

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

МАТВІЙЧУК НАЗАРІЙ ІГОРОВИЧ

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ
ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ**

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

КАЛЬЧУК ІННА ВОЛОДИМИРІВНА,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

Засідання кафедри теорії функцій та

методики навчання математики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

доцент Гембарська С. Б. _____

Луцьк-2025

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Основні поняття степеневих рядів і диференціальних рівнянь та систем	6
1.1. Поняття степеневого ряду. Ряди Тейлора і Маклорена	6
1.2. Диференціальні рівняння. Основні поняття та означення.....	14
1.3. Системи диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення...	20
РОЗДІЛ 2. Застосування степеневих рядів в наближеному розв’язанні диференціальних рівнянь та систем методом послідовних диференціювань	23
2.1. Інтегрування диференціальних рівнянь методом послідовних диференціювань.....	23
2.2. Інтегрування диференціальних систем методом послідовних диференціювань.....	27
РОЗДІЛ 3. Застосування степеневих рядів в наближеному розв’язанні диференціальних рівнянь та систем методом невизначених коефіцієнтів	36
3.1. Розв’язання диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.....	36
3.2. Розв’язання диференціальних систем методом невизначених коефіцієнтів.....	41
ВИСНОВКИ.....	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	53

ВСТУП

Ряди досить широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь. Найпростіший ряд – суму членів нескінченної геометричної прогресії вперше ввели вчені Стародавньої Греції, зокрема Архімед застосував такий ряд до обчислення площі параболічного сегмента. Систематично рядами почали користуватись, починаючи з 17 ст., проте теорія рядів була створена лише в 19 ст. на основі поняття границі в роботах К. Гаусса, О. Коші та багатьох інших учених.

Завдяки своїм властивостям і відносній простоті степеневі ряди знайшли широке застосування не тільки практично в усіх розділах математики і фізики, а й в багатьох галузях техніки і природознавства. Вони розглядаються як границя многочленів при прямуванні їх степенів до нескінченності і володіють майже всіма властивостями многочленів.

Одним із потужних інструментів наближеного аналізу є степеневі ряди, зокрема ряди Тейлора та Маклорена, які дозволяють зводити задачу до обчислення коефіцієнтів рекурентних співвідношень. Використання цього підходу забезпечує можливість побудови часткового розв'язку з довільною точністю та простеження поведінки функції поблизу початкової точки.

Зараз широке впровадження в науку обчислювальних методів, пов'язане з появою обчислювальних засобів великої потужності, вимагає переоцінки значення різних розділів математики і, зокрема, розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь. В даний час зросло значення методів якісного дослідження рішень диференціальних рівнянь, а також методів наближеного знаходження рішень.

Розв'язки багатьох диференціальних рівнянь та систем не виражаються в

елементарних функціях або квадратурах. У цих випадках користуються наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь та систем. Одним з таких методів є представлення розв'язку рівняння у вигляді степеневих рядів.

Цим обумовлена **актуальність обраної теми дослідження.**

Мета дослідження.

Метою даної магістерської роботи є дослідження застосування степеневих рядів при розв'язуванні диференціальних рівнянь та їх систем, а також аналіз їх можливостей як методу розв'язування.

У відповідності з поставленою метою можна сформулювати основні **завдання дослідження:**

1. Розглянути основні поняття степеневих рядів, ряди Тейлора і Маклорена;
2. Проаналізувати метод інтегрування коефіцієнтів диференціальних рівнянь та систем за допомогою степеневих рядів;
3. Проаналізувати метод невизначених коефіцієнтів диференціальних рівнянь та систем за допомогою степеневих рядів;
4. Застосувати дані методи для розв'язання різних завдань.

Об'єктом дослідження є розв'язування диференціальних рівнянь та систем з допомогою степеневих рядів.

Предметом дослідження методи застосування степеневих рядів, зокрема рядів Тейлора та Маклорена, для відшукування розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем.

Структура і обсяг роботи: вона складається зі вступу, трьох основних розділів із підрозділами, висновків, списку використаних джерел.

Основна частина дослідження складається з трьох розділів. У першому розділі розкриваються поняття степеневих рядів, ряди Тейлора і Маклорена; основні поняття і означення диференціальних рівнянь; основні поняття та

означення систем диференціальних рівнянь. У другому розділі розглянуто застосування степеневих рядів в розв'язуванні диференціальних рівнянь та систем методом послідовних диференціювань. У третьому розділі застосування степеневих рядів в розв'язуванні диференціальних рівнянь та систем методом невизначених коефіцієнтів.

Для дослідження теоретичної частини дослідження використовувалися матеріали навчальної літератури, зазначені у списку використаної літератури.

Апробація дослідження: результати роботи були представлені у формі тез на XIV Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих науковців «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (14-15 травня 2025 року) на тему «Розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем за допомогою степеневих рядів». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2025. – С. 327–329.

РОЗДІЛ 1. Основні поняття степеневих рядів і диференціальних рівнянь та систем

1.1. Поняття степеневого ряду. Ряди Тейлора і Маклорена

Степеневі ряди є так званим частинним випадком функціональних рядів. Вони відіграють важливу роль не тільки у теоретичних дослідженнях (наприклад, у розв'язанні диференціальних рівнянь), але й також у наближених обчисленнях.

Степеневі ряди широко використовуються у дійсному і комплексному аналізі, як ряди Тейлора функцій, а також в комбінаториці, теорії ймовірностей та ін.

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_n^{\infty} a_nx^n \quad (1.1)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 – дійсне число, називають функціональний ряд, членами якого є степеневі функції з цілим невід'ємним показником [22]. Спрощений запис такого ряду має вигляд:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_1(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_n^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (1.2)$$

де $x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – задані дійсні числа. Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – називаються **коефіцієнтами**, число a_0 – **вільним членом**, а x_0 – **центром степеневого ряду**. Член з коефіцієнтом a_n вважається **n -м членом ряду**, вільний член – **«нульовим» членом ряду**.

При $x_0 = 0$ ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_1 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1.3)$$

Область збіжності степеневому ряду на дійсній осі задається **теоремою**

Абеля: нехай степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається в точці $x = x_0 \neq 0$, тоді він

збігається в довільній точці x , що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$.

Якщо ряд розбігається в деякій точці x_1 , то він розбігається і у всіх точках x , таких, що $|x| > |x_1|$.

Ця теорема характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневому ряду [1].

Доведення. Оскільки за умовою (1.1) ряд збіжний в точці x_0 , то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, отже, $a_n x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M , що

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, маємо

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

тобто модуль кожного члена степеневому ряду (1.1) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ розбіжний при $x = x_1$. Тоді ряд (1.1) розбіжним і

для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби припустили, що

він збіжний в якій-небудь точці x_1 , бо $|x_1| < |x|$. А це суперечить тому, що в точці x_1 ряд розбіжний. ■

Радіусом збіжності степеневого ряду називається невід'ємне число R таке, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається в інтервалі $(-R; R)$ й розбігається при $|x| > R$.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається лише в точці $x_0 = 0$, тоді вважають $R = 0$.

Якщо ряд збігається на всій дійсній осі, то $R = +\infty$. Інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності степеневого ряду**, R – радіус збіжності степеневого ряду.

Як наслідок з теореми Коші-Адамара впливає **формула для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (1.4)$$

За умови, що $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ можна отримати іншу формулу:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (1.5)$$

Теорема про неперервність суми степеневого ряду. Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є неперервною на інтервалі збіжності $(-R; R)$, де R – радіус збіжності степеневого ряду.

Доведення. Нехай $x_1 \in (-R; R)$ – довільна. Довести: $S(x)$ – неперервна в точці x_1 .

