

Міністерство освіти і науки України
Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Турич Юлія Олександрівна

**ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-
КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ
СПЕЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО
ПРОГРАМУВАННЯ**

Спеціальність 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта. Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

Науковий керівник:
ПАДАЛКО НІНА ЙОСИПІВНА,
доцент кафедри теорії функцій
та методики навчання математики,
кандидат педагогічних наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____
засідання кафедри теорії функцій та методики навчання математики
від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри
Гембарська С.Б. _____

ЛУЦЬК - 2025

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	4
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ І. ОСНОВИ ТЕОРІЇ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	10
1.1. Передумови виникнення задач лінійного програмування.....	10
1.2. Постановка транспортної задачі та її математична модель	11
1.3. Теоретичні основи пошуку початкових опорних планів транспортної задачі.....	14
1.3.1. Метод північно-західного кута	15
1.3.2. Метод мінімального елемента	21
1.4. Метод потенціалів для розв’язування транспортних задач.....	25
1.5. Транспортна задача за критерієм часу.....	27
Висновки до першого розділу.....	34
РОЗДІЛ ІІ. ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО – КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	35
2.1. Інформаційно–комунікаційні технології в освітньому процесі	35
2.2. Методичні рекомендації для аналітичного розв’язування транспортної задачі.....	44
2.2.1. Теоретико-методичні аспекти розв’язування транспортної задачі	44
2.2.2. Загальний алгоритм аналітичного розв’язування транспортної задачі.....	45
2.3. Методика розв’язування транспортної задачі засобами Excel ...	51
2.4. Підстави для викладання спеціальних задач лінійного програмування.....	55
Висновки до другого розділу	65
ВИСНОВКИ.....	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	67

ДОДАТКИ	72
ДОДАТОК А Програма курсу за вибором	73
ДОДАТОК Б План-конспект профільного заняття.....	77

АНОТАЦІЯ

Турич Ю. О. Використання інформаційно–комунікаційних технологій при вивченні спеціальних задач лінійного програмування. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 85 с.

Доведено актуальність розгляду цього класу задач. Введено поняття окремого класу задач математичного програмування. Наведено приклади застосування теорії класу задач математичного програмування. Вивчені прийоми розв’язування задач математичного програмування.

В другому розділі подані методичні рекомендації що до розв’язання транспортної задачі лінійного програмування. Наведено загальну методику розв’язання транспортної задачі та методику розв’язування транспортної задачі засобами Excel. Розглядаються документальні підстави та теоретичні можливості вивчення транспортної задачі в шкільному курсі математики, методичні рекомендації щодо вивчення даної теми в шкільному курсі. Розглянуті особливості методики вивчення задач математичного програмування методами інформаційно–комунікаційних технологій. Подані рекомендації, щодо покращення вивчення задач математичного програмування.

Практичне значення одержаних результатів визначається тим, що розроблено та апробовано технологію формування знань під час вивчення окремого класу задач математичного програмування, експериментально перевірено її ефективність; ідеї та матеріали дослідження використано у розробці робочої програми курсу за вибором для учнів 11 класів «Спеціальні задачі математичного програмування», який забезпечує ефективне формування математичних знань.

Ключові слова: *математика, математичне програмування, інформаційно – комунікаційні технології, транспортна задача, Excel.*

ABSTRACT

Turych, Yu. O. The use of information and communication technologies in studying special problems of linear programming. Master's thesis. Lutsk, 2025. 85 pp.

The relevance of considering this class of problems is proven. The concept of a separate class of mathematical programming problems is introduced. Examples of the application of the theory of the class of mathematical programming problems are given. Methods for solving mathematical programming problems are studied.

The second section provides methodological recommendations for solving the transport problem of linear programming. It presents a general methodology for solving the transport problem and a methodology for solving the transport problem using Excel. The documentary basis and theoretical possibilities for studying the transport problem in the school mathematics course are considered, as well as methodological recommendations for studying this topic in the school course. The features of the methodology for studying mathematical programming problems using information and communication technologies are considered. Recommendations are made for improving the study of mathematical programming problems.

The practical significance of the results obtained is determined by the fact that a technology for the formation of knowledge during the study of a separate class of mathematical programming problems has been developed and tested, and its effectiveness has been experimentally verified. The ideas and materials of the study have been used in the development of a working programme for an elective course for 11th grade students, 'Mathematical Programming Problems,' which ensures the effective formation of mathematical knowledge.

Keywords: *mathematics, mathematical programming, information and communication technologies, transportation problem, Excel.*

ВСТУП

Актуальність теми. Оновлення системи освіти в контексті інтелектуального, культурного, духовного, соціального, економічного розвитку суспільства і держави потребує підготовки нової генерації фахівців, здатних до ефективної діяльності у сучасному інформаційному просторі, що визначається пріоритетним завданням у законі України «Про освіту», «Концепції середньої загальноосвітньої школи України», «Концептуальних засадах демократизації та реформування освіти в Україні», «Концепції виховання дітей і молоді у національній системі освіти» [38,39,40, 41].

Серед головних напрямів реалізації програмних завдань модернізації освіти виділяються: забезпечення розвитку середньої освіти; запровадження сучасних інформаційних технологій і науково-методичних досягнень у навчальний процес; підготовка фахівців, спроможних творчо розв'язувати поставлені завдання. Особливе значення для їх вирішення має засвоєння математичних дисциплін та підвищення якості знань.

На основі аналізу сучасних наукових підходів до проблеми формування знань виділено пріоритетні: філософсько-психологічний, орієнтований на дослідження глибинних механізмів засвоєння знань (Б. Гершунський [17], С. Гессен [18], П. Копнін [42], та інші); педагогічний, що розглядає структурування змісту навчання (Б. Коротяев [43], І. Малафійк [53]); методичний, у межах якого вивчаються основні функції знань як провідного елемента освіти (М. Алексюк [1], В. Галузинський [15], М. Євнух [31], та інші), розглядаються методи систематизації знань в освітньому процесі (Ю. Бабанський [4], М. Кларін [36], та інші).

Дослідження процесу формування знань представлене в науковій літературі у таких аспектах: обґрунтування ролі здібностей в успішності засвоєння знань; концептуальні засади теорії освіти в Україні (І. Зязюн [52], М. Кравчук [13, 31], та ін.); концептуальні положення, які розкривають сутність понять «технологія навчання» (О.Дубасенюк [20], А. Нісімчук [59], та ін.); інноваційні тенденції інформатизації освітньої діяльності (Р. Гуревич [26], та ін.); праці з теорії навчання (С. Вітвицька [12] та ін.)

Аналіз науково-методичної літератури та власний досвід викладання математичних дисциплін засвідчили, що в результаті недостатньо сформованого рівня математичних знань, формування основних компетентностей носить формальний характер.

Спроби координації освітнього процесу за традиційними методиками не дають бажаних результатів, що стає причиною виникнення низки суперечностей, а саме: між державними вимогами до рівня математичних компетентностей та реальним їх станом; між потребою застосування у діяльності математичних знань і недостатнім рівнем розуміння їх математичного представлення; між прикладним характером математичних знань і недостатньою сформованістю в учнів навичок застосування математичних методів для розв'язування практичних завдань.

У процесі здійснення системного аналізу досліджень інших авторів, виявлено, що поза увагою вчених залишилася проблема використання інформаційно–комунікаційних технологій в процесі вивчення спеціальних задач математичного програмування у курсі за вибором. Недостатня дослідженість цього аспекту проблеми і необхідність введення технологічних механізмів у процес викладання математичних дисциплін зумовили вибір теми дослідження.

Мета дослідження – обґрунтувати доцільність вивчення прикладних задач, зокрема, математичного програмування методами інформаційно–комунікаційних технологій.

Завдання дослідження:

- 1) розглянути окремий клас задач математичного програмування, а також їх застосування на практиці;
- 2) розглянути особливості методики вивчення задач математичного програмування методами інформаційно–комунікаційних технологій;
- 3) сформулювати рекомендації, щодо покращення вивчення задач математичного програмування;
- 4) розробити програму курсу за вибором «Спеціальні задачі математичного програмування» для учнів 11 класів.

Об'єкт дослідження: прикладні задачі, зокрема, спеціальні задачі математичного програмування.

Предмет дослідження: методи розв'язування спеціальних задач математичного програмування.

Практичне значення одержаних результатів.

Обґрунтована доцільність вивчення задач математичного програмування методами інформаційно–комунікаційних технологій.

Розглянуті особливості методики вивчення задач математичного програмування методами інформаційно–комунікаційних технологій.

Сформульовані рекомендації, щодо вивчення задач математичного програмування.

Розроблено програму курсу за вибором для учнів 11 класів «Спеціальні задачі математичного програмування».

Результати досліджень можуть бути використані вчителями математики закладів загальної середньої освіти для читання курсів за вибором.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

В першому розділі розглядаються практичні передумови постановки задач лінійного програмування, математичний і економічний зміст транспортної задачі, методи пошуку початкових опорних планів, метод потенціалів для знаходження оптимального плану транспортних задач, транспортна задача за критерієм часу, також до кожного методу наведено приклади. Доведено актуальність розгляду цього класу задач. Введено поняття окремого класу задач математичного програмування. Наведено приклади застосування теорії задач математичного програмування. Вивчені прийоми розв'язування задач математичного програмування.

Другий розділ містить основи використання інформаційно–комунікаційних технологій в освітньому процесі. Методичні рекомендації розв'язання транспортної задачі лінійного програмування. Загальну методику розв'язання транспортної задачі та методику розв'язування транспортної задачі

засобами Excel. Розглядаються теоретичні можливості вивчення транспортної задачі, методичні рекомендації щодо вивчення курсу за вибором, наведено програму цього курсу для учнів 11 класів.

Об'єм роботи. Загальний обсяг роботи 85 сторінок, основний зміст роботи викладений на 64 сторінках друкованого тексту.

РОЗДІЛ І. ОСНОВИ ТЕОРІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Передумови виникнення задач лінійного програмування

Кожна людина щодня, не завжди усвідомлюючи це, вирішує проблему: як отримати найбільший ефект, володіючи обмеженими засобами. Засоби й ресурси завжди обмежені. Не важко виграти бій, маючи армію в 10 разів більшу, ніж у супротивника. Щоб досягти найбільшого ефекту, маючи обмежені засоби, треба скласти план, або програму дій. Раніше план у таких випадках складався «на око». У середині ХХ століття був створений спеціальний математичний апарат, що допомагає це робити науково. Відповідний розділ математики називається математичним програмуванням. Термін «програмування» тут і в аналогічних термінах («Лінійне програмування, динамічне програмування» і т.п.) виник завдяки неточному перекладу з англійської. Українською краще було б вжити слово «планування» або «алгоритмізація».

Своє друге народження лінійне програмування отримало на початку п'ятдесятих років з появою ЕОМ.

Американський економіст Т. Купманс займався розв'язанням ряду задач, пов'язаних з військовою тематикою. Він створив математичний колектив для розробки цих проблем. У підсумку було сформульовано задачу про знаходженні екстремумів лінійних функцій на багатогранниках, що задаються лінійними нерівностями. За пропозицією Купманса цей розділ математики одержав назву лінійного програмування.

Американський математик А. Данціг в 1947 році розробив ефективний конкретний метод чисельного розв'язання задач лінійного програмування (він отримав назву симплекс методу). Ідеї лінійного програмування протягом п'яти шести років отримали поширення в науці, і імена Купманса і Данцига стали широко відомі.

1.2. Постановка транспортної задачі та її математична модель

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$ в обсягах $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам $B_1, B_2, \dots, B_n$ в обсягах $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова балансу, тобто загальна кількість одиниць товару, який є в пунктах постачання, збігається з загальною кількістю одиниць товару, що потребують пункти споживання. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i -го постачальника до кожного B_j -го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Тоді з економічної точки зору задача формулюється таким чином: треба так запланувати перевезення товару з пунктів постачання в пункти споживання, щоб весь товар з пунктів постачання був вивезений, потреби всіх пунктів споживання були задоволені і водночас загальна вартість усіх перевезень була б мінімальною.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай

a_i – кількість одиниць товару, що міститься в i -му пункті постачання A_i ;

b_j – кількість одиниць товару, що потребує j -ий пункт споживання B_j ;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці товару з i -го пункту постачання A_i в j -ий пункт споживання B_j ;

x_{ij} – кількість одиниць товару, що планується перевезти з i -го пункту постачання A_i в j -ий пункт споживання B_j (шукані величини).

Тоді умови задачі зручно подати у вигляді таблиці 1.

Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Отже, змістовно транспортна задача полягає у відшуванні найбільш дешевого плану перевезень деякого однорідного продукту з пунктів із заданими запасами цього продукту у пункти з відомими потребами у ньому за умови, що перевезення продукту можливе з кожного пункту зберігання у кожний пункт використання та відома вартість перевезення одиниці продукту за кожним таким маршрутом.

1.3. Теоретичні основи пошуку початкових опорних планів транспортної задачі

Означення. Планом транспортної задачі (1.2) – (1.4) називається набір величин x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) який задовольняє умови (1.3), (1.4).

План транспортної задачі позначимо через $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ величини x_{ij} будемо називати *перевезеннями*.

Перепишемо систему (3) у вигляді:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} P_{ij} = P_0$$

де

$$P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

Означення. План $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ транспортної задачі називається опорним, якщо вектори P_{ij} , які відповідають додатним величинам x_{ij} плану X , утворюють лінійно незалежну систему.

Для розв'язування транспортної задачі методом потенціалів, який ми розглянемо далі, треба мати початковий опорний план задачі. Існує ціла низка методів пошуку початкових опорних планів транспортної задачі. Однак усі можна об'єднати в дві групи: прямі методи й методи, що базуються на додаткових обчисленнях.

