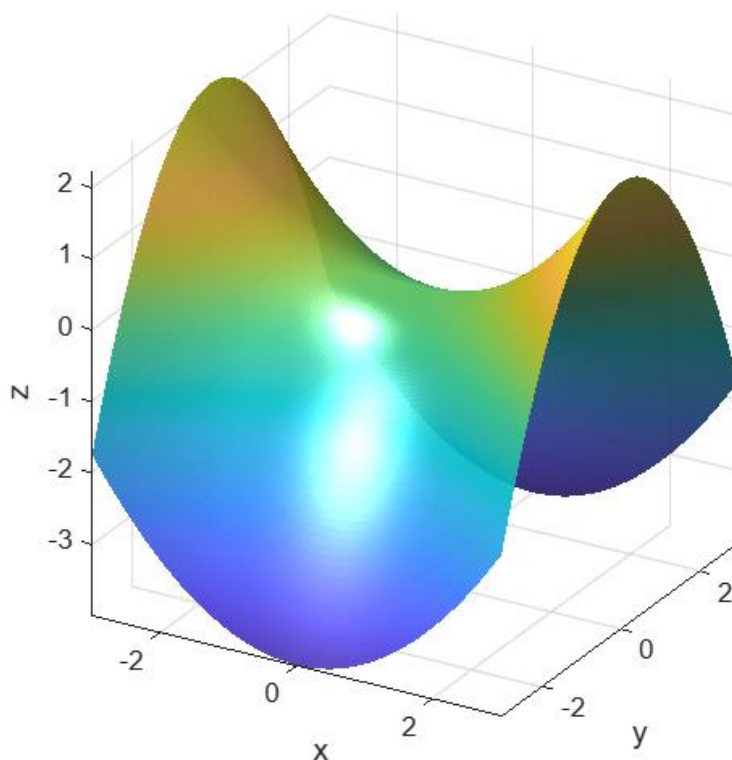


Рис. 2.5 Побудова еліптичного параболоїда (MATLAB)

Mathematica, своєю чергою, має особливу силу у символічних обчисленнях, що дозволяє працювати безпосередньо з алгебраїчними виразами. Завдяки цьому користувач може ввести загальне рівняння поверхні у символічній формі, попросити систему його спростити, перетворити у більш зручний вигляд, а потім одразу отримати графічне зображення. Mathematica підтримує різні типи візуалізації: від стандартних тривимірних моделей до більш складних інтерактивних графіків, де параметри поверхні можна змінювати у режимі реального часу. Це робить роботу з нею особливо зручною для освітнього процесу, коли студент має можливість самостійно експериментувати й одразу спостерігати, як змінюється форма поверхні. Окрім цього, Mathematica дозволяє вивчати перетини поверхонь з площинами, аналізувати уявні та вироджені випадки, отримувати високоякісні ілюстрації для наукових робіт або

експортувати тривимірні моделі для подальшого використання у спеціалізованих програмах.