Нехай $p : |x_1| < p < R$, тоді $x_1 \in [-p; p]$. Оскільки степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ –

рівномірно збігається на $[-p; p]$ до $S(x)$ і члени ряду $u_n(x) = a_n x^n$ – неперервні функції на $[-p; p]$ тому $S(x)$ неперервна в точці x_1 (за теоремою про неперервність суми функціонального ряду на $[-p; p]$).

Теорема про інтегрування степеневих рядів. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

можна почленно інтегрувати на $[0; x]$, що є підмножиною $(-R; R)$, R – радіус збіжності. Крім того, радіус збіжності отриманого почленним інтегруванням степеневому ряду буде той самий, що і у вихідного ряду, тобто R . [3]

Доведення. Нехай R – радіус збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Розглянемо $[0; x] \in (-R; R)$, а $p: |x| < p < R$. Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рівномірно

збігається на $[-R; R]$ і $u_n(x) = a_n x^n$ неперервні на $[-R; R]$ функції, то за теоремою

про почленне інтегрування функціональних рядів, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно

інтегрувати на будь-якому відрізку $[0; x] \in (-R; R)$

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n x_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \times x^{n+1}. \quad (1.6)$$

Коефіцієнт отриманого степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ має вигляд $b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$,

тому радіус збіжності цього ряду дорівнює $R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{a_{n-1}}{n} \right|}}$. Оскільки для

вихідного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\frac{1}{R} = \lim_n \sqrt[n]{|a_{n-1}|}$, то $\lim_n \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_n \left(\sqrt[n]{|a_{n-1}|} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{R}$,

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

Зауваження. Усі ряди, отримані в результаті почленного диференціювання або інтегрування мають *той самий* інтервал збіжності, що й вихідний ряд. Однак ряди, отримані в результаті почленного диференціювання, збігаються повільніше, ніж вихідний ряд. Крім того, збіжність або розбіжність ряду в *межових* точках інтервалу $x = \pm R$ при вказаних операціях може й *не зберігатися*.

Теорема про диференціювання степеневих рядів. Степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності, при цьому, отриманий почленим диференціюванням ряд має той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд [10].

Доведення. Нехай $x \in (-R; R)$, а $p: |x| < p < R$. Почленно продиференціювавши, отримаємо: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times n \times x^{n-1}$. Коефіцієнт

отриманого степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ має вигляд $b_k = a_{n+1} \cdot (n+1)$, тому радіус

збіжності цього ряду дорівнює $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$. Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ рівномірно

збігається на $[-p; p]$, тоді $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$, і $u_n(x) = a_n x^n$ – неперервно

диференційовна на $[-p; p]$, тоді за теоремою про почленне диференціювання

функціональних рядів $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times n \times x^{n-1}$.

Степеневий ряд можна почленно диференціювати скільки завгодно разів. Всі ряди, отримані n -кратними диференціюваннями, будуть мати той самий

радіус, що й вихідний ряд.

Функція $f(x)$ називається розвинутою у степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ $R > 0$, якщо в цьому інтервалі вказаний ряд збігається і його сума дорівнює $f(x)$. Згідно теореми про єдиність розвинення функції у степеневий ряд, **коефіцієнти степеневого ряду знаходяться за формулою:**

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 і в цій точці має похідні всіх порядків. Тоді степеневий ряд вигляду

$$T_n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (1.7)$$

або

$$T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (1.8)$$

називається **рядом Тейлора функції** $f(x)$ в околі точки x_0 , а $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, називають коефіцієнтами Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0 .

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна розвинути в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Нехай тепер $f(x)$ – довільна нескінченне число разів диференційовна функція. Складемо для неї ряд (1.7). Виявляється, що сума ряду (1.7) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (1.7) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено. Встановимо умови, за яких сума ряду (1.7) збігається з функцією $f(x)$.

Теорема 2. Для того щоб ряд Тейлора (1.7) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

необхідно і достатньо, щоб в цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R) \quad (1.9)$$

Доведення. Відомо, що для функції, яка має похідні всіх порядків, справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots + R_n(x), \quad (1.10)$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (1.11)$$

– залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа.

Якщо позначити n -ту частинну суми рядку (1.7) через $S_n(x)$, то формула (1.10) матиме вигляд

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad (1.12)$$

Нехай $f(x)$ – сума ряду (1.7), тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x), \quad (1.13)$$

тоді з формули (1.13) випливає (1.9). Навпаки, якщо виконується умова (1.9), то з формули (1.12) випливає рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$.

Таким чином, функцію $f(x)$ можна розвинути у ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови :

- 1) вона має похідні всіх порядків;
- 2) залишковий член формули Тейлора (1.11) прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ і всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$. ■

Перевірка даних умов нерідко виявляється непростим завданням. Для легшого і швидшого розвинення функції в ряд Тейлора розглянемо ще одну теорему.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що

$$|f^{(n)}(x)| < M, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

де $f^{(0)}(x) = f(x)$, то функція $f(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора.

Доведення. Відповідно до теореми 2 досить перевірити умову (1.9). В силу нерівностей (1.14) залишковий член формули Тейлора (1.9) задовольняє нерівність

$$|R_n(x)| < \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Побудуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (1.16)$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M |x - x_0|^{n+2} (n+1)!}{(n+2)! M |x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то за ознакою Д'Аламбера ряд (1.16) збіжний на всій числовій осі.

Для збіжного ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

тоді з нерівностей (1.15) знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R). \blacksquare$$

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають ряд за степенями x , який можна отримати з ряду (1.14) при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (1.17)$$

Згідно з теоремою, якщо функція $f(x)$ в інтервалі $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ зображується у вигляді суми степеневого ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора цієї функції.

1.2. Диференціальні рівняння. Основні поняття та означення

При розв'язуванні різноманітних задач фізики, хімії, математики та інших точних наук часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, що зв'язують одну або декілька незалежних змінних, невідому функцію цих змінних і похідні (або диференціали) цієї функції. Такі рівняння називають **диференціальними**.

Наприклад:

$$y' = x^2 + 3xy; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3y + x = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 2x^2 dy + 3y dx = 0.$$

Зауваження 1. У диференціальне рівняння n -го порядку обов'язково має входити похідна (або диференціал) n -го порядку невідомої функції, а незалежні змінні, сама невідома функція та її похідні (або диференціали) порядку, нижче, ніж n можуть і не входити.

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, яке в собі зв'язує незалежну змінну x , функцію $y(x)$ та похідні $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$,

і має загальний вигляд:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0. \quad (1.18)$$

Якщо ж невідома функція залежить від кількох незалежних змінних, то диференціальне рівняння називається *рівнянням з частинними похідними*:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_n^n}\right) = 0. \quad (1.19)$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція, яка містить сталі, який порядок диференціального рівняння, і підстановка якої в дане диференціальне рівняння перетворює його в тотожність, тобто має вигляд $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$. Загальний розв'язок, який нерозв'язаний відносно $y(x)$ і має вигляд $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ називається *загальним інтегралом диференціального рівняння*.

Означення. Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної або диференціала невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння.[24]

Наприклад.

1) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = ydx$ – звичайне диференціальне рівняння першого порядку;

2) $(2 + x^2)y'' + 4xy' = 24x^3$ – звичайне диференціальне рівняння другого порядку;

3) $2xy''' - 3y'' = x^2 e^x$ – звичайне диференціальне рівняння третього порядку.

Степенем диференціального рівняння називається найвищий степінь, до якого піднесено похідну найбільшого порядку n , що входить в це рівняння.

У випадку коли диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають *рівнянням з частинними похідними*.

Наприклад:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Розв'язком диференціального рівняння порядку n на деякому інтервалі (a, b) називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння, підставлення якого у рівняння перетворює його в тотожність. Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) \equiv 0. \quad (1.20)$$

Розв'язок, знайдений із загального розв'язку при фіксованих значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ називається *частинним розв'язком диференціального рівняння*.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають *особливим*. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значенні сталої C .