Група прямих методів містить метод північно-західного кута і його модифікації, метод мінімального елемента в матриці і його модифікації та ін. До другої групи методів належать метод Фотеля, метод Лебедєва та ін.

При використанні прямих методів початковий опорний план одержується дуже швидко. Однак, взагалі кажучи, такий опорний план може бути далеким від оптимального. Пошук початкового опорного плану методом другої групи передбачає проведення значних додаткових обчислень. Однак початковий опорний план, який при цьому одержується, є близьким до оптимального. Таким чином, якщо при використанні прямих методів ми виграємо в обсязі роботи на етапі пошуку початкового опорного плану і можемо програти на етапі пошуку оптимального плану, то при використанні методів другої групи ми програємо на першому етапі і можемо виграти на другому. Який шлях кращий – невідомо. Тому розглянемо тільки два методи першої групи: метод північно-західного кута і метод мінімального елемента. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі – стовпчикам.

1.3.1.Метод північно-західного кута

У цьому методі не використовують інформацію про вартість перевезень, а, вибираючи клітину для заповнення, орієнтуються лише на її, «географічне» розміщення. Заповнення за цим методом починають із верхньої лівої (північно-західної) клітини. Продукцію першого виробника розподіляють так, щоб максимально задовольнити потреби першого споживача, потім другого і т. д. до повного розподілу всієї виробленої продукції. Якщо попит якогось споживача не задоволено, то продукцію постачають від другого виробника, потім третього і т. д. до повного задоволення попиту. Зрозуміло, що якщо задоволено потреби споживачів $B_1, B_2, \dots$ чи повністю розподілено продукцію виробників $A_1, A_2, \dots$, то ці виробники та споживачі більше не беруть участі в розподілі. Унаслідок застосування цього методу зайняті клітини транспортної таблиці утворюють характерну східчасту форму: початок, «сходів» міститься у верхньому лівому куті таблиці, а кінець – у нижньому правому. Сума перевезень в i -му рядку дорівнює a_i , а в j -му стовпці – b_j .

Отриманий план перевезень, очевидно, є допустимим розв'язком транспортної задачі. Крім того, він містить не більше ніж $m+n-1$ заповнених клітин, тобто це базисний розв'язок транспортної задачі.

Нехай перевезеннями треба заповнити таблицю 1. 2:

b_j a_i	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
$\vdots$				$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Таблиця 1.2

Заповнення таблиці 1.2 перевезеннями в цьому методі складається з ряду кроків. При цьому на кожному кроці додатними перевезеннями заповнюють тільки верхню ліву клітину незаповненої частини таблиці (звідси й назва методу), поміщаючи в цю клітину максимум продукту.

На першому кроці визначаємо x_{11} , приймаючи $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ і беремо $x_{1j} = 0$ ($j = 2, 3, \dots, n$).

Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і беремо $x_{i1} = 0$ ($i = 2, 3, \dots, m$).

Якщо $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$ і беремо $x_{1j} = 0$ ($j = 2, 3, \dots, n$), $x_{i1} = 0$ ($i = 2, 3, \dots, m$).

Отже, на першому кроці перевезеннями заповнюється або один рядок, або один стовпчик, або один рядок і один стовпчик таблиці. При цьому додатними перевезеннями заповнюється тільки клітина (1, 1).

Якщо на першому кроці перевезеннями заповнено перший рядок, то на другому кроці визначаємо x_{21} , прийнявши $x_{21} = \min(a_2, b_1 - x_{11})$.

Якщо на першому кроці перевезеннями заповнено перший стовпчик, то на другому кроці визначаємо x_{12} , прийнявши $x_{12} = \min(a_1 - x_{11}, b_2)$.

Якщо ж на першому кроці перевезеннями заповнено і перший рядок, і перший стовпчик, то на другому кроці визначаємо x_{22} , прийнявши $x_{22} = \min(a_2, b_2)$. При цьому відповідний рядок або стовпчик, або рядок і стовпчик дозаповнюються нульовими перевезеннями.

Отже, на другому кроці перевезеннями знову заповнюється або один рядок, або один стовпчик, або один рядок і один стовпчик і т. д.

Нехай перевезеннями вже заповнені перші $k-1$ рядків ($1 < k < m$) і $s-1$ стовпчиків ($1 < s < n$). Тоді для продовження заповнення таблиці приймаємо $x_{ks} = \min(\bar{a}_k, \bar{b}_s)$, де

$$\bar{a}_k = a_k - \sum_{j=1}^{s-1} x_{kj}, \quad \bar{b}_s = b_s - \sum_{i=1}^{k-1} x_{is}$$

Якщо $\bar{a}_k < \bar{b}_s$, то $x_{ks} = \bar{a}_k$ і беремо $x_{kj} = 0$ ($j = s+1, \dots, n$).

Якщо $\bar{a}_k > \bar{b}_s$, то $x_{ks} = \bar{b}_s$ і беремо $x_{is} = 0$ ($i = k+1, \dots, m$).

Якщо ж $\bar{a}_k = \bar{b}_s$, то $x_{ks} = \bar{a}_k = \bar{b}_s$ і беремо $x_{kj} = 0$ ($j = s+1, s+2, \dots, n$), $x_{is} = 0$ ($i = k+1, k+2, \dots, m$).

Нехай N — число додатних перевезень плану, побудованого методом північно-західного кута. Незавжди переконались, що N не перевершує число $m+n-1$. Дійсно, таблиця містить $m+n$ рядків і стовпчиків. На кожному кроці методу заповнюється щонайменше один рядок або один стовпчик, причому на останньому кроці одночасно заповнюється і рядок, і стовпчик. Оскільки на кожному кроці заповнюється тільки одна клітина додатним перевезенням, одержуємо, що $N \leq m+n-1$.

Оскільки побудований методом північно-західного кута початковий опорний план залежить лише від величин a_i і b_j та зовсім не залежить від вартості перевезень c_{ij} , то, взагалі кажучи, він буде далеким від оптимального.

Проілюструємо цей метод на задачі.

Приклад 1. Знайти початковий опорний план даної транспортної задачі (Таблиця 1.3).

b_j	10	11	8	6
a_i				
12	10	3	5	8
5	5	7	6	4
18	1	4	3	7

Таблиця 1.3.

Розв'язування: Перевіряємо умову балансу $\sum_{j=1}^3 a_i = 12 + 5 + 18 = 35$, $\sum_{j=1}^4 b_j = 10 + 11 + 8 + 6 = 35$. Отже, задача збалансована.

1 крок. Обчислюємо $x_{11} = \min(12, 10) = 10$, $a_1 - x_{11} = 12 - 10 = 2$, $b_1 - x_{11} = 10 - 10 = 0$, заносимо дані у таблицю 1.2.

2 крок. Обчислюємо $x_{12} = \min(2, 11) = 2$, $a_1 - x_{12} = 2 - 2 = 0$, $b_2 - x_{12} = 11 - 2 = 9$, заносимо дані у таблицю 1.3.

3 крок. Обчислюємо $x_{22} = \min(5, 9) = 5$, $a_2 - x_{22} = 5 - 5 = 0$, $b_2 - x_{22} = 9 - 5 = 4$, заносимо дані у таблицю 1.4.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10 10	3	5	8	2
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0				

Таблиця 1.4

b_j b_j a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 10	3 2	5	8	0
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0	9			

Таблиця 1.5

4 крок. Обчислюємо $x_{32} = \min(18, 4) = 4$, $a_3 - x_{32} = 18 - 4 = 14$, $b_2 - x_{32} = 4 - 4 = 0$, заносимо дані у таблицю 1.5.

5 крок. Обчислюємо $x_{33} = \min(14, 8) = 8$, $a_3 - x_{33} = 14 - 8 = 6$, $b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0$, заносимо дані у таблицю 1.6.

b_j b_j a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 10	3 2	5	8	0
5	5	7 5	6	4	0
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0	4			

Таблиця 1.6

b_j a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 10	3 2	5	8	0

5	5	7	6	4	0
18	1	4	3	7	14
$b_j - x_{ij}$	0	0			

Таблиця 1.7.

6 крок. Обчислюємо $x_{34} = \min(6, 6) = 6$, $a_3 - x_{34} = 6 - 6 = 0$, $b_4 - x_{34} = 6 - 6 = 0$, заносимо дані у таблицю 1.7.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
b_j					
a_i					
12	10	3	5	8	0
	10	2			
5	5	7	6	4	0
		5			
18	1	4	3	7	6
		4	8		
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

Таблиця 1.8.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
b_j					
a_i					
12	10	3	5	8	0
	10	2			
5	5	7	6	4	0
		5			
18	1	4	3	7	0
		4	8	6	
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Таблиця 1.9.

Остаточно маємо такий початковий опорний план:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Якому відповідає значення цільової функції задачі

$$L(X_0) = 10 \cdot 10 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 223.$$

1.3.2. Метод мінімального елемента

Ідея цього методу полягає в тому, щоб максимально завантажити комунікації з мінімальними транспортними витратами. Як і в попередньому методі, таблицю заповнюють мінімальними значеннями, що містяться у відповідних клітинах останнього рядка та стовпця, але починають заповнення насамперед із «найдешевших» клітин. Якщо в матриці вартостей декілька однакових елементів, то вибирають будь-який із них.

Нехай перевезеннями треба заповнити таблицю. Алгоритм методу складається з кількох кроків.

На першому кроці в заданій таблиці шукаємо мінімальний елемент вартості. Нехай ним буде елемент $c_{i_1 j_1}$, який міститься в клітині (i_1, j_1) . Приймаємо $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$. Якщо $a_{i_1} < b_{j_1}$, то $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ і приймаємо $x_{i_1 k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n; k \neq j_1$).

Якщо $a_{i_1} > b_{j_1}$, то $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ і приймаємо $x_{k j_1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m; k \neq i_1$). Якщо ж $a_{i_1} = b_{j_1}$, то $x_{i_1 j_1} = a_{i_1} = b_{j_1}$ і приймаємо $x_{i_1 k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n; k \neq j_1$), $x_{k j_1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m; k \neq i_1$).

На другому кроці в не заповнених перевезеннями клітинах знову шукаємо мінімальний елемент вартості. Нехай ним буде елемент $c_{i_2 j_2}$. Тоді в клітину (i_2, j_2) поміщаємо максимально можливе перевезення:

$$x_{i_2 j_2} = \begin{cases} \min(a_{i_2}, b_{j_2}), & \text{якщо } i_2 \neq i_1, j_2 \neq j_1; \\ \min(a_{i_1} - x_{i_1 j_1}, b_{j_2}), & \text{якщо } i_2 = i_1; \\ \min(a_{i_2}, b_{j_1} - x_{i_1 j_1}), & \text{якщо } j_2 = j_1. \end{cases}$$

Водночас залежно від того, для якого елемента досягається мінімум, заповнюємо нульовими перевезеннями вільні клітини рядка i_2 або стовпчика j_2 , або і рядка i_2 , і стовпчика j_2 і т. д., поки не заповнимо всю таблицю перевезеннями.

Число додатних перевезень N плану, знайденого цим методом, не перевищує величини $m+n-1$. Крім того, неважко пересвідчитись, що знайдений таким чином план буде опорним.

Проілюструємо цей метод на задачі.

Приклад 2. Знайти початковий опорний план даної транспортної задачі (Таблиця 1.10) методом мінімального елемента.

Розв'язування:

1 крок. Вибираємо клітину (3,1) з найменшим значенням транспортних витрат $c_{31}=1$. Обчислюємо, $x_{31}=\min(18,10)=10$, $a_3 - x_{31}=18-10=8$, $b_1 - x_{31}=10-10=0$, заносимо дані у таблицю 1.10 і викреслюємо перший стовпчик.

2 крок. Серед не викреслених клітин дві клітинки (3,3) і (1,2) мають найменші транспортні витрати $c_{33}=c_{12}=3$. Спочатку заповнимо клітинку з меншим номером рядка (1,2). Обчислюємо, $x_{12}=\min(12,11)=11$, $a_1 - x_{12}=12-11=1$, $b_2 - x_{12}=11-11=0$, заносимо дані у таблицю 1.11 і викреслюємо другий стовпчик.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10	3	5	8	
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	8
	10				
$b_j - x_{ij}$	0				

Таблиця 1.10

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10	3	5	8	1
		11			
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	8
	10				
$b_j - x_{ij}$	0	0			

Таблиця 1.11

3 крок. Заповнюємо клітинку (3,3). Обчислюємо, $x_{33} = \min(8, 8) = 8$, $a_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0$, $b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0$, заносимо дані у таблицю 1.12 і викреслюємо третій рядок і третій стовпчик. При цьому заносимо нуль в одну з клітин (1,3), (2,3), (3,4), наприклад, у клітинку (1,3): $x_{13} = 0$.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10	3	5	8	1
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	0
	10		8		
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

Таблиця 1.12

4 крок. Заповнюємо клітинку (2,4). Обчислюємо, $x_{24} = \min(5,6)=5$, $a_2 - x_{24}=5-5=0$, $b_4 - x_{24}=6-5=1$, заносимо дані у таблицю 1.14 і викреслюємо другий рядок.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10	3	5	8	1
		11	0		
5	5	7	6	4	0
				5	
18	1	4	3	7	0
	10		8		
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	1	

Таблиця 1.14.

5 крок. Обчислюємо, $x_{14} = \min(1,1)=1$, $a_1 - x_{14}=1-1=0$, $b_4 - x_{14}=1-1=0$, заносимо дані у таблицю 1.15 і викреслюємо перший рядок або четвертий стовпчик.

b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
a_i					
12	10	3	5	8	0
5	5	7	6	4	0
18	1	4	3	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Таблиця 1.15.

Отримаємо такий початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

При якому цільова функція набуває значення $L(X_0) = 3 \cdot 11 + 8 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 95$.

