

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

БОГОСЛАВСЬКА АНАСТАСІЯ ЛЕОНІДІВНА
НЕРІВНОСТІ КОШІ, ЇХ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА
ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК ОКСАНА
ВОЛОДИМИРІВНА,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від _____ 20__ р.

Завідувач кафедри
доц. Федунік-Яремчук О.В. _____

Луцьк – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО-ШВАРЦА	5
1.1. Нерівність Коші-Шварца для скінченних послідовностей	5
1.2. Класичні доведення нерівності Коші-Буняковського-Шварца	6
1.3. Узагальнення та аналоги нерівності Коші-Буняковського-Шварца.....	9
1.3.1. Інтегральна форма нерівності Буняковського та Шварца	10
1.3.2. Нерівність Гельдера	11
1.3.3. Нерівність Мінковського	12
1.4. Геометрична та функціональна інтерпретація нерівності Коші-Буняковського-Шварца.....	13
1.5. Практичне застосування нерівності Коші-Буняковського-Шварца.....	15
РОЗДІЛ 2. НЕРІВНІСТЬ МІЖ СЕРЕДНІМ АРИФМЕТИЧНИМ І СЕРЕДНІМ ГЕОМЕТРИЧНИМ.....	24
2.1. Означення середніх величин. Нерівності між середніми.....	24
2.2. Доведення нерівності Коші методом математичної індукції ...	27
2.3. Узагальнена нерівність між середнім арифметичним і геометричним.....	28
2.4. Доведення нерівності на основі властивостей функцій	31
2.5. Опуклість як основа узагальненої нерівності для середніх	36
2.6. Огляд альтернативних методів доведення	40
2.6.1. Доведення Бора	41
2.6.2. Доведення методом Гурвіца.....	42
2.6.3. Доведення методом Елерса	44
2.6.4. Доведення методом Якобсталя	45
2.7. Практичне застосування нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним.....	46
ВИСНОВКИ	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	52

ВСТУП

У сучасному математичному аналізі нерівності відіграють фундаментальну роль, адже саме вони забезпечують основу для доведення ключових оцінок, норм, дослідження збіжності рядів, функцій і просторів. Нерівності дозволяють глибше зрозуміти структуру числових послідовностей, геометричні властивості векторних просторів, а також встановити взаємозв'язки між різними величинами, що виникають у задачах оптимізації, теорії ймовірностей та функціонального аналізу.

Серед найважливіших нерівностей у математиці особливе місце займають нерівність Коші-Буняковського-Шварца та нерівність між середнім арифметичним і геометричним. Перша є фундаментальною в геометрії евклідових та гільбертових просторів, а також лежить в основі нерівностей Гельдера й Мінковського. Друга – нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним – є однією з базових оцінок у теорії опуклості, теорії функцій, алгебраїчних та аналітичних методах. Обидві нерівності характеризуються великою кількістю способів доведення, широким спектром узагальнень і численними застосуваннями.

Актуальність дослідження полягає у тому, що вивчення цих нерівностей не лише поглиблює теоретичні знання, а й дозволяє сформулювати цілісне бачення математичного апарату, який використовується у прикладних задачах, статистиці, економіці, інформатиці та фізиці. Знання різних доведень, інтерпретацій та узагальнень нерівностей сприяє розвитку логічного мислення, математичної культури та вміння обирати оптимальні методи для аналізу різних математичних ситуацій.

Мета роботи – всебічно дослідити нерівність Коші-Буняковського-Шварца та нерівність між середнім арифметичним і геометричним, розглянути їх класичні та сучасні доведення, узагальнення та приклади застосувань.

Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

- проаналізувати теоретичні основи нерівності Коші-Буняковського-Шварца;
- розглянути різні підходи до її доведення: алгебраїчні, геометричні, аналітичні та індукційні;
- дослідити узагальнення Коші-Буняковського-Шварца у просторах $\mathbb{R}^n$ та L^2 ;
- систематизувати доведення нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним різними методами: через індукцію, опуклість, фундаментальні нерівності, логарифмічні функції;
- встановити зв'язок нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним з нерівністю Юнга та середніми степенями;
- розглянути приклади застосування нерівностей та їх роль у математичному аналізі.

Об'єкт дослідження – математичні нерівності та їх властивості.

Предмет дослідження – нерівність Коші-Буняковського-Шварца та нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, їх доведення, узагальнення та застосування.

Структура роботи відповідає меті дослідження і включає два розділи. Перший присвячений нерівності Коші-Буняковського-Шварца, другий – нерівності між середнім арифметичним і геометричним. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, доведення, узагальнення та приклади. Робота завершується висновками та списком використаної літератури.

Апробація дослідження: результати роботи були представлені у формі тез на XIX Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих науковців «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (13-14 травня 2025 року) на тему «Застосування опуклості функції до доведення нерівностей Коші». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2025. С. 293-295.

РОЗДІЛ 1. НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО-ШВАРЦА

1.1. Нерівність Коші-Шварца для скінченних послідовностей

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца є одним із фундаментальних тверджень математичного аналізу та лінійної алгебри. У загальному вигляді вона виражає нерівність, яка пов'язує модуль скалярного добутку векторів і добуток їхніх норм.

Ця нерівність має трьох авторів, які незалежно її відкрили або узагальнили для різних класів об'єктів:

- Огюстен-Луї Коші – довів дискретну форму для дійсних чисел у 1821 році.
- Віктор Буняковський – довів інтегральну форму для функцій у 1859 році.
- Герман Шварц – узагальнив інтегральну форму для L^2 -просторів у 1888 році.

Нехай $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ і $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ – довільні дійсні числа. Ці набори чисел можна розглядати як вектори $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ та $b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ у n -вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.1 (нерівність Коші-Буняковського-Шварца). Для довільних дійсних чисел a_i та b_i виконується рівність:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \quad (1.1)$$

або, в еквівалентній формі із використанням знаку суми та коренів:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (1.2)$$

Ця форма нерівності відома ще як дискретна форма нерівності Коші-Шварца і є аналітичним виразом геометричного співвідношення, яке забезпечує оцінку зверху модуля скалярного добутку двох ненульових векторів:

$$|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad (1.3)$$

де $(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ – скалярний добуток, а $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ та $\|b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ – норми (довжини) векторів. Нерівність (1.3) випливає з того факту, що $a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cos \theta$, а $|\cos \theta| \leq 1$ для будь-якого кута θ .

Умова рівності. Рівність у нерівностях (1.1), (1.2) та (1.3) досягається тоді й лише тоді, коли вектори a та b колінеарні (лінійно залежні), тобто виконується одна з двох умов:

1. усі числа a_i дорівнюють нулю, тобто $a_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (тривіальний випадок);
2. існує таке дійсне число $t \in \mathbb{R}$ таке, що виконується співвідношення $a_i = t \cdot b_i$ для всіх $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (одна послідовність пропорційна іншій).

1.2. Класичні доведення нерівності Коші-Буняковського-Шварца

Хоча існує багато способів доведення нерівності Коші-Буняковського-Шварца (через індукцію, функціональний аналіз), найбільш елегантним і класичним є алгебраїчний метод, що ґрунтується на властивостях квадратного тричлена, а також на тотожності Лагранжа.

Доведення методом квадратного тричлена (дискримінанта)

Це фундаментальне доведення для дискретної форми (1.1), яке використовує факт, що квадрат дійсного числа завжди невід’ємний.

Доведення. Розглянемо довільне дійсне число. Складемо суму квадратів, яка за означенням завжди невід’ємна:

$$\sum_{i=1}^n (t \cdot a_i + b_i)^2 \geq 0. \quad (1.4)$$

Розкриємо дужки під знаком суми, використовуючи властивості суми:

$$\sum_{i=1}^n (t^2 \cdot a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) \geq 0.$$

Перегрупуємо члени, виносячи t^2 та t за знак суми (оскільки вони не залежать від індекса i):

$$t^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) + 2t \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq 0. \quad (1.5)$$

Нерівність (1.5) є квадратним тричленом відносно змінної t вигляду $At^2 + 2Bt + C \geq 0$, де коефіцієнти визначені як:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i^2, 2B = 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Rightarrow B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Оскільки квадратний тричлен $At^2 + 2Bt + C$ завжди невід'ємний для будь-якого дійсного t , це означає, що квадратне рівняння $At^2 + 2Bt + C = 0$ не може мати двох різних дійсних коренів. Отже, його дискримінант D повинен бути не більшим за нуль ($D \leq 0$).

Для квадратного тричлена $At^2 + 2Bt + C$ дискримінант має вигляд $D = (2B)^2 - 4AC$. Використовуючи скорочений дискримінант $D' = B^2 - AC$, отримуємо умову:

$$D' = B^2 - AC \leq 0.$$

Підставимо коефіцієнти A, B, C :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Переносимо від'ємний член у праву частину:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Це доводить нерівність Коші-Буняковського-Шварца (1.1).

Умова рівності. Рівність досягається тоді й лише тоді, коли $D' = 0$. У цьому випадку квадратний тричлен має єдиний корінь t_0 , при якому вираз дорівнює нулю:

$$t_0 = -\frac{B}{A}.$$

Це означає, що $\sum_{i=1}^n (t_0 \cdot a_i + b_i)^2 = 0$. Оскільки сума квадратів дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю:

$$t_0 \cdot a_i + b_i = 0 \text{ для всіх } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_i = -t_0 \cdot a_i.$$

Отже, рівність досягається, коли послідовності a та b пропорційні (лінійно залежні).

Доведення через тотожність Лагранжа

Тотожність Лагранжа є чисто алгебраїчним способом доведення нерівності Коші-Буняковського-Шварца. Вона перетворює нерівність на очевидне твердження, що сума квадратів є невід'ємною.

Теорема 1.2 (тотожність Лагранжа). Для довільних дійсних чисел a_i та b_i :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (1.6)$$

Доведення. Розглянемо ліву частину тотожності та розкриємо добуток сум:

$$\begin{aligned} L &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right), \\ L &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j. \end{aligned}$$

Перегрупуємо члени під єдиною подвійною сумою:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j).$$

Ця сума містить n^2 доданків.

Розглянемо праву частину тотожності – суму квадратів різниць:

$$R = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_j a_j b_i + a_j^2 b_i^2).$$

Члени подвійної суми L можна розбити на три групи:

1. доданки, де $i = j$: $a_i^2 b_i^2 - a_i b_i a_i b_i = a_i^2 b_i^2 - a_i^2 b_i^2 = 0$ (всі ці n доданків дорівнюють нулю).

