

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

Добровольська Анастасія Олександрівна

Спеціальні способи задання булевих функцій у алгебрі Буля

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ШВАЙ ОЛЬГА ЛЕОНІДІВНА

доцент кафедри математичного аналізу
та статистики, кандидат
педагогічних наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри математичного
аналізу та статистики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри _____

(підпис) ПІБ

ЛУЦЬК-2025

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.....	5
1.1. Булеві функції. Табличний спосіб задання функцій.....	5
1.2. Реалізація булевих функцій формулами.....	6
1.3. Фіктивні змінні.....	9
1.4. Алгебра Буля.....	12
РОЗДІЛ 2. СПЕЦІАЛЬНІ ФОРМИ ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ В АЛГЕБРІ БУЛЯ.....	14
2.1. Диз'юнктивні нормальні форми.....	14
2.1.1. Алгоритм побудови ДНФ для формули булевої алгебри.....	15
2.1.2. Алгоритм побудови ДДНФ	16
2.2. Кон'юнктивні нормальні форми.....	19
2.2.1. Алгоритм побудови КНФ для формули булевої алгебри.....	20
2.2.2. Алгоритм побудови ДКНФ	20
2.3. Властивості досконалих форм.....	23
РОЗДІЛ 3. МОЖЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФОРМ ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ В АЛГЕБРІ БУЛЯ У ЗЗСО.....	24
3.1. Методичні аспекти вивчення булевої алгебри в ЗЗСО.....	24
3.2. Розробка практичних завдань та проектів для учнів.....	28
3.3. Експериментальне дослідження ефективності запропонованої методики.....	46
ВИСНОВКИ.....	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	53
ДОДАТКИ.....	55

ВСТУП

У працях «Математичний аналіз логіки» (1847) та «Закони мислення» (1854) англійський математик, логік та філософ Джордж Буль (George Boole), на основі розробленої ним теорії булевих функцій, побудував алгебру, яку називають алгеброю Буля.

Булеві функції є особливим класом двозначних функцій, у яких як аргументи, так і сама функція можуть приймати лише два значення, що традиційно інтерпретуються як «істина» (1) та «хиба» (0). Основними логічними операціями в алгебрі Буля є: заперечення (інверсія, $\neg$), кон'юнкція (логічне «І», $\wedge$), диз'юнкція (логічне «АБО», $\vee$).

У сучасному світі булева алгебра та булеві функції вийшли далеко за межі чистої математичної логіки, ставши фундаментом цифрової електроніки та інформаційних технологій. Булеві функції широко використовуються під час конструювання різноманітних електронних пристроїв, при розв'язанні задач обробки інформації, у теорії множин, програмуванні, статистиці тощо.

Мета дипломної роботи – проаналізувати та систематизувати теоретичний матеріал з теорії булевих функцій, зокрема про спеціальні форми їх зображення; розробити і апробувати методичні рекомендації для викладання зазначеної теми у закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО) на факультативних заняттях.

Для досягнення поставленої мети були поставлені наступні *завдання*:

1. На основі аналізу літературних джерел розкрити історичні аспекти становлення теорії булевих функцій.
2. Ввести поняття булевої функції та способів завдання цих функцій.
3. Ввести поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми та досконалої кон'юнктивної форми.
4. Розглянути способи побудови ДДНФ та ДКНФ.
5. Проаналізувати можливості та доцільність викладання елементів булевої алгебри у ЗЗСО на факультативних заняттях.

6. Розробити комплекс практичних завдань та проектів, спрямованих на засвоєння поняття булевої функції та нормальних форм булевої функції учнями ЗЗСО.

7. Провести апробацію ефективності запропонованих методичних матеріалів у шкільній практиці.

Об'єкт дослідження – теорія булевих функцій та процес її вивчення у ЗЗСО.

Методи дослідження – теоретичний аналіз наукової літератури з проблеми, аналіз навчальних програм, підручників, вивчення і узагальнення передового педагогічного та власного досвіду роботи в школі, педагогічний експеримент.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що в роботі обґрунтовано можливості вивчення булевих функцій у ЗЗСО та розроблена відповідна методика.

Практичне значення одержаних результатів – результати роботи можна використовувати при проведенні факультативних занять з математики.

Апробація дослідження – результати дослідження доповідались автором на XIX Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (травень 2025 року) та опубліковані у матеріалах конференції [7].

Структура і об'єм дослідження: робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури, додатків. Зміст роботи викладений на 59 сторінках друкованого тексту.

У першому розділі розкрито теоретичні основи теорії булевих функцій: визначення, способи завдання, властивості та основи алгебри Буля. Другий розділ присвячено детальному аналізу спеціальних форм зображення булевих функцій – ДНФ, КНФ, ДДНФ та ДКНФ. Опис алгоритмів побудови цих форм двома основними методами: через таблиці істинності та шляхом еквівалентних перетворень логічних виразів.

У третьому розділі проаналізовано можливості та доцільність вивчення булевих функцій у ЗЗСО на факультативних заняттях.

РОЗДІЛ 1. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Булеві функції. Табличний спосіб задання функцій

Булеві функції належать до двозначних однорідних функцій. Вони є найважливішим класом однорідних функцій. Булевою функцією називають таку функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка набуває своїх значень на множині $\{0, 1\}$ і є визначеною на цій же множині [17]. Нехай $E_2 = \{0, 1\}$, а булева функція від n змінних n -місна, тоді задамо відображення $f: E_2^n \rightarrow E_2$.

E_2^n - скінченна множина, задавши відображення $f: E_2^n \rightarrow E_2$ задали множину двійкових наборів з E_2^n і для кожного набору вказали його образ в E_2 [8].

Існує кілька основних способів якими можна задати довільну булеву функцію. Аналітичний, табличний та словесний.

Табличний метод подання булевої функції полягає в тому, що функцію записують за допомогою таблиці істинності. Всі можливі значення аргументів $x_1, x_2, \dots, x_n$ записують в лівій частині таблиці, а правою частиною є стовпець значення функції, що відповідає цим наборам.

Набір значень змінних або кортеж, на якому функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набуває значення 1, називають одиничним набором цієї функції, набір аргументів на якому функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набуває значення 0, називають нульовим набором функції f . Одиничною множиною функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається множина усіх одиничних наборів, а нульовою множиною – множина всіх нульових наборів [11].

Булева функція задається кінцевим набором значень, це дозволяє записати її у вигляді таблиці істинності. Наприклад:

Таблиця 1.1

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0

1	0	0
1	1	1

Теорема (Про потужність множини булевих функцій). Загальна кількість усіх можливих булевих функцій, що залежать від n змінних, визначається формулою $N = 2^{2^n}$ [3].

Доведення. Для функції від n змінних існує рівно 2^n різних наборів значень її аргументів. Кожен такий набір відповідає одному рядку в таблиці істинності. Оскільки функція може набувати лише двох значень $\{0, 1\}$ на кожному наборі, для кожного з 2^n рядків таблиці існує рівно 2 варіанти заповнення.

Отже, загальна кількість усіх можливих комбінацій значень функції, а отже, і різних функцій, дорівнює добутку 2^n множників, кожний з яких дорівнює 2, тобто 2 в степені 2^n .

Ця формула показує, що хоча множина булевих функцій є скінченною, але кількість її елементів збільшенням n дуже швидко зростає із.

Так, наприклад

- При $n = 1$: Існує $2^1 = 2$ набори аргументів та $2^2 = 4$ різні функції.
- При $n = 2$: Існує $2^2 = 4$ набори та $2^4 = 16$ функцій.
- При $n = 3$: Кількість наборів зростає до $2^3 = 8$, а функцій – до $2^8 = 256$.

Експоненційний ріст кількості функцій обумовлює необхідність пошуку більш ефективних способів задання булевих функцій, ніж табличний.

1.2. Реалізація булевих функцій формулами

Розглянемо аналітичний метод або метод подання булевої функції за допомогою формул.

Елементарними булевими функціями називають булеві функції від однієї і двох змінних.

Таблиця 1.2

Булеві функції однієї змінної

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$ – константа 0;

$f_1 = x$ – тотожна функція;

$f_2 = \bar{x}$ – інверсія x або заперечення x ;

$f_3 = 1$ – константа 1.

Таблиця 1.3

Булеві функції двох змінних

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функції пронумеровані так, що номер функції, записаний у двійковій системі, дає послідовність значень відповідної функції. Більшість записаних функцій мають назви і спеціальні позначення.

I. $f_0(x_1, x_2)$ – константа 0;

$f_{15}(x_1, x_2)$ – константа 1.

II. $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ – кон'юнкція;

$f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2} = x_1 | x_2$ – заперечення кон'юнкції або штрих Шеффера.

III. $f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз'юнкція;

$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$ – заперечення диз'юнкції або стрілка Пірса.

IV. $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація;

$f_2(x_1, x_2) = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$ – заперечення імплікації.

V. $f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$ –антиімплікація;

$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$ –заперечення антиімплікації;

VI. $f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ –еквіваленція;

$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} = x_1 \oplus x_2$ –додавання за модулем два або сума Жегалкіна.