1.4. Метод потенціалів для розв'язування транспортних задач

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Якщо для деякого опорного плану $X = (x_{ij})$ існують числа u_i та v_j , для яких виконуються умови:

- 1) $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$,
- 2) $u_i + v_j \leq c_{ij}, x_{ij} = 0$

для всіх $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв'язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1.Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи замкнута). За необхідності слід звести задачу до замкнутого типу.

2.Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.

3.Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.

4.Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

5.1. Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m+n-1$, а кількість невідомих – $(m+n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

5.2. Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

5.3. Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну, а на її місце вводять іншу змінну, яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max \{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$.

5.4. Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить $m+n$, отже, з цих клітин

обов'язково утвориться цикл. У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «-» та «+». У клітинках зі знаком «-» вибирають значення $q = \min x_{ij}$ і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «-». Якщо значенню q відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невід'ємність опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору q дістаємо новий опорний план, який не містить від'ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число q додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

6. Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану (тобто повернутися до пункту 3 даного алгоритму).

1.5. Транспортна задача за критерієм часу

Розглянемо транспортну задачу за критерієм часу, де береться до уваги не вартість перевезень, а час, протягом якого весь продукт буде доставлений в пункти споживання. Оптимальним планом у такій задачі є план, за яким весь продукт може бути вивезений у пункти споживання за найкоротший час. Транспортна задача за критерієм часу виникає, наприклад, при складанні планів перевезень продуктів, які швидко псуються, при евакуації людей із зони лиха і т. ін. Вартість перевезень в таких задачах має другорядне значення.

Транспортна задача за критерієм часу формулюється так. Нехай в пунктах постачання $A_1, A_2, \dots, A_m$ міститься однорідний продукт відповідно в кількості

$a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць. Цей продукт треба перевезти в пункти споживання $B_1, B_2, \dots, B_n$, потреби яких відповідно становлять $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць продукту. При цьому будемо вважати, що виконується умова балансу

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Якщо x_{ij} — кількість одиниць продукту, що планується перевезти з пункту постачання A_i в пункт споживання B_j , то задача полягає в пошуку такого плану $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$, для якого виконуються умови

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

і за яким весь продукт буде вивезений в пункти споживання у найкоротший час.

Позначимо через t_{ij} — час, потрібний для перевезення продукту з пункту постачання A_i в пункт споживання B_j . Тоді умови задачі можна записати у вигляді таблиці 1.16.

a_i	b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1		x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
a_2		x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m		x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

Таблица 1.16.

Позначимо через $\{t_{ij}\}_X$ набір елементів матриці $T = \|t_{ij}\|_{m,n}$, які відповідають додатним перевезенням x_{ij} плану $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$.

Тоді час, необхідний для реалізації плану X , виразиться формулою

$$t_X = \max\{t_{ij}\}_X$$

а час, необхідний для реалізації оптимального плану, —

$$t_{\text{оп}} = \min_X t_X = \min_X \max\{t_{ij}\}_X$$

Алгоритм розв'язування сформульованої задачі складається з попереднього кроку і загального, який повторюється. На попередньому кроці знаходимо початковий план методом північно-західного кута або мінімального елемента в матриці (приймаючи за c_{ij} величини t_{ij}).

Загальний крок. Переглядаємо всі величини t_{ij} , які відповідають додатним перевезенням x_{ij} плану $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ знайденого на попередньому кроці, і вибираємо найбільшу з них. Нехай

$$\max_{x_{ij} > 0} \{t_{ij}\} = t_{kl}$$

Викреслюємо всі клітини (i,j) таблиці, для яких $t_{ij} > t_{kl}$ і $t_{ij} = t_{kl}$ при $x_{ij} = 0$, і переходимо до нового плану $X' = \|x'_{ij}\|_{m,n}$, такого, щоб $x_{kl} = 0$ (якщо такий перехід можливий). Цей перехід здійснюється так.

Із клітин, які не викреслені, складаємо замкнутий ланцюжок γ , аналогічно як в методі потенціалів. За першу клітину від'ємного напівланцюжка γ^- приймаємо клітину (k,l) , за решту клітин γ^- беремо клітини (i,j) , для яких $x_{ij} > x_{kl}$; за клітини додатного напівланцюжка γ^+ беремо клітини (i,j) , для яких $t_{ij} < t_{kl}$. Якщо ланцюжок γ існує, то ми можемо перейти до нового плану X' , для якого $x'_{kl} = 0$. Приймавши $\theta = x_{kl}$, компоненти нового плану X' визначаємо за формулою

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \gamma^+, \\ x_{ij} - \theta, & \text{якщо } (i,j) \in \gamma^-, \\ x_{ij}, & \text{якщо } (i,j) \notin \gamma. \end{cases}$$

Очевидно, що реалізація нового плану X' вимагає менше часу (принаймні, не більшого), ніж реалізація плану X .

Загальний крок повторюється доти, поки ми не знайдемо плану, для якого не можна скласти замкнутий ланцюжок. Зауважимо, що клітини, викреслені на попередніх кроках, в наступних кроках участі не беруть.

Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 3. Розв'язати транспортну задачу за критерієм часу, якщо її умови задані таблицею 1.17.

b_j	15	15	25	25
a_i				
10	1	7	4	10
20	8	2	5	3
30	4	8	4	2
20	6	6	1	5

Таблиця 1.17.

Розв'язання:

1 крок. Знаходимо початковий план методом північно-західного кута. Результат запишемо в таблицю 1.18.

$\max_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{21} = 8$, тому викреслюємо клітини (1,4), (3,2), для яких $t_{ij} \geq$

t_{21} . Ланцюжок γ буде мати такий вигляд:

(2,1), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,1).

b_j	15	15	25	25
a_i				
10	1 10	7	4	10
20	- 8	2 15	+ 5	3
30	4	8	- 4 25	+ 2 5
20	+ 6	6	1	- 5 20

Таблиця 1.18.

Оскільки $\theta = x_{21} = 5$, то новим планом буде план, представлений у таблиці 1.19.

b_j	15	15	25	25
a_i				
10	10	1	7	4
20	8	2	5	3
30	+ 4	8	4	- 2
10	5	-6	6	1

Таблиця 1.19.

$\max_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{41} = 6$, тому викреслюємо клітини (2,1), (1,2), (4,2), для яких $t_{ij} > t_{41}$. Ланцюжок γ буде таким: (4,1), (4,4), (3,4), (3,1). Одержуємо новий план, наведений у таблиці 1.20.

b_i	15	15	25	25
a_i				
10	10	1	7	4
20	8	2	5	3
30	4	8	4	2
20	6	6	1	5

Таблиця 1.20.

$\max_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{23} = 5$, тому викреслюємо клітину (4,1). Ланцюжок γ буде мати вигляд: (2,3), (2,4), (4,4), (4,3). Новим планом буде план, наведений у таблиці 1.21.

b_i	15	15	25	25
a_i				
10	10	1	7	4
20	8	2	5	3
30	4	8	-4	+2
20	6	6	5	5

Таблиця 1.21.

$\max_{x_{ij}>0} t_{ij} = t_{44} = 5$, тому викреслюємо клітину (2,3), для якої $t_{23} = t_{44}$ (бо $x_{23} = 0$). Ланцюжок γ буде складатись із клітин (4,4), (3,4), (3,3), (4,3). Одержуємо новий план, представлений у таблиці 1.22.

b_i	15	15	25	25
a_i				
10	10	1	7	4
20	8	2	5	3
30	4	8	4	2
20	6	6	1	5

Таблиця 1.22.

Оскільки $\max t_{ij} = t_{31} = t_{33} = 4$, то викреслюємо клітини (4,4), (1,3). Замкнутий ланцюжок γ вже скласти неможливо. Тому одержаний план є оптимальним, $t_{\text{оп}} = 4$ одиниць часу.

Висновки до першого розділу

В розділі розглянуті передумови постановки задач лінійного програмування. Сформульовані математична і економічна постановки транспортної задачі. Опрацьовані методи пошуку початкових опорних планів, метод потенціалів для знаходження оптимального плану транспортних задач. Наведена транспортна задача за критерієм часу. Кожен метод проілюстрований на задачах.

Математична модель транспортної задачі є наочною і доступно ілюструє певні економічні процеси, тому на нашу думку, її вивчення може стати необхідним елементом шкільної програми.

Громіздкість застосування методів розв'язування транспортної задачі спонукає до необхідності використання комп'ютера. Тому потребує подальшого розвитку методика викладання спеціальних задач математичного програмування

.

РОЗДІЛ II. ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО – КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.

2.1. Інформаційно–комунікаційні технології в освітньому процесі

Інформатизація освіти в Україні є одним з головних напрямів модернізації навчального процесу і передбачає розробку нової методичної системи навчання у середній загальноосвітній школі, зокрема, з математики. Суспільство, держава ставлять перед школою мету забезпечити кожного випускника цілісною системою універсальних знань, умінь, навичок, що відповідають рівню міжнародних стандартів, з обов'язковою умовою самостійної діяльності й особистої відповідальності учнів. Випускник повинен бути розвиненою особистістю, яка вільно самовизначатися і самореалізується в сучасному світі.

У період інформатизації системи середньої освіти зростає потреба в розробці методичних основ використання інформаційних технологій в освітньому процесі для формування освітніх компетенцій. Отже, ми повинні орієнтуватися на інформатизацію процесу навчання, активне використання можливостей, інформаційно–комунікаційних технологій, які сприяють підвищенню якості сучасної освіти.

Метою вдосконалення математичної освіти є виховання у школяра якісно нового типу мислення, який можна охарактеризувати, як здатність мислити не тільки образами, промовою, за допомогою друкованого слова, але із застосуванням комп'ютера. Мислення, що володіє властивістю посилюватися за рахунок включення в процеси роботи сучасних інформаційних засобів.

Завданням діяльності вчителя стає використовувати інформаційно–комунікаційні технології не тільки для формування знань, умінь і навичок учнів, але і для формування освітніх компетенцій учня – якостей, що розвиваються в ході реалізації комплексу елементів освітньої діяльності.

Потужний потік нової інформації, реклами, застосування комп'ютерних технологій на телебаченні, розповсюдження ігрових приставок, електронних іграшок і комп'ютерів впливають на виховання дитини та її сприйняття навколишнього світу. Істотно змінюється і характер його улюбленої практичної

діяльності – ігри, змінюються і його улюблені герої та захоплення. Раніше інформацію з будь-якої теми дитина могла отримати за різними каналами: підручник, довідкова література, лекція вчителя, конспект уроку.

Але, сьогодні, з огляду на сучасні реалії, вчитель повинен вносити в навчальний процес нові методи подачі інформації. Мозок дитини, налаштований на отримання знань у формі розважальних програм по телебаченню, набагато легше сприйме запропоновану на уроці інформацію за допомогою медіа засобів.

Вже давно доведено, що кожен учень по-різному освоює нові знання. Раніше викладачам важко було знайти індивідуальний підхід до кожного учня. Тепер же, з використанням комп'ютерних мереж і онлайнових засобів, школи отримали можливість подавати нову інформацію таким чином, щоб задовольнити індивідуальні запити кожного учня.

Необхідно навчити кожну дитину за короткий проміжок часу освоювати, перетворювати і використовувати в практичній діяльності величезні масиви інформації. Дуже важливо організувати процес навчання так, щоб дитина активно, з цікавістю і захопленням працював на уроці, бачила плоди своєї праці і могла їх оцінити.

Допомогти вчителю у вирішенні цього непростого завдання може поєднання традиційних методів навчання та сучасних інформаційних технологій, у тому числі і комп'ютерних. Адже використання комп'ютера на уроці дозволяє зробити процес навчання мобільним, строго диференційованим та індивідуальним.

Поєднуючи в собі можливості телевізора, відеомагнітофона, книги, калькулятора, будучи універсальною іграшкою, здатною імітувати інші іграшки і самі різні ігри, сучасний комп'ютер разом з тим є для дитини рівноправним партнером, здатним дуже тонко реагувати на її дії і запити. З іншого боку, цей метод навчання є досить привабливим і для вчителів: допомагає їм краще оцінити здібності і знання дитини, зрозуміти її, спонукає шукати нові, нетрадиційні форми і методи навчання.

Будь-яка педагогічна технологія – це інформаційна технологія, оскільки основу технологічного процесу навчання складає отримання і перетворення інформації.

Більш вдалим терміном для технологій навчання, що використовують комп'ютер, є комп'ютерна технологія. Комп'ютерні (нові інформаційні) технології навчання – це процес підготовки і передачі інформації для того, кого навчають, засобом здійснення яких є комп'ютер.

При підготовці до уроку з використанням інформаційно–комунікаційних технологій вчитель не повинен забувати, що це урок, а значить складає план уроку виходячи з його цілей, при відборі навчального матеріалу він повинен дотримуватися основних дидактичних принципів: систематичності та послідовності, доступності, диференційованого підходу, науковості та ін. При цьому комп'ютер не замінює вчителя, а тільки доповнює його.

Уроку з використанням інформаційно–комунікаційних технологій властиво:

- 1) принцип адаптивності: пристосування комп'ютера до індивідуальних особливостей дитини;
- 2) керованість: у будь-який момент можлива корекція вчителем процесу навчання;
- 3) інтерактивність і діалоговий характер навчання; інформаційно–комунікаційні технології мають здатність «відгукуватися» на дії учня і вчителя; «вступати» з ними в діалог, що і становить головну особливість методик комп'ютерного навчання;
- 4) оптимальне поєднання індивідуальної та групової роботи;
- 5) підтримання в учня стану психологічного комфорту при спілкуванні з комп'ютером;
- 6) необмежене навчання: зміст, його інтерпретації і додатки скільки завгодно великі.