2. доданки, де $i < j$: $a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j$.
3. доданки, де $i > j$: $a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j$.

Кожен доданок у R де $i < j$ відповідає у парі доданків у L :

- $a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j$ (відповідає $i < j$ у L);
- $a_j^2 b_i^2 - a_j b_j a_i b_i$ (відповідає $i > j$ у L).

Сума цих двох доданків із L дорівнює:

$$(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) - 2a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Оскільки в L ми маємо суму всіх пар $i \neq j$, а R включає половину цих пар, то L розкладається на суму всіх $(a_i b_j - a_j b_i)^2$ для $i < j$ та $i > j$.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Таким чином, тотожність (1.6) доведено.

Наслідок. Оскільки права частина тотожності Лагранжа є сумою квадратів дійсних чисел, вона завжди невід'ємна:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0.$$

Звідси випливає нерівність Коші-Буняковського-Шварца:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \geq 0.$$

Умова рівності. Рівність досягається, коли $(a_i b_j - a_j b_i) = 0$ для всіх i, j , що означає $a_i b_j = a_j b_i$, або $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} = \text{const}$. Тобто послідовності пропорційні.

1.3. Узагальнення та аналоги нерівності Коші-Буняковського-Шварца

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца не обмежується лише дискретним випадком (для скінченних послідовностей). Її справжнє значення

полягає у можливості узагальнення на неперервні функції та на абстрактні простори.

1.3.1. Інтегральна форма нерівності Буняковського та Шварца

Інтегральна форма нерівності Коші-Буняковського-Шварца є прямим аналогом дискретної форми (1.2), де сума замінюється на інтеграл, а вектори – на функції. Уперше ця форма була доведена українським математиком Віктором Буняковським (для дійсних функцій) і пізніше Германом Шварцем (для комплексних функцій).

Теорема 1.3 (інтегральна нерівність Буняковського-Шварца). Нехай $f(x)$ та $g(x)$ – дві неперервні або інтегровні з квадратом (належать до простору L^2) функції на відрізку $[a, b]$. Тоді виконується нерівність:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right). \quad (1.7)$$

Геометрична інтерпретація. У контексті функціонального аналізу, інтегральна нерівність також має векторну природу. Вона стверджує, що для функцій, які розглядаються як “вектори” у просторі L^2 :

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|,$$

де:

- $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ – скалярний добуток функцій.
- $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ – норма (довжина) функції в L^2 -просторі.

Доведення. Ця форма нерівності має повністю аналогічне доведення, як і для дискретної форми. Розглянемо загальну схему, яка також ґрунтується на використанні квадратного тричлена (див. п. 1.2). При цьому розглядається функція змінної t :

$$F(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Оскільки підінтегральна функція $(tf(x) + g(x))^2 \geq 0$, то інтеграл також невід'ємний: $F(t) \geq 0$. Розкриваючи інтеграл, отримуємо квадратний тричлен відносно t :

$$F(t) = t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

Введемо позначення: $A = \int_a^b f^2(x)dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x)dx$ та $C = \int_a^b g^2(x)dx$.

Умова невід'ємності $F(t)$ для всіх t вимагає, щоб дискримінант був недодатнім ($D \leq 0$), що призводить до $B^2 \leq AC$, і доводить нерівність (1.7).

Умова рівності. Рівність досягається, якщо функції лінійно залежні: $f(x) = t \cdot g(x)$ (або $g(x) = t \cdot f(x)$) для деякої сталої t майже скрізь на $[a, b]$.

1.3.2. Нерівність Гельдера

Нерівність Гельдера є одним із найбільш важливих узагальнень нерівності Коші-Буняковського-Шварца. Вона є фундаментальною для теорії L^p -просторів, де p не обов'язково дорівнює 2.

Теорема 1.4 (нерівність Гельдера). Нехай p та q – додатні дійсні числа, що задовольняють умови спряженості:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ звідки } p > 1, q > 1.$$

Дискретна форма для довільних дійсних чисел a_i та b_i :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.8)$$

Інтегральна форма для функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.9)$$

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца є окремим випадком нерівності Гельдера, коли степені спряженості рівні: $p = q = 2$.

Умова спряженості $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ виконується, і нерівність (1.8) або (1.9) збігається з (1.2) або (1.7) відповідно (оскільки для дійсних чисел $|a_i|^2 = a_i^2$).

Доведення (ґрунтується на нерівності Юнга). Нерівність Гельдера виводиться за допомогою Юнга для добутків (див. п. 2.5.1):

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Це доведення використовує той самий метод, що й доведення інтегральної форми, але замість $\sum_{i=1}^n (t \cdot a_i + b_i)^2$ використовується властивість $\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q} \right)$ після відповідної нормувальної заміни.

1.3.3. Нерівність Мінковського

Поряд із нерівністю Гельдера, важливим узагальненням, що часто застосовується у функціональному аналізі, є нерівність Мінковського. Якщо нерівність Гельдера оцінює скалярний добуток, то нерівність Мінковського є аналогом нерівності трикутника для нормованих просторів L^p .

Теорема 1.5 (нерівність Мінковського). Нехай $p \geq 1$. Для двох довільних наборів невід'ємних чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ і $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ (або двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ з класу L^p) виконується нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.10)$$

В інтегральній формі для функцій на відрізку $[a, b]$ ця нерівність має вигляд:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.11)$$

Доведення (з використанням нерівності Гельдера). Розглянемо випадок $p \geq 1$ (при $p = 1$ нерівність перетворюється на очевидну тотожність). Запишемо загальний член суми у лівій частині (1.10) у вигляді:

$$(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i) \cdot (a_i + b_i)^{p-1} = a_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1} + b_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Підсумуємо цей вираз по i від 1 до n :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Застосуємо до кожної суми у правій частині нерівність Гельдера (1.8) з показниками p та q (де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, що означає $(p-1) \cdot q = p$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1) \cdot q} \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1) \cdot q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Оскільки $(p-1) \cdot q = p$, ми можемо винести спільний множник $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ за дужки:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Розділивши обидві частини нерівності на $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ (і враховуючи, що $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$), ми отримаємо шукану нерівність Мінковського (1.10).

Геометричний зміст. Нерівність Мінковського є аналітичним виразом нерівності трикутника в нормованих лінійних просторах. Якщо визначити норму вектора x як $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, то нерівність стверджує, що довжина суми векторів не перевищує суми їхніх довжин:

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

1.4. Геометрична та функціональна інтерпретація нерівності Коші-Буняковського-Шварца

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца має глибокий геометричний зміст, який є ключовим для розуміння її застосування у функціональному аналізі та геометрії.

Зв'язок зі скалярним добутком та кутом

У n -вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ нерівність Коші-Буняковського-Шварца є фундаментальним співвідношенням, яке виражає обмеження для скалярного добутку.

Геометричне визначення скалярного добутку. У двовимірному або у тривимірному просторі ($\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{R}^3$) скалярний добуток двох векторів a та b визначається через їхні довжини (норми) $\|a\|$ та $\|b\|$ і кут θ між ними:

$$a \cdot b = \|a\| \cdot \|b\| \cos \theta.$$

Оскільки $|\cos \theta| \leq 1$ для будь-якого дійсного кута θ , то звідси випливає геометрична нерівність:

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\|. \quad (1.12)$$

Щоб візуально продемонструвати цей зв'язок, розглянемо два вектори a та b у двовимірному просторі. На рис. 1.1. чітко видно, як кут θ між векторами впливає на їхній скалярний добуток. Він досягає максимуму, коли вектори колінеарні ($\theta = 0$ або $\theta = \pi$) і дорівнює нулю, коли вони ортогональні ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Щоб візуально продемонструвати цей зв'язок, розглянемо два вектори a та b у двовимірному просторі.

На рис. 1.1. чітко видно, як кут θ між векторами впливає на їхній скалярний добуток. Він досягає максимуму, коли вектори колінеарні ($\theta = 0$ або $\theta = \pi$) і дорівнює нулю, коли вони ортогональні ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

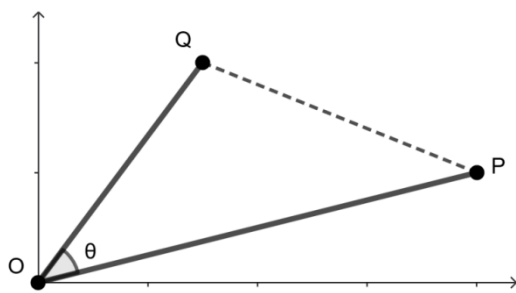


Рис. 1.1.

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца
(1.2)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

гарантує, що частка, визначена як косинус кута між векторами, завжди залишається в діапазоні $[-1, 1]$ навіть у n -вимірних просторах.

Інтерпретація у просторах зі скалярним добутком. Евклідові простори

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца є визначальною властивістю будь-якого простору зі скалярним добутком (зокрема, Гільбертового простору), яка не залежить від конкретної природи його елементів (чи то скінченні вектори, чи то функції).

Узагальнення. Якщо простір V наділений скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, то нерівність Коші-Буняковського-Шварца є аксіомою:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ для всіх } x, y \in V.$$

Функціональний простір L^2 . У цьому просторі (функцій, інтегровних з квадратом) то нерівність Коші-Буняковського-Шварца (1.7) підтверджує, що операція інтегрування добутку функцій $\int_a^b f(x)g(x)dx$ коректно виконує роль скалярного добутку, оскільки для неї виконується співвідношення (1.12), забезпечуючи коректне визначення кута між функціями та ортогональності.

1.5. Практичне застосування нерівності Коші-Буняковського-Шварца

Приклад 1.1. Довести нерівність:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot (a + c - b) + \sqrt{b} \cdot (a + b - c) + \sqrt{c} \cdot (b + c - a) &\leq \\ &\leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a + b + c)}, \end{aligned}$$

де a, b, c – сторони деякого трикутника.

Доведення. Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського.