Розглядаючи диференціальні рівняння ми стикаємося, зазвичай, з безліччю розв'язків. Саме тому у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру серед усіх розв'язків диференціального рівняння потрібно знайти такий $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.21)$$

де x_0, y_0 – задані числа, тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення y_0 .

Одночасне задання диференціального рівняння і відповідної кількості початкових умов називається *задачею Коші* і має вигляд

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}. \quad (1.22)$$

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуванні інтегральної кривої рівняння $y' = f(x, y)$, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) в площині Oxy .

Початковими умовами називаються додаткові умови, що накладаються на функцію при розв'язку конкретної задачі, що приводить до диференціального рівняння.

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$. Таке рівняння, якщо воно не може бути зведене до простішого вигляду називається рівнянням, *нерозв'язним відносно похідної*.

Якщо його можна записати у вигляді $y' = f(x, y)$, то воно називається рівнянням *розв'язним відносно похідної*.

Задача Коші для рівняння першого порядку містить лише одну початкову умову і має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0. \quad (1.23)$$

Теорема Пеано. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини Oxy , то існує неперервна разом зі своєю похідною функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in D$.

Проте для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те чи є цей розв'язок єдиним.

Теорема (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для явного ДР n -го порядку). Нехай права частина диференціального рівняння $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

а) визначена й неперервна за всіма аргументами у замкнутій області D :

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y^{(k)} - y_0^{(k)}| \leq b, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad \text{де } a, b \text{ — додатні сталі; тоді}$$

$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x))$ є також обмеженою в D , тобто існує така додатна стала M , що $\left| f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) \right| \leq M$ в області D ;

б) задовольняє умову Ліпшиця за аргументами $y, y', y'', \dots, y^{n-1}$ в області D , тобто існує така стала $L > 0$ (стала Ліпшиця), що

$$\begin{aligned} & \left| f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{n-1}) - f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{n-1}) \right| \leq \\ & \leq L \left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| + \dots + |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}| \right) \end{aligned}$$

в області D .

Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, визначений і неперервний на проміжку $|x - x_0| \leq h$, де $h = \min\{a, b / M\}$, який у точці $x = x_0$ набуває значень

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Теорема. (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для неявного ДР n -го порядку). Нехай ліва частина диференціального рівняння $F(x, y, y', y'', \dots, y^n)$ в деякому h – околі точки M_0 з координатами $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)})$, де $y_0^{(n)}$ – розв'язок рівняння $F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0$, неперервна разом із частинними похідними першого порядку за всіма аргументами і справджує умови: $F(M_0) = 0, \frac{\partial F(M_0)}{\partial y^{(n)}} \neq 0$. Тоді для всіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ диференціального рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який справджує початкові умови.

Доведення. Якщо $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ у точці M_0 , то згідно з теоремою про існування

неявної функції диференціального рівняння визначає $y^{(n)}(x)$ як однозначну

функцію інших аргументів: $y^{(n)} = f_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ в деякому h – околі точки M_0 . Функція $f_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна за всіма аргументами і матиме неперервні частинні похідні першого порядку, тобто в розглядуваній області (h – околі точки M_0) справджує умови теореми (про явні). Тому явне диференціальне рівняння $y^{(n)} = f_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, а отже, і неявне диференціальне рівняння, визначає в h – околі точки M_0 єдину функцію $y = \varphi(x)$, яка справджує початкові умови. ■

Звичайні диференціальні рівняння, розв'язки яких можна задати аналітично $y = g(x)$ називаються *інтегровними рівняннями*.

Диференціальними рівнянням з відокремленими змінними називають рівняння вигляду:

$$y' = f(x)g(y). \quad (1.24)$$

Наприклад, рівняння $y' = \frac{y}{x + \cos x}$ є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки його можна записати у вигляді (1.24), де $f(x) = \frac{1}{x + \cos x}$, а $g(y) = y$.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (1.24) перепишемо його у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. Виключивши з розгляду точки, в яких $g(y) = 0$, множимо обидві частини рівняння на dx і ділимо на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (1.25)$$

Отримане рівняння називається *рівнянням з відокремленими змінними*. Інтегруємо ліву частину рівняння по y , а праву частину по x , одержуємо

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2 .$$

або

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (1.26)$$

де $C_2 = C_1 = C$ – довільна стала. Вираз (1.26) є загальним інтегралом рівняння (1.24).

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння ще називають *інтегруванням диференціального рівняння*.

1.3. Системи диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення

У багатьох прикладних задачах фізики, біології, економіки та інших наук виникає потреба описати процеси, в яких змінюються кілька величин одночасно. На відміну від звичайного диференціального рівняння, яке описує зміну однієї функції, *система диференціальних рівнянь* дозволяє моделювати динаміку кількох взаємозалежних змінних.

Системою звичайних диференціальних рівнянь m -го порядку називають систему вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0. \quad (1.27)$$

де $x \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, $y = y(x)$ – невідома векторна функція:

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad y^{(i)} = \left(\frac{d^i y_1}{dx^i}, \dots, \frac{d^i y_n}{dx^i} \right)^T \quad (i = 1, \dots, m); \quad F = (F_1, \dots, F_n)^T \quad - \text{ задана}$$

векторна функція, визначена в області $G \subseteq \mathbb{R}^{(m+1)n+1}$ ($m \geq 1$) і залежна від $y^{(m)}$.

Число n називають *вимірністю системи*, а число m – її *порядком*.

Систему (1.27) можна розглядати як *неявне векторне диференціальне рівняння m -го порядку вимірності n* .

Явне векторне диференціальне рівняння m -го порядку вимірності n має вигляд

$$y^{(m)} = g(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad (1.28)$$

де $g = (g_1, \dots, g_n)^T$ – задана векторна функція, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{mn+1}$ ($m \geq 1$).

Якщо ввести до розгляду *фазовий вектор* системи (1.28) $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T = (y, y', \dots, y^{(m-1)}) \in \mathbb{R}^{mn}$ ($z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m$), то системі (1.28) можна поставити у відповідність еквівалентну їй систему mn рівнянь першого порядку (явне векторне диференціальне рівняння першого порядку вимірності mn):

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2, \\ z'_2 &= z_3, \\ &\dots\dots\dots \\ z'_{m-1} &= z_m, \\ z'_m &= g(x, z). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Еквівалентність систем (1.28), (1.29) слід розуміти так: якщо $y = \varphi(x)$ – розв'язок системи (1.28), то векторна функція $z = (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m-1)}(x))^T \in \mathbb{R}^{mn}$ є розв'язком системи (1.29). Навпаки, якщо $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ – розв'язок системи (1.29), то функція $y = z_1(x)$ – розв'язок системи (1.28).

Система звичайних диференціальних рівнянь, записана в *нормальній формі Коші (нормальну систему)*, яка має вигляд

$$y' = f(x, y), \quad (1.30)$$

де $x \in \mathbb{R}$ – незалежна змінна, f – задана векторна функція $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ – шукана векторна функція, $y' = (y'_1, \dots, y'_n)^T$.

Інтегральною кривою системи (1.30) називають множину $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) | x \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тобто графік розв'язку $\varphi(x)$ ($x \in I$) цієї системи.

Задачу відшукування розв'язку $\varphi(x)$ системи (1.30), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, де $x_0 \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, називають *початковою задачею*, або *задачею Коші*, для системи (1.30). Як і в скалярному випадку, геометричний зміст задачі Коші полягає у відшуванні тієї інтегральної кривої, яка проходить через задану початкову точку $(x_0, y_0) \in D$.