Комп'ютер може використовуватися на всіх етапах: як при підготовці уроку, так і в процесі навчання: при поясненні (введення) нового матеріалу, закріпленні, повторенні, контролі; при цьому комп'ютер виконує такі функції:

а) у функції вчителя комп'ютер: джерело навчальної інформації; наочний посібник; тренажер; засіб діагностики і контролю;

б) у функції робочого інструменту: засіб підготовки текстів, їх зберігання; графічний редактор; засіб підготовки виступів; обчислювальна машина великих можливостей.

При проектуванні уроку вчитель може використовувати різні програмні продукти:

1. Мови програмування: за їх допомогою вчитель може скласти різні програмні продукти, які можна використовувати на різних етапах уроку, але їх застосування для викладача-предметника важко. Складання проекту за допомогою мови програмування вимагає спеціальних знань і навичок і великих трудовитрат.

2. Можливо при підготовці та проведенні уроку використання готових програмних продуктів (енциклопедій, навчальних програм і т.п.). Використання комп'ютерної технології при вивченні математики в середній школі відкриває широкі можливості для створення та використання складного наочно-демонстраційного супроводу на уроці. Крім того, при повторенні пройденого матеріалу учень самостійно відтворює всі демонстраційні експерименти, які вчитель показував на уроці. При цьому він може перервати експеримент, зупинити його чи повторити ту частину, яка погано засвоїлася. Такий підхід розвиває ініціативу і сприяє підвищенню інтересу учнів до досліджуваного предмета.

3. Велику допомогу при підготовці та проведенні уроків надає вчителю пакет Microsoft Office, який включає в себе крім відомого всім текстового процесора Word ще й систему баз даних Access і електронні презентації PowerPoint.

4. Система баз даних передбачає велику підготовчу роботу при складанні уроку, але в підсумку можна отримати ефективну і універсальну систему навчання та перевірки знань.

5. Текстовий редактор Word дозволяє підготувати роздатковий та дидактичний матеріал.

6. Електронні презентації дають можливість вчителю при мінімальній підготовці і незначних витратах часу підготувати наочність до уроку. Уроки, складені за допомогою PowerPoint видовищні і ефективні в роботі над інформацією.

Підвищення мотивації та пізнавальної активності за рахунок різноманітності форм роботи, можливості включення ігрового моменту: вирішиш вірно приклади – відкриєш картинку, повставляєш правильно всі букви – просунеш ближче до мети казкового героя. Комп'ютер дає вчителю нові можливості, дозволяючи разом з учнем отримувати задоволення від захопливого процесу пізнання, не тільки силою уяви розсовуючи стіни шкільного кабінету, але за допомогою новітніх технологій дозволяє зануритися в яскравий барвистий світ. Таке заняття викликає у дітей емоційний підйом, навіть відсталі учні охоче працюють з комп'ютером.

Інтегрування звичайного уроку з комп'ютером дозволяє вчителю перекласти частину своєї роботи на комп'ютер, роблячи при цьому процес навчання більш цікавим, різноманітним, інтенсивним. Зокрема, стає більш швидким процес запису визначень, теорем та інших важливих частин матеріалу, тому що вчителю не доводиться повторювати текст кілька разів (він вивів його на екран), учневі не доводиться чекати, поки вчитель повторить саме потрібний йому фрагмент.

Цей метод навчання дуже привабливий і для вчителів, він допомагає їм краще оцінити здібності і знання дитини, зрозуміти його, спонукає шукати нові, нетрадиційні форми і методи навчання, стимулює його професійний ріст і все подальше освоєння комп'ютера.

Застосування на уроці комп'ютерних тестів і діагностичних комплексів дозволить вчителю за короткий час отримувати об'єктивну картину рівня засвоєння матеріалу, що вивчається у всіх учнів і своєчасно його скоректувати. При цьому є можливість вибору рівня складності завдання для конкретного учня.

Для учня важливо те, що відразу після виконання тесту (коли ця інформація ще не втратила свою актуальність) він отримує об'єктивний результат із зазначенням помилок, що неможливо, наприклад, при усному опитуванні.

Освоєння учнями сучасних інформаційних технологій. На уроках, інтегрованих з інформатикою, учні оволодівають комп'ютерною грамотністю і вчаться використовувати в роботі з матеріалом різних предметів один з найбільш потужних сучасних універсальних інструментів – комп'ютер, з його допомогою вони вирішують рівняння, будують графіки, креслення, готують тексти, малюнки для своїх робіт. Це можливість для учнів проявити свої творчі здібності.

Але, поряд з плюсами, виникають різні проблеми як при підготовці до таких уроків, так і під час їх проведення.

Існуючі недоліки та проблеми застосування інформаційно–комунікаційних технологій:

1) відсутність комп'ютера в домашньому користуванні багатьох учнів і вчителів, час для самостійних занять у комп'ютерних класах відведено далеко не у всіх школах;

2) у вчителів недостатньо часу для підготовки до уроку, на якому використовуються комп'ютери;

3) недостатня комп'ютерна грамотність вчителя;

4) відсутність контакту з учителем;

5) у робочому графіку вчителів не відведено часу для дослідження можливостей Інтернету;

6) складно інтегрувати комп'ютер у поурочну структуру занять;

7) не вистачає комп'ютерного часу на всіх;

8) у шкільному розкладі не передбачено час для використання Інтернету на уроках;

9) при недостатній мотивації до роботи учні часто відволікаються на ігри, музику, перевірку характеристик комп'ютера і т.п;

Існує ймовірність, що, захопившись застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій на уроках, учитель перейде від розвивального навчання до наочно-ілюстративних методів.

Застосування сучасних інформаційних технологій у навчанні – одна з найбільш важливих і стійких тенденцій розвитку світового освітнього процесу. У вітчизняній загальноосвітній школі в останні роки комп'ютерна техніка й інші засоби інформаційних технологій стали все частіше використовуватися при вивченні більшості навчальних предметів.

Охарактеризуємо окремі програмні засоби, що повністю або частково орієнтовані на використання при вивченні різних розділів математики, як і у вищій, так і в середній школі.

MACSYMA – система комп'ютерної алгебри, що містить багато математичних методів, які використовують у науці і техніці: знаходження границь, похідних, невизначених і визначених інтегралів, спрощення виразів, операцій над векторами, матрицями, розв'язування систем нелінійних рівнянь та інше. За допомогою цього засобу можна розв'язувати задачі як чисельно, так і символічно, і графічно.

EUREKA – програмний засіб, за допомогою якого можна розв'язувати системи лінійних і нелінійних рівнянь та нерівностей і перевіряти знайдені розв'язки, розв'язувати задачі лінійного програмування, будувати графіки та інше.

GRAPHER – програмний засіб, за допомогою якого можна будувати до 10 графіків на одній координатній площині, масштабувати осі, виводити заголовки і коментарі, друкувати графіки на папері, зберігати графічну і числову інформацію у файлах.

Доцільно при вивченні вищої математики використовувати ті програмні засоби, які при розробці були безпосередньо зорієнтовані на навчальний процес. До таких програмних засобів належать програма GRAN1, програмний засіб DERIVE, IBM GEOMETRY SERIES, MATH PRACTICE TUTOR. На сьогоднішній день окрім названих популярні пакети MATHCAD, MATHLAB.

Основним видом навчальної діяльності, спрямованим на первинне оволодіння знаннями, є лекція. Застосування інформаційних технологій дозволяє змінити способи доставки навчального матеріалу, традиційно здійснюваного під час лекцій, з допомогою спеціально розроблених мультимедіа курсів.

Для організації вивчення теоретичного матеріалу можуть бути використані наступні види мультимедіа курсів.

Відеолекція. Лекція викладача записується на відеоплівку. Методом нелінійного монтажу вона може бути доповнена мультимедіа додатками, що ілюструють виклад лекції. Перевагою такого способу викладу теоретичного матеріалу є можливість прослухати лекцію в будь-який зручний час, повторно звертаючись до найбільш важким місць.

Мультимедіа лекція. Для самостійної роботи над лекційним матеріалом можуть бути розроблені інтерактивні комп'ютерні навчальні програми. Це навчальні посібники, в яких теоретичний матеріал завдяки використанню мультимедіа курсів структурований так, що кожен може вибрати для себе оптимальну траєкторію вивчення матеріалу, зручний темп роботи над курсом і спосіб вивчення, максимально відповідний психофізіологічним особливостям його сприйняття.

Практичні заняття – форма організації навчального процесу, спрямована на закріплення теоретичних знань шляхом обговорення першоджерел і вирішення конкретних завдань, що проходить під керівництвом викладача. Практичні заняття за рішенням завдань можуть бути проведені за допомогою електронного задачника або бази даних, в яких зібрані типові та унікальні завдання по всіх основних темах навчального курсу.

Лабораторна робота – форма організації навчального процесу, спрямована на отримання навичок практичної діяльності шляхом роботи з матеріальними об'єктами або моделями предметної області курсу. Мультимедіа курси дозволяють організувати роботу з тренажерами, що імітують реальні установки, об'єкти дослідження, умови проведення експерименту. Такі тренажери віртуально забезпечують умови та вимірювальні прилади, необхідні для реального експерименту, і дозволяють підібрати оптимальні параметри експерименту.

Семінарські заняття. До числа електронних дидактичних засобів, що застосовуються на семінарських заняттях, можна віднести наступні: хрестоматія, збірник документів і матеріалів, опорні конспекти лекцій, електронний підручник, навчальний посібник і т.д.

Інформаційні технології дозволяють використовувати як основу для СРС і НДРС не тільки друковану продукцію навчального або дослідницького. Практично всі можливі види контролю можуть бути реалізовані за допомогою електронних видань, на основі спеціально розроблених комп'ютерних програм, що дозволяють зняти частину навантаження з викладача і посилити ефективність і своєчасність контролю.

Мультимедіа курси є безсумнівно перспективним дидактичним засобом, який за певних умов може значно підвищувати ефективність навчального процесу. Таким чином, мультимедіа курс як основний дидактичний засіб повинен поєднувати в собі три компоненти: зміст навчального матеріалу, методи і технології навчання. Використання комп'ютера на уроці математики – не дань моді, не засіб перекласти на плечі комп'ютера багатогранну творчу працю вчителя, а лише один із засобів, що дозволяє інтенсифікувати навчальний процес, активізувати пізнавальну діяльність, підвищити мотивацію учня до навчання, створити умови для ефективності уроку, а також підвищення якості сучасної освіти загалом.

2.2. Методичні рекомендації для аналітичного розв'язування транспортної задачі

2.2.1. Теоретико-методичні аспекти розв'язування транспортної задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Транспортна задача називається закритою, якщо виконується балансове співвідношення

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.2)$$

Надалі будемо розглядати тільки закриті задачі.

Зазначимо, що постановку та розв'язання транспортної задачі зручно здійснювати за допомогою таблиці.

	B_1	B_2	...	B_n	Запаси
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_n	

c_{ij} - вартість перевезення одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j .

x_{ij} - кількість одиниць продукції, що перевозяться з пункту A_i в пункт B_j .

Основні теоретичні результати сформульовані у вигляді теореми:

Теорема 1. Для того, щоб транспортна задача мала розв'язок необхідно і достатньо, щоб вона була закритою, тобто виконувалося балансове співвідношення (2).

Теорема 2. Ранг системи обмежень задачі (1) дорівнює числу $r = m + n - 1$ (3), (тобто опорний план транспортної задачі має не більше, ніж $m + n - 1$ відмінних від нуля x_{ij}).

Теорема 3. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб йому відповідала така система $(m + n)$ чисел

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (потенціалів), які задовольняють умови:

$$d_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij} \begin{cases} = 0, x_{ij} > 0 \\ \leq 0, x_{ij} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Процес розв'язання транспортної задачі розбивається на два основних етапи:

1. Знаходження початкового опорного плану (початкового невід'ємного базисного розв'язку).
2. Знаходження оптимального плану задачі.

При цьому на кожному з цих етапів існує свій пакет методів, яким можна користуватись.

Розглянемо для реалізації першого пункту метод північно-західного кута, для реалізації другого пункту – метод потенціалів.

2.2.2. Загальний алгоритм аналітичного розв'язування транспортної задачі

1. Перевіряємо тип задачі, встановлюємо відкрита чи закрыта транспортна задача. Якщо вона закрыта, то переходять до пункту 2, якщо ж відкрита, то опишемо подальші дії:

- коли $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводять фіксований пункт виробництва A_{m+1} з

запасами в ньому, які дорівнюють $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ і вартостями перевезень

$$c_{m+1,j} = 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

- якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ тоді вводять фіктивний пункт споживання V_{n+1} з обсягом споживання $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ та відповідними вартостями $c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1, m}$.

2. Методом північно-західного кута знаходять початковий опорний план для закритої транспортної задачі. Суть методу північно-західного кута полягає в тому, що на кожному кроці розглядається перший з пунктів A_i і перший з пунктів B_j , що залишились. Заповнення клітинок починається з лівої верхньої клітинки x_{ij} і завершується нижньою лівою x_{mn} .

3. Аналізують знайдений план на виродженість. Нехай k – число відмінних від нуля змінних x_{ij} у плані.

Якщо $k = r = m + n - 1$, то транспортна задача є не виродженою і можемо переходити до пункту 4. Якщо ж $k < r$, то транспортна задача вироджена. Перехід від виродженої транспортної задачі до не виродженої здійснюється таким чином: фіксується $r - k$ клітинок (як правило вздовж північно-західної діагоналі), після чого вважають ці клітинки заповненими фіксованими 0.

4. Методом потенціалів перевіряють поточний опорний план транспортної задачі на оптимальність. Для знаходження оптимального плану методом потенціалів необхідно виконати послідовність операцій:

1) розв'язати для заповнених клітинок систему $m + n - 1$ лінійно алгебраїчних рівнянь $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ відносно невідомих потенціалів $\alpha_1 \dots \alpha_m; \beta_1 \dots \beta_n$.