VII. $f_3(x_1, x_2) = x_1$;

$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ –інверсія x_1 .

VIII. $f_5(x_1, x_2) = x_2$;

$f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ –інверсія x_2 .

За допомогою елементарних функцій, визначених у таблицях 1.1 та 1.2, можна зобразити будь-яку булеву функцію в аналітичній формі, використовуючи операцію суперпозиції.

Операція суперпозиції полягає в тому, що одні булеві функції підставляються замість змінних у інші булеві функції. Замість змінних можуть підставлятися інші змінні (перейменування змінних), при цьому деякі змінні можуть ототожнюватися. Операція суперпозиції можлива завдяки збігу області значень булевої функції з областю визначення кожної змінної [14].

Вираз, який описує суперпозицію та містить функціональні символи, круглі дужки й символи змінних, називають *формулою*.

Про формулу, яка задає функцію, говорять, що вона *реалізує* цю функцію

Приклад. Запишіть вираз $Q = f_7(f_1(x_1, x_2), f_6(x_1, x_2))$ у вигляді формули.

Розв'язання. f_1 – кон'юнкція, f_6 – додавання за $mod 2$, f_7 – диз'юнкція.

Формула має вигляд: $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \oplus x_2)$.

Складемо таблицю істинності для цієї формули.

Таблиця 1.4

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \oplus x_2$	Q
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

1.3. Фіктивні змінні

Булеві функції залежать від набору значень змінних, проте вклад кожної змінної у значення функції може бути різним. Залежно від цього, розрізняють істотні (суттєві) та фіктивні (неістотні) змінні.

Означення. Змінна x_i називається істотною (суттєвою) для булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо існує хоча б один набір значень змінних $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, для якого значення функції безпосередньо залежить від x_i :

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Означення. Змінна x_i називається фіктивною (неістотною) для функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо для всіх можливих наборів значень інших змінних значення функції залишається незмінним:

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Іншими словами, зміна значення фіктивної змінної x_i ніяк не впливає на результат функції f .

Наслідок. Якщо змінна x_i є фіктивною для функції f , то існує булева функція g від $n - 1$ змінної, така що:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Функція g називається власною підфункцією функції f і отримується шляхом вилучення фіктивної змінної [5].

Означення. Дві булеві функції f та g вважаються рівними (або еквівалентними), якщо одну з них можна отримати з іншої шляхом додавання або вилучення будь-якої кількості фіктивних змінних.

Теорема (Критерій фіктивної змінної). Змінна x_i є фіктивною для функції $f(x_1, \dots, x_n)$ тоді й лише тоді, коли для будь-яких двох наборів α та β , які відрізняються лише значенням у i -й позиції, виконується рівність $f(\alpha) = f(\beta)$.

Доведення:

1. Необхідність. Якщо x_i – фіктивна, то за означенням, на всіх наборах, що відрізняються лише значенням x_i , функція набуває одного й того ж значення. Отже, для будь-яких α та β , які відрізняються лише в i -й компонент, $f(\alpha) = f(\beta)$.
2. Достатність. Якщо для будь-яких двох таких наборів значення функції збігаються, це означає, що значення функції не залежить від значення x_i , отже, за означенням, x_i є фіктивною [6].

Практичне значення фіктивних змінних.

1. Спрощення. Виявлення та вилучення фіктивних змінних дозволяє спрощувати функції, зменшуючи кількість змінних, не змінюючи їхньої сутності.
2. Уніфікація. Введення фіктивних змінних дає змогу розглядати функції з різною кількістю аргументів як рівні, що важливо для побудови загальної теорії.
3. Реалізація. При проектуванні логічних схем фіктивні змінні можуть бути проігноровані, що веде до створення більш економних та ефективних пристроїв [16].

Приклад. Визначити, які змінні функції $f(x, y) = x \vee \bar{y}$ є істотними, а які – фіктивними.

Розв'язання:

Змінна x :

Розглянемо, чи впливає x на значення функції. Зафіксуємо, наприклад, $y = 0$.

При $x = 0$: $f(0,0) = 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1$.

При $x = 1$: $f(1,0) = 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1$.

Значення функції не змінилося. Однак, треба перевірити для іншого значення y .

$y = 1$.

При $x = 0$: $f(0,1) = 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0$.

При $x = 1$: $f(1,1) = 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1$.

$0 \neq 1$. Отже, існує набір ($y = 1$), для якого змінна x змінює значення функції.
 x —істотна змінна.

Змінна y :

Аналогічно, перевіримо чи є істотною змінна y . Зафіксуємо $x = 0$.

При $y = 0$: $f(0,0) = 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1$.

При $y = 1$: $f(0,1) = 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0$.

$1 \neq 0$. Висновок: y —істотна змінна.

Відповідь: Змінні x та y істотні.

Приклад. Функція $\varphi(x, y, z)$ задана таблицею. Чи є змінна x фіктивною?

Якщо так, то утворити нову функцію $\psi(y, z)$ шляхом вилучення змінної x з функції $\varphi(x, y, z)$ (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

Табличне задання функції $\varphi(x, y, z)$

x	y	z	$\varphi(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Змінна x – фіктивна, бо її зміна при зафіксованих значеннях y та z не впливає на значення функції $\varphi(x, y, z)$. Тому функція $\varphi(x, y, z)$ може бути визначена заданням лише половини таблиці на наборах аргументів, у яких $x = 0$, інакше кажучи, таблицю можна скоротити.

Таблиця 1.6

Табличне задання функції $\psi(y, z)$

$y z$	$\psi(y, z)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Відповідь: змінна x – фіктивна.

1.4. Алгебра Буля

Булева алгебра – це алгебраїчна структура з уведеними двома бінарними операціями та однією унарною. Бінарні операції: диз'юнкції (булеве додавання), яке позначається $\vee$, та кон'юнкція (булеве множення), яке позначається $\wedge$. Унарна операція: заперечення (булеве доповнення), яке позначається $\bar{x}$.

Формули в алгебрі Буля будують за допомогою констант 0 і 1, знаків операцій $\vee$, $\wedge$, $\bar{x}$, символів змінних та круглих дужок.

Якщо немає дужок спочатку виконується операція заперечення, потім кон'юнкція, остання виконується диз'юнкція.

Наприклад замість $\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee (x_1 x_2)$ можна записати $\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_1 x_2$ [3].

Закони алгебри Буля

1. Закони асоціативності $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3$, $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$;
2. Закони комутативності $x_1 x_2 = x_2 x_1$, $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$;
3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції

$$(x_1 \vee x_2)x_3 = x_1x_3 \vee x_2x_3;$$

4. Дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції

$$x_1x_2 \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3);$$

5. Закон подвійного заперечення $\bar{\bar{x}} = x$;

6. Закони де Моргана $\overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$, $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$;

7. Закони ідемпотентності $xx = x$, $x \vee x = x$;

8. Закони поглинання $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$, $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$;

9. Співвідношення для констант $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$, $1x = x$, $0x = 0$, $1 \vee x = 1$, $0 \vee x = x$;

10. Закон виключеного третього $x \vee \bar{x} = 1$;

11. Закон суперечності $x\bar{x} = 0$.

Закони булевої алгебри дають змогу доводити еквівалентності не використовуючи таблиць, а на основі тотожних перетворень.

Закони 1, 2, 3 визначають ґратку. Закони 1, 2, 3, 4 визначають дистрибутивну ґратку. Закони 1, 2, 3, 5 визначають доповнену ґратку [11].

Приклад. Довести дві рівності:

$$\text{а) } (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) = x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_4$$

Розв'язання. Застосуємо закони дистрибутивності і отримаємо.

$$(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee (x_1 \vee x_2)x_4 = x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_4$$

$$\text{б) } x_1x_2 \vee x_3x_4 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_4)$$

Як і в попередньому пункті застосовує закони дистрибутивності

$$x_1x_2 \vee x_3x_4 = (x_1 \vee x_3x_4)(x_2 \vee x_3x_4) = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_4)$$

РОЗДІЛ 2. СПЕЦІАЛЬНІ ФОРМИ ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ В АЛГЕБРИ БУЛЯ

2.1. Диз'юнктивні нормальні форми

Диз'юнктивна нормальна форма або ДНФ – це нормальна форма, в якій булева формула матиме вигляд диз'юнкції кількох кон'юнктив. Кон'юнкти – це кон'юнкції кількох пропозиційних символів або їх заперечень.

Нехай t – параметр, який дорівнює 1 або 0.

Введемо таке позначення $x^t = xt \vee \bar{x}\bar{t}$. Тоді очевидно, що

$$x^t = \begin{cases} x, & \text{якщо } t = 1, \\ \bar{x}, & \text{якщо } t = 0 \end{cases}$$

Зауважимо: $t^t = 1$.

Вираз $d = x_{i_1}^{t_1} x_{i_2}^{t_2} x_{i_3}^{t_3} \dots x_{i_r}^{t_r}$ називають елементарною кон'юнкцією [9].