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \sqrt{a} \cdot (a + c - b) + \sqrt{b} \cdot (a + b - c) + \sqrt{c} \cdot (b + c - a) &= \\ = \sqrt{a \cdot (a + c - b)} \cdot \sqrt{(a + c - b)} + \sqrt{b \cdot (a + b - c)} \cdot \sqrt{(a + b - c)} + \\ + \sqrt{c \cdot (b + c - a)} \cdot \sqrt{(b + c - a)} &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{a \cdot (a + c - b) + b \cdot (a + b - c) + c \cdot (b + c - a)} \cdot \\
&\quad \cdot \sqrt{(a + c - b) + (a + b - c) + (b + c - a)} = \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a + b + c)}.
\end{aligned}$$

Приклад 1.2. Довести нерівність:

$$a \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + b \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Доведення. Оцінимо ліву частину нерівності.

Маємо:

$$\begin{aligned}
&a \cdot \sqrt{a^2 + c^2} + b \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \leq \\
&\leq \sqrt{a^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{a^2 + c^2})^2 + b^2} = a^2 + b^2 + c^2.
\end{aligned}$$

Приклад 1.3. Довести нерівність:

$$\frac{1}{\sqrt{b \cdot c}} + \frac{1}{\sqrt{c \cdot a}} + \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

де $a > 0, b > 0, c > 0$.

Доведення. Оцінимо нерівність.

Маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c} \cdot \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} &\leq \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \\
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

Приклад 1.4. Довести нерівність:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) > 5,$$

де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Доведення.

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) &= \left(1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}\right)\right)^2 \cdot \left(1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}}\right)\right)^2 \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}}}\right)^2 \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2 = (1 + \sqrt{2})^2 > 5.\end{aligned}$$

Приклад 1.5. Довести, що для довільних $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ виконується нерівність:

$$(a^{2026} + b^{2026} + c^{2026}) \cdot \left(\frac{1}{a^{2024}} + \frac{1}{b^{2024}} + \frac{1}{c^{2024}}\right) \geq (a + b + c)^2.$$

Доведення. Введемо в розгляд вектори

$$\vec{u} = (a^{1013}, b^{1013}, c^{1013}),$$

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{a^{1012}}, \frac{1}{b^{1012}}, \frac{1}{c^{1012}}\right).$$

Використовуючи нерівність для скалярного добутку у вигляді $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, отримуємо потрібне співвідношення.

Приклад 1.6. Довести, що нерівність:

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12.$$

виконується при всіх значеннях a , для яких визначена її ліва частина.

Доведення. Розглянемо вектори

$$\vec{x} = (1, 1, 1),$$

$$\vec{y} = (\sqrt{a+1}, \sqrt{2a-3}, \sqrt{50-3a}).$$

Очевидно, що ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення

$$\begin{aligned} \sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} &\leq \\ &\leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{a+1+2a-3+50-3a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12. \end{aligned}$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тільки тоді, коли $\sqrt{a+1} = \sqrt{2a-3} = \sqrt{50-3a}$. Оскільки система даних рівнянь несумісна, то нерівність строга.

Приклад 1.7. Довести нерівність:

$$abc^2 + cab^2 + bca^2 \leq a^4 + b^4 + c^4.$$

Доведення. Розглянемо вектори

$$\vec{x} = (ac, cb, ab),$$

$$\vec{y} = (bc, ab, ac).$$

Тоді

$$abc^2 + cab^2 + bca^2 = (\vec{x} \cdot \vec{y}) \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2.$$

Знову введемо в розгляд нові вектори

$$\vec{m} = (c^2, b^2, a^2),$$

$$\vec{n} = (a^2, c^2, b^2).$$

Дістаємо, що

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = (\vec{m} \cdot \vec{n}) \leq |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = a^4 + b^4 + c^4,$$

що завершує доведення. Рівність виконується тільки при умові $a = b = c$.

Приклад 1.8 (оцінка обернених величин). Довести, що для довільних додатних чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Доведення. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца вимагає знайти два вектори x та y таким чином, щоб їхній скалярний добуток, піднесений до квадрату, був пов'язаний із лівою частиною нерівності.

Розглянемо вектори. Щоб отримати добуток $a_i \cdot \frac{1}{a_i} = 1$, використаємо корінь від кожного додатка:

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots, \sqrt{a_n}),$$

$$y = \left(\sqrt{\frac{1}{a_1}}, \sqrt{\frac{1}{a_2}}, \sqrt{\frac{1}{a_3}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{a_n}}\right).$$

Визначимо елементи нерівності Коші-Буняковського-Шварца(1.2): скалярний добуток:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_i}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i}{a_i}} = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

норми (лівий бік нерівності, без кореня):

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i})^2 = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},$$

Застосуємо нерівність Коші-Буняковського-Шварца:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Підставляємо знайдені вирази:

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$$

Нерівність доведено.

Умова рівності. Рівність досягається, коли вектори x та y пропорційні:
 $x_i = t \cdot y_i$ для деякої константи t .

$$\sqrt{a_i} = t \cdot \sqrt{\frac{1}{a_i}}.$$

Піднесемо до квадрата:

$$a_i = t^2 \cdot \frac{1}{a_i} \Rightarrow a_i^2 = t^2 \Rightarrow a_i = t.$$

Це означає, що всі числа мають бути рівні між собою
($a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$).

Приклад 1.9. Довести, що для будь-яких x, y, z виконується нерівність:

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y + \cos z \leq 1.$$

Доведення. Рівність одиниці модуля вектора $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$ може бути підказкою для вибору координат векторів. Отже, нехай

$$\vec{a} = (\sin x, \cos x), \vec{b} = (\sin y \cdot \sin z, \cos y + \cos z).$$

Тоді дістаємо

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y + \cos z &= \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \\ &\leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{\sin^2 y \cdot \sin^2 z + \cos^2 y + \cos^2 z} \leq \\ &\sqrt{\sin^2 y \cdot 1 + \cos^2 y \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

Знак рівності отримуємо, наприклад $x = y = z = 0$.

Приклад 1.10. Довести, що для додатних чисел a, b виконується:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Розв'язання. Застосуємо метод перетворень:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{a^2 \cdot b^2} - \frac{a + b}{a \cdot b} &= \frac{a^3 + b^3 - a \cdot b \cdot (a + b)}{a^2 \cdot b^2} = \\ &= \frac{(a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) - a \cdot b \cdot (a + b)}{a^2 \cdot b^2} = \frac{(a + b) \cdot (a - b)^2}{a^2 \cdot b^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Приклад 1.11. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Розв'язання. Розглянемо вектори $u = (x, y)$ і $v = (1, 2)$ і застосуємо нерівність Буняковського у стандартній формі:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

$$|x + 2y| = |u \cdot v| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f(x, y) = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{5}.$$

Отже, $f_{max} = \sqrt{5}$ (при $(x, y) = t(1, 2), t > 0$),

$f_{min} = -\sqrt{5}$ (при $(x, y) = t(1, 2), t < 0$).

Приклад 1.12. Знайти максимальне і мінімальне значення функції $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, якщо виконується умова $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання. Візьмемо вектори $u = (x, y, z)$ і $v = (1, 2, 3)$. За нерівністю Буняковського:

$$|u \cdot v| = |x + 2y + 3z| \leq \|u\| \cdot \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2},$$

$$|f(x, y, z)| \leq \sqrt{14}.$$

Рівність виконується, коли вектор u пропорційний v , тобто

$$(x, y, z) = t(1, 2, 3).$$

Враховуючи умову $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, одержимо, що $f_{max} = \sqrt{14}$ при $(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$, $f_{min} = -\sqrt{14}$ при $(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$.

Приклад 1.13. Знайти найменше і найбільше значення виразу $3x + 4y$, якщо $x^2 + y^2 = 25$.

Розв’язання. Розглянемо два набори чисел (x, y) і $(3, 4)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$(3x + 4y)^2 \leq (x^2 + y^2) \cdot (3^2 + 4^2).$$

Використовуючи, що $x^2 + y^2 = 25$, маємо $(3x + 4y)^2 \leq 625$, а, отже, $-25 \leq 3x + 4y \leq 25$.

Таким чином, найбільше значення виразу $3x + 4y$ при виконанні умови $x^2 + y^2 = 25$ дорівнює 25, а найменше -25 . Максимум досягається, якщо $(x, y) = (3, 4)$, а мінімум – якщо $(x, y) = (-3, -4)$.

Приклад 1.14. Знайти найбільше значення виразу $3x - y + z$, якщо

$$x^2 + y^2 + z^2 = 44.$$

Розв’язання. Розглянемо два набори чисел (x, y, z) і $(3, -1, 1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$(3x - y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (9 + 1 + 1) = 44 \cdot 11 = 22^2,$$

тоді $|3x - y + z| \leq 22$. Отже, найбільше значення виразу $3x - y + z$ дорівнює 22, причому максимум досягається, якщо $(x, y, z) = (6, -2, 2)$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі проведено детальне дослідження нерівності Коші-Буняковського-Шварца, яка є фундаментальним інструментом у лінійній алгебрі та функціональному аналізі. Було проаналізовано класичні алгебраїчні методи доведення, зокрема метод квадратного тричлена та використання тотожності Лагранжа, що дозволило глибоко розкрити аналітичну природу цієї нерівності.

Особливу увагу в розділі приділено узагальненням нерівності, зокрема її інтегральній формі (нерівність Буняковського та Шварца) та нерівностям Гельдера і Мінковського, які розширюють сферу її застосування на простори L_p . Розглянута геометрична інтерпретація підтверджує, що нерівність є аналітичним

виразом метричних властивостей скалярного добутку, визначаючи поняття кута та ортогональності в евклідових і гільбертових просторах.

РОЗДІЛ 2. НЕРІВНІСТЬ МІЖ СЕРЕДНІМ АРИФМЕТИЧНИМ І СЕРЕДНІМ ГЕОМЕТРИЧНИМ

2.1. Означення середніх величин. Нерівності між середніми

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, відома також як нерівність Коші, є одним із фундаментальних тверджень у теорії нерівностей та математичному аналізі. Вона встановлює канонічний зв'язок між двома основними типами середніх величин.

Нехай $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (де $n \geq 2$) – набір n невід'ємних дійсних чисел.

Означення 2.1. Середнім арифметичним (A_n) чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ називається число, що дорівнює сумі цих чисел, поділеній на їхню кількість:

$$A_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Означення 2.2. Середнім геометричним (G_n) чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ називається число, що дорівнює кореню n -го степеня з добутку цих чисел:

$$G_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Теорема 2.1 (нерівність Коші). Для будь-якого набору n невід'ємних дійсних чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (де $n \geq 2$), середнє арифметичне цих чисел завжди не менше, ніж їхнє середнє геометричне:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (2.1)$$

Умова рівності. Рівність у нерівності (2.1) досягається тоді й лише тоді, коли всі числа в наборі рівні між собою, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

Базовий випадок $n = 2$ та його доведення

Найпростіший, але водночас фундаментальний випадок, на якому ґрунтуються багато доведень загальної нерівності, – це випадок для двох чисел.