Оскільки така система має безліч розв'язків (невідомих $m+n$, а рівнянь $m+n-1$), то для вибору конкретного частинного розв'язку досить зафіксувати одну вільну змінну, наприклад: $\alpha_1 = 0$

2) для вільних клітинок (клітинок, в яких $x_{ij} = 0$) визначають величини $d_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$.

3) перевіряють умови (4). Якщо ці умови виконуються, то знайдений опорний план буде оптимальним і розв'язання транспортної задачі завершено.

Якщо ж умови (4) не виконуються, то переходять до пункту 5.

5. Для вільної клітинки з найбільшою величиною d_{ij} будують цикл перерахунку, в результаті чого знаходять новий опорний план і переходять до пункту 3.

Циклом перерахунку називається замкнутий багатокутник, не обов'язково опуклий, сторонами якого є горизонтальні та вертикальні відрізки й одна вершина співпадає з вільною клітинкою (саме для неї і утворюється цикл), а всі інші вершини в зайнятих клітинках. Цикл перерахунку завжди єдиний. Переміщення продукції по клітинках циклу здійснюється за правилом:

а) вільній клітинці приписують знак «+», а всім іншим (тільки вершинам) по черзі «-», «+».

б) у вільну клітинку заносять найменше з чисел x_{ij} , які розміщені в клітинках, помічених знаком «-». Крім того, це число додають до чисел в клітинках з «+» і віднімають від чисел в клітинках з «-», в результаті чого отримують новий опорний план, який потім перевіряють методом потенціалів на оптимальність, тобто переходимо до пункту 3.

Процес повторюється циклічно аж поки не будуть виконуватися умови (4) транспортної задачі, тобто знайдеться оптимальний план.

Приклад:

Знайти оптимальний план транспортної задачі.

	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	1 5	3 5	2	10
A_2	3	1 5	2 5	10
Потреби	5	10	5	

Розв'язання

I.

Задача закрыта.

II. Початків опорний план шукаємо методом північно-західного кута.

Потреби B_1 можна задовольнити повністю за рахунок постачальника A_1 . Із $a_1 = 10$ одиниць продукції пункт A_1 віддає необхідних для B_1 (пункту споживання) 5 одиниць продукції ($x_{11} = 5$), в результаті чого в постачальника A_1 залишається ще 5 одиниць продукції, які він відправляє споживачеві B_2 . Тому $x_{12} = 5$. Резерви A_1 повністю вичерпані. Тепер розподілимо продукцію постачальника A_2 . Оскільки пункт споживання B_2 потребує ще 5 одиниць продуктів, то він їх може отримати у постачальника A_2 . Тому $x_{22} = 5$. Потреби B_2 повністю задоволені. У постачальника A_2 залишилося ще 5 одиниць продукції, які він відправляє споживачеві B_3 . Тому $x_{23} = 5$. Потреби всіх споживачів задоволені, запаси пунктів відправлення вичерпані.

На цьому процес знаходження опорного плану методом північно-західного кута завершується.

$$X_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & \\ \hline 0 & 5 & 5 & \end{array} \right) \quad L = 35$$

III. Аналізуємо знайдений початковий опорний план на виродженість.

$k = 4$ - число заповнених клітинок.

$r = m + n - 1 = 4$ - ранг матриці

$k = r$

Отже, транспортна задача є не виродженою.

IV. Перевірка поточного опорного плану на оптимальність (методом потенціалів).

1. Для знаходження потенціалів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ розв'язуємо для знайдених клітинок систему рівнянь такого виду:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 1$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 2$$

Оскільки змінних більше ніж рівнянь, тому покладемо $\alpha_1 = 0$

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = 3$$

$$\alpha_2 = -2$$

$$\beta_3 = 4$$

2. Для вільних клітинок (клітинок, в яких $x_{ij} = 0$) визначаємо величини d_{ij} за формулою:

$$d_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}$$

Використовуючи транспортну задачу можна дати відповідь на питання про оптимальність розв'язку:

$$d_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - c_{13} = 0 + 4 - 2 = 2 > 0$$

$$d_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - c_{21} = -2 + 1 - 3 = -4$$

3. Перевіряємо умови (4) транспортної задачі.

Для величини d_{13} умови транспортної задачі не виконується. Тому план X_1 не є оптимальним.

V. Для знаходження нового опорного плану будуємо цикл перерахунку, в результаті чого ми повинні отримати новий опорний план. Після цього переходимо до III і процес повторюється циклічно аж до знаходження оптимального плану.

VI. Переміщення продукції по клітинках циклу здійснюється за правилами

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ + & - & + & - \\ a_1b_3 \rightarrow & a_2b_3 \rightarrow & a_2b_2 \rightarrow & a_1b_2 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $d_{13} = 2$ приписуємо знак «+». Далі в ланцюжку клітинки чергуються «-», «+»

$$a_1b_3 \rightarrow a_2b_3 \rightarrow a_2b_2 \rightarrow a_1b_2$$

Отже, цикл перерахунку будуємо для клітинки, яка розміщена в першому рядку і третьому стовпці. Оскільки в обох клітинках, помічених знаком «-»

знаходиться число 5, воно і буде найменшим, то у вільну клітинку заносимо число 5. Також число 5 додаємо до клітинок помічених знаком «+» і віднімаємо від клітинок, помічених знаком «-», в результаті чого ми отримали новий опорний план.

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	1 5	3 0	2 5
A ₂	3	1 10	2

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = 25$$

Коли задача не вироджена, то заповнюємо вільні клітинки 0 вздовж північно-західного кута.

Вданому випадку $a_{12} = 0$. Тепер $k = 4$, $r = 4$ – задача не вироджена, можна продовжити її розв'язання.

1) для заповнених клітинок пишемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= 1 & \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 3 & \beta_1 &= 1 \\ \alpha_1 + \beta_3 &= 2 & \beta_2 &= 3 \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 2 & \alpha_2 &= -2 \end{aligned}$$

2) для вільних клітинок обчислюємо величини d_{ij}

$$d_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - c_{21} = -2 + 1 - 3 = -4 < 0$$

$$d_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = -2 + 2 - 2 = -2 < 0$$

3) перевіряємо виконання умов транспортної задачі. Бачимо, що $d_{ij} < 0$. Отже, ми прийшли до оптимального опорного плану (X_2 опт., L_2 опт.).

Зауваження.

1) Якщо у таблиці серед оцінок $d_{ij} > 0$ зустрінуться дві, або більше максимально рівних оцінки, тоді вільною треба вибрати ту клітинку, якій відповідає мінімальна вартість c_{ij} .

2) Якщо у таблиці з оптимальним планом нульовими є тільки ті вершини d_{ij} , які відповідають зайнятим клітинкам, то це означає, що транспортна задача має єдиний розв'язок.

3) Якщо у таблиці з оптимальним планом серед оцінок d_{ij} нульовими є оцінки, які відповідають вільним клітинкам, тоді має місце не єдиність розв'язку. Якщо для деякої вільної клітинки з нульовою оцінкою d_{ij} побудувати цикл перерахунку, то ми одержимо ще один оптимальний план, тобто вартість перевезення буде така ж сама. Довільна лінійна комбінація оптимальних планів також буде оптимальним планом транспортної задачі.

2.3. Методика розв'язування транспортної задачі засобами Excel

Методи і прийоми оптимізації такого типу задач дозволяють широко використовувати обчислювальну техніку, що в наш час особливо актуально.

Ми пропонуємо використовувати оптимізаційну програму Solver («Пошук розв'язків») вбудованою в табличний процесор Excel.

Програма «Пошук розв'язків» – додаткова компонента (надбудова, рос. – *надстройка*, англ. – *add-in*) табличного процесора MS Excel, яка призначена для розв'язання визначених систем рівнянь, лінійних та нелінійних задач оптимізації, використовується з 1991 року.

Обсяг завдання, яке можна розв'язати за допомогою базової версії цієї програми, обмежується такими граничними показниками:

- кількість невідомих (*decision variable*) – 200;
- кількість формувальних обмежень (*explicit constraint*) на невідомі – 100;
- кількість граничних умов (*simple constraint*) на невідомі – 400.

Розробник програми Solver компанія Frontline Systems вже давно спеціалізується на розробці потужних і зручних засобів оптимізації, вбудованих у середовище популярних табличних процесорів різних фірм-виробників (MS Excel, Adobe Quattro Pro, Lotus 1-2-3).

Висока ефективність їх застосування пояснюється інтеграцією власне засобу оптимізації і табличного бізнес-документа. Завдяки всесвітній популярності табличного процесора MS Excel вбудована в його середовище програма Solver є найпоширенішим інструментом для пошуку оптимальних рішень у сфері сучасного бізнесу.

Розглянемо ілюстрацію розв'язання транспортної задачі засобами Excel.

Для прикладу візьмемо: знайти оптимальний план транспортної задачі, якщо $b_j = (15, 40, 25, 65)$,

$$a_i = (40, 80, 25), c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача замкнута, бо $\sum a_i = \sum b_j = 145$.

Зауваження. Якщо задача відкрита, перед початком розв'язання засобами Excel, необхідно зробити її замкнутою, вводючи фіктивний пункт споживання (виробництва), якщо $\sum a_i > \sum b_j$ ($\sum a_i < \sum b_j$).

Запишемо умову цієї задачі в таблицю листка Excel у вигляді зображеному на рисунку 2.1.

В клітинках A2:D4 задана таблиця вартостей (тарифів) перевезень. При цьому стовпці, позначені буквами A, B, C, D, відповідають першому, другому, третьому і четвертому споживачам, а рядки з номерами «2», «3», «4» відповідають першому, другому і третьому постачальникам відповідно.

Клітинки A6:D8 зарезервовані під таблицю об'ємів поставок (перевезень).

В рядку з номером «10» вказано величини потреб кожного з споживачів. А в стовпчику, позначеним буквою «F», – запаси кожного з постачальників.

	A	B	C	D	E	F
1	Витрати на перевезення одиниці вантажу (C _{ij})					
2	8	5	4	6		
3	8	5	2	1		
4	3	5	6	7		
5						Запаси (A _i)
6					0	40
7					0	80
8					0	25
9	0	0	0	0		
10	15	40	25	65	Потреби (B _j)	
11						
12	L= 0					

Рисунок 2.1 – Оформлення задачі в Excel

У клітину E6:E8 вводимо формули:

$$E6=\text{СУММ}(A6:D6),$$

$$E7=\text{СУММ}(A7:D7),$$

$$E8=\text{СУММ}(A8:D8).$$

У клітинки A9:D9 потрібно ввести відповідні формули:

$$A9=\text{СУММ}(A6:A8),$$

$$B9=\text{СУММ}(B6:B8),$$

$$C9=\text{СУММ}(C6:C8),$$

$$D9=\text{СУММ}(D6:D8).$$

Для того щоб скористатися можливостями, які надає «Пошук розв’язків», в клітинку B12 вводимо формулу для обчислення цільової функції:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(A6:D8;A2:D4)$$

Потім відкриваємо вікно «Пошук розв’язків». Значення, котрі необхідно ввести безпосередньо в вікні «Пошук розв’язків», вказані на рисунку 2.2. А саме, необхідно вказати цільову клітинку.

Потім потрібно вказати, яке з екстремумів цільової функції шукається в розв’язуваній задачі, для транспортних задач цільова функція повинна бути мінімальна.

Далі вказуються клітинки, зарезервовані під таблицю об'ємів поставок (перевезень). У вікні «Обмеження» вказується, в яких клітинках знаходяться обмеження по запасам і потребам.

Крім того, в цьому вікні вказуються обмеження для змінних.

Перед тим як виконати розрахунок оптимального розв'язку конкретної транспортної задачі, необхідно встановити потрібні параметри.

Заповнивши всі необхідні дані і натиснувши на кнопку «Виконати», «ОК», отримуємо розв'язок задачі (рисунок 2.3).