Число r називається рангом кон'юнкції.

Якщо $r = 0$ кон'юнкція є порожньою та дорівнює 0.

Елементарна кон'юнкція – це кон'юнкція довільного числа булевих змінних, які взято із запереченням чи без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Константа 1 містить нуль змінних та є елементарною кон'юнкцією.

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ множина змінних.

Конституентною одиниці називають таку елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X . Тобто конституента одиниці – це елементарна кон'юнкція, яка має ранг n . Тоді очевидним є те, що усіх різних конституент одиниці для множини $X \in 2^n$, як двійкових наборів з n компонентами.

Теорема (Властивість конституенти одиниці). Конституента одиниці $K = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}$ набуває значення 1 на єдиному наборі

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

та значення 0 на всіх інших наборах значень змінних [2].

Доведення. За означенням $x_i^{\sigma_i}$, цей вираз дорівнює 1 лише при $x_i = \sigma_i$. Елементарна кон'юнкція набуває значення 1 тоді і тільки тоді, коли всі її множники дорівнюють 1. Отже, $K = 1$ лише за умови, що $x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_n = \sigma_n$

одночасно. На будь-якому іншому наборі значень принаймні для однієї змінної x_j буде виконуватись $x_j \neq \sigma_j$, тому $x_j^{\sigma_j}$, що обумовлює $K = 0$.

2.1.1. Алгоритм побудови ДНФ для формули булевої алгебри

Алгоритм побудови ДНФ для формули булевої алгебри

1. За допомогою законів де Моргана та подвійного заперечення формулу перетворюють у рівносильну, побудовану зі змінних та їх заперечень за допомогою символів $\wedge, \vee$ (заперечення можуть стояти лише над змінними).

2. Досягають того, щоб усі кон'юнкції виконувалися раніше диз'юнкції. Для цього розкривають дужки на основі першого дистрибутивного закону.

3. На основі співвідношень для констант і закону протиріччя виключають нулі й на основі законів ідемпотентності об'єднують рівні члени. Це і є шукана ДНФ.

ДНФ булевої функції не єдина [13].

Приклад. Звести формулу $\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2)$ до ДНФ.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2) &= \overline{x_1 \vee x_3}(\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{x_1} \overline{x_3}(\bar{x}_1 \vee x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_2 \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\end{aligned}$$

Приклад. Побудувати ДНФ для функції $g(a, b, c) = (a \oplus b) \wedge (b \rightarrow c)$.

Перетворимо формулу, замінивши всі логічні операції на кон'юнкцію, диз'юнкцію та заперечення.

$$\begin{aligned}g &= (a \oplus b) \wedge (b \rightarrow c) \\ a \oplus b &\equiv (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \\ b \rightarrow c &\equiv \bar{b} \vee c \\ g &= ((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge (\bar{b} \vee c)\end{aligned}$$

Застосовуємо дистрибутивність кон'юнкції відносно диз'юнкції:

$$\begin{aligned}
g &= [(a \wedge \bar{b}) \wedge (\bar{b} \vee c)] \vee [(\bar{a} \wedge b) \wedge (\bar{b} \vee c)] \\
&= [(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)] \vee [(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)] \\
&= [(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)] \vee [(0) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)] = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c).
\end{aligned}$$

Відповідь: $g(a, b, c) = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)$.

2.1.2. Алгоритм побудови ДДНФ

ДДНФ або досконалою диз'юнктивною нормальною формою називають таку ДНФ, в якій кожна елементарна кон'юнкція є конституентою одиниці [17].

ДДНФ має задовольняти такі умови:

1. У ній немає рівних доданків;
2. Ні один доданок не може містити двох однакових співмножників;
3. Ні один доданок не може містити змінну разом з її запереченням;
4. Кожний окремий доданок має співмножник, це або змінна, або її заперечення [4].

Теорема. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \neq 0$ можна подати в ДДНФ єдиним способом [1].

Алгоритм побудови ДДНФ для функції, яка задана таблично

1. Для кожного набору, на якому дана функція приймає значення 1, будують відповідну цьому набору конституенту одиниці.
2. Знаходять диз'юнкцію всіх цих конституент. Це і є ДДНФ заданої функції.

Приклад. Побудувати ДДНФ для функції яка задана таблицею 2.1

Таблиця 2.1

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	1

0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Нам потрібно розглянути значення змінних при яких функція дорівнюватиме 1. Це 2, 3 та 5 рядки. Якщо значення змінної дорівнює 1 її записують без інверсії, але якщо воно дорівнює 0, то її запишуть з інверсією.

1) $x_1=0, x_2=0, x_3=1$. Тоді перший член ДДНФ функції матиме вигляд:

$$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3;$$

2) $x_1=0, x_2=1, x_3=0$. Тоді другий член ДДНФ функції матиме вигляд:

$$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3;$$

3) $x_1=1, x_2=0, x_3=0$. Тоді третій член ДДНФ функції матиме вигляд:

$$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3;$$

Диз'юнкція цих конститuent і є ДДНФ заданої функції.

$$f = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \vee x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$$

$$\text{Відповідь: } f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \vee x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$$

Приклад. Знайти ДДНФ функції

Таблиця 2.2

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1

0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Розв'язання аналогічне до попереднього. Нам потрібно розглянути значення змінних при яких функція дорівнюватиме 1.

1) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Тоді перший член ДДНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4$;

2) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$. Тоді другий член ДДНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$;

3) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$. Тоді третій член ДДНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$;

4) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$. Тоді четвертий член ДДНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$;

5) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$. Тоді п'ятий член ДДНФ функції матиме вигляд: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$;

6) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$. Тоді шостий член ДДНФ функції матиме вигляд: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$;

Ми проаналізували всі потрібні нам комірочки. Запишемо диз'юнкцію цих конститuant, це і буде ДДНФ.

$$f = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \wedge x_4 \vee \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Довільну ДНФ можна звести до ДДНФ розщепленням кон'юнкцій, які містять не всі змінні. Якщо кон'юнкція k не містить змінної x_i , то записують:

$$k = k(x_i \vee \bar{x}_i) = kx_i \vee k\bar{x}_i$$

Приклад. Перетворити диз'юнктивну нормальну форму $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ у ДДНФ.

Розв'язання. Перший диз'юнктивний член не містить змінної x_2 . Використо-

$$\begin{aligned} \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 &= \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \\ &= \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \end{aligned}$$

Відповідь: $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

2.2. Кон'юнктивні нормальні форми

Двоїтим способом, замінюючи в означеннях диз'юнкції кон'юнкціями, а одиниці нулями і навпаки, означають поняття елементарної диз'юнкції, конституенти нуля, кон'юнктивної нормальної форми, досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) – це кон'юнкція $d_1 \wedge d_2 \wedge d_3 \wedge \dots \wedge d_k$ елементарних диз'юнкцій $d_i (i = 1, 2, 3, \dots, i)$, у якій всі d_k різні. Отже,

кон'юнктивна нормальна форма – це нормальна форма, в якій булева формула матиме вигляд кон'юнкції кількох диз'юнктив [10].

2.2.1. Алгоритм побудови КНФ для формули булевої алгебри

Для будь-якої формули алгебри буля можна знайти рівносильну до неї кон'юнктивну нормальну форму. Це робиться за алгоритмом:

1. Аналогічно як і для ДНФ.

2. На другому етапі треба зробити щоб усі диз'юнкції винонувались раніше ніж кон'юнкції. Для цього користуються дистрибутивним законом або наслідком з нього.

3. На третьому етапі вилучають одиниці за допомогою співвідношень для констант і закону виключення третього та об'єднують рівні члени на підставі законів ідемпотентності [15].

Приклад. Для формули $\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2)$ знайдемо КНФ.

Розв'язання. Застосовуючи наведений вище алгоритм, отримаємо

$$\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2) = \overline{x_1} \overline{x_3}(x_1 \vee x_2)$$

$$\text{Відповідь: } \overline{x_1} \overline{x_3}(x_1 \vee x_2) .$$

2.2.2. Алгоритм побудови ДКНФ

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називається КНФ, у якої кожна елементарна диз'юнкція є конститuentoю нуля.

ДКНФ – це ДНФ, яка задовільняє такі три умови.

- 1) Не містить однакових елементарних кон'юнкцій
- 2) Жодна з кон'юнкцій не містить однакових змінних.
- 3) Кожна елементарна кон'юнкція містить кожен змінну з тих, що входять до цієї КНФ, до того ж в однаковому порядку [10].

Теорема. Довільна булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$ може бути зображена в ДКНФ єдиним способом [8].

Алгоритм побудови ДКНФ для функції, яка задана таблично

1. Для кожного набору, на якому функція приймає значення 0, будують відповідну цьому набору конституенту нуля.
2. Знаходять кон'юнкцію всіх цих конституент. Це і є ДКНФ заданої функції.

Приклад: Побудувати ДКНФ задану таблицею

Таблиця 2.3

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0

1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Розглянемо значення змінних при яких функція дорівнює 0. Якщо значення змінної дорівнює 0 тоді її записують без інверсії, але якщо воно дорівнює 1, то її запишуть з інверсією.