Загальним розв'язком системи (1.30) в області $D_0 \subseteq D$ називають n – параметричну сім'ю векторних функцій

$$y = \varphi(x, c) \quad (1.31)$$

залежну від n довільних параметрів (вектора довільних сталих $C = (C_1, \dots, C_n)^T \in \mathbb{R}^n$), за умови, що кожна функція цієї сім'ї є розв'язком системи (1.30) в деякому інтервалі I і що для будь-якої початкової точки $(x_0, y_0) \in D$ n – параметрична сім'я (1.31) містить єдиний розв'язок $\varphi(x, c_0)$, котрий задовольняє початкову умову $\varphi(x_0, c_0) = y_0$.

РОЗДІЛ 2. Застосування степеневих рядів в наближеному розв'язанні диференціальних рівнянь та систем методом послідовних диференціювань

2.1. Інтегрування диференціальних рівнянь методом послідовних диференціювань

Якщо розв'язки диференціального рівняння в елементарних функціях знайти неможливо, тоді розв'язок (загальний або частинний) диференціального рівняння можна знаходити у вигляді степеневого ряду.

Для обчислення коефіцієнтів в розвиненні частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови, в степеневий ряд застосовують **метод послідовного диференціювання**.

Цей спосіб застосовують, коли потрібно знайти частинний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, який задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Нехай, наприклад, потрібно знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y'' = f(x, y, y'), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. Якщо в околі точки $(x_0; y_0; y'_0)$ виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, тоді **частинний розв'язок можна шукати у вигляді ряду Тейлора**

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Перші два коефіцієнти ряду визначають з початкових умов, інші коефіцієнти знаходять послідовним диференціюванням рівняння і обчисленням значень похідних в точці x_0 .

Спосіб послідовного диференціювання застосовується для розв'язання диференціальних рівнянь будь-якого порядку.

Приклад 1. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Розв'язання.

Точка $y = 1$ не є особливою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Початкові умови задають значення коефіцієнтів ряду $y(1), y'(1)$. З рівняння знаходимо:

$$y''(1) = 1.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння, дістанемо:

$$y''' = \cos y' - x \sin y' \cdot y'', \quad y'''(1) = 1,$$

$$y^{(n)} = -y'' \sin y' \sin y' - y'' \sin y' - xy''' \sin y' - x(y'')^2 \cos y', \quad y^{(4)}(1) = -1.$$

Підставимо знайдені значення в ряд:

$$y(x) \approx 2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots$$

Приклад 2. Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'' = x \sin y'$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок у вигляді ряду

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

За умовою задачі, $y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{2}$. З рівняння $y'' = x \sin y'$ знаходимо

$$y''(1) = 1 \cdot \sin y'(1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Диференціюючи вихідне рівняння, маємо:

$$y''' = \sin y' + xy' \cos y',$$

звідки отримуємо:

$$y'''(1) = \sin y'(1) + 1 \cdot y'(1) \cdot \cos y'(1) = 1.$$

Диференціюючи рівність $y''' = \sin y' + xy' \cos y'$ маємо:

$$y^{(4)} = y'' \cos y' + y'' \cos y' + xy''' \cos y' - xy''y''' \sin y',$$

звідки отримуємо:

$$y^{(4)}(1) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

Шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y \approx \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots$$

Приклад 3. Знайти декілька перших членів розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = yy' - x^2$ з початковими умовами $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Початкові умови диференціального рівняння задані при $x = 0$, тому шуканий розв'язок запишемо у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Із початкових умов і рівняння знайдемо

$$y''(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння, послідовно отримаємо

$$y''' = (y')^2 + yy' - 2x, \quad y'''(0) = 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$y^{(4)} = 2y'y'' + y'y'' + yy''' - 2 = 3y'y'' + yy''' - 2, \quad y^{(4)}(0) = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 = 3$$

Отже, $y(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8}$.

Приклад 4. Знайти наближений розв'язок задачі Коші $y' = x + 4y^2$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Розв'язком рівняння шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкової умови маємо $y(0) = 0$. З рівняння та початкової умови одержуємо, що

$$y'(0) = 0 + 4y^2(0) = 0.$$

Диференціюючи обидві частини заданого рівняння, одержуємо

$$y'' = 1 + 8yy',$$

а отже, $y''(0) = 1 + 8y(0) \cdot y'(0) = 1$.

Диференціюючи послідовно обидві частини рівняння $y'' = 1 + 8yy'$, знаходимо:

$$y''' = 8(y')^2 + 8yy'', \quad y'''(0) = 0,$$

$$y^{(IV)} = 16y'y'' + 8y'y'' + 8yy''' = 24y'y'' + 8yy''', \quad y^{(IV)}(0) = 0,$$

$$y^{(V)} = 24(y'')^2 + 8y'y''' + 8yy^{(IV)}, \quad y^{(V)}(0) = 24.$$

Якщо обмежитись першими шістьма членами розвинення, тобто степенями x до п'ятого степеня включно, то

$$y(x) \approx \frac{1}{2!}x^2 + \frac{24}{5!}x^5 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}.$$

Приклад 5. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших чотирьох членів включно) частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y - x^2$, що

задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = y(1) + \frac{y'(1)}{1!} (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!} (x-1)^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n + \dots$$

За умовою $y(1) = 2$. З диференціального рівняння $y' = y - x^2$ знаходимо $y'(1) = y(1) - 1^2 = 2 - 1 = 1$.

Далі диференціюємо послідовно і одержуємо:

$$y''(x) = y' - 2x, \quad y''(1) = y'(1) - 2 = -1.$$

$$y'''(x) = y'' - 2$$

$$y'''(1) = -1 - 2 = -3.$$

Отже,

$$y(x) = 2 + (x-1) + \frac{(-1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{(-3)}{3!} (x-1)^3 + \dots = 2 + (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 - \frac{1}{2} (x-1)^3 + \dots$$

Отже, метод послідовного диференціювання полягає в тому, що шуканий розв'язок рівняння записують у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

або ряду Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

2.2. Інтегрування диференціальних систем методом послідовних диференціювань

У попередньому параграфі ми розглянули випадок інтегрування диференціальних рівнянь. В даному параграфі розглянемо більш складне застосування цього методу.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкових умов знаходимо:

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0.5.$$

Розв'язуючи першу похідну і підставивши початкові дані, одержимо, що

$$y'(0) = 0.5, \quad z'(0) = -1.$$

Продиференціюємо тепер обидва рівняння системи за змінною x і підставимо в отриманні вирази $x = 0$. Будемо мати:

$$y'' = 1 + y'z + yz', \quad y''(0) = \frac{1}{4},$$

$$z'' = 2x - 2yy', \quad z''(0) = -1.$$

Диференціюючи ще один раз, знаходимо:

$$y''' = y''z + 2y'z' + yz'', \quad y'''(0) = -\frac{15}{8},$$

$$z''' = 2 - 2(y')^2 - 2yy'', \quad z'''(0) = 1.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у степеневий ряд, одержуємо остаточні наближені формули:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3,$$

$$z(x) \approx \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Приклад 2. Знайти чотири перших, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ $z = z(x)$ системи з початковими умовами $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

$$\begin{cases} y'(x) = y \cos(x) - z \sin(x) \\ z'(x) = y \sin(x) + z \cos(x) \end{cases}$$

Розв'язання. Функції $y(x)$ і $z(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкових умов знаходимо:

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Розв'язуючи першу похідну і підставивши початкові дані, одержимо, що

$$y'(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Продиференціюємо тепер обидва рівняння системи за змінною x і підставимо в отриманні вирази $x = 0$. Будемо мати:

$$y''(x) = -(y + z') \sin(x) - (z - y') \cos(x), \quad y''(0) = 1$$

$$z''(x) = -(z - y') \sin(x) + (y + z') \cos(x), \quad z''(0) = 1.$$

Диференціюючи ще один раз обидва рівняння системи, знаходимо, що:

$$y'''(x) = (z - 2y - z'') \sin(x) - (y + 2z' - y'') \cos(x), \quad y'''(0) = 0$$

$$z'''(x) = -(y + 2z - y'') \sin(x) - (z - 2y - z'') \cos(x), \quad z'''(0) = 3.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у степеневий ряд, одержуємо остаточні наближені формули:

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$z(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших чотирьох членів включно) частинний розв'язок диференціальної системи:

$$\begin{cases} y'(x) = y + z \\ z'(x) = y - z \end{cases},$$

з початковими умовами:

$$y(1) = 3, z(1) = 1.$$

Розв'язання. Функції $y(x)$ і $z(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів у вигляді ряду Тейлора, а саме:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$z(x) = z(1) + \frac{z'(1)}{1!}(x-1) + \frac{z''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{z'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

З початкових умов зразу можна отримати значення перших похідних, а саме:

$$y'(1) = 4, z'(1) = 2.$$

Тепер знаходимо похідні другого порядку та підставимо початкові дані у дані рівняння:

$$y''(x) = y'(x) + z'(x), y''(1) = 6$$

$$z''(x) = y'(x) - z'(x), z''(1) = 2.$$

Диференціюючи ще один раз обидва рівняння системи, знаходимо, що:

$$y'''(x) = y''(x) + z''(x), y'''(1) = 8$$

$$z'''(x) = y''(x) - z''(x), z'''(1) = 4.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у степеневий ряд, одержуємо остаточні наближені формули у вигляді рядку Тейлора $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$:

$$y(x) \approx 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3,$$

$$z(x) \approx 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

Приклад 4. Знайти чотири перших, члени розвинення в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ $z = z(x)$ $w = w(x)$ системи з початковими умовами $y(0) = 3$,

$$z(0) = 1, w(0) = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - 3w + 7z \\ z'(x) = -y + 4z - x \\ w'(x) = 2z + 3w - x^2 \end{cases}$$

Розв'язання. Функції $y(x)$, $z(x)$, $w(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$w(x) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot x + \frac{w''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

З початкових умов зразу можна отримати значення перших похідних, а саме:

$$y'(0) = 2 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot 1 = 12,$$

$$z'(0) = -3 + 4 \cdot 1 = 1,$$

$$w'(0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

Продиференціюємо тепер три рівняння системи за змінною x і підставимо в отриманні вирази $x = 0$. Будемо мати:

$$y''(x) = 2y' - 3w' + 7z', \quad y''(0) = 2 \cdot 12 - 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 22,$$

$$z''(x) = -y' + 4z - 1, \quad z''(0) = -12 + 4 \cdot 1 - 1 = -9,$$

$$w''(x) = 2z' + 3w' - 2x, \quad w''(0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11.$$

Диференціюючи ще один раз, знаходимо похідні третього порядку:

$$y'''(x) = 2y'' - 3w'' + 7z'', \quad y'''(0) = 2 \cdot 22 - 3 \cdot 11 + 7 \cdot (-9) = -52,$$

$$z'''(x) = -y'' + 4z'', \quad z'''(0) = -22 + 4 \cdot (-9) = -58$$

$$w'''(x) = 2z''(x) + 3w''(x) - 2, \quad w'''(x) = 2 \cdot (-9) + 3 \cdot 11 - 2 = 13.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у степеневий ряд, одержуємо остаточні наближені формули вигляду Маклорена:

$$y(x) \approx 3 + 12x + 11x^2 - \frac{26}{3}x^3$$

$$z(x) \approx 1 + x + \frac{-9}{2}x^2 + \frac{-58}{3}x^3$$

$$w(x) \approx \frac{1}{3} + 3x + \frac{11}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3.$$

Приклад 5. Знайти у вигляді степеневого ряду Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} (x)^n \text{ (до перших чотирьох членів включно) частинний розв'язок}$$

диференціальної системи :

$$\begin{cases} y'(x) = 2x^3 y - 3zw - wx \\ z'(x) = -y + z \cos(x) + w \sin(x) \\ w'(x) = y^3 z + 5z - 4w \cos(x) \end{cases}$$

з початковими умовами:

$$y(0) = 2, \quad z(0) = 4, \quad w(0) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Функції $y(x), z(x), w(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$$w(x) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot x + \frac{w''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{w^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

З початкових умов зразу можна отримати значення перших похідних, а саме:

$$y'(0) = -6,$$

$$z'(0) = -2 + 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2,$$

$$w'(0) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 50.$$

Продиференціюємо тепер три рівняння системи за змінною x і підставимо в отриманні вирази $x = 0$. Будемо мати:

$$y''(x) = 6x^2 y' + 2x^3 y'' - 3(z'w + zw') - (w + xw'),$$

$$y''(0) = -3 \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 50 \right) - \frac{1}{2} = -603 - \frac{1}{2} = -\frac{1207}{2}.$$

Такий порядок дії виконаємо і для двох останніх рівнянь системи:

$$z''(x) = -y' + z' \cos(x) - z \sin(x) + w' \sin(x) + w \cos(x),$$

$$z''(0) = 6 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

$$w''(x) = 3y^2 y' z + y^3 z' + 5z' - 4w' \cos(x) + 4w \sin(x),$$

$$w''(0) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-6) \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 50 = -288 + 16 + 10 - 200 = -462.$$

Тепер диференціюємо рівняння систем для знаходження третіх похідних:

$$y'''(x) = 12xy + 12x^2 y' + 2x^3 y'' - 3(z''w + 2z'w' + zw'') - (2w' + xw''),$$

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -3 \left(\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 50 - 4 \cdot (-462) \right) - 2 \cdot 50 = -3 \left(\frac{17}{4} - 1648 \right) - 100 = \\ &= \frac{6575 \cdot 3}{4} - 100 = \frac{19325}{4} \end{aligned}$$

$$z'''(x) = -y'' + z'' \cos(x) - 2z' \sin(x) - z \cos(x) + w'' \sin(x) + 2w' \cos(x) - w \sin(x),$$

$$z'''(0) = \frac{1207}{2} + \frac{17}{2} - 4 + 2 \cdot 50 = \frac{1224}{2} + 96 = 708$$

$$w'''(x) = 3(2y(y')^2 z + y^2 y'' z) + 6y^2 y' z' + y^3 z'' + 5z'' - 4w'' \cos(x) + 8w' \sin(x) + 4w \cos(x)$$

$$w'''(0) = 3 \left(2 \cdot 2 \cdot 2(-6)^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot \left(-\frac{1207}{2} \right) \right) \cdot 4 + 6 \cdot 2^2 \cdot (-6) \cdot 2 + 2^3 \cdot \frac{17}{2} + 5 \cdot \frac{17}{2} -$$

$$-4 \cdot (-462) + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3(576 - 9656) - 288 + 68 + \frac{85}{2} + 1848 + 2 = -\frac{51135}{2}.$$

Підставляємо знайдені значення похідних у степеневий ряд Маклорена

вигляду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$:

$$y(x) \approx 2 - 6x - \frac{1207}{4}x^2 + \frac{19325}{24}x^3$$

$$z(x) \approx 4 + 2x + \frac{17}{4}x^2 + 118x^3$$

$$w(x) \approx \frac{1}{2} + 50x - 231x^2 - \frac{17045}{4}x^3$$

РОЗДІЛ 3. Застосування степеневих рядів в наближеному розв'язанні диференціальних рівнянь та систем методом невизначених коефіцієнтів

3.1. Розв'язання диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів

При інтегруванні диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів для обчислення коефіцієнтів степеневого ряду застосовують ще метод невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів застосовують для відшукування у вигляді степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ загального розв'язку диференціального рівняння або частинного розв'язку такого рівняння з початковими умовами.