В клітинках, обведених рамкою, отримано оптимальний розв'язок транспортної задачі, а саме, план поставок:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 65 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

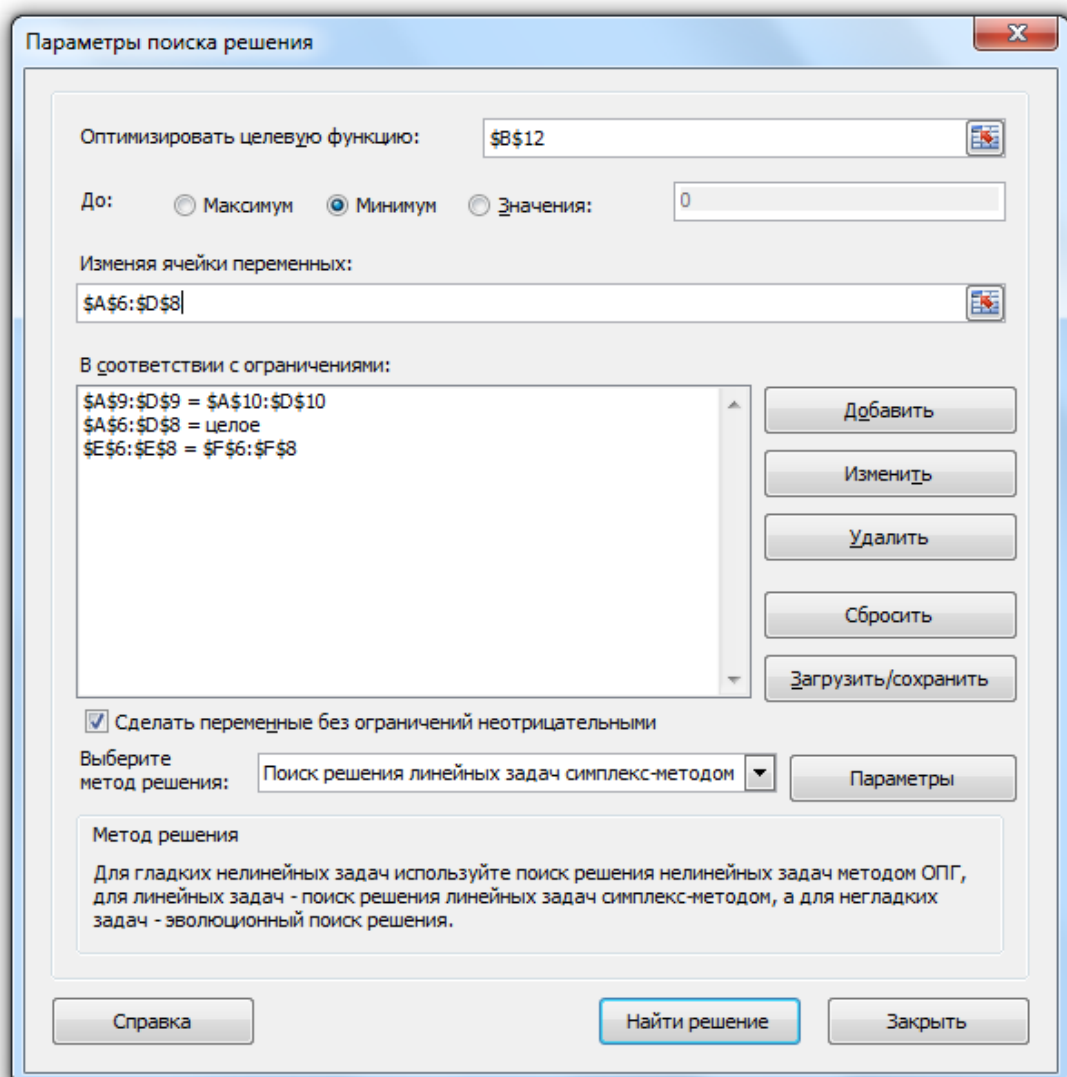


Рисунок 2.2 – Вікно параметрів пошуку

	A	B	C	D	E	F
1	Витрати на перевезення одиниці вантажу (C_{ij})					
2	8	5	4	6		
3	8	5	2	1		
4	3	5	6	7		
5						Запаси (A_i)
6	0	30	10	0	40	40
7	0	0	15	65	80	80
8	15	10	0	0	25	25
9	15	40	25	65		
10	15	40	25	65	Потреби (B_j)	
11						
12	L= 380					

Рисунок 2.3 – Розв’язок задачі

В клітинці B12 знаходиться мінімальне значення цільової функції:

$$F_{min}=380.$$

2.4. Підстави для викладання спеціальних задач лінійного програмування

Основними задачами навчання математики в середньому закладі освіти є забезпечення рівня математичної культури, необхідного для повноцінної участі в повсякденному житті, продовження освіти та трудової діяльності. Математика є унікальним засобом формування не лише освітнього, але й розвиваючого та інтелектуального потенціалу особистості.

Розвиток світового і, зокрема, європейського освітнього простору, об’єктивно вимагає від української школи оптимального реагування на процеси реформування загальної середньої школи, що відбуваються у провідних країнах світу. Загальною тенденцією є розвиток старшої профільної школи, яка орієнтується на широку диференціацію, варіативність, багатoproфільність, інтеграцію загальної і допрофесійної освіти.

Концепція профільного навчання в старшій загальноосвітній школі розроблена на виконання Закону України «Про загальну середню освіту», постанови Кабінету Міністрів України від 11.09.2009 р. № 854 «Про

затвердження нової редакції Концепції профільного навчання в старшій школі». Вона ґрунтується на основних положеннях Концепції загальної середньої освіти, Концепції профільного навчання, галузевої Програми впровадження профільного навчання на 2008-2015 роки від 24.04.2008 р. № 4/11-2 і спрямована на реалізацію Національної доктрини розвитку освіти.

Поглиблене вивчення математики, передбачає формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, орієнтацію на професійну діяльність, яка потребує високого рівня математичних знань, підготовку до навчання у вищому освітньому закладі з відповідним фаховим спрямуванням. Оскільки більшість учнів, які є здібними до вивчення математики, часто зовсім про це не підозрюють, тому важливо якомога раніше виявити ці здібності в учнів і створити оптимальні умови для їх розвитку. Такими умовами можуть бути гурткові заняття для учнів, які цікавляться математикою.

Складові поглибленого вивчення математики органічно включені до загальноосвітнього курсу як його поглиблення, розширення і застосування набутих в основному курсі знань до широкого кола задач, а також розширене вивчення властивостей об'єктів, що вивчаються в основному курсі. Потрібно забезпечити гармонійне «вплітання» нового матеріалу у традиційний програмовий, не приводячи при цьому до його перевантаження.

Сучасні інноваційні підходи до навчання математики учнів передбачають побудову математичних моделей задачних ситуацій, що важко формалізуються, інтеграцію знань різного рівня, декомпозицію складних задач, поєднання аналітичних і графічних методів розв'язування задач, створення евристичних алгоритмів навчання. Ці підходи навчання передбачають творчу діяльність школярів.

Виходячи з вище сказаного, перед нами постає завдання: підібрати приклади, які допомогли б виявити творчий підхід учнів при їх розв'язуванні. Для цього мають виконуватись умови:

1. Завдання має бути «звичайним», нескладним, розрахованим максимум на середнього учня; для розв'язування як за стандартним алгоритмом, так і з виходом за його межі знань, передбачених навчальними програмами.

2. Завдання може бути розв'язаним як на основі стандартного алгоритму, так і на основі відомих знань учня, які прямо не використовуються при розв'язуванні вправи за стандартним алгоритмом.

3. Творчий підхід до використання таких знань спрощує процес розв'язування вправ (наприклад, зменшує об'єм обчислювань, що, зокрема, зменшує ймовірність допущення помилок і економить час). У цих умовах найбільш важким і проблемним завданням для вчителя є підбір системи знань, що відповідають наведеним вище умовам.

Транспортна задача є однією з основних спеціальних моделей лінійного програмування. Це пояснюється тим, що на транспорті, в постачально-збутових і торговельних організаціях, у будь-якій галузі народного господарства важливе значення має зниження транспортних витрат на перевезення вантажів. Крім того, до транспортної задачі зводиться і низка виробничих задач.

Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов'язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо.

Ухвалення рішення транспортних задач є окремим випадком методу лінійного програмування, що отримало в даний час широке застосування для вирішення техніко-економічних задач. Наукові методи планування перевезень дозволяють скоротити транспортні витрати на 15-20%, що, маючи на увазі великі абсолютні значення транспортних витрат, складає досить істотну економію.

В даний час транспортні системи займають головне положення у світовій економіці. Вони носять глобальний по суті справи характер і мають першорядне значення в незалежності чи то це транспорт енергоресурсів матеріалів, грошей або транспортні інформаційні системи, що у даний час бурхливо розвиваються. Проте як у нових системах, що розвиваються, так і традиційних існує цілий

комплекс проблем, що потребують невідкладного рішення. І більшість із них це економічні проблеми або проблеми, що зводяться до економічних, без залежності від їхньої початкової природи, що може бути також технічною.

До таких проблем можна віднести оптимальну надійність транспортних систем, раціональний розподіл транспортної мережі, оптимізацію перевезень, що також залишається актуальною, а також вибір основних параметрів транспортної мережі або транспортної системи.

В даний час розвиток інформаційних технологій поряд із визначеними успіхами традиційних фундаментальних досліджень дозволяє по новому глянути на старі задачі і запропонувати більш точні рішення, що засновуються на досягненнях зокрема таких наук як економічна кібернетика.

В умовах сучасної України існують як глобальні транспортні системи, у тому числі газова, що потребує удосконалення так і реконструкції, а також множина локальних мереж окремих підприємств. Необхідно зазначити, що при переході до ринкової економіки вони були в ряді випадків порушені. Утворені нові зв'язки потребують визначеного осмислювання і розробки наукових підходів, базуючихся на переважно економічних критеріях.

Формувати уміння і навички розв'язувати транспортні задачі доцільно на основі принципу концентралізму: уміння поступово закріплюватися та залучатися у нові зв'язки (навчання у фоновому режимі). Одним із засобів реалізації на практиці такого підходу є цілеспрямовано підібрана система задач, які мають розв'язуватися учнями.

Задача 1. На п'ятьох точильних станках різних типів можна виконувати п'ять операцій по обробці деталі. При цьому на кожному із станків може бути закріплена лишень одна операція і одна й та ж операція може виконуватися тільки одним станком. Знаючи час виконання кожної із операцій на кожному із станків, що задається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Скласти такий розподіл виконуючих операцій між станками, при якому загальні затрати часу на виготовлення деталі є мінімальними.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1,5}; j = \overline{1,5}$) змінну, значення якої дорівнює одиниці, якщо на i -му станку j -та операція станку виконується, і дорівнює нулю у протилежній ситуації. Тоді закріплення за кожним станком тільки однієї операції виражаються рівняннями:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1, \end{cases} \quad \text{закріплення}$$

кожної із операцій тільки на одному станку – рівняннями:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1. \end{cases}$$

Необхідно знайти такі значення невідомих x_{ij} ($i = \overline{1,5}; j = \overline{1,5}$), задовольняючих системи лінійних рівнянь (9) і (10) і рівні 0 або 1, при яких функція:

$$\begin{aligned} F = & 2x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + 3x_{15} + x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} + 7x_{24} + 6x_{25} + \\ & + 7x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} + 8x_{35} + 9x_{41} + x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44} + 6x_{45} + \\ & + 3x_{51} + 2x_{52} + x_{53} + 4x_{54} + 5x_{55} \end{aligned}$$

приймає мінімальне значення.

Оптимальний план сформульованої задачі може бути знайдений методами розв'язання транспортних задач. Знайдемо його методом потенціалів (табл. 4).

Як видно, оптимальним планом задачі є план, згідно якого на I станку виконується п'ята операція, на II – перша операція, на III – друга операція, на IV – четверта операція і на V станку – третя операція. У відповідності з цим планом час переробки деталі є мінімальним і складає: $S = 3 + 1 + 2 + 1 + 4 = 11$.

Верстати	Операції					За кожним станком закріплюється одна операція
	1	2	3	4	5	
I	2 0	4	6	8	3 1	1
II	1 1	3	2 0	7	6	1
III	7	2 1	4	5	8	1
IV	9	1 0	3	4 1	6	1
V	3	2	1 1	4 0	5	1
Кожна операція виконується тільки на одному верстаті	1	1	1	1	1	5

Задача 2.

Машинно-тракторний парк, який обслуговує кілька фермерських господарств, налічує 23 трактори, з них:

«Беларусь», МТЗ-80 — 8 одиниць,

ЮМЗ-6АЛК — 10 одиниць,

MEZZO 6100 — 5 одиниць.

Одночасно надійшли замовлення від трьох фермерських господарств з такими потребами: 10, 5 і 5 одиниць техніки. Залежно від виконуваних технологічних операцій та особливостей ґрунтів господарств продуктивність виконання робіт зазначеними тракторами в кожному з господарств є різною і подається в таблиця 2.5.

	Продуктивність трактора в господарстві, еталонних гектарів на добу		
Трактор	I господарство	II господарство	III господарство
«Беларусь», MTЗ-80	50	63	59
ЮМЗ-6АЛК	49	56	50
MEZZO 6100	61	58	62

Таблиця 2.5

Визначити оптимальний розподіл техніки по господарствах.

Для розв'язування задачі скористаємось методом потенціалів. Задача належить до відкритого типу транспортних задач, бо кількість наявної техніки дорівнює 23 одиницям, а потреби — 20 одиницям, тому необхідно ввести фіктивного споживача (четверте господарство) з потребою, що дорівнює 3 одиницям техніки.

Застосовуючи метод потенціалів, отримаємо оптимальний план розподілу техніки, що наведений у таблиці 2.6.

За оптимальним планом кожне господарство отримує потрібну кількість тракторів. Однак, оскільки задача належить до відкритого типу, значення $x_{24}^* = 3$ відповідає фіктивно введеному споживачеві. Це означає, що трактори ЮМЗ-6АЛК будуть розподілені не повністю. З десяти їх одиниць розподілено тільки 7.

Загальне значення продуктивності тракторів становить 1146 еталонних гектарів на добу.

Трактор	Продуктивність трактора в господарстві, етал. га на добу			
	I господ. (10 один.)	II господ. (5 один.)	III господ. (5 один.)	IV господ (фіктивне) (3 один.)
«Беларусь», МТЗ-80(8 один.)	50	63	59	0
ЮМЗ-6АЛК(10 один.)	49	56	50	0
MEZZO 6100 (5 один.)	-61	-58	-62	0
	5	3	5	3

Таблиця 2.6.

Задача 3.

Розглянемо приклад економічної постановки задачі про призначення.

Науково-дослідний інститут отримав замовлення на виконання чотирьох дослідних проектів. Кінцеві результати першого проекту є початковими даними для другого проекту, а кінцеві результати другого проекту — початковими для третього і, нарешті, результати третього проекту є початковими значеннями для четвертого. Виконавцями проектів можуть бути чотири відділи інституту. Кожен відділ визначив кількість часу, яка необхідна для виконання ним науково-дослідних робіт. Матриця витрат часу має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент a_{ij} матриці T означає тривалість виконання i -им відділом j -го проекту. Витрати часу наведені в тижнях. Необхідно так вибрати відділи, які будуть працювати над проектами, щоб тривалість виконання всіх проектів була мінімальною.