- 1) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$. Тоді перший член ДКНФ функції матиме вигляд: $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$;
- 2) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$. Тоді другий член ДКНФ функції матиме вигляд: $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$;
- 3) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$. Тоді третій член ДКНФ функції матиме вигляд: $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$;
- 4) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$. Тоді четвертий член ДКНФ функції матиме вигляд: $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$;
- 5) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Тоді п'ятий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$;
- 6) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$. Тоді шостий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$;
- 7) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$. Тоді восьмий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$;
- 8) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$. Тоді шостий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$;
- 9) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$. Тоді десятий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$;
- 10) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$. Тоді одинадцятий член ДКНФ функції матиме вигляд: $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$;

Ми проаналізували всі потрібні нам комірочки. Отже, ДКНФ даної функції буде

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

На основі тотожних перетворень довільну КНФ можна перетворити у ДКНФ. Якщо у деяку елементарну диз'юнкцію α не входить змінна x_i , то використовується розщеплення диз'юнкції $\alpha = \alpha \vee x_i \bar{x}_i = (\alpha \vee x_i)(\alpha \vee \bar{x}_i)$ і другий дистрибутивний закон. Після тривіальних перетворень отримується ДКНФ.

Приклад. Перетворити КНФ $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)$ у ДКНФ.

Розв'язання. В елементарну диз'юнкцію $\bar{x}_1 \vee x_2$ не входить змінна x_3 , в елементарну диз'юнкцію $x_2 \vee \bar{x}_3$ – змінна x_1 . Використовуючи розщеплення диз'юнкції, можна записати:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_2 \vee \bar{x}_3) &= (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_3)(x_1 \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = \\ (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) &= \\ (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3). \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$$

2.3. Властивості досконалих форм

1. У ДДНК та ДКНФ не може бути двох однакових мінтермів (макстермів).

Мінтерм – це логічний вираз, що використовує лише операції кон'юнкції та доповнення. Кількість мінтермів рівна кількості кортежів змінних.

2. Жоден з макстермів або мінтермів не може містити двох однакових змінних. Довільна диз'юнктивна або кон'юнктивна нормальна форма не дає однозначного подання функції, яке буде тільки при ДКНФ та ДДНФ.

3. Жодний з макстермів і мінтермів в ДКНФ та ДДНФ не містять разом зі змінною заперечення цієї змінної.

4. Будь-яку функцію в булевій алгебрі можна подати у вигляді ДКНФ і ДДНФ [4].

РОЗДІЛ 3. МОЖЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ФОРМ ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ В АЛГЕБРИ БУЛЯ У ЗЗСО

3.1. Методичні аспекти вивчення булевої алгебри в ЗЗСО.

Програма факультативного курсу з математики для 9 класу «Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі» (Розглянуто на засіданні МО вчителів природничої кафедри Нововолинського ліцею №1 Протокол №1 від 28 серпня 2025р.)

Автор: Добровольська Анастасія, вчитель математики Нововолинського ліцею №1 Волинської області.

Пояснювальна записка

Сучасний розвиток інформаційних технологій та комп'ютерних наук висуває нові вимоги до математичної освіти учнів. Зокрема, знання основ булевої алгебри стає невід'ємною частиною підготовки сучасного школяра. Ця дисципліна є теоретичною основою для програмування, проектування логічних схем та розв'язання складних логічних задач .

Мета пропонованого факультативу: ознайомити учнів з основами булевої алгебри, сформувати вміння працювати з булевими функціями та нормальними формами, розвинути логічне мислення через розв'язання олімпіадних задач.

Основні завдання курсу:

- 1) Оволодіння основами булевої алгебри та логіки висловлювань.
- 2) Формування вмінь будувати та спрощувати булеві функції.
- 3) Розвиток навичок розв'язання логічних задач олімпіадного рівня.
- 4) Підготовка до участі в математичних олімпіадах та конкурсах.
- 5) Застосування знань булевої алгебри в програмуванні та інформатиці.

Програма спрямована на формування таких ключових компетентностей:

Математична компетентність: вміння застосовувати математичні знання для розв'язання практичних задач.

Інформаційно-цифрова компетентність: розуміння логічних основ комп'ютерних технологій, застосування на уроках математики та інформатики.

Креативність: розвиток логічного та алгоритмічного мислення, застосування набутих знань для розв'язання олімпіадних задач.

Навчальні пріоритети курсу:

1. Поглиблення математичної освіти через опанування учнями фундаментальних понять сучасної дискретної математики;
2. Розвиток логіко-абстрактного мислення шляхом формування вмінь аналізувати складні логічні структури;
3. Олімпіадна підготовка з математики та інформатики через розв'язування нестандартних логічних задач;
4. Інтеграція знань з різних предметних галузей – математики, інформатики та основ програмування;
5. Фундаменталізація підготовки з метою створення міцної бази для подальшого вивчення дискретної математики в старшій школі.

Унікальність підходу полягає в поєднанні теоретичної основи булевої алгебри з практичними застосуваннями в програмуванні та розв'язуванні олімпіадних задач, що забезпечує комплексний розвиток математичних здібностей учнів [11].

Факультативний курс "Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі" Розраховано на 12 занять для учнів 9 класів.

Розподіл навчального часу за темами (усього 12 годин)

Таблиця 3.1

№	Тема	Кількість годин
1	Булеві змінні, операції, таблиці істинності	2
2	Закони булевої алгебри. Спрощення виразів	2
3	Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми (ДНФ, КНФ)	2

4	Досконалі нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ)	2
5	Розв'язування логічних задач. Олімпіадні задачі.	2

Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

Таблиця 3.2

<i>К-сть годин</i>	<i>Зміст навчального матеріалу</i>	<i>Навчальні досягнення учнів</i>
2	<i>Тема 1. Булеві змінні, операції, таблиці істинності</i> <i>Поняття булевої змінної. Базові логічні операції: кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення. Побудова таблиць істинності для логічних виразів.</i>	<i>Вміють будувати таблиці істинності для складних логічних виразів. Розпізнають та застосовують базові логічні операції.</i>
2	<i>Тема 2. Закони булевої алгебри. Спрощення виразів</i> <i>Основні закони булевої алгебри: комутативний, асоціативний, дистрибутивний, де Моргана. Методи спрощення логічних виразів.</i>	<i>Застосовують закони булевої алгебри для спрощення логічних виразів. Доводять логічні тотожності.</i>
2	<i>Тема 3. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми</i> <i>Поняття ДНФ та КНФ. Алгоритми перетворення довільних логічних виразів до нормальних форм.</i>	<i>Вміють перетворювати довільні логічні вирази до ДНФ та КНФ. Аналізують логічні вирази різної структури.</i>

2	Тема 4. Досконалі нормальні форми Поняття ДДНФ та ДКНФ. Методи побудови досконалих нормальних форм за таблицею істинності.	Будують ДДНФ та ДКНФ для заданих булевих функцій. Застосовують досконалі форми для розв'язування логічних рівнянь.
2	Тема 5. Розв'язування логічних задач Методи розв'язування складних логічних задач. Аналіз умови задачі, побудова логічної моделі, перевірка рішень. Підведення підсумків.	Розв'язують логічні задачі підвищеної складності. Будують логічні моделі реальних ситуацій.

Календарно-тематичне планування. Факультативний курс "Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі"

9 клас (12 занять, 1 раз на тиждень)

Таблиця 3.3

№	Тема заняття	Дата проведення
1	Булеві змінні, операції, таблиці істинності	05.09
2	Булеві змінні, операції, таблиці істинності	12.09
3	Закони булевої алгебри. Спрощення виразів	19.09
4	Закони булевої алгебри. Спрощення виразів	26.09

5	Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми (ДНФ, КНФ)	03.10
6	Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми (ДНФ, КНФ)	10.10
7	Досконалі нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ)	17.10
8	Досконалі нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ)	24.10
9	Розв'язування логічних задач. Олімпіадні задачі.	07.11
10	Підсумкове заняття. Контроль набутих знань	14.11

3.2. Розробка практичних завдань та проектів для учнів

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

Дата: 05.09

Клас: 9

Тема: Булеві змінні, операції, таблиці істинності

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з поняттям булевих змінних, основними логічними операціями (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція) та навчити будувати таблиці істинності для простих логічних виразів.

Виховна: виховувати логічну культуру мислення, акуратність при заповненні таблиць, уміння чітко висловлювати думки.

Розвивальна: розвивати логічне та абстрактне мислення, уміння аналізувати логічні структури, проводити аналогії з реальними життєвими ситуаціями.

Тип: комбіноване заняття.

Методи та форми проведення: пояснювально-ілюстративний метод, практичні вправи, проблемні ситуації, фронтальна та індивідуальна робота.

Хід заняття

1. Організаційний момент

- Привітання.
- Оголошення теми та мети заняття.
- Мотивація

2. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування: Що таке «так» і «ні» у математиці? Які пристрої у вашому домі мають лише два стани? (наприклад, вимикач, кнопка дзвінка). Як комп'ютер розрізняє інформацію?