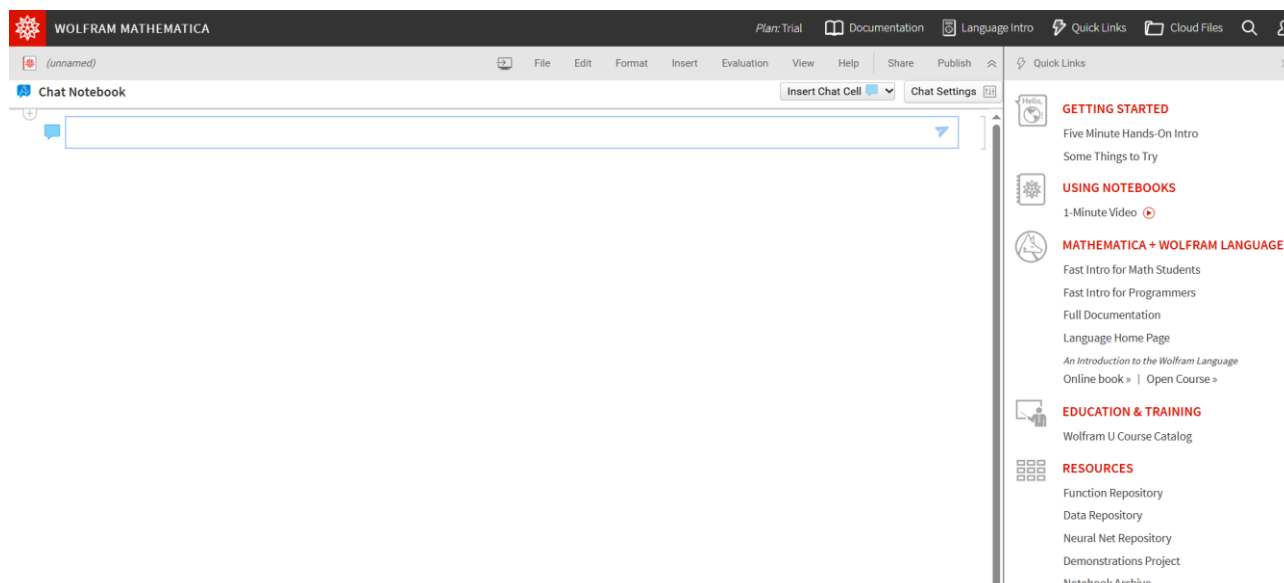


Рис. 2.6 Інтерфейс робочого середовища Wolfram Mathematica

Важливо відзначити, що хоча обидві системи мають певні подібності у можливостях, вони акцентують увагу на різних підходах. MATLAB більше підходить для інженерних завдань, чисельних експериментів та роботи з великими наборами даних, тоді як Mathematica є незамінною у випадках, коли потрібні точні символічні розрахунки, аналітичне перетворення рівнянь чи створення інтерактивних навчальних моделей. Саме тому у наукових дослідженнях часто застосовують обидві системи комплексно: Mathematica використовують для символічного доведення та спрощення, а MATLAB — для подальшого чисельного аналізу й візуалізації у вигляді наочних моделей.

На відміну від комерційних систем MATLAB та Mathematica, які пропонують готові інтегровані середовища для аналітики й візуалізації, мова програмування Python надає дослідникові гнучкі можливості для створення власних інструментів на основі відкритих бібліотек. Це робить Python особливо цінним у контексті дослідження поверхонь другого порядку, оскільки

користувач має змогу поєднувати чисельні розрахунки, символічну алгебру та сучасні засоби тривимірної візуалізації у рамках одного середовища, при цьому уникаючи обмежень закритих програмних продуктів.

Однією з ключових бібліотек, яку доцільно застосовувати, є NumPy. Вона дозволяє швидко виконувати обчислення з багатовимірними масивами та матрицями, що є основою для створення сіток точок, на яких визначаються значення рівнянь поверхонь. Завдяки високій швидкості обробки даних NumPy забезпечує ефективність навіть при роботі з великими об'ємами даних, що особливо актуально для досліджень складних поверхонь.

Ще одним важливим інструментом є бібліотека Matplotlib, яка використовується для побудови графіків та візуалізації результатів обчислень. Вона підтримує як двовимірну, так і тривимірну графіку, зокрема модуль mplot3d дозволяє створювати тривимірні поверхні, задавати їх кольорові схеми, освітлення та кути огляду. Це робить результат не лише математично коректним, але й наочним для сприйняття.

Крім того, важливе значення має бібліотека SymPy, яка забезпечує роботу з символічними виразами. Вона дозволяє вводити рівняння поверхонь у загальному вигляді, спрощувати їх, проводити аналітичні перетворення та знаходити ключові характеристики, після чого результати можна передати у чисельні модулі для подальшої візуалізації. Таким чином, SymPy в Python фактично виконує подібні завдання до Mathematica, але у відкритій екосистемі.

Для більш сучасної та реалістичної візуалізації часто застосовують бібліотеки Plotly та Mayavi. Plotly дає змогу створювати інтерактивні графіки, які можна обертати, масштабувати та досліджувати у веб-браузері, що значно розширює можливості презентації результатів. Mayavi, своєю чергою, спеціалізується на складній тривимірній графіці та візуалізації наукових даних, забезпечуючи глибину та реалістичність побудови поверхонь.