Для розвитку мислення школярів у процесі розв'язування транспортних задач рекомендується задавати наступні типи питань:

- питання на порівняння (повне і неповне);

- питання, що вимагають встановлення основних характерних рис, ознак понять і предметів;
- питання на встановлення причинно-наслідкових зв'язків;
- питання, що вимагають підведення частинного під загальне;
- питання, що вимагають застосування загального до конкретного.

Ми пропонуємо вивчення спеціальних задач математичного програмування в процесі профільного навчання.

Профільне навчання – це вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів, здібностей учнів; створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті, структурі та організації навчального процесу.

Мета профільного навчання – забезпечення можливостей для рівного доступу учнівської молоді до здобуття загальноосвітньої профільної та початкової допрофесійної підготовки, неперервної освіти впродовж усього життя, виховання особистості, здатної до самореалізації, професійного зростання й мобільності в умовах реформування сучасного суспільства. Профільне навчання спрямоване на формування ключових компетентностей старшокласників, набуття ними навичок самостійної науково-практичної, дослідницько-пошукової діяльності, розвиток їхніх інтелектуальних, психічних, творчих, моральних, фізичних, соціальних якостей, прагнення до саморозвитку та самоосвіти.

Основними завданнями профільного навчання є:

1) створення умов для врахування й розвитку навчально-пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;

2) забезпечення умов для життєвого і професійного самовизначення старшокласників, формування готовності до свідомого вибору і оволодіння майбутньою професією;

3) формування загальнокультурної, соціальної, комунікативної, інформаційної, громадянської, технічної компетенцій учнів на допрофесійному рівні, спрямування молоді щодо майбутньої професійної діяльності;

4) забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю.

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

- диференціації (розподіл учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями і нахилами);
- варіативності, альтернативності й доступності (освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення);
- наступності та неперервності (між допрофільною підготовкою і профільним навчанням, професійною підготовкою);
- гнучкості (змісту і форм організації профільного навчання, у тому числі дистанційного; забезпечення можливості зміни профілю);
- діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів з метою їх обґрунтованої орієнтації на профіль навчання).

Крім того, профілізація освіти передбачає посилення підготовки старшокласників в області прикладних знань за обраним профілем, формування у них первинних елементів професіонально-важливих якостей.

За матеріалами представленими в цьому розділі, дотримуючись вимог [29] нами розроблена та апробована робоча програма курсу за вибором «Спеціальні задачі математичного програмування» для учнів 11 класів (додаток А).

Висновки до другого розділу

Розділ містить основи використання інформаційно–комунікаційних технологій в освітньому процесі, методичні рекомендації щодо розв’язання транспортної задачі лінійного програмування, загальну методику розв’язання транспортної задачі та методику розв’язування транспортної задачі засобами Excel. В розділі розглядаються документальні підстави та теоретичні можливості вивчення транспортної задачі математики, методичні рекомендації щодо вивчення даної теми .

Ми вважаємо, що основне завдання вивчення математики в загальноосвітній школі – це забезпечити міцне і свідоме опанування учнями системи математичних знань і вмінь, що є необхідним для продовження освіти та майбутньої трудової діяльності.

Показано, що сучасні тенденції в розвитку освіти зумовлюють пошук нових форм і методів організації навчального процесу.

Особистісний підхід до навчання, зокрема, пропонуємо реалізувати за допомогою курсу за вибором «Спеціальні задачі математичного програмування». Крім того ці задачі є одним із найпотужніших засобів узагальнення і систематизації знань учнів, формування в них гнучкості, критичності мислення.

Вважаємо, що у процесі розв’язування таких задач збагачується математична культура учня, підвищуються його логічні і технічні можливості, формуються навички дослідницької діяльності. Розв’язування задач відкриває перед учнями значну кількість евристичних прийомів, необхідних для математичного розвитку особистості. Незважаючи на це, програма з математики загальноосвітньої школи не передбачає формування в учнів умінь розв’язувати зазначені задачі, а реалії сьогодення диктують необхідність ознайомити учнів зі згаданої методикою.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто спеціальні задачі математичного програмування. Наведено приклади застосування теорії цих задач. Вивчені прийоми розв'язування спеціальних задач математичного програмування.

Обґрунтована доцільність вивчення спеціальних задач математичного програмування у курсі за вибором методами інформаційно–комунікаційних технологій.

Розглянуті особливості методики вивчення спеціальних задач математичного програмування у курсі за вибором методами інформаційно–комунікаційних технологій.

Сформульовані рекомендації, щодо вивчення спеціальних задач математичного програмування у курсі за вибором.

Розроблено робочу програму курсу за вибором для учнів 11 класів «Спеціальні задачі математичного програмування».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексюк А.М., Киричук О.В., Грищенко М.М. Педагогіка К. 1985. 296 с.
2. Ачкасов А. Є. Конспект лекцій з курсу «Економіко математичне моделювання». Харків: ХНАМГ. 2011. 204 с.
3. Барвінський А.Ф. Математичне програмування. Дослідження операцій: Навчальний посібник. Львів: Інтелект-Захід. 2008. 468 с.
4. Бех І.Д. Особистісно зорієнтоване виховання. К.. 1998. 204 с.
5. Білуха М.Г. Основи наукових досліджень К. Вища школа. 1997. 271с.
6. Богданова М. Технологія побудови інформаційно–розвиваючих модулів для формування професійно–педагогічної готовності майбутніх вчителів. Нові інформаційні технології навчання в учбових закладах освіти України. Одеса. 1997.С 31.
7. Бондар В.І. Теоретичні основи і технологія педагогічного аналізу: управлінський аспект.: Навчальний посібник. К. 1996. 66 с.
8. Бородин А.И. Биографический словарь деятелей математики. К. Вишшая школа. 1979. 897с.
9. Ващенко Г.Г. Загальні методи навчання. Підручник для педагогів. 4–е вид. К. 1997. 441 с.
10. Вітвицька С.С. Педагогічні інновації: сутність, проблеми, досвід. Шляхи і методи забезпечення подальшого творчого зростання обдарованої молоді: Науково–методичний збірник. За ред. І.І.Ярухна, Л.В.Корінної. Житомир. ЖОППО. 2008. С. 37- 48.
11. Вища математика: Посібник для студентів та самоосвіти. У 3 ч. М. Кравчук, П. Касяненко, С. Кулик, В. Можар, О. Смогоржевський. За ред. акад. М. Кравчука. Вид–во ВУАН. 1934. Ч. 1. 407 с.
12. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 3. Математичні методи дослідження операцій. Навчальний посібник. [Лавренчук В. П., Готинчал Т. І., Дронь В.С., Кондур О.С.]. Чернівці. Рута. 2007. 296 с.

13. Галузинський В.М. Основи педагогіки та психології вищої школи в Україні. Галузинський В.М., Євтух М.Б.. Навчальний посібник. К. Інтел. 1995. 168 с.
14. Глушик М. М. Математичне програмування. М. М. Глушик, І. М. Копич. Львів. Новий світ. 2000. 2006. 322 с.
15. Григорків В. С. Математичне програмування. Григорків В. С. Київ. 1996. 468 с.
16. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. Гончаренко С.У. К.: Либідь. 1997. 376с.
17. Гончаренко С.У. Державний стандарт загальної середньої освіти в Україні. Гончаренко С.У., Ляшенко О.І., Мальований Ю.І., Савченко О.Я.. К.: Генеза. 1997. 148с.
18. Гриненко А. М. Прогнозування успішності навчання учнів за результатами психологічного тестування. Гриненко А. М., Продеус А. М., Шукевич Ю. В. Педагогіка і психологія. 1996. №2. С. 116-122.
19. Гуревич Р.С. Готовність до застосування інформаційно телекомунікаційних технологій у педагогічній діяльності як основа компетентності вчителя. Гуревич Р.С. Наукові записки ВДПУ імені Михайла Коцюбинського. Серія. «Педагогіка». 2007. Вип. 16. С.222- 227.
20. Гуревич Р.С. Інформаційно-телекомунікаційні технології в освітньому процесі та наукових дослідженнях. Гуревич Р.С. Навч. посіб. Київ. Вінниця ТОВ Планер. 2005. 366 с.
21. Гуревич Р.С. Навіщо електронні посібники в освітньому процесі Теорія і практика управління соціальними системами. Гуревич Р.С. Харків. НТУ «ХПІ». 2006. №1. С. 11-19.
22. Димніч М. В. Установчоматемаційний модуль з математики. Димніч М. В. Рідна школа. 1994. №6. С.15.
23. Дмитрик И.С. Теоретические основы обучения будущих учителей педагогической технологии. Дмитрик И.С. Автореф. дис. канд. пед. наук. К. 1989. 23 с.

24. Дубасенюк О.А. Педагогічна технологія в підготовці вчителя-вихователя. Дубасенюк О.А., Іванченко А.В., Вітвицька С.С. Методичний посібник. Житомир. ЖУПІ. 1993. 107 с.

25. Дубасенюк О.А. Професійна педагогічна діяльність: сутність та сучасні підходи. Професійна підготовка педагогічних працівників. Науково-методичний збірник. Київ. Житомир. ЖДПУ. 2000. С. 39.

26. Євтух М.Б., Педагогіка: Історія та теорія. Євтух М.Б., Галузинський В.М. Навчальний посібник. К. Вища школа. 1995. 237 с.

27. Жильцов О. Б. Математичне програмування. Жильцов О. Б., Кулян В. Р., Юнькова О. О. Навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. Київ. МАУП. 2006. 184 с.

28. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Київ. ЗАТ ВІПОЛ. 2000. 688 с.

29. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання. Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Х. Вид-во «Ранок». 2011. 384 с. (Факультативи та курси за вибором).

30. Зязюн І.А. Концептуальні засади теорії освіти в Україні. Педагогіка і психологія професійної освіти. 2000. № 1. С.67-89.

31. Конституція України. Офіц. вид. Київ. Парлам. вид-во. 1996. 285 с. (Бібліотека офіційних видань).

32. Концепція середньої загальноосвітньої школи України. Інформаційний збірник Міністерства освіти України. 1992. №4. С.3-28. (Нормативний документ Міністерства освіти України).

33. Концептуальні засади демократизації та реформування освіти в Україні. Педагогічні концепції. К. Школяр. 1997. 148 с. (Нормативний документ Міністерства освіти України).

34. Концепція виховання дітей і молоді у національній системі освіти. Інформаційний збірник МО України. 1996. №13. С.216. (Нормативний документ Міністерства освіти України).

35. Кравчук М. П. Математика для сільськогосподарських профшкіл. Харків. ДВУ. 1925. 351с.
36. Кравчук М. П. Програми з курсу Елементи вищої математики в пристосуванні до сільського господарства. Програми сільськогосподарських технікумів рільничого фаху. Харків. НКО. 1926.Ч. 1. С.5-17.
37. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій. К. ВД Професіонал. 2005. 264 с.
38. Кухар Р. Б. Математичне програмування: задачі та тестові завдання. Київ-Львів. Вид-во ІЗМН. 2000. 358 с.
39. Кучма М.І. Математичне програмування: приклади і задачі. Навчальний посібник. Львів. «Новий світ 2000». 2008. 344 с.
40. Лозова В.І. Теоретичні основи виховання і навчання. Навчальний посібник. Лозова В.І., Тронько Г.В.. Харків. ХДПУ. 1997. 338 с.
41. Лутай В.С. Філософія сучасної освіти. Навч. Посібник. Центр «МагістрS». 1996. 256 с.
42. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование. К.: Вища школа. 1975. 372 с.
43. Малафіїк І.В. Дидактика. Навч. Посібник. К. Кондор. 2005. 400 с.
44. Масюк Л.М., Гордєєва А.В. Нові інформаційні технології в профтехосвіті . Рідна школа. 1993. №7. С. 6162.
45. Математичне програмування . [Богаєнко І. М., Григорків В. С., Бойчук М. В., Рюмшин М. О.]. К. Логос. 1996. 266 с.
46. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування. Навч. Посібн.. К. КНЕУ. 2003. 452 с.
47. Національна доктрина розвитку освіти України у ХХІ столітті.К. Шкільний світ. 2001. (Нормативний документ Міністерства освіти України).
48. Нісімчук А.С. Педагогічна технологія (для магістрів). Підручник А.С. Луцьк. Видавництво «Волинська обласна друкарня». 2004. 144 с.
49. Падалко Н.Й.. Методичні рекомендації з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» для студентів, які навчаються за

напрямом 6.0403021 «Інформатика» всіх форм навчання. Луцьк. СНУ імені Лесі Українки. 2015. 66 с.

50. Педагогічні інновації у сучасній школі. І.Г.Єрмаков (відп.ред.), В.Ф. Паламарчук, Д.І.Румянцева та ін. К. Освіта. 1994. 88 с.

51. Педагогічна майстерність. Підручник. І.Я.Зязюн, А.В. Крамущенко та ін. За ред. І.Я.Зязюна. К. Вища школа. 1997. 349 с.

52. Педагогічний словник. За ред. дійсного члена АПН України М.Д. Ярмаченка. К. Педагогічна думка. 2001. 516 с.

53. Пешак О. С. Математичне програмування. Навчальний посібник. Львів. 2004.

54. Підласий І.П. Діагностика та експертиза педагогічних проектів. Підласий І.П.. К. Україна. 1998. 343 с.

55. Підласий І.П. Технологія виховання з комп'ютерною підтримкою. Рідна школа. 1993. № 1,2.

56. Підласий І.П. Діагностика та експертиза педагогічних проектів. К. Україна. 1998. 343 с.

57. Рудницька О.П. Педагогіка: загальна та мистецька. Навчальний посібник. Тернопіль. Навчальна книга. Богдан. 2005. 360 с.