Теорема 2.2. Для будь-яких двох невід'ємних чисел a і b виконується нерівність:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}. \quad (2.2)$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Доведення (за означенням нерівності). Цей метод ґрунтується на доведенні того, що різниця між лівою та правою частинами нерівності є невід'ємною. Розглянемо цю різницю:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} = \frac{a - 2\sqrt{a \cdot b} + b}{2}.$$

Перетворивши чисельник за формулою квадрата різниці, отримуємо:

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

Оскільки $a \geq 0$ та $b \geq 0$, вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ є дійсними числами, отже, і весь вираз є невід'ємним: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Оскільки різниця $\frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b}$ невід'ємна, це доводить істинність нерівності (2.2). Знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, тобто $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, звідки $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, що еквівалентно $a = b$.

Доведення (геометрична інтерпретація). Нерівність для $n = 2$ має елегантне геометричне доведення, що використовує властивості кола та прямокутних трикутників (див. рис. 2.1.).

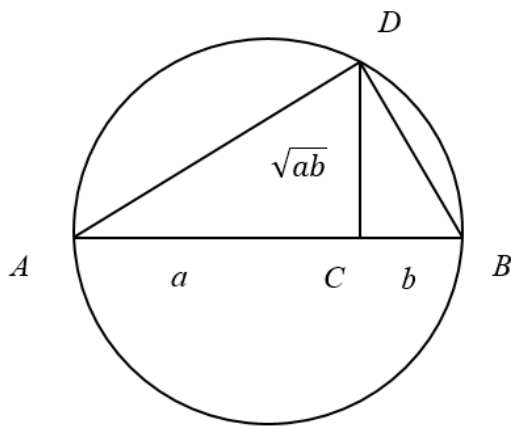


Рис. 2.1

Побудуємо відрізок AB , що складається з двох частин завдовжки a і b (діаметр $AB = a + b$). На відрізку AB як на діаметрі побудуємо півколо. Радіус R цього півкола дорівнюватиме $R = \frac{a+b}{2}$, що середнім арифметичним чисел a і b . У точці C , що з'єднує відрізки a і b , проведемо перпендикуляр CD до діаметра AB до перетину з півколом у точці D .

Трикутник ADB є прямокутним (оскільки вписаний кут $\angle ADB$ спирається на діаметр). За властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи,

$CD^2 = AC \cdot CB = a \cdot b$. Таким чином, довжина висоти $CD = \sqrt{a \cdot b}$, що є середнім геометричним чисел a і b . Очевидно, що висота CD не може перевищувати радіус R півкола.

Отже, $R \geq CD$, що є тотожно доведенню нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

Рівність $R = CD$ досягається лише в тому випадку, коли точка C (точка ділення) збігається з центром кола, тобто $a = b$.

Геометричне доведення нерівності між середніми для $n = 2$

Для двох додатних чисел a і b нерівність $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ має наочну геометричну інтерпретацію. Це доведення часто демонструє зв'язок між чотирма основними середніми: гармонічним (H), геометричним (G), арифметичним (A) та квадратичним (Q).

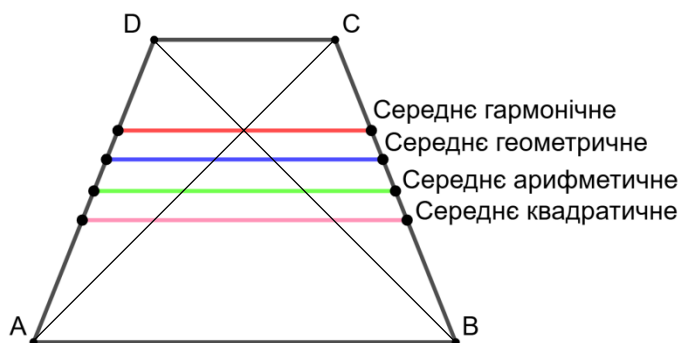
Розглянемо трапецію (див. рис. 2.2) з паралельними основами a та b :

1. середнє арифметичне (A): довжина середньої лінії трапеції дорівнює $A = \frac{a+b}{2}$;

2. середнє гармонічне (H): довжина відрізка, що проходить через точку перетину діагоналей паралельного основам, дорівнює $H = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$;

3. середнє геометричне (G): довжина відрізка, паралельного основам, що ділить трапецію на дві подібні трапеції, дорівнює $G = \sqrt{a \cdot b}$;

4. середнім квадратичним (Q): довжина відрізка, паралельного основам, що ділить трапецію на дві рівновеликі частини (частини з однаковою



площею), дорівнює $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Геометрично ці відрізки розташовані в трапеції у чіткій ієрархії, що візуально підтверджує класичний ланцюжок нерівностей:

Рис. 2.2.

$$H \leq G \leq A \leq Q,$$

$$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \quad (2.3)$$

Рівність досягається лише тоді, коли $a = b$, і трапеція перетворюється на прямокутник, де всі середні дорівнюють a .

2.2. Доведення нерівності Коші методом математичної індукції

Хоча існує понад десяток різноманітних доведень нерівності (2.1), метод, який використав сам Огюстен Коші, вирізняється своєю нетривіальністю та елегантністю. Це специфічний варіант математичної індукції, відомий як "індукція вгору і вниз" (або пряма та обернена індукція).

Доведення складається з трьох основних кроків:

Крок 1. База індукції ($n = 2$). Цей крок був доведений у теоремі 2.2:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Крок 2. Пряма індукція (індукція вгору). Доведемо, що якщо твердження (2.2) виконується для $n = k$, то воно виконується і для $n = 2k$. Нехай нерівність істинна для k невід'ємних чисел. Розглянемо $2k$ невід'ємних чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$. Згрупуємо їх:

$$\begin{aligned} A_{2k} &= \frac{x_1 + \dots + x_{2k}}{2k} = \frac{(x_1 + \dots + x_k) + (x_{k+1} + \dots + x_{2k})}{2k}, \\ A_{2k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Застосуємо до правої частини нерівність для $n = 2$ (формула (2.2)):

$$A_{2k} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \right) \left(\frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \right)}.$$

Тепер, за індуктивним припущенням (нерівність вірна для k), ми знаємо, що:

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \text{ і } \frac{x_{k+1} + \dots + x_{2k}}{k} \geq \sqrt[k]{x_{k+1} \dots x_{2k}}. \quad (2.5)$$

Підставимо (2.5) у попередній вираз:

$$A_{2k} \geq \sqrt{\left(\sqrt[k]{x_1 \dots x_k}\right)\left(\sqrt[k]{x_{k+1} \dots x_{2k}}\right)} = \sqrt[k]{x_1 \dots x_k \cdot x_{k+1} \dots x_{2k}},$$

$$A_{2k} \geq \left((x_1 \dots x_{2k})^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}} = (x_1 \dots x_{2k})^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x_1 \dots x_{2k}} = G_{2k}. \quad (2.6)$$

Таким чином, $A_{2k} \geq G_{2k}$. Повторюючи цей крок, ми доводимо нерівність для всіх n , що є степенями двійки: $n = 2, 4, 8, \dots, 2^m$.

Крок 3. Обернена індукція (індукція вниз / "спуск"). Піднесемо обидві частини до k -го степеня:

$$(A_{k-1})^k \geq x_1 \dots x_{k-1} \cdot A_{k-1}$$

Якщо $A_{k-1} > 0$, ми можемо поділити обидві частини на A_{k-1} (якщо $A_{k-1} = 0$, то всі $x_i = 0$ і нерівність тривіальна):

$$(A_{k-1})^{k-1} \geq x_1 \dots x_{k-1}$$

Добудемо корінь степеня $k - 1$ з обох частин:

$$A_{k-1} \geq \sqrt[k-1]{x_1 \dots x_{k-1}} = G_{k-1}$$

Таким чином, ми довели, що $A_{k-1} \geq G_{k-1}$.

Крок 2 (пряма індукція) доводить нерівність для всіх $n = 2^m$.

Крок 3 (обернена індукція) дозволяє "спуститися" з будь-якого $n = k$ до $n = k - 1$.

Оскільки для будь-якого натурального n завжди знайдеться степінь двійки 2^m такий, що $n < 2^m$, ми можемо, почавши з $k = 2^m$ (де нерівність доведена Кроком 2), послідовно застосовувати крок 3 (спуск) $2^m - n$ разів, поки не дійдемо до n . Це доводить нерівність для довільного n .

2.3. Узагальнена нерівність між середнім арифметичним і геометричним

Класична нерівність Коші (2.1) розглядає всі числа x_i з однаковою "вагою" (а саме, $\frac{1}{n}$). Природним і надзвичайно корисним узагальненням є введення так званої вагової або узагальненої нерівності Коші, де кожному числу x_i надається власний "ваговий коефіцієнт" p_i .

Означення 2.3. Для набору невід'ємних дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та набору додатних вагових коефіцієнтів $p_1, p_2, \dots, p_n$ (де $p_i > 0$):

1.Зваженим середнім арифметичним ($\tilde{A}_n$) називається число:

$$\tilde{A}_n = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

2.Зваженим середнім геометричним ($\tilde{G}_n$) називається число:

$$\tilde{G}_n = \left(a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}.$$

Теорема 2.3. (узагальнена нерівність Коші). Для будь-якого набору n невід'ємних дійсних чисел $a_1, \dots, a_n$ та будь-якого набору n додатних ваг $p_1, \dots, p_n$ виконується нерівність:

$$\tilde{A}_n \geq \tilde{G}_n,$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} \geq \left(a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_1 + \dots + p_n}}. \quad (2.7)$$

Умова рівності. Рівність у нерівності(2.4) досягається тоді й лише тоді, коли всі числа a_i , для яких $p_i > 0$, рівні між собою ($a_1 = a_2 = \dots = a_n$).

Класична нерівність (2.1) є очевидним частковим випадком узагальненої нерівності (2.3), якщо покласти всі ваги рівними, наприклад, $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$.