3. Пояснення нового матеріалу

Булеві змінні:

- Це змінні, які можуть набувати лише двох значень: 0 («хибність») або 1 («істина»).
- Приклади: $x = 1$ (вимикач увімкнено), $y = 0$ (вимикач вимкнено).

Логічні операції: Розглянемо основні логічні операції булевої алгебри.

- 1) Заперечення (ні) – позначається $\bar{x}$. Змінює значення на протилежне.

Таблиця 3.4

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

- 2) Кон'юнкція (і) – позначається $\wedge$. Результат буде рівний 1, якщо обидва вирази дорівнюють 1.

Таблиця 3.5

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

1	1	1
---	---	---

- 3) Диз'юнкція (або) – позначається $\vee$. Результат буде рівний 1, якщо хоча б один вираз дорівнює 1.

Таблиця 3.6

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблиці істинності.

Алгоритм побудови:

1. Визначити кількість змінних.
2. Записати всі можливі комбінації значень.
3. Обчислити результат для кожної комбінації.

Приклад: Побудувати таблицю для $(x \wedge y) \vee \bar{x}$:

Розв'язання: Побудуємо таблицю за три кроки. Спочатку $x \wedge y$, потім $\bar{x}$, та $(x \wedge y) \vee \bar{x}$.

Таблиця 3.7

x	y	$x \wedge y$	$\bar{x}$	$(x \wedge y) \vee \bar{x}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

4. Практична робота

Завдання 1. Побудуйте таблицю істинності для виразу $\overline{(x \vee y)}$

Розв'язання:

Таблиця 3.8

x	y	$x \vee y$	$\overline{(x \vee y)}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Завдання 2. Складіть таблицю для виразу $(x \wedge y)(\bar{x} \wedge \bar{y})$

Розв'язання:

Таблиця 3.9

x	y	$x \wedge y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$(x \wedge y)(\bar{x} \wedge \bar{y})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

5. Підведення підсумків

- Що таке булева змінна?
- Назвіть основні логічні операції.

6. Домашнє завдання

1. Побудувати таблиці істинності для виразів:

1) $(x \vee \bar{y})$

$$2) \bar{y} \vee (x \wedge y)$$

2. Придумати 2 приклади з життя, які описуються булевими функціями.

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

Дата: 19.09

Клас: 9

Тема: Закони булевої алгебри. Спрощення виразів

Мета:

Навчальна: ознайомити учнів з основними законами булевої алгебри, навчити застосовувати їх для спрощення логічних виразів.

Виховна: виховувати логічну культуру мислення, акуратність у маніпуляціях з формулами, уважність.

Розвивальна: розвивати логічне мислення, уміння аналізувати та порівнювати, формувати навички алгебраїчних перетворень.

Тип: комбіноване заняття.

Методи та форми проведення: пояснювально-ілюстративний метод, практичні вправи, проблемні ситуації, фронтальна та індивідуальна робота.

Хід заняття

1. Організаційний момент

- Привітання.
- Оголошення теми та мети заняття.
- Мотивація

2. Актуалізація опорних знань

Що таке булеві змінні? Назвіть основні логічні операції. Що показує таблиця істинності?

3. Пояснення нового матеріалу

Булева алгебра, як і звичайна, має свої закони, які дозволяють спрощувати складні логічні вирази. Закони (аксіоми) алгебри Буля:

1. Закони асоціативності. Порядок виконання однойменних операцій не має значення. Як у звичайній математиці

$$(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3) = x_1 x_2 x_3,$$

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3;$$

2. Закони комутативності. Можна міняти місцями змінні при однойменних операціях.

$$x_1 x_2 = x_2 x_1,$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1;$$

3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції. Кон'юнкція дистрибутивна відносно диз'юнкції. Це означає, що при множенні логічної суми на змінну, ми можемо послідовно помножити кожен доданок суми на цю змінну. Ця властивість аналогічна дистрибутивному закону в класичній алгебрі.

$$(x_1 \vee x_2) x_3 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3;$$

4. Дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції. Диз'юнкція дистрибутивна відносно кон'юнкції. Ця властивість специфічна для булевої алгебри і не має аналога в звичайній алгебрі. Вона дозволяє "виносити" за дужки спільний диз'юнктивний член.

$$x_1 x_2 \vee x_3 = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3);$$

5. Закон подвійного заперечення. Два заперечення повертають нам початкове значення.

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

6. Закони де Моргана. Заперечення кон'юнкції еквівалентне диз'юнкції заперечень, і навпаки.

$$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2;$$

7. Закони ідемпотентності. Повторення однієї й тієї ж змінної не змінює результату.

$$xx = x, x \vee x = x;$$

8. Закони поглинання. Одна частина виразу "поглинає" іншу, спрощуючи вираз.

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1, x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1;$$

9. Співвідношення для констант

$$\bar{1} = 0, \bar{0} = 1, 1x = x, 0x = 0, 1 \vee x = 1,$$

$$0 \vee x = x;$$

10. Закон виключеного третього. Змінна або істинна, або хибна.

$$x \vee \bar{x} = 1;$$

11. Закон суперечності. Змінна не може бути одночасно істинною і хибною.

$$x\bar{x} = 0.$$

Приклад. Довести дві рівності:

$$A) (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee k) = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 k \vee x_2 k$$

Розв'язання: застосуємо закони дистрибутивності і отримаємо.

$$(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee k) = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee (x_1 \vee x_2)k = x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 k \vee x_2 k$$

$$B) x_1 x_2 \vee x_3 k = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee k)(x_2 \vee k)$$

Як і в попередньому пункті застосовує закони дистрибутивності

$$x_1 x_2 \vee x_3 k = (x_1 \vee x_3 k)(x_2 \vee x_3 k) = (x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee k)(x_2 \vee k)$$

4. Практична робота

Завдання 1. Спростити вираз $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$

Розв'язання:

Дистрибутивність: $a \wedge (a \vee \bar{b})$

Застосовуємо закон доповнення: $b \vee \bar{b} = 1$

Отримуємо $a \wedge 1 = a$

Відповідь: a

Завдання 2. Спростити вираз $\overline{(\bar{x} \vee y)} \vee x$

Розв'язання:

1. Застосовуємо закон де Моргана: $\overline{(\bar{x} \vee y)} = x \wedge \bar{y}$

2. Підставляємо: $(x \wedge \bar{y}) \vee x$

3. Виносимо X за дужки: $x \wedge (\bar{y} \vee 1)$

4. Застосовуємо закон тотожності: $\bar{y} \vee 1 = 1$

5. Отримуємо: $x \wedge 1 = x$

Відповідь: x

Завдання 3. Довести тотожність $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b$

1. Застосовуємо дистрибутивність: $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee b$

2. Застосовуємо закон доповнення: $a \wedge \bar{a} = 0$

3. Отримуємо:

Відповідь: тотожність доведена

5. Підведення підсумків

1. Які основні закони булевої алгебри ви запам'ятали?

2. Чому важливо вміти спрощувати логічні вирази?

3. Де можна застосувати ці знання на практиці?

6. Домашнє завдання

1. Спростити вирази:

a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$

b) $\overline{(a \wedge b)} \vee (a \wedge \bar{b})$

2. Довести тотожність: $(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) = a \vee b$

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

Дата: 03.10

Клас: 9

Тема: Диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ)

Мета:

Навчальна: Сформувати в учнів уміння перетворювати логічні вирази до нормальних форм.

Виховна: виховувати логічну культуру мислення, уважність.

Розвивальна: розвивати логічне мислення, уміння аналізувати та порівнювати, формувати навички алгебраїчних перетворень.

Тип: комбіноване заняття.

Методи та форми проведення: пояснювально-ілюстративний метод, практичні вправи, індивідуальна робота.

Хід заняття

1. Організаційний момент

- Привітання
- Оголошення теми та мети заняття
- Мотивація: "Нормальні форми - це універсальний спосіб представлення логічних функцій, який використовується при проектуванні цифрових пристроїв".

2. Вхідна діагностика

Мета: Визначити початковий рівень логічного мислення учнів до вивчення формальної теорії.

Учням роздаються бланки **Частини 1 "Логічний інтелект"**.

Інструктаж: Перш ніж ми зануримося в нові поняття, давайте перевіримо вашу логіку. Заповніть анкету самостійно. На виконання — 15 хвилин.

3. Актуалізація знань

Які булеві операції ви знаєте? Що таке елементарна кон'юнкція? Наведіть приклад дистрибутивного закону.

4. Пояснення нового матеріалу

Означення: ДНФ - це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.