Коефіцієнти C_n шукають таким способом. Спочатку послідовно знаходять похідні функції $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$, де C_n ще не визначені. Їх обчислюють з початкових умов, якщо такі умови задані. Потім подають усі функції, що входять до рівняння степеневими рядами за степенями різниці $x - x_0$. У вихідне рівняння підставляють подання функції $y(x)$, її похідних. Складають систему рівнянь для визначення C_n , шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях $(x - x_0)$ в обох частинах отриманого співвідношення.

Розглянемо метод невизначених коефіцієнтів на прикладі.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Розв'язок диференціального рівняння шукаємо у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Продиференціюємо цей ряд два рази:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots$$

Підставивши ряди для y, y' в рівняння, отримаємо:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо рекурентне співвідношення для знаходження коефіцієнтів ряду:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n.$$

З початкових умов знаходимо:

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots = 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}, a_5 = \frac{1}{5!}, \dots, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \dots$$

Розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots = \sin(x).$$

Приклад 2. Знайти п'ять перших, відмінних від нуля, членів розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Розв'язання. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді ряду

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

Знаходимо $y'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots$

$$y'''(x) = 2C_2x + 6C_3x^2 + \dots$$

Враховуючи початкові умови, отримаємо, що $C_0 = 1, C_1 = 1$. Звідси

$$y(x) = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$$

Підставивши у у рівняння, отримуємо співвідношення:

$$(1+x^2)(2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + \dots) + x(1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots) - (1+x+C_2x^2+C_3x^3+\dots) = 0$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах цього співвідношення і складемо систему рівнянь для визначення C_n :

$$x^0 \mid 2C_2 - 1 = 0,$$

$$x^1 \mid 6C_3 + 1 - 1 = 0,$$

$$x^2 \mid 12C_3 + 2C_2 + 2C_2 - C_2 = 0,$$

$$x^3 \mid 20C_4 + 6C_3 + 3C_3 + 3C_3 - C_3 = 0,$$

$$x^4 \mid 30C_5 + 12C_4 + 4C_4 + 4C_4 - C_4 = 0,$$

$$x^k \mid (k+1)(k+2)C_{k+2} + (k-1)kC_k + kC_k - C_k = 0,$$

Розв'язком системи є $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = 0$, $C_4 = -\frac{1}{8}$, $C_5 = 0$, $C_6 = \frac{3}{48}, \dots$

Шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{48}x^6 + \dots$$

Приклад 3. Знайти розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y'' + y' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$

Знайдемо його похідні:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots$$

Праву частину рівняння також запишемо у вигляді ряду

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$y(0) = 0, \quad a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots = 0.$$

$$y'(0) = 1, \quad a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_3 \cdot 3 \cdot 0 + \dots = 0.$$

Підставимо ці ряди у диференціальне рівняння та початкові умови

$$(a_2 \cdot 2 + a_3x \cdot 3 \cdot 2 + a_4x^2 \cdot 4 \cdot 3 + a_5x^3 \cdot 5 \cdot 4 + a_6x^4 \cdot 6 \cdot 5 + \dots) +$$

$$(a_1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + a_4 \cdot 4x^3 + a_5 \cdot 5x^4 + \dots) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Позгрупуємо відносно спільного множника

$$(a_2 \cdot 2 + a_1) + (a_3 \cdot 3 \cdot 2 + a_2 \cdot 2)x + (a_4 \cdot 4 \cdot 3 + a_3 \cdot 3)x^2 + (a_5 \cdot 5 \cdot 4 + a_4 \cdot 4)x^3 +$$

$$+(a_6 \cdot 6 \cdot 5 + a_5 \cdot 5)x^4 + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x та отримаємо рекурентну послідовність рівностей

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1;$$

$$a_2 \cdot 2 + a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_1) = 0;$$

$$6a_3 + 2a_2 = \frac{1}{1!}, \quad a_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1!} - 2a_2 \right) = \frac{1}{3!};$$

$$12a_4 + 3a_3 = \frac{1}{2!}, \quad a_4 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2!} - 3a_3 \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2!} - \frac{3}{2!} \right) = 0;$$

$$20a_5 + 4a_4 = \frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{3!} - 4a_4 \right) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{5!};$$

$$30a_6 + 5a_5 = \frac{1}{4!}, \quad a_6 = \frac{1}{6 \cdot 5} \left(\frac{1}{4!} - 5a_5 \right) = \frac{1}{6 \cdot 5} \left(\frac{1}{4!} - \frac{5}{5!} \right) = 0;$$

Можна довести, що коефіцієнти ряду задаються залежностями

$$a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!}, \quad a_{2k} = 0.$$

Тоді шуканий ряд має вигляд

$$y = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \dots$$

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших п'яти членів включно) частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 3y' + y = e^x$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n.$$

Продиференціюємо цей ряд:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{(n-1)} + \dots$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ знаходимо a_0 і a_1 :

$$1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 + \dots; \quad a_0 = 1.$$

$$0 = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0 + n a_n \cdot 0 + \dots; \quad a_1 = 0.$$

Отже, маємо $y = 1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$.

Тоді

$$y' = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{(n-1)} + \dots;$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + \dots + n(n-1)a_n x^{(n-2)} + \dots$$

Підставимо ці вирази та розклад в ряд Маклорена експоненти e^x в дане диференціальне рівняння. Отримаємо:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{(n-2)} + 3(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{(n-1)} + \dots) + 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Для знаходження значень $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч та праворуч у цій тотожності:

$$x^0 \Big| \quad 2a_2 + 1 = 1, \quad a_2 = 0;$$

$$x^1 \Big| \quad 3a_3 + 6a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{6};$$

$$x^2 \Big| \quad 12a_4 + 9a_3 + a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_4 = -\frac{1}{12};$$

$$x^3 \Big| \quad 20a_5 + 12a_4 + a_3 = \frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{20}.$$

Підставимо отримані значення коефіцієнтів у шуканий ряд отримаємо:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \dots$$

Отже, **метод невизначених коефіцієнтів** потребує запису розв'язків рівняння у вигляді степеневого ряду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, невизначені коефіцієнти якого визначаються шляхом підстановки ряду до диференціального рівняння й порівняння коефіцієнтів при однакових степенях бінома в лівій і правій частинах отриманої рівності.

3.2. Розв'язання диференціальних систем методом невизначених коефіцієнтів

Після розв'язання окремих диференціальних рівнянь, методом степеневих рядів, перейдемо до розгляду систем. Такий підхід дозволяє описувати взаємодію кількох невідомих функцій одночасно. Для кожної змінної будується

степеневий ряд, а коефіцієнти визначаються з рекурентних співвідношень, що впливають із самої системи. Це забезпечує можливість наближеного розв'язання навіть у складних випадках. На практиці будемо розглядати лише лінійні диференціальні системи, оскільки саме для них цей метод застосовується найбільш коректно та ефективно.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші для системи:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + z(t) + e^t \\ z'(t) = 2y(t) - z(t) + t \end{cases}$$

з початковими умовами $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Розв'язання. Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots$$

Початкові умови також приведемо до більш звичного вигляду:

$$a_0 = y(0) = 1, \quad b_0 = z(0) = 0.$$

Знайдемо похідні шуканих рівнянь розвинених в ряд:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \quad z'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} t^n.$$

Також запишемо необхідні нам функції у більш зручній формі:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n1} t^n$$

(де $\delta_{n1} = 1$, якщо $n = 1$, і 0 – інакше).

Прирівняємо коефіцієнти при t^n для обох рівнянь системи:

$$y'(t) = y + z + e^t:$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n + b_n + \frac{1}{n!} \text{ для всіх } n \geq 0$$

$$z'(t) = 2y - z + t :$$

$$(n+1)b_{n+1} = 2a_n - b_n + \delta_{n1} \text{ для всіх } n \geq 0$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ знаходимо a_0 і a_1 .