Доведення узагальненої нерівності методом індукції

Доведення узагальненої нерівності аналогічне до класичного доведення Коші (розглянутого в п. 2.2) і також використовує метод прямої та оберненої індукції.

Крок 1. База індукції ($n = 2$). Потрібно довести, що для $a_1, a_2 \geq 0$ та $p_1, p_2 > 0$:

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2} \geq \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_1 + p_2}}.$$

Це доведення можна елегантно виконати, використавши нерівність Єнсена для увігнутої (опуклої вгору) функції $f(x) = \ln x$.

Нехай $\lambda_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2}$ і $\lambda_2 = \frac{p_2}{p_1+p_2}$. Очевидно, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ та $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. За нерівністю Єнсена для увігнутої функції $\ln x$:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) &\geq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2), \\ \ln\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2}\right) &\geq \frac{p_1}{p_1 + p_2} \ln a_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \ln a_2, \\ \ln\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2}\right) &\geq \frac{1}{p_1 + p_2} (\ln a_1^{p_1} + \ln a_2^{p_2}) = \ln\left((a_1^{p_1} a_2^{p_2})^{\frac{1}{p_1+p_2}}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рівність досягається, коли $a_1 = a_2$, оскільки $\ln x$ не є лінійною функцією.

Крок 2. Пряма індукція ($k \rightarrow 2k$). Припустимо, нерівність (2.7) справедлива для $n = k$ чисел. Доведемо її для $n = 2k$ чисел $a_1, \dots, a_{2k}$ з вагами $p_1, \dots, p_{2k}$. Позначимо $P_1 = p_1 + \dots + p_k$ та $P_2 = p_{k+1} + \dots + p_{2k}$. Розглянемо зважене середнє арифметичне:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2k} &= \frac{(p_1 a_1 + \dots + p_k a_k) + (p_{k+1} a_{k+1} + \dots + p_{2k} a_{2k})}{P_1 + P_2}, \\ \tilde{A}_{2k} &= \frac{P_1}{P_1 + P_2} \left(\frac{p_1 a_1 + \dots + p_k a_k}{P_1} \right) + \frac{P_2}{P_1 + P_2} \left(\frac{p_{k+1} a_{k+1} + \dots + p_{2k} a_{2k}}{P_2} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Позначимо $X_1 = \tilde{A}_k(a_1, \dots, a_k)$ та $X_2 = \tilde{A}_k(a_{k+1}, \dots, a_{2k})$. Тоді $\tilde{A}_{2k} = \frac{P_1 X_1 + P_2 X_2}{P_1 + P_2}$. Застосовуючи базу індукції (2.4) для X_1, X_2 з вагами P_1, P_2 :

$$\tilde{A}_{2k} \geq (X_1^{P_1} X_2^{P_2})^{\frac{1}{P_1+P_2}}$$

За індуктивним припущенням для k чисел:

$$X_1 \geq \tilde{G}_k(a_1, \dots, a_k) \text{ та } X_2 \geq \tilde{G}_k(a_{k+1}, \dots, a_{2k}).$$

Підставляючи це у (2.9), отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2k} &\geq \left(\left(\tilde{G}_k(a_1 \dots k) \right)^{P_1} \left(\tilde{G}_k(a_{k+1} \dots 2k) \right)^{P_2} \right)^{\frac{1}{P_1+P_2}}, \\ \tilde{A}_{2k} &\geq \left(\left((a_1^{p_1} \dots a_k^{p_k})^{\frac{1}{P_1}} \right)^{P_1} \left((a_{k+1}^{p_{k+1}} \dots a_{2k}^{p_{2k}})^{\frac{1}{P_2}} \right)^{P_2} \right)^{\frac{1}{P_1+P_2}}, \\ \tilde{A}_{2k} &\geq (a_1^{p_1} \dots a_k^{p_k} \cdot a_{k+1}^{p_{k+1}} \dots a_{2k}^{p_{2k}})^{\frac{1}{P_1+P_2}} = \tilde{G}_{2k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким чином, крок прямої індукції доведено.

Крок 3. Обернена індукція ($k \rightarrow k - 1$). Припустимо, нерівність (2.7) справедлива для $n = k$ чисел. Доведемо її для $n = k - 1$ чисел $a_1, \dots, a_{k-1}$ з вагами $p_1, \dots, p_{k-1}$. Позначимо $P_{k-1} = p_1 + \dots + p_{k-1}$. Визначимо k -те число a_k та його вагу p_k специфічним чином:

$$a_k = \tilde{A}_{k-1} = \frac{p_1 a_1 + \dots + p_{k-1} a_{k-1}}{P_{k-1}}, p_k - (\text{наразі довільне додатне число})$$

У деяких статтях пропонується більш елегантний спуск: у нерівності для n чисел покласти $a_n = \tilde{A}_{n-1}$. Застосуємо припущення для k чисел $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = \tilde{A}_{k-1}$ з вагами $p_1, \dots, p_{k-1}, p_k$:

$$\frac{(p_1 a_1 + \dots + p_{k-1} a_{k-1}) + p_k a_k}{P_{k-1} + p_k} \geq (a_1^{p_1} \dots a_{k-1}^{p_{k-1}} \cdot a_k^{p_k})^{\frac{1}{P_{k-1} + p_k}}.$$

Підставимо $a_k = \tilde{A}_{k-1}$ та $p_1 a_1 + \dots + p_{k-1} a_{k-1} = P_{k-1} \tilde{A}_{k-1}$:

$$\frac{P_{k-1} \tilde{A}_{k-1} + p_k \tilde{A}_{k-1}}{P_{k-1} + p_k} \geq \left((a_1^{p_1} \dots a_{k-1}^{p_{k-1}}) \cdot (\tilde{A}_{k-1})^{p_k} \right)^{\frac{1}{P_{k-1} + p_k}}.$$

Ліва частина спрощується до $\tilde{A}_{k-1}$. Позначимо $\tilde{G}_{k-1}^{P_{k-1}} = a_1^{p_1} \dots a_{k-1}^{p_{k-1}}$:

$$\tilde{A}_{k-1} \geq (\tilde{G}_{k-1}^{P_{k-1}} \cdot \tilde{A}_{k-1}^{p_k})^{\frac{1}{P_{k-1} + p_k}}.$$

Піднесемо до степеня $P_{k-1} + p_k$:

$$(\tilde{A}_{k-1})^{P_{k-1} + p_k} \geq \tilde{G}_{k-1}^{P_{k-1}} \cdot \tilde{A}_{k-1}^{p_k},$$

$$(\tilde{A}_{k-1})^{P_{k-1}} \geq \tilde{G}_{k-1}^{P_{k-1}}.$$

Оскільки $P_{k-1} > 0$, добуваємо корінь степеня P_{k-1} :

$$\tilde{A}_{k-1} \geq \tilde{G}_{k-1}. \quad (2.11)$$

Нерівність (2.7) доводить крок “спуску”. Таким чином, узагальнена нерівність Коші доведена для довільного n .

2.4. Доведення нерівності на основі властивостей функцій

Методи математичного аналізу, зокрема диференціальне числення та теорія опуклих функцій, надають потужні інструменти для доведення нерівності між середнім арифметичним і геометричним.

Доведення з використанням опуклості. Нерівність Єнсена

Цей метод є одним з найбільш концептуальних, оскільки він зводить нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним до часткового випадку більш загальної властивості опуклих функцій.

Означення 2.4. Функція $f(x)$ називається опуклою вгору (увігнутою) на відрізку $[a, b]$, якщо для будь-яких $x_1, \dots, x_n$ з $[a, b]$ та будь-яких додатних ваг p_i , сума яких $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, виконується:

$$f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \geq p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n). \quad (1.12)$$

Якщо функція $f(x)$ є опуклою вниз (опуклою), то знак нерівності змінюється на протилежний ($\leq$). Нерівність (2.12) відома як нерівність Єнсена.

Достатньою умовою для того, щоб двічі диференційовна функція була опуклою вгору (увігнутою) на інтервалі, є $f''(x) \leq 0$ для всіх x з цього інтервалу.

Доведення. Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$, визначену на $(0, \infty)$. Знайдемо її другу похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Оскільки $x^2 > 0$ для $x \neq 0$, то $f''(x) = -1/x^2 < 0$ на всій області визначення, і $f(x) = \ln x$ є строго опуклою вгору (увігнутою).

Застосуємо до $f(x) = \ln x$ нерівність Єнсена (2.12) для n чисел $a_1, \dots, a_n > 0$ та рівних ваг $p_i = 1/n$:

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \dots + \frac{1}{n}\ln a_n.$$

Спростимо ліву та праву частини:

$$\ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(\ln a_1 + \dots + \ln a_n).$$

Використовуючи властивість логарифмів $\sum_{i=1}^n \ln a_i = \ln(\prod_{i=1}^n a_i)$:

$$\ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(a_1 \cdots a_n).$$

Використовуючи властивість $k \cdot \ln x = \ln(x^k)$:

$$\ln(A_n) \geq \ln\left((a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln(G_n).$$

Оскільки функція $y = \ln x$ є монотонно зростаючою, з нерівності $\ln(A_n) \geq \ln(G_n)$ випливає нерівність $A_n \geq G_n$. Рівність досягається лише за умови $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, оскільки функція $f(x) = -\ln x$ є строго опуклою.

Аналогічно, застосувавши нерівність Єнсена (2.12) до функції $f(x) = \ln x$ та ваг p_i , нормованих так, що $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, можна довести узагальнену нерівність Коші (2.1).

Доведення методами диференціального числення

Нерівність Коші також можна розглядати як задачу на знаходження умовного екстремуму (найменшого значення) функції.

Доведення методом множників Лагранжа. Зафіксуємо добуток n додатних чисел як константу C :

$$G(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n = C.$$

Задача полягає у тому, щоб знайти найменше значення (інфімум) їхньої суми (а отже, і середнього арифметичного):

$$S(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Це класична задача на умовний екстремум. Сформуємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = S(x_1, \dots, x_n) - \lambda(G(x_1, \dots, x_n) - C),$$

$$\mathcal{L} = (x_1 + \cdots + x_n) - \lambda(x_1 \dots x_n - C).$$

Необхідні умови екстремуму вимагають, щоб усі часткові похідні дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \text{ для всіх } i = 1, \dots, n.$$

Знайдемо частинну похідну по x_i :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 1 - \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 \dots x_n) = 1 - \lambda(x_1 \dots x_{i-1} \cdot 1 \cdot x_{i+1} \dots x_n),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 1 - \lambda \frac{x_1 \dots x_n}{x_i} = 1 - \lambda \frac{C}{x_i}.$$

Прирівнюючи до нуля, отримуємо $1 - \lambda \frac{C}{x_i} = 0$, або

$$x_i = \lambda C.$$

Оскільки вираз λC є константою, яка не залежить від індексу i , це означає, що у точці екстремуму всі x_i повинні бути рівними між собою:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Рівність досягається тоді, коли всі x_i рівні. Нехай $x_1 = \dots = x_n = x$. Тоді з умови зв'язку $x^n = C$, отже $x = \sqrt[n]{C}$.