Приклад використання Python для візуалізації поверхні другого порядку може виглядати так:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Створення сітки точок
x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = np.linspace(-5, 5, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Задання поверхні (наприклад, еліптичний параболоїд)
Z = X**2 + Y**2

# Побудова 3D-графіка
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

ax.set_title("Візуалізація поверхні другого порядку у Python")
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")

plt.show()
```

Цей код наочно демонструє, як із використанням декількох бібліотек можна створити тривимірну модель поверхні. Користувач має змогу змінювати параметри, досліджувати інші типи поверхонь та експериментувати з різними кольоровими схемами чи стилями відображення. В підсумку Python не лише забезпечує широкі можливості для аналізу та візуалізації, але й відкриває шлях до гнучкого налаштування під конкретні завдання, що робить його надзвичайно ефективним інструментом для дослідження поверхонь другого порядку у науковій і навчальній практиці.

На відміну від підходу на основі мов програмування та бібліотек, де користувач самотійно формує код і контролює кожен етап побудови, комп'ютерне моделювання загалом дає змогу поєднувати чисельні методи, аналітичні засоби та візуалізацію у зручному інтерактивному форматі. Це

відкриває значні можливості для дослідження поверхонь другого порядку, оскільки комп'ютер здатен виконати складні розрахунки та миттєво представити результат у графічному вигляді, що робить абстрактні математичні поняття більш зрозумілими й доступними для аналізу.

Однією з головних переваг комп'ютерного моделювання є його наочність. Наприклад, побудова еліптичного параболоїда чи гіперboloїда у Python, MATLAB або CAD-системі дозволяє дослідникові обертати модель, змінювати кут огляду, застосовувати різні схеми освітлення й кольорового відображення (рис. 2.7-2.8). Це суттєво спрощує розуміння просторових властивостей поверхні та допомагає виявляти закономірності, які важко уявити лише за рівняннями. У навчальному процесі така візуалізація є особливо важливою, оскільки студенти швидко бачать різницю між, наприклад, одно- та двопорожнинним гіперboloїдом, або ж можуть дослідити, як змінюється форма параболоїда залежно від параметрів.

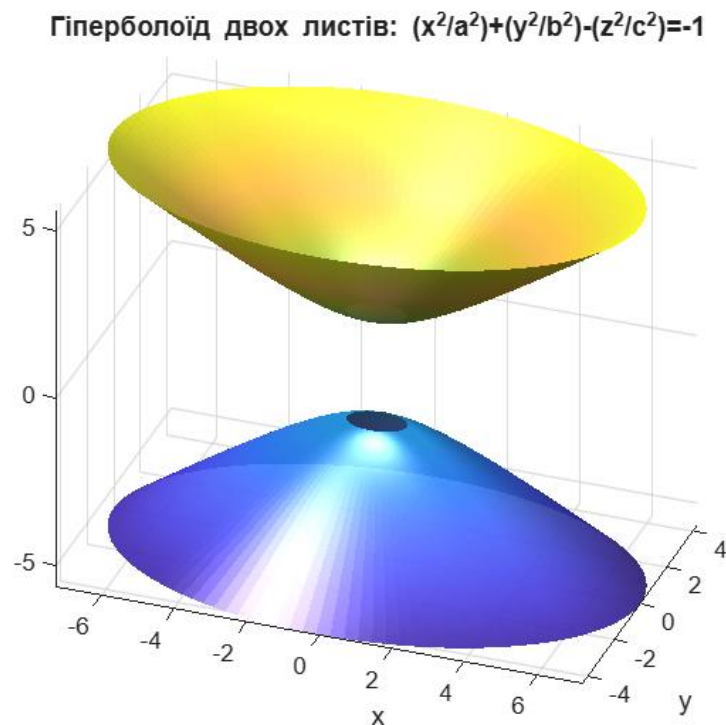


Рис. 2.7 Еліптичний гіперboloїд (MATLAB)

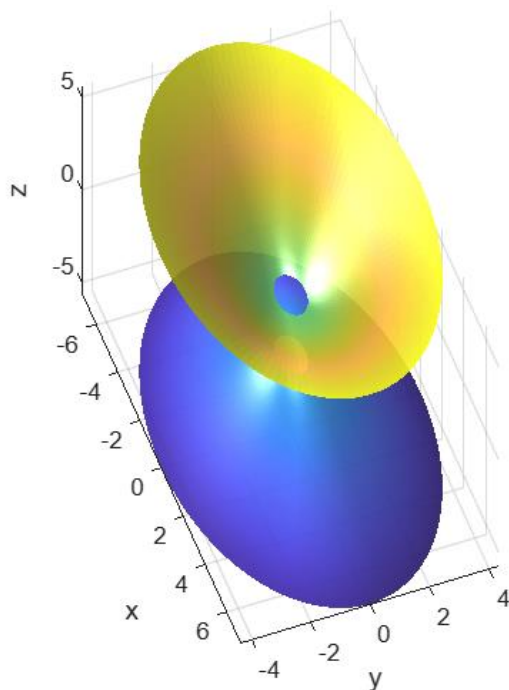


Рис. 2.8 Зміна кута еліптичного гіперболоїда (MATLAB)

Ще одна важлива перевага полягає у швидкості та точності обчислень. Там, де раніше потрібно було вручну креслити контури або будувати аксонометричні зображення, комп'ютер виконує роботу миттєво, навіть для складних поверхонь чи великих наборів даних. Це дозволяє зосередитися не стільки на рутинних обчисленнях, скільки на аналізі результатів та пошуку нових закономірностей. Для прикладу, за допомогою бібліотеки Plotly можна побудувати інтерактивну модель, яку користувач здатен досліджувати у браузері, змінюючи параметри в реальному часі. Це підходить не лише для навчання, але й для наукових презентацій.

Однак, комп'ютерне моделювання має й певні обмеження. По-перше, воно завжди залежить від обчислювальних ресурсів. Якщо поверхня задається складними рівняннями або для її побудови потрібно опрацювати мільйони точок, то навіть сучасні комп'ютери можуть відчувати значні навантаження. По-друге, результат залежить від точності обраної моделі: якщо сітка точок надто груба, то на візуалізації можуть з'явитися похибки, поверхня виглядатиме спотвореною або «кроковою». По-третє, існує проблема інтерпретації результатів. Яскрава