Уявіть, що ви складаєте список умов для будь-якої події. Наприклад, умови, за яких ви підете гуляти:

1. "Я піду гуляти, якщо не йде дощ"
2. "Я піду гуляти, якщо світить сонце І тепло"
3. "Я піду гуляти, якщо друг теж йде"

ДНФ - це спосіб записати всі ці умови у вигляді єдиного правила:

"Я піду гуляти, якщо: (не йде дощ) АБО (світить сонце І тепло) АБО (друг теж йде)

Алгоритм побудови ДНФ:

1. Замінити всі похідні операції на базові ($\wedge$, $\vee$, $\neg$)

2. Перенести заперечення до окремих змінних
3. Усунути подвійні заперечення
4. Застосувати дистрибутивність та закони поглинання

Приклад. Звести формулу $\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2)$ до ДНФ.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\overline{x_1 \vee x_3}(x_1 \rightarrow x_2) &= \overline{x_1 \vee x_3}(\bar{x}_1 \vee x_2) = \overline{x_1 x_3}(\bar{x}_1 \vee x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_2 \\ &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3\end{aligned}$$

Приклад. Побудувати ДНФ за таблицею істинності для $f(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$.

Таблиця 3.10

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Розв'язання:

Функція дорівнює 1 на наборах:

$$(1,1): x_1 \wedge x_2;$$

$$(0,0): \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2.$$

Тоді отримаємо ДНФ $f = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$.

5. Практична робота

Завдання 1. Побудувати ДНФ для функції $f(x, y, z) = x \rightarrow (y \wedge (z \rightarrow x))$.

Розв'язання:

Замінюємо імплікації на базові операції. $z \rightarrow x = \bar{z} \vee x$. Отримаємо $f(x, y, z) = \bar{x} \vee (y \wedge (\bar{z} \vee x))$.

Застосовуємо дистрибутивний закон $y \wedge (\bar{z} \vee x) = (y \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x)$.

Отримаємо $f(x, y, z) = \bar{x} \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge x)$.

Спростимо вираз, та отримаємо: $f(x, y, z) = \bar{x} \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y)$.

Завдання 2. Побудувати ДНФ за таблицею істинності для функції трьох змінних.

Таблиця 3.11

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Розв'язання:

Для кожного одиничного набору записуємо конституенту одиниці.

$$(0,0,0): \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$$

$$(0,1,0): \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$$

$$(1,0,1): x \wedge \bar{y} \wedge z$$

$$(1,1,0): x \wedge y \wedge \bar{z}$$

Записуємо ДНФ як диз'юнкцію конститuent.

$$f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}).$$

6. Підведення підсумків

- Які форми називають нормальними?
- Які є етапи побудови ДНФ?

7. Домашнє завдання

1. Перетворити до ДНФ: $g(a, b, c) = (a \oplus b) \wedge (b \vee c)$.
2. Побудувати ДНФ за таблицею істинності для функції двох змінних.

Таблиця 3.12

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

Дата: 10.10

Клас: 9

Тема: Кон'юнктивні нормальні форми (КНФ)

Мета:

Навчальна: Сформувати в учнів уміння перетворювати логічні вирази до кон'юнктивних нормальних форм.

Виховна: виховувати логічну культуру мислення, уважність.

Розвивальна: розвивати логічне мислення, уміння аналізувати та порівнювати, формувати навички алгебраїчних перетворень.

Тип: комбіноване заняття.

Методи та форми проведення: пояснювально-ілюстративний метод, практичні вправи, групова робота.

Хід заняття

1. Організаційний момент

- Привітання.
- Оголошення теми та мети заняття.
- Мотивація: КНФ дозволяють представити складні логічні умови у стандартизованому вигляді, що є важливим у програмуванні та проектуванні логічних схем.

2. Актуалізація знань

- Які булеві операції ви знаєте? Що таке ДНФ?

3. Пояснення нового матеріалу

Означення: КНФ - це логічний вираз, який представлений у вигляді кон'юнкції однієї або декількох елементарних диз'юнкцій.

Алгоритм побудови КНФ:

1. Виконати кроки 1-3 алгоритму ДНФ
2. Застосувати дистрибутивність диз'юнкції
3. Спростити вираз за законами булевої алгебри

Приклад. Побудувати КНФ для функції еквівалентності.

Розв'язання: Функція хибна на наборах (0,1) та (1,0):

$$(0,1): a \vee \bar{b}$$

$$(1,0): \bar{a} \vee b$$

Тоді отримаємо КНФ: $(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$.

Приклад. Побудуємо КНФ для функції, заданої таблицею.

Таблиця 3.13

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Розв'язання: Записуємо елементарні диз'юнкції:

$$(0,0): a \vee b$$

$$(1,1): \bar{a} \vee \bar{b}$$

Об'єднуємо їх у КНФ.

Відповідь: $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})$.

4. Практична робота

Завдання 1. Побудувати КНФ для функції, заданої таблицею.

Таблиця 3.14

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Розв'язання:

Елементарні диз'юнкції:

$$(0,01): x \vee y \vee \bar{z}$$

$$(0,1,1): x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$$

$$(1,1,0): \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$$

Отже, КНФ $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

Завдання 2. Побудувати КНФ для функції $f(a, b) = a \rightarrow b$.

Розв'язання: Складемо таблицю істиності для $f(a, b) = a \rightarrow b$.

Таблиця 3.15

a	b	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Функція дорівнює 0 лише на наборі (1,0). Елементарна диз'юнкція для (1,0): $\bar{a} \vee b$.

Відповідь: $\bar{a} \vee b$.

5. Підведення підсумків

- 1) Що таке КНФ?
- 2) Як побудувати КНФ за таблицею істинності?
- 3) У чому різниця між ДНФ та КНФ?

6. Домашнє завдання

1. Побудувати КНФ для функції $f(x, y) = x \oplus y$.
2. Побудувати КНФ для функції, заданої таблицею.

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

Дата: 14.11

Клас: 9

Тема: Підсумковий урок. Контроль знань з курсу «Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі»

Мета:

Навчальна: перевірити та оцінити рівень засвоєння учнями знань з булевої алгебри та вмінь застосовувати їх на практиці.

Виховна: виховувати відповідальність, самостійність, вольові якості та культуру навчальної праці.

Розвивальна: розвинути вміння концентруватися, аналізувати, логічно мислити та приймати рішення в обмежений час.

Тип: урок контролю та корекції знань.

Методи та форми проведення: тестування, письмова контрольна робота, індивідуальна робота.

Обладнання: роздатковий матеріал (бланки Частини 1 та Частини 2), секундомір.

Хід заняття

1. Організаційний момент

Привітання. Оголошення теми та структури підсумкового заняття.

Мотивація: Сьогодні ми підведемо підсумки нашої спільної роботи. Це шанс продемонструвати всі знання та навички, які ви отримали за час курсу. Результати тестів допоможуть нам оцінити ефективність навчання.

2. Інструктаж щодо проведення роботи

Пояснити учням структуру роботи:

Частина 1: "Логічний інтелект" (15 хвилин).

Перерва (2 хвилини) для відпочинку.

Частина 2: "Булева алгебра" (25 хвилин) – контрольні завдання з основних тем курсу.

Нагадати правила: працювати самостійно, не використовувати підручники та конспекти.

3. Проведення діагностики "Логічний інтелект" (15 хв)

Блок А:

Завдання 1. Кафе оголосило акцію: "Кава у подарунок, якщо ви зробили замовлення після 15:00 або сума вашого замовлення понад 200 гривень".

Визнач, чи отримає клієнт подарункову каву (обведи "Так" або "Ні"):

а) Замовлення о 14:30 на 250 гривень.

Кава? Так / Ні

б) Замовлення о 16:00 на 150 гривень.

Кава? Так / Ні

в) Замовлення о 17:00 на 300 гривень.

Кава? Так / Ні

Завдання 2. Знайдіть закономірність і продовжіть послідовність:
2, 5, 11, 23, 47, ?

Блок Б:

Завдання 3. Вставте пропущене число:

4 → 20

6 → 42

7 → 56

9 → ?

Завдання 4. Заповни порожню клітинку, продовживши логічну послідовність.

Таблиця 3.16

2	5	8
7	10	13
12	15	?

Відповідь: _____

Завдання 5. У кожному рядку і стовпці мають бути три різні геометричні фігури (круг, квадрат, трикутник). Деякі фігури вже розставлені. Заповни порожні клітинки.

Таблиця 3.17

	□	○
○		△
□	△	

Блок В:

Завдання 6. Троє друзів — Іван, Петро та Степан — живуть у різних містах: у Києві, Львові та Одесі. Відомо, що:

1. Іван не живе ні в Києві, ні в Одесі.
2. Петро не живе в Одесі.

Визнач, у якому місті живе кожен з друзів.

Відповідь:

- Іван: _____
- Петро: _____
- Степан: _____

Завдання 7. Після шкільного конкурсу з'ясувалося, що троє учнів — Анна, Богдан та Вікторія — посіли перше, друге та третє місце. Коли їх спитали про результати, вони відповіли:

- Анна: "Я посіла перше місце."
- Богдан: "Я посів не перше місце."
- Вікторія: "Я посіла не останнє місце."

Відомо, що **лише одна** людина сказала правду. Хто посів перше місце?

Відповідь: Перше місце посів(ла) _____

5. Проведення контрольної роботи "Булева алгебра" (25 хв)

1. Встановіть відповідність.