Щоб не створилася плутанина будемо розглядати обидва рівняння системи одночасно при заданих значеннях n .

При $n = 0$:

У перше рівняння, підставляємо значення різних функцій записаних в ряд при заданому $n = 0$, будемо мати:

$$a_1 = a_0 + b_0 + \frac{1}{n!} = 1 + 0 + \frac{1}{0!} = 2.$$

З другого рівняння будемо мати:

$$b_1 = 2a_0 - b_0 + \delta_{0,1} = 2 \cdot 1 - 0 + 0 = 2.$$

При $n = 1$:

$$(1) 2a_2 = a_1 + b_1 + \frac{1}{1!},$$

$$2a_2 = 2 + 2 + 1,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}.$$

$$(2) 2b_2 = 2a_1 - b_1 + \delta_{1,1},$$

$$2b_2 = 2 \cdot 2 - 2 + 1,$$

$$b_2 = \frac{3}{2}.$$

При $n = 2$:

$$(1) 3a_3 = a_2 + b_2 + \frac{1}{2!},$$

$$3a_3 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{3}{2}.$$

$$(2) 3b_3 = 2a_2 - b_2 + \delta_{2,1},$$

$$3b_3 = 2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 0,$$

$$b_3 = \frac{7}{6}.$$

При $n = 3$:

$$(1) 4a_4 = a_3 + b_3 + \frac{1}{3!},$$

$$4a_4 = \frac{3}{2} + \frac{7}{6} + \frac{1}{6},$$

$$a_4 = \frac{17}{24}.$$

$$(2) 4b_4 = 2a_3 - b_3 + \delta_{3,1}$$

$$4b_4 = 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{6} + 0,$$

$$b_4 = \frac{11}{24}.$$

Знайшовши всі необхідні коефіцієнти для розкладу функцій у степеневий ряд даної системи, матимемо такий вигляд:

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3 + \frac{17}{24}t^4$$

$$z(t) = 2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{6}t^3 + \frac{11}{24}t^4.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок у вигляді рядів Маклорена до перших чотирьох не нульових коефіцієнтів для системи:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + z(t) + e^t + \sin(t) \\ z'(t) = -3y(t) + 4z(t) + t + \cos(t) \end{cases}$$

з початковими умовами $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Розв'язання. Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots$$

Початкові умови також приведемо до більш звичного вигляду:

$$a_0 = y(0) = 0, \quad b_0 = z(0) = 1.$$

Знайдемо похідні шуканих рівнянь розвинених в ряд:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \quad z'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} t^n.$$

Також запишемо необхідні нам функції у більш зручній формі:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n1} t^n, \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

(де $\delta_{n1} = 1$, якщо $n = 1$, і 0 – інакше).

Щоб не виникало довгих записів і для більш швидкого, подальшого розрахунку коефіцієнтів введемо позначання для тригонометричних функцій:

$$s_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}, & n \text{ не парне} \\ 0, & n \text{ парне} \end{cases}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}, & n \text{ парне} \\ 0, & n \text{ не парне} \end{cases}$$

Розглянувши всі необхідні рекурентні рівняння, можемо записати загальний вигляд рівнянь системи, для подальшого розрахунку:

$$y'(t) = 2y + z + e^t + \sin t:$$

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_n + b_n + \frac{1}{n!} + s_n \text{ для всіх } n \geq 0$$

$$z'(t) = -3y + 4z + t + \cos t :$$

$$(n+1)b_{n+1} = -3a_n + 4b_n + \delta_{n1} + c_n \text{ для всіх } n \geq 0$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = 0$, $z(0) = 1$ знаходимо a_0 і b_0 :

$$a_0 = 0, b_0 = 1.$$

При $n = 0$:

$$a_1 = 2a_0 + b_0 + \frac{1}{0!} + s_0 = 0 + 1 + 1 + 0 = 2,$$

$$a_1 = 2;$$

$$b_1 = -3a_0 + 4b_0 + \delta_{0,1} + c_0 = 0 + 4 \cdot 1 + 0 + 1 = 5,$$

$$b_1 = 5.$$

При $n = 1$:

$$2a_1 = 2a_1 + b_1 + \frac{1}{1!} + s_1;$$

$$2a_2 = 2 \cdot 2 + 5 + 1 + 1,$$

$$a_2 = \frac{11}{2};$$

$$2b_1 = -3a_0 + 4b_0 + \delta_{1,1} + c_1,$$

$$2b_1 = -3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 + 0,$$

$$b_1 = \frac{15}{2}.$$

При $n = 2$:

$$3a_3 = 2a_2 + b_2 + \frac{1}{2!} + s_2,$$

$$3a_3 = 2 \cdot \frac{11}{2} + \frac{15}{2} + \frac{1}{2!} + 0,$$

$$a_3 = \frac{19}{3};$$

$$3b_3 = -3a_2 + 4b_2 + \delta_{2,1} + c_2,$$

$$3b_3 = -3 \cdot \frac{11}{2} + 4 \cdot \frac{15}{2} + 0 - \frac{1}{2},$$

$$b_3 = \frac{13}{3}.$$

При $n = 3$:

$$4a_4 = 2a_3 + b_3 + \frac{1}{3!} + s_3,$$

$$4a_4 = 2 \cdot \frac{19}{3} + \frac{13}{3} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{6},$$

$$a_4 = \frac{17}{4};$$

$$4b_4 = -3a_3 + 4b_3 + \delta_{3,1} + c_3,$$

$$4b_4 = -3 \cdot \frac{19}{3} + 4 \cdot \frac{13}{3} + 0 + 0,$$

$$b_4 = -\frac{5}{12}.$$

Знайшовши всі необхідні коефіцієнти для розкладу функцій у степеневий ряд даної системи, матимемо такий вигляд:

$$y(t) = 2t + \frac{11}{2}t^2 + \frac{19}{3}t^3 + \frac{17}{4}t^4$$

$$z(t) = 1 + 5t + \frac{15}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 - \frac{5}{12}t^4.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок у вигляді рядів Маклорена до трьох перших коефіцієнтів для системи:

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t) + z(t)e^t + 3t \\ z'(t) = \cos(t)y(t) - 2z(t) + w(t) + 3t \\ w'(t) = 2y(t) + w(t)\cos(t) - 2z(t) + e^t \end{cases}$$

з початковими умовами $y(0) = 2$, $z(0) = 1$, $w(0) = 3$.

Розв'язання. Запишемо шукане розвинення у вигляді ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots,$$

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \dots,$$

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots$$

Початкові умови також приведемо до більш звичного вигляду:

$$a_0 = y(0) = 2, \quad b_0 = z(0) = 1, \quad c_0 = w(0) = 3.$$

Знайдемо похідні шуканих рівнянь розвинених в ряд:

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \quad z'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} t^n, \quad w'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n.$$

Також запишемо необхідні нам функції у більш зручній формі:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n1} t^n, \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

(де $\delta_{n1} = 1$, якщо $n = 1$, і 0 – інакше).