Найменше значення суми $S_{\min} = n \cdot x = n \sqrt[n]{C}$. Для будь-якого іншого набору a_i , що задовольняє умову $G(a_1, \dots, a_n) = C$, сума S буде більшою за $S_{\min}$:

$$S(a_1, \dots, a_n) \geq n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

$$a_1 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Поділивши обидві частини на n , ми отримуємо $A_n \geq G_n$.

Доведення через “одне фундаментальне співвідношення”

Цей метод зводить доведення нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним до однієї з фундаментальних нерівностей аналізу, яка пов'язує експоненційну або логарифмічну функцію з лінійною.

Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. Вона є строго увігнутою (як було показано у п. 2.4). Пряма $y = x - 1$ є дотичною до графіка $f(x) = \ln x$ у точці $(1, 0)$. Через увігнутість функції, графік логарифма лежить нижче своєї дотичної в будь-якій точці.

Це нам дає фундаментальну нерівність:

$$\ln x \leq x - 1 \text{ для всіх } x > 0. \quad (2.13)$$

Рівність досягається тоді і лише тоді, коли $x = 1$ (у точці дотику).

Еквівалентно, зробивши заміну $x = e^t$, ця нерівність набуває вигляду $t \leq e^t - 1$, або ж, що більш поширено, $e^x \geq x + 1$ для всіх дійсних x .

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – набір невід'ємних чисел. Якщо одне з $a_i = 0$, то $G_n = 0$, а $A_n \geq 0$, тому нерівність $A_n \geq G_n$ тривіально виконується. Розглянемо випадок, коли $a_i > 0$. Позначимо їхнє середнє арифметичне

$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. Очевидно, $A_n \geq 0$.

Нормалізуємо наші числа, поділивши кожне з них на A_n . Розглянемо новий набір чисел:

$$x_i = \frac{a_i}{A_n} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Знайдемо середнє арифметичне цих нових чисел x_i :

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &= \frac{\frac{a_1}{A_n} + \frac{a_2}{A_n} + \dots + \frac{a_n}{A_n}}{n} = \\ &= \frac{1}{A_n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) = \frac{1}{A_n} \cdot A_n = 1. \end{aligned}$$

Тепер застосуємо фундаментальну нерівність (2.13) до кожного з чисел x_i :

$$\begin{aligned} \ln x_1 &\leq x_1 - 1, \\ \ln x_2 &\leq x_2 - 1, \\ &\dots \\ \ln x_n &\leq x_n - 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Додамо всі n нерівностей:

$$\begin{aligned} \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n &\leq (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_n - 1), \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i &\leq \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Використовуючи властивості логарифма, ліва частина дорівнює:

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln(x_1 x_2 \dots x_n).$$

Права частина, згідно (2.16), дорівнює:

$$\sum_{i=1}^n x_i - n = n - n = 0.$$

Підставляючи це в (2.15), отримуємо:

$$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) \leq 0. \quad (2.17)$$

Застосуємо експоненційну функцію (яка є монотонно зростаючою) до обох частин:

$$e^{\ln(x_1 x_2 \dots x_n)} \leq e^0,$$

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq 1.$$

Тепер повернемося до початкових змінних a_i :

$$\left(\frac{a_1}{A_n}\right) \left(\frac{a_2}{A_n}\right) \dots \left(\frac{a_n}{A_n}\right) \leq 1,$$

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{A_n^n} \leq 1, \quad (2.18)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \leq A_n. \quad (2.19)$$

Добудемо корінь n -го степеня обох частин:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq A_n,$$

$$G_n \leq A_n.$$

Що й треба було довести.

Умова рівності. Рівність у цьому доведенні досягається тоді і лише тоді, коли рівність досягається у кожній із n нерівностей $\ln x_i \leq x_i - 1$. Це можливо, лише якщо $x_i = 1$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. Повертаючись до змінних a_i : $x_i = 1 \Rightarrow \frac{a_i}{A_n} = 1 \Rightarrow a_i = A_n$. Якщо кожне число a_i дорівнює їхньому середньому арифметичному, це означає, що всі числа рівні між собою: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2.5. Опуклість як основа узагальненої нерівності для середніх

Як було показано у п. 2.4.1, властивість опуклості (увігнутості) функції $f(x) = \ln x$ дозволяє елегантно довести класичну нерівність між середнім арифметичним і геометричним. Властивість опуклості є фундаментальною для цілої ієрархії нерівностей середніх, відомих як нерівність середніх степенів (L_p -нерівність).

Означення 2.5. Для набору n додатних чисел $a_1, \dots, a_n$ та дійсного числа $p \neq 0$, середнім степеневим порядку p називається величина:

$$M_p(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зв'язок з нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним:

- при $p = 1, M_1 = A_n$ (середнє арифметичне),
- при $p \rightarrow 0, M_p \rightarrow G_n$ (середнє геометричне).

Теорема 2.5 (нерівність середніх степенів). Якщо $p > q$, то для будь-якого набору додатних чисел $a_1, \dots, a_n$ виконується нерівність:

$$M_p(a_1, \dots, a_n) \geq M_q(a_1, \dots, a_n).$$

Умова рівності. Рівність досягається лише тоді, коли $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Частковим випадком цієї нерівності є нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним: $M_1 \geq M_0$ (тобто $A_n \geq G_n$), а також нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним: $M_2 \geq M_1$.

Нерівність Юнга як узагальнення нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох доданків

Нерівність Юнга для добутоків є важливим інструментом, що використовується для оцінки добутку двох чисел через їхні степені. Вона ґрунтується на ідеї опуклості та має прямий зв'язок із властивістю логарифмічної функції, що ми вже розглядали.

Теорема 2.6 (нерівність Юнга). Нехай a та b – довільні невід'ємні дійсні числа, а p та q – додатні дійсні числа, які задовольняють умову спряженості:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді виконується нерівність:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2.20)$$

Умова рівності. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a^p = b^q$.

Зв'язок із нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним

Нерівність між середнім арифметичним і геометричним для двох чисел:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ або } ab \leq \frac{a^2+b^2}{4},$$

є частковий випадком нерівності Юнга. Це можна побачити, якщо покласти $p = q = 2$. Умова спряженості: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Підставляючи $p = 2, q = 2$ у (2.20):

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}. \quad (2.21)$$

Нерівність (2.21) є еквівалентною класичній нерівності між середнім арифметичним і геометричним двох чисел, оскільки вона випливає з $(a-b)^2 \geq 0$, або $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, звідки $2ab \leq a^2 + b^2$.

Таким чином, нерівність Юнга є узагальненою зваженою формою нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох доданків, де степені p та q визначають вагу вкладу кожного числа.

Доведення нерівності Юнга

Доведення ґрунтується на використанні інтегрального числення або властивості увігнутості функції $\ln x$.

Доведення (геометричний метод/через інтеграл). Нехай $f(x)$ – неперервна, строго зростаюча функція на $[0, \infty)$ з $f(0) = 0$. Нехай $g(y)$ – її обернена функція. Тоді для будь-яких $a \geq 0$ та $b \geq 0$ виконується нерівність:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy. \quad (2.22)$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^{p-1}$, де $p > 1$. Обернена функція $g(y)$ задовольняє $y = x^{p-1}$, звідки $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. За умовою спряженості $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, звідки $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Тоді $\frac{1}{p-1} = \frac{p}{q}$. Отже, обернена функція: $g(y) = y^{\frac{p}{q}}$.

Знайдемо інтеграли для цих функцій:

перший інтеграл:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^{p-1} dx = \left. \frac{x^p}{p} \right|_0^a = \frac{a^p}{p}.$$

другий інтеграл: тут потрібно, щоб $g(y) = y^{\frac{p}{q}}$. Знайдемо степінь $g(y)$:

$$y^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{q}{1-p}} = y^{q(1-\frac{1}{p})} = y^{q \cdot \frac{1}{q}} = y^{q-1}.$$

Отже, $g(y) = y^{q-1}$.

$$\int_0^b g(y) dy = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{y^q}{q} \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Підставляючи отримані значення в (2.20), отримуємо:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Це доводить нерівність Юнга.

Умова рівності досягається, коли площа прямокутника ab дорівнює сумі площ під кривими (тобто, коли $b = f(a)$), що означає $b = a^{p-1}$, або $b^q = (a^{p-1})^q = a^{pq-q}$. Оскільки $pq - q = p(q - 1) = p \frac{p-1}{p-1} = p$, то $b^q = a^p$.

Доведення нерівності для середніх степеневих через опуклість

Доведення нерівності (2.23) базується на властивості опуклості функції $f(t) = t^k$ та нерівності Єнсена (2.12).

Доведення. Нехай нам необхідно довести нерівність $M_p \geq M_q$, де $p > q$. Без втрати загальності, розглянемо випадок, коли $q = 1$ (середнє арифметичне) і $p = k > 1$ (довільний степінь). Тобто доводимо $M_k \geq M_1$:

$$\left(\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}. \quad (2.23)$$

Піднесемо обидві частини до степеня k і перенесемо n у праву частину:

$$\frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^k$$

Для доведення (2.23) скористаємося нерівністю Єнсена (2.12), застосованою до функції $f(x) = x^k$ та рівних ваг $p_i = 1/n$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^k$ на інтервалі $x > 0$. Знайдемо її другу похідну: $f'(x) = kx^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$. Оскільки ми розглядаємо $k > 1$ (випадок $M_p \geq M_1$), маємо $k > 0$ та $k-1 > 0$. Отже, $f''(x) > 0$.

Якщо $f''(x) > 0$, функція $f(x) = x^k$ є строго опуклою вниз (опуклою).