візуалізація може створювати ілюзію повної коректності, хоча насправді модель може містити помилки у вихідних даних чи алгоритмах. Наприклад, при моделюванні гіперболоїда із надто вузьким діапазоном значень може скластися враження, що поверхня нагадує циліндр, хоча це не відповідає математичній сутності.

Ще одним обмеженням є залежність від програмного забезпечення та навичок користувача. Якщо MATLAB чи Mathematica забезпечують готові засоби для побудови поверхонь, то у Python необхідно вміти працювати з бібліотеками та налаштовувати візуалізацію вручну. У CAD-системах, навпаки, простота створення геометричних моделей може обмежувати глибину математичного аналізу, оскільки вони здебільшого орієнтовані на прикладне проектування, а не на аналітичні дослідження.

Загалом, комп'ютерне моделювання поверхонь другого порядку поєднує очевидні переваги — наочність, швидкість, гнучкість та можливість інтерактивної роботи — з певними обмеженнями, що стосуються ресурсів, точності та потреби у спеціальних знаннях.

2.5. Практичні застосування поверхонь другого порядку у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці

У галузі фізики одним із найяскравіших прикладів застосування поверхонь другого порядку є оптичні системи, зокрема теорія лінз і дзеркал. Властивості квадрик, до яких належать еліпсоїди, гіперболоїди та параболоїди, безпосередньо використовуються для формування та спрямування світлових променів. Завдяки цим властивостям можливо створювати системи, здатні концентрувати, розсіювати або змінювати напрям поширення світла, що стало основою сучасної оптики та фотоніки.

Одним із класичних прикладів є параболоїд обертання (рис. 2.9), який використовується в побудові дзеркал телескопів. Його унікальна геометрична

властивість полягає в тому, що будь-який промінь світла, який падає паралельно осі параболоїда, після відбиття проходить через одну точку — фокус. Саме завдяки цьому принципу астрономічні телескопи здатні збирати світло від далеких зірок та галактик і концентрувати його у фокусі, де розташовується приймальний прилад. Це дозволяє отримувати чітке зображення небесних тіл навіть на величезних відстанях. Подібний принцип використовується й у радіотехніці: антени-«тарілки» мають форму параболоїда, щоб концентрувати радіохвилі в одному фокусі, де розташований приймач.

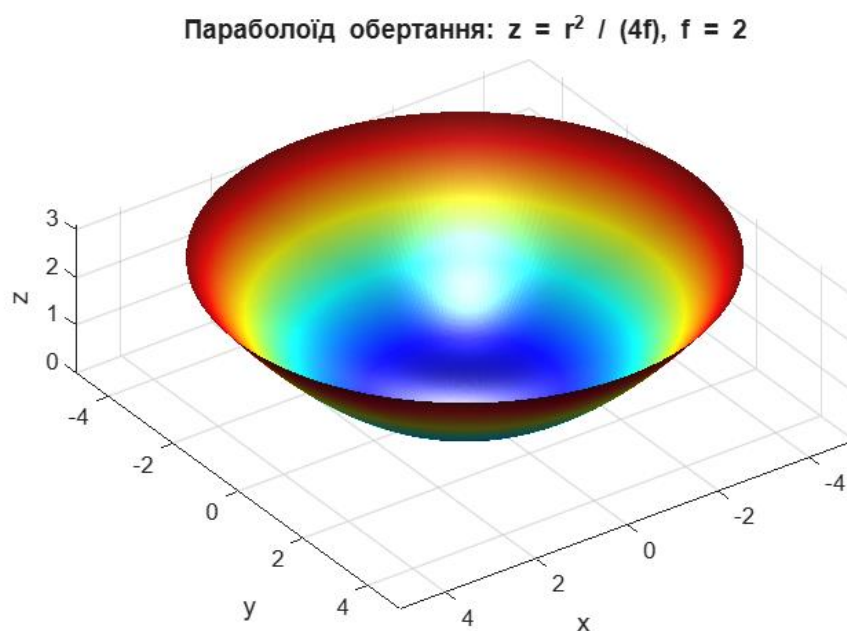


Рис. 2.9 Параболоїд обертання

Не менш важливим прикладом є еліптичні поверхні, які широко застосовуються в оптичних приладах. Геометрична властивість еліпса, коли сума відстаней від будь-якої точки до двох фокусів є сталою, має своє відображення й у тривимірному просторі. Для еліпсоїдів характерно те, що світлові промені, що виходять із одного фокуса, після відбиття від внутрішньої поверхні проходять через інший фокус. Цей принцип використовується в деяких типах оптичних резонаторів та лазерних системах, де важливо забезпечити максимальну концентрацію енергії у визначених точках.

В теорії лінз особливе значення має параболоїдна форма, що застосовується у виготовленні спеціальних лінз і коректорів для усунення аберацій. Сферичні лінзи, хоча й простіші у виробництві, мають істотний недолік — сферичну аберацію, коли промені, що проходять через край лінзи, фокусуються не в одній точці з центральними. Використання поверхонь другого порядку дозволяє мінімізувати цей ефект. Для прикладу, параболічні або гіперболічні профілі дають можливість формувати асферичні лінзи, які значно покращують якість зображення. Такі лінзи знаходять застосування у сучасних камерах, мікроскопах, телескопах, а також у системах нічного бачення.