Щоб не виникало довгих записів і для більш швидкого, подальшого розрахунку коефіцієнтів введемо позначання для $\sin$ і $\cos$ відповідно:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}, & n \text{ не парне} \\ 0, & n \text{ парне} \end{cases}, \quad \beta_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}, & n \text{ парне} \\ 0, & n \text{ не парне} \end{cases}.$$

Приведемо кожне рівняння системи до рекурентної форми:

$$(n+1)a_{n+1} = \alpha_n + b_n \cdot \frac{1}{n!} + 3\delta_{n1} \text{ для всіх } n \geq 0$$

$$(n+1)b_{n+1} = \beta_n \cdot a_n - 2b_n + c_n + 3\delta_{n1} \text{ для всіх } n \geq 0$$

$$(n+1)c_{n+1} = 2a_n + \beta_n \cdot c_n - 2b_n + \frac{1}{n!} \text{ для всіх } n \geq 0$$

Враховуючи початкові умови $y(0)=2$, $z(0)=1$, $w(0)=3$ знаходимо всі необхідні нам коефіцієнти для рівнянь системи:

При $n=0$:

$$a_1 = \alpha_0 + b_0 \cdot \frac{1}{0!} + 3\delta_{01},$$

$$a_1 = 0 + 1 \cdot 1 + 0,$$

$$a_1 = 1;$$

$$b_1 = \beta_0 \cdot a_0 - 2b_0 + c_0 + 3\delta_{01},$$

$$b_1 = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 + 0,$$

$$b_1 = 3;$$

$$c_1 = 2a_0 + \beta_0 \cdot c_0 - 2b_0 + \frac{1}{0!},$$

$$c_1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{1},$$

$$c_1 = 6.$$

При $n=1$:

$$2a_2 = \alpha_1 + b_1 \cdot \frac{1}{1!} + 3\delta_{11},$$

$$2a_2 = 1 + 1 + 3 + 3,$$

$$a_2 = 4;$$

$$2b_2 = \beta_1 \cdot a_1 - 2b_1 + c_1 + 3\delta_{11},$$

$$2b_2 = 1 \cdot 1 - 6 + 6 + 3,$$

$$b_2 = 2;$$

$$2c_2 = 2a_1 + \beta_1 \cdot c_1 - 2b_1 + \frac{1}{1!},$$

$$2c_2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 - 6 + 1,$$

$$c_2 = \frac{3}{2}.$$

Знайшовши всі необхідні коефіцієнти для розкладу функцій у степеневий ряд даної системи, матимемо такий вигляд:

$$y(t) = 2 + t + 4t^2$$

$$z(t) = 1 + 3t + 2t^2$$

$$w(t) = 3 + 6t + \frac{3}{2}t^2.$$

Метод невизначених коефіцієнтів у формі степеневого розкладу показав свою ефективність і зручність у порівнянні з методом послідовних диференціювань систем. Його суть полягає в тому, що шукані функції $y(t)$, $z(t)$, $w(t)$, та інші рівняння системи, представляються у вигляді степеневого ряду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ із невідомими коефіцієнтами. Далі відбувається підстановка цих рядів у вихідну систему диференціальних рівнянь і порівняння коефіцієнтів при однакових степенях t^n , що дозволяє побудувати рекурентні співвідношення для визначення невідомих членів ряду.

Цей метод найбільш зручно використовувати для локальних розв'язків поблизу точки $t = 0$. Для складних нелінійних систем кількість обчислень зростає, і отримання коефіцієнтів вищих порядків стає громіздким, доводиться обчислювати згорнуті форми рядів з двох рядів. Саме тому на практиці цей метод частіше використовують для лінійних рівнянь, систем.

ВИСНОВКИ

Відомо, що розв'язання більшості задач зводиться до обчислення значень функції, інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, які містять похідні або диференціали невідомих функцій. Однак точного виконання перелічених математичних операцій у багатьох випадках досягти складно або й зовсім неможливо. Розв'язок таких задач можна отримати наближеними методами із застосуванням знань, набутих під час вивчення розділу вищої математики «Степеневі ряди» для досягнення будь-якої точності обчислень.

Використання рядів Тейлора та Маклорена дає змогу будувати розв'язки диференціальних рівнянь у вигляді формальних розкладів з довільним ступенем точності. Такий підхід дозволяє отримати не лише аналітичне наближення, але й забезпечує можливість відстеження поведінки розв'язку поблизу початкової точки.

При розгляді систем диференціальних рівнянь було показано, що метод степеневих рядів найбільш природно застосовується саме до лінійних систем. Це пояснюється тим, що рекурентні формули для коефіцієнтів у лінійних випадках мають чітку структуру, тоді як для нелінійних систем вони ускладнюються і вимагають додаткових прийомів та обчислень.

В даній роботі викладені основи теорії степеневих рядів та диференціальних рівнянь та їх систем. Розглянуті застосування степеневих рядів до розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем. Теоретичні положення супроводжуються необхідними поясненнями, а також розв'язанням відповідних прикладів. Підтверджено, що застосування рядів є одним з основних обчислювальних методів. Степеневі ряди дають змогу подавати функції, які неперервні і безліч разів диференційовані. Степеневі ряди можуть бути застосовані для обчислення інтегралів, знаходження границь, розв'язків рівнянь та систем.

Цілі, поставлені в магістерській роботі, повністю досягнуті, вирішені

наступні завдання: визначено основні поняття, пов'язані з степеневими рядами і диференціальними рівняннями та їх системами; розглянуто метод інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем за допомогою степеневих рядів; також розглянуто метод невизначених коефіцієнтів; розв'язано достатньо прикладів з даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бугрим О. В., Бойко Л. Й. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування : навч. посіб. / М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. Д. : НГУ, 2014. 82 с.
2. Легеза В. П. Математичний аналіз : підручник : у 4 т. Т. 2 / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : Вид-во «Політехніка», 2020. 396 с.
3. Вища математика : підручник для студентів економічних напрямків підготовки / кол. авторів. Харків : Фоліо, 2014. 669 с.
4. Диференціальні рівняння та системи. Методичні вказівки та варіанти завдань для типового розрахунку з вищої математики / уклад.: Т. В. Карнаухова, В. Ф. Зражевська, В. В. Могильова. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 80 с. URL: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/7668>.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2005. 648 с.
6. Дундученко Л. О., Ясінський В. В. Вища математика : у 2 т. Т. 1. Сан-Франциско ; Київ : НТУУ «КПІ» «Політехніка», 2006. 884 с.; Т. 2. 2007. 648 с.
7. Ковальчук Б., Шіпка Й. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 3 ч. Ч. 2. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. 282 с.
8. Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Мартинюк О. В., Кондур О. С. Вища математика. Загальний курс. Частина 2. Математичний аналіз і диференціальні рівняння. Чернівці : Книги ХХІ ст., 2010. 556 с.
9. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 2. Диференціальні рівняння та інші розділи. Київ : Техніка, 2004. 792 с.
10. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне

числення. Київ : Техніка, 2003. 600 с.

11. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум (II курс III семестр). Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 160 с.

12. Чернєй М. І., Новикова Г. К., Денисенко Н. Л. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є : метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 62 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/17673>.

13. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння : навч. посіб. 2-ге вид., випр. і доп. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. 212 с.

14. Лиходєєва Г. В., Пастирєва К. Ю. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно. Ч. I.. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 144 с.

15. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ : Либідь, 2004. 408 с.

АНОТАЦІЯ

Матвійчук Н.І. Розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем за допомогою степеневих рядів. Магістерська робота. Луцьк, 2025. 54 с.

У роботі представлено розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем за допомогою степеневих рядів, їхні властивості, наведено два способи для розв'язання, розглянуто основні степеневі ряди. Також показано практичне застосування степеневих рядів.

Магістерська робота містить 54 сторінки, список використаної літератури налічує 15 джерел.

Ключові слова: диференціальні рівняння, диференціальні системи, фундаментальна система розв'язків, степеневі ряди, диференціювання, задача Коші.

ABSTRACT

Matviichuk N.I. Solving differential equations and their systems using power series. Master's thesis. Lutsk, 2025. 54 p.

The thesis presents solutions to differential equations and their systems using power series, their properties, two methods for solving them, and considers the main power series. The practical application of power series is also shown.

The master's thesis contains 54 pages, and the list of references includes 15 sources.

Keywords: differential equations, differential systems, fundamental system of solutions, power series, differentiation, Cauchy's problem.