- 1) Кон'юнкція
- 2) Диз'юнкція
- 3) Заперечення
- 4) Імплікація

А) $\bar{a}$

Б) $a \wedge b$

В) $a \rightarrow b$

Г) $a \vee b$

2. Спростіть вираз, використовуючи закони булевої алгебри $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b)$.

3. Побудувати таблицю істинності для виразу $(a \rightarrow b) \wedge a$.

4. Для функції F, заданої таблицею істинності:

Таблиця 3.18

a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	1

0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- а) Запишіть ДДНФ (Досконалиу Диз'юнктивну Нормальну Форму) для функції $f(a, b, c)$.
- б) Запишіть ДКНФ (Досконалиу Кон'юнктивну Нормальну Форму) для функції $f(a, b, c)$.

6. Підведення підсумків курсу

Фронтальна бесіда:

Які теми курсу були для вас найцікавішими?

Де ви можете застосовувати знання з булевої алгебри у майбутньому (програмування, математика, побутова логіка)?

Які завдання здалися найскладнішими і чому?

Чи допоміг курс розвинути логічне мислення?

3.3. Експериментальне дослідження ефективності запропонованої методичної розробки

Розроблений факультативний курс "Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі" для 9-х класів спрямований на поглиблене вивчення принципів логіки та розвиток практичних навичок розв'язування задач. Дослідження організовано у форматі вхідного та вихідного тестування з використанням спеціально розроблених діагностичних матеріалів.

Мета експерименту полягала у практичній перевірці ефективності розробленого курсу шляхом вимірювання динаміки рівня знань та розвитку логічного мислення в одній групі учнів до і після навчання.

Основні завдання експерименту:

1. Визначити рівень засвоєння учнями ключових понять булевої алгебри та оцінити динаміку розвитку їх логічного мислення.

2. Підібрати та адаптувати діагностичний інструментарій для вимірювання початкового та кінцевого рівня знань з булевої алгебри.

1. Провести констатувальний етап (вхідне тестування) для виявлення початкового рівня знань групи.

2. Реалізувати формувальний етап: провести факультативний курс для всієї групи.

3. Провести контрольний етап (вихідне тестування) для фіксації результатів навчання.

4. Зіставити результати вхідного та вихідного тестувань, проаналізувати динаміку та зробити висновки про ефективність методичної розробки.

На першому занятті було проведено вхідну діагностику логічного мислення за допомогою спеціально розробленого тесту, що складався з трьох блоків завдань.

Результати вхідної діагностики:

Блок А: Аналіз умов

Завдання 1 (умова "І"): 45% учнів повністю правильно виконали завдання

Завдання 2 (умова "АБО"): 52% учнів показали правильне розуміння операції

Типовою помилкою було неправильне трактування логічних зв'язків між умовами

Блок Б: Логічні сітки та послідовності

Завдання 3. 68% учнів визначили правильну закономірність

Завдання 4. 41% учнів правильно заповнили всі клітинки

Найбільші труднощі виникли з аналізом двох вимірів одночасно

Блок В: Логічні задачі

Завдання 5. 36% учнів повністю правильно визначили місця проживання

Завдання 6. лише 27% учнів дали правильну відповідь

Більшість учнів не змогли системно підійти до аналізу умови задачі.

Загальний рівень успішності склав 47%, що свідчить про недостатньо розвинені навички логічного аналізу на початку навчання. Найкращі результати спостерігалися в завданнях на числові послідовності (68%), тоді як задачі з аналізом суперечливих умов викликали найбільші труднощі (27% успішності). Отримані результати стали базою для порівняння з результатами вихідної діагностики після завершення курсу.

Результати вихідної діагностики після завершення курсу:

Після завершення факультативного курсу "Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі" було проведено повторне тестування за тими самими завданнями.

Блок А:

Завдання 1 (умова "І"): 91% учнів повністю правильно виконали завдання (+46%).

Завдання 2 (умова "АБО"): 95% учнів показали правильне розуміння операції (+43%).

Блок Б:

Завдання 3 (числова послідовність): 95% учнів визначили правильну закономірність (+27%).

Завдання 4 (просторове мислення): 86% учнів правильно заповнили всі клітинки (+45%).

Блок В:

Завдання 5 (дедуктивне мислення): 82% учнів повністю правильно визначили місце проживання (+46%).

Завдання 6 (аналіз суперечливих тверджень): 77% учнів дали правильну відповідь (+50%).

Середній рівень успішності зріс з 47% до 88%, що демонструє позитивну динаміку на 41%.

Найбільший прогрес спостерігається у завданнях, що вимагають формального логічного аналізу та роботи з суперечливими умовами.

Результати виконання завдань підсумкового оцінювання

Для оцінки засвоєння предметного змісту курсу було проведено підсумкове тестування, що включало завдання на застосування отриманих знань. Аналіз результатів дозволяє об'єктивно оцінити ефективність розробленого навчально-методичного комплексу та рівень сформованості практичних умінь учнів.

Завдання 1.

Результат: 95% учнів (21 учень) правильно встановили всі відповідності між логічними операціями та їх таблицями істинності. 5% учнів допустили помилку у розрізненні кон'юнкції та імплікації.

Завдання 2.

- 86% учнів (19 учнів) повністю правильно спростили вираз.
- 9% учнів (2 учні) допустили помилки на етапі застосування дистрибутивного закону.
- 5% учнів (1 учень) не впоралися із завданням.

Завдання 3.

- 91% учнів (20 учнів) правильно побудували таблицю істинності.

Найпоширенішою помилкою (9% учнів) було неправильне визначення значень імплікації.

Завдання 4.

- ДДНФ правильно записало 77% учнів (17 учнів).
- ДКНФ правильно записало 73% учнів (16 учнів).

Найскладнішим виявився перехід від таблиці істинності до досконалих нормальних форм.

Середній рівень успішності склав 86% по основним завданням курсу. Найкращі результати спостерігаються у завданнях на впізнавання логічних операцій та спрощення виразів, тоді як завдання на побудову досконалих нормальних форм викликали певні труднощі, що є закономірним для початкового етапу вивчення булевої алгебри.

Отримані результати свідчать про ефективне засвоєння учнями основних понять булевої алгебри та формування практичних навичок роботи з логічними виразами.

ВИСНОВКИ

Булеві функції є особливим класом двозначних функцій, у яких як аргументи, так і сама функція можуть приймати лише два значення 0 та 1.

Основними логічними операціями в алгебрі Буля є: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція. Таблична форма зображення логічних функцій широко використовується при розгляданні логічних функцій з малим числом аргументів. Для довільного числа змінних ця форма досить громіздка. При аналітичному зображенні функція задається алгебраїчним виразом, який отримують при застосуванні логічних операцій до змінних бульової алгебри. Така форма зображення зручна при аналізі властивостей функції, при виконанні різноманітних аналітичних перетворень.

Найбільш раціональним є зображення логічної функції в так званих спеціальних (нормальних) формах.

Спеціальними формами зображення булевих функцій в алгебрі Буля є диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ) та кон'юнктивні нормальні форми (КНФ).

ДНФ (КНФ) булевої функції не єдина. ДНФ (КНФ) можна перетворити у ДДНФ (ДКНФ).

ДДНФ (ДКНФ) булевої функції єдина, і саме ця єдиність є однією з ключових переваг даних нормальних форм.

У магістерській роботі розроблено факультативний курс для учнів 9-го класу про булеві функції. Методичні матеріали, включаючи тематичні плани та детальні конспекти уроків, були створені з урахуванням вікових особливостей учнів. Аналіз ефективності запровадження цього курсу засвідчив, що такий структурований підхід:

- 1) підвищує зацікавленість учнів у вивченні математики та інформатики;
- 2) сприяє формуванню абстрактного та алгоритмічного мислення;
- 3) демонструє прямий зв'язок між абстрактною математичною теорією та її застосуванням в програмуванні та логіці.

Таким чином, проведене дослідження має завершений цикл: від теоретичного аналізу булевих функцій та їх нормальних форм - через розгляд фундаментального принципу двоїстості - до практичної реалізації у вигляді конкретних алгоритмів і, нарешті, до методично обґрунтованого впровадження отриманих знань у навчальний процес. Це підтверджує, що тема є не лише важливою складовою математичної освіти, але й ефективним інструментом для розвитку логічного інтелекту учнів.

Список використаної літератури

1. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 254 с.
2. Балоба С. І. Дискретна математика : навчальний посібник. Ужгород : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2021. 124 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика : підручник. Київ : Вища школа, 2008. 383 с.
4. Борисенко О. А. Дискретна математика. Суми : Університетська книга, 2023. 255 с.
5. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики. Суми : Університетська книга, 2002. 180 с.
6. Гнатів Б. В., Гладун В. Р., Гнатів Л. Б. Дискретна математика. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2021. 400 с.
7. Добровольська А. О. Мінімізація булевих функцій та їх застосування у схемотехніці. Матеріали ХІХ Міжнародної науково-практичної конференції «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (13–14 травня 2025 року) у Волинському національному університеті імені Лесі Українки, С.312-314.
8. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. Київ : Наукова думка, 2002. 567 с.
9. Марченко М. Т., Мацелюх Р. Є. Дискретна математика : практикум. Тернопіль : ТНТУ, 2016. 147 с.
10. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Київ : Ліра-К, 2019. 324 с.
11. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика : підручник. Львів : Магнолія плюс, 2024. 432 с.
12. Скобелєв Г. М. Елементи дискретної математики : спеціальний курс факультативних занять у 9 класі. Київ : Радянська школа, 1970. 180 с.