Застосуємо нерівність Єнсена для опуклої вниз функції f :

$$f(p_1x_1 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + \dots + p_nf(x_n).$$

Підставимо $f(x) = x^k$, $x_i = a_i$ та $p_i = 1/n$:

$$\left(\frac{1}{n}a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right)^k \leq \frac{1}{n}a_1^k + \dots + \frac{1}{n}a_n^k,$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^k \leq \frac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n}.$$

Ця нерівність є тотожною (2.12), що доводить $M_k \geq M_1$.

Для доведення загального випадку $M_p \geq M_q$ ($p > q$): Позначимо $k = p/q$.

Оскільки $p > q > 0$, то $k > 1$. Зробимо заміну змінних: нехай $b_i = a_i^q$. Тоді M_p та M_q можна переписати через b_i :

$$M_p = \left(\frac{(b_1)^{p/q} + \dots + (b_n)^{p/q}}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{b_1^k + \dots + b_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$M_q = \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Використовуючи доведену нерівність $M_k(b_i) \geq M_1(b_i)$ для чисел b_i :

$$\left(\frac{b_1^k + \dots + b_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

Піднісши обидві частини до степеня k і вивівши звідси нерівність, отримуємо $M_p \geq M_q$.

2.6. Огляд альтернативних методів доведення

Окрім класичних методів (індукція Коші, нерівність Єнсена, множники Лагранжа), існує низка інших, часто більш елегантних або нетривіальних, підходів до доведення нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним. Вони демонструють глибокі зв'язки цієї нерівності з різними галузями аналізу.

2.6.1. Доведення Бора

Означення 2.6. Нехай $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ і $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – два формальні степеневі ряди з невід’ємними коефіцієнтами ($a_k \geq 0, b_k \geq 0$). Будемо говорити, що ряд $Q(z)$ мажорує ряд $P(z)$, і записувати це як $P(z) \leq Q(z)$, якщо $a_k \leq b_k$ для всіх $k \geq 0$.

З цього означення випливає важлива властивість: якщо $P_1(z) \leq Q_1(z)$ та $P_2(z) \leq Q_2(z)$, то їхній добуток також задовольняє відношення мажоризації: $P_1(z)P_2(z) \leq Q_1(z)Q_2(z)$.

Доведення. Розпочнемо з базової мажоризації для експоненти, яка випливає з її розкладу в ряд Тейлора:

$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x.$$

Оскільки всі коефіцієнти невід’ємні, ми можемо стверджувати, що

$$1 + x \leq e^x. \quad (2.24)$$

Для n додатних чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ та формальної змінної z , застосовуємо цю мажоризацію для кожного $x_i z$:

$$1 + x_i z \leq e^{x_i z} \text{ для кожного } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Використовуючи мультиплікативну властивість мажоризації, перемножимо всі n нерівностей:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i z) \leq \prod_{i=1}^n e^{x_i z}. \quad (2.25)$$

Спростимо праву частину:

$$\prod_{i=1}^n e^{x_i z} = e^{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)z} = e^{(\sum_{i=1}^n x_i)z}.$$

Таким чином, ми отримуємо ключове відношення мажоризації:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i z) \leq e^{(\sum_{i=1}^n x_i)z}.$$

Тепер розкриваємо ліву і праву частину у степеневі ряди по z . Ліва частина:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i z) = (1 + x_1 z) \dots (1 + x_n z) = 1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) z + \dots + (x_1 x_2 x_3 \dots x_n) z^n.$$

Права частина:

$$e^{(\sum_{i=1}^n x_i)z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((\sum_{i=1}^n x_i)z)^k}{k!} = 1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) z + \dots + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{n!} z^n + \dots$$

Згідно з означенням мажоризації, коефіцієнт при z^n у лівій частині не може перевищувати коефіцієнт z^n у правій частині.

- коефіцієнт при z^n зліва: $a_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$,
- коефіцієнт при z^n справа: $b_n = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{n!}$.

Звідси отримуємо нерівність:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{n!}. \quad (2.26)$$

Перепишемо (2.26), використовуючи стандартні позначення G_n та A_n :

$$G_n^n \leq \frac{(nA_n)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} A_n^n. \quad (2.27)$$

Хоча нерівність (2.27) (відома як нерівність Маклорена) є сильнішою, ніж нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, вона не доводить її безпосередньо. Однак, як зазначається у джерелі, теорема 1 (нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним) впливає звідси при застосуванні асимптотичної формули Стірлінга для $n!$ (де $\sqrt[n]{n!} \sim n/e$).

Характерною особливістю цього доведення є те, що воно, на відміну від алгебраїчних методів, не дозволяє легко встановити умови, при яких досягається рівність.

2.6.2. Доведення методом Гурвіца

Метод, запропонований німецьким математиком Адольфом Гурвіцем, є чисто алгебраїчним і ґрунтується на послідовному зменшенні добутку чисел $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ при збереженні їхньої суми $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$. Це доведення

наочно демонструє, що рівність $A_n = G_n$ досягається тоді і лише тоді, коли всі числа рівні.

Ідея доведення. Початкове припущення: сума $S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ є фіксованою константою. Ми доведемо, що серед чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є принаймні два нерівні, ми можемо замінити їх на два нові числа, зберігаючи суму S незмінною, але збільшуючи добуток $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$. Тоді максимальне значення добутку буде досягнуто, коли всі числа стануть рівними.

Крок 1. Заміна нерівних чисел. Припустимо, що серед n чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є два нерівні числа, наприклад x_1 та x_2 для яких $x_1 < x_2$. Розглянемо їхнє середнє арифметичне: $A = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Введемо два нові числа:

$$x'_1 = A = \frac{x_1 + x_2}{2}, x'_2 = A = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Крок 2. Збереження суми. Сума нових чисел дорівнює сумі старих:

$$x'_1 + x'_2 = A + A = 2A = x_1 + x_2.$$

Отже, сума всіх чисел не змінилася: $\sum_{i=1}^n x'_i = \sum_{i=1}^n x_i = S$.

Крок 3. Збільшення добутку. Порівняємо добуток старих чисел $x_1 x_2$ та нових $x'_1 x'_2$:

$$x'_1 x'_2 = A^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2, \\ x_1 x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

З класичної нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним для двох доданків (або нерівності $(x_1 + x_2)^2 > 4x_1 x_2$, яка випливає з $(x_1 - x_2)^2 > 0$):

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 > x_1 x_2.$$

Оскільки $x_1 \neq x_2$, маємо строгу нерівність. Таким чином, новий добуток $x'_1 x'_2$ строго більший за початковий $x_1 x_2$.

Крок 4. Завершення доведення. Процес заміни двох нерівних чисел їхнім середнім арифметичним можна повторювати до тих пір, поки всі числа не стануть рівними. При кожній заміні сума залишається незмінною, а добуток

строого збільшується. Оскільки добуток має верхню межу (що впливає з фіксованої суми), максимальне значення добутку може бути досягнуте лише тоді, коли процес заміни зупиниться, тобто коли:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = A.$$

У цьому випадку добуток досягає свого максимуму:

$$G_{max}^n = A^n.$$

Для будь-якого іншого набору чисел (де $G_n < A_n$), добуток буде меншим, ніж максимальний:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 \dots x_n &< A^n, \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} &< A. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тобто $G_n < A_n$. Це доводить нерівність.

2.6.3. Доведення методом Ейлера

Цей метод також є алгебраїчним, але ґрунтується на зведенні нерівності до суми квадратів.

Ідея доведення. Для n чисел $a_i > 0$ потрібно довести $A_n \geq G_n$, що еквівалентно доведенню:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}. \quad (2.29)$$

Розглянемо випадок $n = 3$. Потрібно довести:

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}.$$

Введемо заміну: $a = x^3, b = y^3, c = z^3$. Нерівність перетворюється на:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Ліва частина цієї нерівності є відомим алгебраїчним співвідношенням, яке розкладається так:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz). \quad (2.30)$$

Оскільки $a, b, c > 0$, то $x, y, z > 0$, звідки $(x + y + z) > 0$. То знак нерівності (2.6.2.3) залежить від другого множника:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz.$$

Цей вираз можна перетворити до суми квадратів:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz =$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2)],$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2].$$

Оскільки сума квадратів завжди невід'ємна, $\frac{1}{2}[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] \geq 0$. Звідси, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$, що доводить нерівність $A_3 \geq G_3$.

Умова рівності. Рівність досягається, коли сума квадратів дорівнює нулю, тобто коли $x = y = z$. Це означає $a = b = c$.

2.6.4. Доведення методом Якобстала

Метод, запропонований німецьким математиком Еріком Якобсталем, є одним із найкоротших і використовує тотожність для двох чисел.

Доведення. Нерівність $A_n \geq G_n$ еквівалентна:

$$\ln(A_n) \geq \ln(G_n).$$

Для двох невід'ємних чисел a і b відома тотожність:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

З нерівності $A_n \geq G_n$ для n чисел, що ми доводимо, випливає:

$$A_n - G_n \geq 0. \quad (2.31)$$

Якобсталь запропонував ітеративний метод, який є варіацією методу Гурвіца, але заснований на логарифмічних перетвореннях. Розглянемо набір чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Якщо $a_1 \neq a_2$, замінимо їх на $a'_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ та $a'_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Оскільки $\ln x$ є увігнутою функцією:

$$\ln a'_1 + \ln a'_2 = 2 \ln \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) > \ln a_1 + \ln a_2.$$

Тобто логарифм добутку збільшується: $\ln(G'_n) > \ln(G_n)$, а $\ln(A_n)$ залишається незмінним. Оскільки ми знаємо, що $\ln(A_n) \geq \ln(G_n)$ для $n = 2$ (це є основою доведення), і що процес ітераційного усереднення приводить до $a_i \rightarrow A_n$, в кінцевому результаті ми отримуємо, що $\ln(A_n) \geq \ln(G_n)$. Метод Якобстала, по суті, є чисельною реалізацією того факту, що $\ln x$ увігнута.

2.7. Практичне застосування нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним

Нерівність між середнім арифметичним і геометричним є потужним інструментом не лише для доведення абстрактних нерівностей, але й для розв'язання широкого класу прикладних задач, зокрема задач на знаходження екстремумів – найбільших та найменших значень функцій і виразів.

З умови рівності в нерівності Коші ($A_n = G_n \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$) випливають два фундаментальні наслідки, що застосовуються в задачах оптимізації.