Окремо, варто згадати про застосування поверхонь другого порядку у проектуванні складних оптичних систем, таких як прожектори та лазерні установки. В прожекторах параболоїдичні дзеркала дозволяють перетворити світло від невеликого джерела, розташованого у фокусі, у потужний вузький пучок, що поширюється на великі відстані. В лазерних установках гіперболоїдичні дзеркала використовуються для стабілізації променя та концентрації енергії в активному середовищі.

У той час як оптика демонструє приклади високоточного використання поверхонь другого порядку у фізичних приладах, у будівельній механіці та архітектурі вони проявляють себе через масштабні конструкції, що поєднують функціональність із естетикою. Геометричні властивості квадрик дозволяють створювати споруди, які одночасно є стійкими до навантажень і мають унікальні архітектурні форми. Це пояснюється тим, що поверхні другого порядку здатні оптимально розподіляти сили, завдяки чому будівлі набувають додаткової міцності без надмірного використання матеріалів.

Яскравим прикладом є використання параболоїдичних поверхонь у проектуванні куполів та дахів. Відомо, що параболічні та гіперболічні конструкції здатні ефективно передавати навантаження на опори, уникаючи концентрації напружень у окремих точках. Саме тому спортивні арени, виставкові павільйони чи вокзальні комплекси нерідко мають покрівлі у вигляді

параболоїдів або гіперболоїдів. Такі поверхні не лише забезпечують стійкість і довговічність споруди, але й створюють вражаючий архітектурний образ.

В сучасній архітектурі особливе поширення отримали так звані «гіперболоїдні вежі» та «гіперболічні параболоїди» як основа для створення оригінальних фасадів і дахів. Їхня форма не лише надає будівлі динамічного й сучасного вигляду, а й дозволяє оптимізувати витрати матеріалу, адже тонкі залізобетонні оболонки при такій геометрії витримують значні навантаження. Подібні рішення можна побачити у роботах архітектора Фелікса Кандели, який створював у Мексиці унікальні конструкції з тонких бетонних оболонок у формі гіперболічних параболоїдів, поєднуючи красу з інженерною ефективністю.

Важливим є й застосування еліптичних поверхонь, зокрема у створенні аркових та склепінчастих перекриттів. Еліпсоїдичні форми дозволяють рівномірно розподіляти навантаження по всій поверхні, що робить конструкцію стійкою навіть за значних прольотів. Подібні рішення часто використовуються в мостобудуванні та у проектуванні громадських будівель, де важлива і функціональність, і вражаючий зовнішній вигляд.

Загалом, практичне застосування поверхонь другого порядку у будівельній механіці та архітектурі доводить, що математичні моделі здатні виходити далеко за межі абстрактних розрахунків. Вони стають інструментом створення споруд, що поєднують красу, стійкість і економічність. Разом із прикладами з оптики це свідчить про універсальність квадрик як у мікросвіті точних приладів, так і у масштабних інженерних об'єктах. Тому поверхні другого порядку можна вважати фундаментальним інструментом, що однаково важливий для фізики, архітектури та інших сфер науки й техніки, де поєднуються функціональність і візуальна довершеність.

Висновки до другого розділу

Другий розділ засвідчив, що практичне дослідження поверхонь другого порядку базується на поєднанні алгебраїчних, геометричних та обчислювальних

методів. Розгляд геометричних перетворень показав, що зміна системи координат істотно впливає на аналітичний вигляд рівняння, але не змінює самої природи поверхні. Лінійні, афінні та ортогональні перетворення дозволяють звести складні вирази до простіших форм, виокремити головні осі симетрії та встановити основні властивості квадрик.