58. Сороківський В. М. Математичне програмування. Львів. Новий світ. 2000, 2005. 348 с.

59. Цегелек Г.Г. Лінійне програмування. Львів. Світ. 1995. 374 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А Програма курсу за вибором

Турич Юлія Олександрівна

Спеціальні задачі математичного програмування

Програма курсу за вибором для учнів 11 класів

Транспортна задача є однією з основних спеціальних моделей лінійного програмування. Це пояснюється тим, що на транспорті, в постачально-збутових і торговельних організаціях, у будь-якій галузі народного господарства важливе значення має зниження транспортних витрат на перевезення вантажів. Крім того, до транспортної задачі зводиться і низка виробничих задач.

Ухвалення рішення транспортних задач є окремим випадком методу лінійного програмування, що отримало в даний час широке застосування для вирішення техніко-економічних задач. Наукові методи планування перевезень дозволяють скоротити транспортні витрати на 15-20%, що, маючи на увазі великі абсолютні значення транспортних витрат, складає досить істотну економію.

Факультативний курс пропонується для учнів старшої школи загальноосвітніх навчальних закладів і розрахований на 17 академічних годин (1 година на тиждень протягом семестру)

Основною метою курсу є формування в учнів наукового світогляду, поняття про транспортну задачу та методів її розв'язування.

Завдання курсу полягають у тому, щоб, враховуючи інтереси і нахили учнів, сформулювати в учнів уявлення про лінійне програмування, поняття транспортної задачі, ознайомити з методами розв'язування транспортних задач, прищеплювати учням інтерес до самостійних знань з математики, виховувати і розвивати ініціативу і творчість, показати застосування математичних знань на практиці.

Програма курсу розроблена з урахуванням структури та послідовності вивчення тем, що входять до складу програми шкільного курсу з математики.

Орієнтовний розподіл навчального часу

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Вступ	1
2	Економічна та математична постановка транспортної задачі	2
3	Методи пошуку початкового опорного плану транспортної задачі	4
4	Методи розв'язування транспортної задачі	6
5	Транспортна задача за критерієм часу	4
	РАЗОМ	17

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
1	Вступ	Учень (учениця): • знає історію виникнення лінійного програмування; • ознайомлений з сучасним розвитком лінійного програмування;
2	Економічна та математична постановка транспортної задачі	Учень (учениця): • вміє скласти математичні моделі транспортних задач; • пояснює зміст поняття транспортна задача.
4	Методи пошуку початкового опорного плану транспортної задачі	Учень (учениця): • формулює означення початкового опорного плану ТЗ; • шукає початковий опорний план методом північно-західного кута, мінімального елемента в матриці
6	Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі	Учень (учениця): • вміє розв'язувати транспортну задачу методом потенціалів;
4	Транспортна задача за критерієм часу	Учень (учениця): • формулює означення ТЗ за критерієм часу; • вміє розв'язувати ТЗ за критерієм часу

Орієнтовна тематика і плани занять

Тема 1. Вступ.

1. Економічні передумови постановка і вирішення задач лінійного програмування.
2. Л.В. Канторович.
3. Загальна характеристика задач лінійного програмування.

Література (1, 3, 5)

Тема 2. Математична і економічна постановка транспортної задачі

1. Змістовна(економічна) постановка задачі.
2. Математична модель задачі.
3. Поняття збалансованої (закритої) та незбалансованої (відкритої) транспортної задачі.

Література (5, 6, 9)

Тема 3. Методи пошуку початкового опорного плану транспортної задачі

1. Поняття початкового опорного плану транспортної задачі.
2. Метод північно-західного кута (діагональний метод) пошуку початкового опорного плану транспортної задачі.
3. Метод мінімально елемента в матриці.

Література (5, 6, 9)

Тема 4. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

1. Поняття оптимального опорного плану транспортної задачі.
2. Метод потенціалів для визначення оптимального опорного плану транспортної задачі.

Література (12, 6)

Тема 5. Транспортна задача за критерієм часу

1. Поняття транспортної задачі за критерієм часу.
2. Методи побудови початкових опорних планів для транспортної задачі за критерієм часу.

Література (9, 1)

ДОДАТОК Б План-конспект профільного заняття

Тема. Методи пошуку початкового опорного плану транспортної задачі

Мета: ознайомити учнів з методами пошуку початкового опорного плану транспортної задачі; сформувати вміння шукати початковий план методом північно-західного кута і методом мінімального елемента в матриці.

Тип заняття: засвоєння знань, умінь та навичок.

Наочність і обладнання: кольорова крейда.

План-конспект заняття

1. Організаційний етап

Перевірка готовності учнів до заняття, налаштування на роботу.

2. Формулювання мети і завдань заняття

Головна мета заняття зумовлена його темою і полягає в тому, щоб закріпивши знання означення та властивостей транспортної задачі, застосувати їх до розв'язання прикладних задач. Сформувати в учнів сталі вміння та навички знаходити початкові опорні плани.

3. Сприйняття і освідомлення нового матеріалу

Всі методи побудови початкових опорних планів відрізняються лише порядком заповнення базисних клітин. Спосіб їх заповнення залишається одним і тим же, а саме, порівнюється залишок запасу із залишком потреби для вибраної клітини і мінімальна з цих двох величин заноситься у клітину. Після цього, якщо мінімум досягається на рядку, то викреслюють з таблиці рядок, якщо мінімум досягається на стовпці, то викреслюють стовпець; якщо — і на рядку і на стовпчику одночасно, то викреслюють і рядок і стовпчик, але при цьому заносять базисне нульове перевезення в одну із невикреслених клітин рядка або стовчика, що повинні бути викреслені. Такий спосіб гарантує заповнення в точності $m+n-1$ клітини, при цьому їх множина буде ациклічною, оскільки вона будується з використанням методу викреслювання. Отже, побудований таким способом план перевезень буде допустимим і ациклічним, тобто опорним.

Метод північно-західного кута або діагональний метод.

Метод має таку назву, оскільки на кожному його кроці заповнюється верхня ліва (північно-західна) невикреслена клітина транспортної таблиці. На першому кроці заповнюється клітина (1,1). Покладають $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Можливі три випадки:

1) $a_1 < b_1$, тоді $x_{11} = a_1$, і залишки запасу у пункті A_i і потреби у пункті B_j будуть відповідно рівні $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} = 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} > 0$. Оскільки об'єм запасу пункту A_1 вичерпаний, то перший рядок транспортної таблиці викреслюють;

2) $a_1 > b_1$, тоді $x_{11} = b_1$, і $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} > 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} = 0$, оскільки, об'єм потреби у пункті B_1 вичерпаний, то викреслюють перший стовпчик транспортної таблиці;

3) $a_1 = b_1$, тоді $x_{11} = b_1 = a_1$, $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} = 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} = 0$ і викреслюванню підлягають і перший рядок, і перший стовпчик транспортної таблиці. Щоб зберегти відповідність між заповненням клітини і викреслюванням, у цьому випадку в одну з вільних клітин першого рядка або стовпчика заноситься базисний нуль.

Після цього переходять до наступного кроку методу, знову вибираючи для заповнення невикреслену північно-західну клітину. Процес заповнення клітин і викреслювань рядків або стовпчиків продовжують доти, поки не будуть викреслені всі клітини транспортної таблиці. Таких викреслювань, як і заповнених клітин, буде в точності $m+n-1$. За побудовою план буде допустимим і ациклічним, тобто опорним.

Недоліком методу північно-західного кута є те, що він не враховує специфіку матриці транспортних витрат C .

Метод мінімального елемента.

Цей метод відрізняється від методу північно-західного кута тільки порядком заповнення клітин транспортної таблиці. На кожному кроці методу заповнюється невикреслена клітина, якій відповідає найменше значення транспортних витрат (спосіб заповнення клітин залишається тим самим). Тому слід очікувати, що в більшості випадків метод мінімального елемента дасть

більш економічний опорний план у порівнянні з методом північно-західного кута.

4. Закріплення та осмислення нового матеріалу

Розв’язання транспортних задач на побудову початкового опорного плану

Задача 1. Компанія контролює три фабрики A_1 , A_2 , A_3 , здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис.од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис.од. продукції. Вартість виробництва й транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовника			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі.

Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з i -тої фабрики до j -го замовника ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$).

Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою

($\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$), то математична модель задачі матиме вигляд:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80.$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовника повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80.$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$\rightarrow Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34} \rightarrow \min.$$

Розв'язування. Розв'язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

	110	40	60	80
150	4	4	2	5
60	5	3	1	2
80	2	1	4	2

1 крок. Серед клітин дві клітинки (2,3) і (3,2) мають найменші транспортні витрати $c_{23}=c_{32}=1$. Спочатку заповнимо клітинку з меншим номером рядка (2,3). Обчислюємо, $x_{23} = \min(60, 60) = 0$, $a_2 - x_{23} = 60 - 60 = 0$, $b_3 - x_{13} = 60 - 60 = 0$, заносимо дані у таблицю 2.2 і викреслюємо третій стовпчик і другий рядок. При цьому заносимо нуль в одну з клітин (1,3), (3,1), (2,4), наприклад, у клітинку (1,3): $x_{13}=0$.

	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	
60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	
			0		

2 крок. Заповнюємо клітинку (3,2). Обчислюємо, $x_{32} = \min(80, 40) = 40$, $a_3 - x_{32} = 80 - 40 = 40$, $b_2 - x_{32} = 40 - 40 = 0$, заносимо дані у таблицю 2.3 і викреслюємо другий стовпчик.

	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	
60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	40
		0	0		
	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	
60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	40
		0	0		

3 крок. Заповнюємо клітинку (3,1). Обчислюємо, $x_{31} = \min(40, 110) = 40$, $a_3 - x_{31} = 40 - 40 = 0$, $b_1 - x_{31} = 110 - 40 = 70$, заносимо дані у таблицю 2.4 і викреслюємо третій рядок.

	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	
60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	0
	70	0	0		

4 крок. Заповнюємо клітинку (1,1). Обчислюємо, $x_{11} = \min(70, 110) = 70$, $a_1 - x_{11} = 150 - 70 = 80$, $b_1 - x_{11} = 70 - 70 = 0$, заносимо дані у таблицю 2.4 і викреслюємо перший стовпчик.

	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	80

60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	0
	0	0	0	80	

5 крок. Заповнюємо клітинку (1,4). Обчислюємо, $x_{14} = \min(80, 80) = 80$, $a_1 - x_{14} = 80 - 80 = 0$, $b_4 - x_{14} = 80 - 80 = 0$, заносимо дані у таблицю 2.4 і викреслюємо четвертий стовпчик.

	110	40	60	80	
150	4	4	2	5	0
60	5	3	1	2	0
80	2	1	4	2	0
	0	0	0	0	

Отже, опорний початковий план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При якому цільова функція набуває значення $L(X_0) = 70 \cdot 4 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 80 \cdot 5 = 820$ ум.од.

5. Підведення підсумків заняття

Запитання до учнів:

1. Опишіть економічну і математичну постановку класичної транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?

3. *Які ви знаєте властивості опорних планів транспортної задачі?*
4. *Які ви знаєте методи побудови опорного плану?*
5. *Побудуйте невироджений опорний план методом північно-західного кута для задачі:*

$$a_i = 50, 70, 90; b_j = 70, 65, 70, 75.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Барвінський А.Ф. Математичне програмування. Дослідження операцій: Навчальний посібник. Барвінський А.Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І. Львів. Інтелект-Захід. 2008. 468 с.
2. Богданова М. Технологія побудови інформаційно–розвиваючих модулів для формування професійно–педагогічної готовності майбутніх вчителів. Богданова М. Нові інформаційні технології навчання в учбових закладах освіти України. Одеса. 1997. С 31.
3. Глушик М. М. Математичне програмуванн. М. М. Глушик, І. М. Копич. Львів. Новий світ. 2000, 2006. 322 с.
4. Гуревич Р.С. Готовність до застосування інформаційно – телекомунікаційних технологій у педагогічній діяльності як основа компетентності вчителя. Наукові записки ВДПУ імені Михайла Коцюбинського. Серія «Педагогіка». 2007. Вип. 16. С.222 – 227.
5. Гуревич Р.С. Навіщо електронні посібники в освітньому процесі. Теорія і практика управління соціальними системами. Гуревич Р.С. Харків. НТУ «ХПІ». 2006. №1. С. 11–19.
6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Зайченко Ю. П. Київ. ЗАТ ВІПОЛ. 2000. 688 с.
7. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання. Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Х. Вид-во «Ранок». 2011. 384 с. (Факультативи та курси за вибором).
8. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій. Кутковецький В. Я. К. ВД Професіонал. 2005. 264 с.

9. Кучма М.І. Математичне програмування: приклади і задачі. Навчальний посібник. Кучма М. І. Львів. «Новий світ – 2000». 2008. 344 с.
10. Математичне програмування. Богаєнко І. М., Григорків В. С., Бойчук М. В., Рюмшин М. О. Київ. Логос. 1996. 266 с.
11. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування. Навч. Посібн. Наконечний С. І. Київ. КНЕУ. 2003. 452 с.
12. Нісімчук А.С. Педагогічна технологія (для магістрів). Підручник. Нісімчук А.С. Луцьк. Видавництво «Волинська обласна друкарня». 2004. 144 с.
13. Падалко Н.Й.. Методичні рекомендації з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» для студентів, які навчаються за напрямом 6.0403021 «Інформатика» всіх форм навчання. А. М. Падалко, Н. Й. Падалко, Л. П. Музика. Луцьк. СНУ імені Лесі Українки. 2015. 66с.
14. Пешак О. С. Математичне програмування. Пешак О. С. Навчальний посібник. Львів. 2004.
15. Цегелек Г.Г. Лінійне програмування Цегелек Г.Г. Львів. Світ. 1995. 374 с.