Теорема 2.7 (про сталий добуток (мінімум суми)). Якщо добуток додатних змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є сталою величиною ($P = \text{const}$), то їхня сума $S = \sum_{i=1}^n x_i$ приймає найменше значення тоді, коли всі змінні рівні між собою: $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \sqrt[n]{P}$.

Приклад 2.1. Знайти найменше значення виразу $x + \frac{1}{x}$ для $x > 0$.

Розв'язання. Оскільки добуток $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (константа), то мінімум досягається при $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$, і дорівнює $1 + 1 = 2$.

Теорема 2.8 (про сталу суму (максимум добутку)). Якщо сума n додатних змінних є сталою величиною ($S = \text{const}$), то їхній добуток $P = \prod x_i$ приймає найбільше значення тоді, коли всі змінні рівні між собою:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = S/n.$$

Геометричний зміст. Серед усіх прямокутників з фіксованим перетином найбільшу площу має квадрат.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним дозволяє розв'язувати нелінійні рівняння, оцінюючи ліву та праву частини (метод мінімаксу).

Приклад 2.2. Довести, що при $a_i > 0, i = 2, 3, \dots, n$ виконується нерівність

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Доведення. Використаємо нерівність $A_n \geq G_n$ для доданків першого та другого множника. Дістаємо дві нерівності:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Перемноживши одержані співвідношення, отримуємо потрібний результат.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння $x^{10} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = 8$ для $x > 0$.

Розв'язання. Запишемо ліву частину як суму 8 доданків, щоб використати нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним і скоротити степені:

$$x^{10} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = x^{10} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}.$$

Застосуємо нерівність Коші для 8 чисел:

$$\begin{aligned} \frac{x^{10} + 3 \cdot x^{-2} + 4 \cdot x^{-1}}{8} &\geq \sqrt[8]{x^{10} \cdot (x^{-2})^3 \cdot (x^{-1})^4} = \\ &= \sqrt[8]{x^{10} \cdot x^{-6} \cdot x^{-4}} = \sqrt[8]{x^0} = 1. \end{aligned}$$

Отже, сума $x^{10} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} \geq 8$. Рівність можлива тоді, коли всі доданки рівні: $x^{10} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$. Звідси єдиний розв'язок $x = 1$.

Нерівність Коші ефективно використовується для знаходження оптимальних геометричних конфігурацій без використання похідної.

Приклад 2.4 (Задача Дідони). Знайти прямокутник даного периметра P , який має найбільшу площу S .

Розв'язання. Нехай сторони a, b . Периметр $2(a + b) = P \Rightarrow a + b = \frac{P}{2}$. Площа $S = a \cdot b$. Згідно з теоремою про сталу суму, добуток $a \cdot b$ максимальний, коли $a = b$. Отже, шуканий прямокутник – квадрат.

Приклад 2.5. Довести, що для будь-якого дійсного виконується нерівність:

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Доведення. Застосуємо нерівність між середнім арифметичним і геометричним для двох додатних чисел $a = 2^{\sin x}$ та $b = 2^{\cos x}$:

$$\frac{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = \sqrt{2^{\sin x + \cos x}} = 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2}}.$$

Вираз у показнику степеня перетворимо за допомогою допоміжного кута:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Мінімальне значення синуса дорівнює -1 . Отже, мінімальне значення показника степеня: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Підставляючи це в нерівність:

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Що й треба було довести.

Приклад 2.6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}}{y+2} + \frac{\sqrt{y+2}}{2x-1} = 2, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо перше рівняння. Ліва частина є сумою двох взаємно обернених додатних чисел (виду $t + \frac{1}{t}$). За наслідком з нерівності Коші ($A_2 \geq G_2$), сума $t + \frac{1}{t} \geq 2$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли $t = 1$. Отже:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{y+2} = 1 \Rightarrow 2x-1 = y+2 \Rightarrow 2x-y = 3.$$

Тепер маємо просту лінійну систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

Додавши рівняння, отримаємо $3x = 15 \Rightarrow x = 5$. Тоді $y = 7$.

Приклад 2.7. Довести нерівність:

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n < \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}.$$

Доведення. Застосуємо узагальнену (вагову) нерівність Коші для чисел $1, 2, 3, \dots, n$, де число k береться з вагою (зустрічається) k разів. Загальна кількість чисел (сума ваг): $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Середнє геометричне цих чисел:

$$G = \sqrt[n \cdot (n+1)/2]{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n}.$$

Середнє арифметичне:

$$A = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n}{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} = \frac{\sum_{i=1}^n k^2}{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}.$$

Відомо, що $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2 \cdot n+1)}{6}$. Підставимо це в A .

$$A = \frac{\frac{n \cdot (n+1)(2 \cdot n+1)}{6}}{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} = \frac{2 \cdot n+1}{3}.$$

За нерівністю $G < A$ (строга нерівність, бо числа не рівні), піднісши до степеня $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, отримуємо подібний результат.

Приклад 2.8. Довести нерівність

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \geq 2$$

Доведення. Користуючись теоремою 2.1, отримаємо

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Піднесемо обидві частини до n -го степеня

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Висновки до розділу 2

Другий розділ присвячено всебічному аналізу нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним (нерівність Коші), яка відіграє ключову роль у теорії оптимізації та математичному аналізі. Систематизовано різноманітні підходи до доведення: від класичної індукції Коші та геометричних методів до застосування апарату диференціального числення і теорії опуклих функцій (нерівність Єнсена).

Важливим результатом розділу є дослідження вагової (узагальненої) форми нерівності та встановлення її зв'язку з нерівністю Юнга і середніми степеневими. Практична частина розділу демонструє ефективність застосування цієї нерівності для розв'язання задач на умовний екстремум, доведення тригонометричних оцінок та знаходження оптимальних геометричних конфігурацій без використання похідної.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено комплексне дослідження двох фундаментальних нерівностей математичного аналізу – нерівності Коші-Буняковського-Шварца та нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним. У ході роботи було вирішено низку завдань, що дозволило сформулювати цілісне уявлення про місце та роль цих співвідношень у сучасній математиці.

По-перше, аналіз теоретичних основ нерівності Коші-Буняковського-Шварца показав її універсальність: вона є сполучною ланкою між алгеброю, геометрією та аналізом. Доведено, що ця нерівність є не лише інструментом для оцінки сум та інтегралів, але й необхідною умовою існування скалярного добутку в векторних просторах. Розгляд її узагальнень, таких як нерівності Гельдера та Мінковського, продемонстрував, як базові принципи поширюються на більш складні функціональні простори.

По-друге, дослідження нерівності між середнім арифметичним і геометричним виявило багатство методів її обґрунтування. Порівняння різних доведень – індуктивних, геометричних та аналітичних (через опуклість функцій) – дозволяє глибше зрозуміти природу середніх величин. Встановлено, що ця нерівність є потужним методом розв’язання екстремальних задач, дозволяючи знаходити мінімуми та максимуми функцій значно швидше, ніж класичні методи диференціального числення.

Узагальнюючи результати роботи, можна стверджувати, що досліджені нерівності є не просто ізольованими фактами, а системоутворюючими елементами математичного апарату. Вони взаємопов’язані через теорію опуклих функцій та граничні переходи, а володіння методами їх застосування є необхідною складовою математичної культури для розв’язання складних задач у фізиці, економіці та теорії ймовірностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анікушин А. В. та ін. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 / А. В. Анікушина, А. Є. Данилова та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2013. 416 с.
2. Анікушин А. В. та ін. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013/14 навч. рік : навч. – метод. посіб. / А. В. Анікушин, О. О. Клурман, А. В. Лисакевич та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2015. 465 с.
3. Анікушин А. В. та ін. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 / А. В. Анікушин, О. О. Клурман та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія, 2016. 464 с.
4. Барвінок Р. Л. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. Черкаси, 2013. 59 с.
5. Богославська А. Л. Застосування опуклості функції до доведення нерівностей Коші. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали ХІХ міжнародної науково-практичної конференції студентів і аспірантів, 13–14 травня 2025 року. Луцьк, 2025. С. 293-295.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Збірник задач. Київ : Либідь, 1994. 368 с.
7. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. Київ : Либідь, 1993. 416 с.
8. Лейфура В. М. та ін. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
9. Любич Ю. І., Ліньова Т. М., Назаров Л. А. Вступ до функціонального аналізу : підручник. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. 320 с.
10. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математичний аналіз в прикладах і задачах. 2025. 1636 с. Режим доступу: <https://surl.lu/pxopr1>
11. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ, 2014. 100 с.

12. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики : посібник для загальноосвітніх навчальних закладів. Чернівці, 2004. 360 с.
13. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. 2025. 2390 с. Режим доступу: <https://surl.li/ehlmhb>
14. Ясінський, В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. 208 с.
15. Beckenbach, E., Bellman, R. An Introduction to Inequalities. New York: Random House, 1961. 133 p.
16. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G. Inequalities. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 324 p.
17. Kazarinoff N. D. Analytic Inequalities. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1961.
18. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1976.
19. Steele, J. M. The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Washington : Mathematical Association of America, 2004. 312 p.

Анотація

Богославська А. Л. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца та нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 53 с.

У роботі проведено комплексне дослідження двох фундаментальних нерівностей математичного аналізу: нерівності Коші-Буняковського-Шварца та нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним. Систематизовано класичні та альтернативні методи їх доведення. Розглянуто важливі узагальнення, показано практичне застосування досліджених нерівностей для розв'язання задач на умовний екстремум та оцінки тригонометричних виразів.

Магістерська робота містить 53 сторінки, список використаної літератури налічує 19 джерел.

Ключові слова: нерівність Коші-Буняковського-Шварца, середнє арифметичне, середнє геометричне, нерівність Єнсена, математична індукція, умовний екстремум, опуклі функції.

Abstract

Bogoslavska A. Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality and Inequality between Arithmetic and Geometric Means. Master's Thesis. Lutsk, 2025. 53 p.

This thesis conducts a comprehensive study of two fundamental inequalities in mathematical analysis: the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality and the inequality between the arithmetic and geometric means. Classical and alternative proof methods are systematized. Important generalizations are examined. The thesis demonstrates the practical application of these inequalities in solving conditional extremum problems and estimating trigonometric expressions.

The master's thesis comprises 53 pages and includes a reference list of 19 sources.

Keywords: Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, arithmetic mean, geometric mean, Jensen's inequality, mathematical induction, conditional extremum, convex functions.