Визначення інваріантів продемонструвало їхню ключову роль у класифікації поверхонь. Слід та визначник матриці квадратичної форми, а також квадратичні інваріанти забезпечили можливість швидко й надійно визначати тип квадрики незалежно від системи координат. Це дало змогу окреслити критерії розмежування еліпсоїдів, гіперболоїдів, параболоїдів та вироджених випадків, що є основою практичної класифікації.

Аналіз алгоритмів класифікації показав, що використання власних значень матриці та канонічних рівнянь створює універсальний механізм для систематизації квадрик. Практичні автоматизовані алгоритми, які поєднують обчислення інваріантів, перевірку на виродженість і приведення до канонічної форми, довели свою ефективність для комп'ютерного моделювання та роботи з великими наборами даних. Це підтвердило, що класичні методи успішно інтегруються з сучасними програмними засобами.

Використання програмних інструментів, таких як MATLAB, Mathematica, Python чи CAD-системи, дало змогу на практиці реалізувати побудову й аналіз поверхонь. Було показано, що подібні засоби забезпечують не лише швидкість та наочність обчислень, але й відкривають можливість інтерактивної візуалізації. Це значно розширює прикладний потенціал квадрик у навчанні, науці та техніці.

Практичні застосування у фізиці, інженерії, архітектурі та комп'ютерній графіці підтвердили універсальність поверхонь другого порядку. Еліпсоїди використовуються у механіці та будівництві для створення стійких конструкцій, гіперболоїди знаходять застосування у сучасній архітектурі та оптиці, а параболоїди широко застосовуються в антенних системах та відбивачах. Таким чином, другий розділ показав, що квадрики є не лише теоретичними об'єктами,

а й інструментом практичної діяльності, що поєднує красу математичних моделей і реальні потреби науки й техніки.

ВИСНОВКИ

Робота продемонструвала, що поверхні другого порядку є одним із центральних об'єктів у геометрії та математичному моделюванні. Теоретичний огляд підтвердив, що їх дослідження має глибоке історичне коріння, починаючи з античних уявлень про криві другого порядку і завершуючи сучасними методами аналітичної та диференціальної геометрії. Систематизація знань показала, що квадрики становлять фундаментальну групу поверхонь, які можна описати через узагальнене квадратичне рівняння, а їх класифікація ґрунтується на інваріантних характеристиках та канонічних формах.

Загальна математична модель поверхонь другого порядку дала змогу розкрити їхню внутрішню структуру через матричну форму та квадратичні інваріанти. Власні значення і власні вектори матриці стали ключовими інструментами у класифікації та зведенні рівнянь до канонічного вигляду, що дозволяє отримати чітке уявлення про геометричний тип поверхні. Використання спектральної теореми та диференціальних методів дало можливість виявити як глобальні, так і локальні властивості, включно з кривиною, нормальми та особливими точками.

Практична частина підтвердила, що алгоритми класифікації квадрик можуть бути ефективно реалізовані в автоматизованих системах. Використання інваріантів, визначника та сліду матриці дозволяє швидко ідентифікувати тип поверхні, а приведення рівнянь до канонічної форми спрощує подальший аналіз. Було показано, що геометричні перетворення, особливо ортогональні, не лише

змінюють вигляд рівняння, а й виявляють внутрішні симетрії поверхонь та забезпечують інваріантність ключових характеристик.

Застосування сучасних програмних засобів для моделювання дало змогу підтвердити теоретичні висновки на практиці. Використання систем на кшталт MATLAB, Mathematica, Python або CAD-програм показало, що квадрики можуть бути не лише об'єктом абстрактного аналізу, а й інструментом для створення складних моделей у фізиці, механіці, архітектурі та комп'ютерній графіці. Виявлено також переваги й обмеження цих інструментів: з одного боку — швидкість, наочність та інтерактивність, а з іншого — залежність від ресурсів і досвіду користувача.

Практична значущість дослідження виявляється у широкому спектрі застосувань. У фізиці поверхні другого порядку описують рух тіл та поширення хвильових процесів, в інженерії вони використовуються для проєктування конструкцій і складних поверхонь, у комп'ютерній графіці — для створення реалістичних тривимірних об'єктів. Приклади застосування у будівельній механіці, архітектурі та оптиці підтверджують універсальність квадрик, їхню здатність поєднувати функціональність, точність і візуальну довершеність.

В підсумку, дослідження показало, що поєднання класичних математичних методів із сучасними обчислювальними технологіями забезпечує глибоке й багатогранне розуміння поверхонь другого порядку. Наукова новизна роботи полягає у систематизації методів аналізу квадрик з акцентом на інваріантах і алгоритмах класифікації, а також у розробці практичного підходу до їх автоматизованого визначення. Отримані результати підтвердили як теоретичну цінність теми, так і її значення для прикладних галузей науки й техніки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теорія поверхонь другого порядку. URL:
https://mph.kpi.ua/assets/img/books/PBF/2._Teorija_poverkh._II_porjadku.pdf
2. Поверхні другого порядку. URL:
https://dspace.sfa.org.ua/bitstream/123456789/483/9/9%20Zaytsev_%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%B4.%207.pdf
3. Поверхні другого порядку. URL: <https://studfile.net/preview/9686756/page:16/>
4. Поверхні другого порядку. URL: <https://studfile.net/preview/5550061/page:7/>
5. Аналітична геометрія. URL:
<http://mmf.lnu.edu.ua/images/stories/secret/algebra/doc/yalag2.pdf>
6. Поверхні другого порядку. URL:
https://org2.knuba.edu.ua/pluginfile.php/45989/mod_resource/content/1/%D0%9F%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%96%20%D0%B4%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83.pdf
7. Класифікація поверхонь 2-го порядку. URL:
<https://nezhyva.wordpress.com/2016/05/21/%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%B8%D1%84%D1%96%D0%BA%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F-%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BE%D0%BD%D1%8C-2-%D0%B3%D0%BE-%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D1%83/>
8. Алгебраїчні поверхні другого порядку. URL:
<https://studfile.net/preview/5745121/page:47/>
9. Криві другого порядку. URL: <https://studfile.net/preview/21632692/page:7/>

10. MATLAB Online. URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab-online.html>
11. Аналітична геометрія : курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заоч. форм навч. / уклад.: О.В. Гуда, В.М. Тимошук. – Луцьк : ЛНТУ, 2025. – 44 с.
12. Ботвиновская С.І., Васько С., Суліменко Г.Г. Особливості комп'ютерного моделювання об'єктів архітектури та дизайну до складу яких входять поверхні обертання другого порядку / Управління розвитком складних систем. 2019. № 40. С.102-111.
13. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Методичний посібник для студентів радіофізичного факультету напрям підготовки «Радіотехніка» / С.В.Єфіменко – К.: КНУ, 2011 – 56 с.
14. Вища математика. Криві та поверхні другого порядку. Практикум: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Массалітіна, В. А. Пилипенко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 37 с.
15. Гуран Ігор, Гутік Олег, Лисецька Олександра, Мокрицький Тарас.
Диференціальна геометрія: теорія кривих і поверхонь. Львів, 2021. 326 с.
16. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., І.І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с.
17. Кириченко В.В., Петкевич Н.Ю., Петравчук А.П. Аналітична геометрія. – К.: Київський університет, 2003.
18. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
19. Назієв, Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст] : навч. посіб. / Е. Х. Назієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець, 1997. – 149 с.
20. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2020. – 205 с.

21. Стороженко І. П. Вища математика: Навчальний посібник в 2 частинах .
Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія/І.П, Стороженко. – Харків, 2019. 80 с.
22. Тевяшев, А. Д. Вища математика у прикладах та задачах / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків : ХТУРЕ, 2002. – 552 с.
23. Франовський А. Ц., Карплюк С. О. Диференціальна геометрія : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. Житомир : Видво ЖДУ ім. І. Франка, 2013. 188 с.
24. Salkov N.A. Obshchiye printsipy zadaniya lineychatykh poverkhnostey. Chast 2. / Geometriya i grafika. 2019. T.7. №1. S. 14–27.

Анотація

Навальна В. Р. Дослідження поверхонь другого порядку за їхніми загальними рівняннями. Магістерська робота. Магістерська робота за спеціальністю 111 «Математика». Луцьк, 2025. 57 с.

У роботі розглянуто історико — філософські аспекти розвитку теорії поверхні другого порядку, їхні теоретичні основи, історичний розвиток теорії та загальну математичну модель. Детально проаналізовано загальне рівняння поверхонь, досліджено вплив геометричних перетворень та визначено ключові інваріанти для розробки універсальних алгоритмів класифікації. Показано методи зведення загального рівняння до канонічної форми. Також розглянуто можливості використання сучасних програмних засобів для моделювання та обґрунтовано практичне застосування поверхонь другого порядку у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці.

Магістерська робота містить 57 сторінки, список використаної літератури налічує 24 джерел.

Ключові слова: поверхні другого порядку, квадрики, загальне рівняння, інваріанти, класифікація, канонічна форма, геометричні перетворення, комп'ютерне моделювання, прикладна геометрія.

Abstract

Navalna V. R. Research of second-order surfaces by their general equations. Master's thesis. Master's thesis in specialty 111 «Mathematics». Lutsk, 2025. 57 p.

The paper examines the historical and philosophical aspects of the development of second-order surface theory, their theoretical foundations, the historical development of the theory, and the general mathematical model. The general equation

of surfaces is analyzed in detail, the influence of geometric transformations is investigated and key invariants for the development of universal classification algorithms are determined. Methods of reducing the general equation to the canonical form are shown. The possibilities of using modern software tools for modeling are also considered and the practical application of second-order surfaces in physics, engineering and computer graphics is substantiated.

The master's thesis contains 55 pages, the list of used literature includes 25 sources.

Keywords: second-order surfaces, quadrics, general equation, invariants, classification, canonical form, geometric transformations, computer modeling, applied geometry.