13. Темнікова О. Л., Тавров Д. Ю. Дискретна математика. Частина 1 : практикум. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 121 с.
14. Швай О. Л. Практикум із дискретної математики. Луцьк: РВВ Вежа-Друк, 2025. 230 с.
15. Huth M., Ryan M. Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. 387 с.
16. Mendelson E. Boolean Algebra and Switching Circuits. Mineola, NY : Dover Publications, 2009. 268 с.
17. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications. 8th ed. New York : McGraw-Hill Education, 2018. 1072 с.

ДОДАТОК

Історичні відомості про розвиток булевої алгебри

У середині XIX століття ірландський математик Джордж Буль (*George Boole*) написав роботу «Дослідження законів мислення» (*Investigation the laws of thought*), в якій заклав основи алгебри логіки, в якій діють закони, схожі з законами звичайної алгебри, але буквами позначаються не числа, а висловлювання. Алгебра логіки Буля стала зародком нової науки – математичної логіки. Його система оперувала лише двома значеннями: 0 (хибність або порожній клас) та 1 (істина або універсальний клас). Ця бінарність, що здавалася суто абстрактною, згодом виявилася ключовою для цифрових технологій. Наприкінці того ж століття німецький логік Ернст Шредер здійснив сувору систематизацію та узагальнення булевих ідей у своїй фундаментальній праці «Алгебра логіки».

На початку XX ст. (1910 р.) вчений Еренфест П.С. вказав на можливість застосування апарату булевої алгебри в телефонному зв'язку для опису перемикальних ланцюгів. У 1938-1940 роках майже одночасно з'явилися роботи Шестакова В. І., Клода Шеннона і японських учених Накасими і Хакадзави про застосування математичної логіки в цифровій техніці. Так, Клод Шеннон у своїй університетській роботі на ступінь магістра, застосував булеву алгебру для опису електротехнічних схем і одночасно показав зворотне – як електричні схеми можуть бути використані для розв'язання логічних задач булевої алгебри.

Перша монографія, присвячена використанню математичної логіки при проектуванні цифрової апаратури, була опублікована Гавриловим М.А. (1950 р.) Його книга «Теорія релейно-контактних схем» не лише узагальнила накопичений досвід, але й стала основним підручником для цілого покоління інженерів-схемотехніків. У ній були детально розглянуті методи аналізу, синтезу та мінімізації складних комутаційних схем, що започаткувало нову прикладну дисципліну. Практично одночасно у західній науковій літературі з'являються аналоги цих методів, що свідчить про глобальну актуальність відкриття.

Великий внесок у розвиток булевої логіки зробили математик Порицький П.С. та американський математик і логік Еміль Пост (*Post Emil*) та інші.

Надзвичайно важлива роль булевої логіки в розвитку сучасної мікропроцесорної техніки: вона використовується в проектуванні апаратних засобів ЕОМ, у розробці мов програмування, в конструюванні дискретних пристроїв автоматики.

Принципи булевої логіки стали наріжним каменем архітектури сучасних обчислювальних машин. Бінарна система числення, яка безпосередньо відображається в станах "істина" (1) та "хибність" (0), ідеально лягла на основу булевої алгебри. Всі сучасні центральні процесори (CPU) по суті є складними пристроями, що виконують мільйони операцій булевої алгебри (AND, OR, NOT, XOR) за секунду над бітами даних. Архітектурні рішення, такі як конвеєризація команд, кешування пам'яті та прогнозування переходів, також базуються на складних логічних схемах, синтезованих за законами Буля. Розробка мов програмування низького рівня (асемблера) та високого рівня також неможлива без використання булевих змінних, операторів порівняння та логічних умов (if-else, while), що є прямим наслідком логічного числення.

Таким чином, історична еволюція булевої алгебри демонструє унікальний шлях від абстрактної філософсько-математичної концепції до практичного інструменту, що сформував технологічну основу сучасності. Її подальший розвиток тісно пов'язаний із такими перспективними напрямками, як квантові обчислення (квантова логіка) та розробка нових нефоннейманівських архітектур, що підтверджує її невичерпний потенціал.

АНОТАЦІЯ

Добровольська Анастасія Олександрівна. Спеціальні способи задання булевих функцій у алгебрі Буля. Магістерська робота за спеціальністю 111 «Математика». Луцьк: Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2025. 59 с.

Предметом дослідження є теоретичні основи булевих функцій, зокрема спеціальні (нормальні) форми їх зображення, та методичні аспекти їх вивчення у закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО).

Метою роботи є системний аналіз теорії спеціальних форм зображення булевих функцій (ДНФ, КНФ, ДДНФ, ДКНФ) та розробка на його основі ефективної методики їх вивчення в умовах шкільного факультативного курсу.

Для досягнення мети вирішено низку завдань: проведено аналітичний огляд історичних та теоретичних джерел; сформульовано основні поняття теорії булевих функцій та алгебри Буля; детально досліджено алгоритми побудови нормальних і досконалих нормальних форм двома методами (за таблицею істинності та шляхом еквівалентних перетворень); обґрунтовано доцільність включення елементів булевої алгебри до навчального процесу ЗЗСО; розроблено авторську програму та повний методичний комплекс для факультативного курсу «Булева алгебра: основи логіки та олімпіадні задачі» для 9 класу; експериментально перевірено ефективність запропонованої методики.

Наукова новизна дослідження полягає в комплексному підході, що поєднує фундаментальний аналіз канонічних способів представлення булевих функцій із розробкою конкретних навчально-методичних матеріалів, адаптованих для учнів старшої школи. Окремою новизною є інтеграція теоретичного матеріалу з практикою розв'язування олімпіадних логічних задач, що сприяє формуванню прикладних умінь.

Теоретичне значення роботи полягає в систематизації знань про нормальні форми булевих функцій, узагальненні алгоритмів їх побудови та формалізації їх властивостей.

Практична значимість отриманих результатів підтверджується апробованим у шкільній практиці методичним комплексом, який включає календарно-тематичне планування, детальні конспекти занять, набори практичних завдань і контрольно-діагностичні матеріали. Розробки можуть бути використані вчителями математики та інформатики для проведення факультативів, підготовки учнів до олімпіад, а також у вищій школі на початкових етапах вивчення дискретної математики.

Ключові слова: булева алгебра, булеві функції, диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ), кон'юнктивна нормальна форма (КНФ), досконалі нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ), спеціальні форми зображення, методика викладання, факультативний курс, логічне мислення.

ABSTRACT

Dobrovolska Anastasiia Oleksandrivna. Special Methods of Representing Boolean Functions in Boolean Algebra. Master's Thesis in the specialty 111 "Mathematics". Lutsk: Lesya Ukrainka Volyn National University, 2025. 59 pages.

The subject of this study is the theoretical foundations of Boolean functions, in particular, their special (normal) forms of representation, as well as methodological aspects of their study within the framework of general secondary education institutions.

The aim of the thesis is to conduct a systematic analysis of the theory behind special forms of representing Boolean functions (DNF, CNF, PDNF, PCNF) and to develop an effective teaching methodology based on this analysis, tailored for use in school elective courses.

To achieve this aim, a number of tasks were accomplished: an analytical review of historical and theoretical sources was conducted; the fundamental concepts of Boolean functions and Boolean algebra were formulated; the algorithms for constructing normal and perfect normal forms using two approaches (truth tables and equivalent transformations) were thoroughly examined; the relevance of introducing elements of Boolean algebra into the school curriculum was substantiated; a comprehensive author-developed program and methodological toolkit were created for the elective course "Boolean Algebra: Foundations of Logic and Olympiad Problems" designed for grade 9; and the effectiveness of the proposed methodology was experimentally verified.

The scientific novelty of the research lies in the integrated approach that combines an in-depth analysis of canonical methods for representing Boolean functions with the development of specific educational and methodological materials adapted for high school students. A distinct contribution is the integration of theoretical content with the practice of solving Olympiad-level logical problems, which promotes the development of applied skills.

The theoretical significance of the work is reflected in the systematization of knowledge about normal forms of Boolean functions, the generalization of construction algorithms, and the formalization of their properties.

The practical value of the results is confirmed by the implementation of the developed methodological toolkit in actual school settings. This toolkit includes a calendar-based thematic plan, detailed lesson scripts, sets of practice problems, and assessment materials. These resources can be utilized by mathematics and computer

science teachers for elective courses, Olympiad training, and in higher education at the introductory level of discrete mathematics instruction.

The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusions, a list of references, and appendices. The first chapter presents the theoretical foundations, including definitions of Boolean functions, methods of their representation, their properties, and the axiomatic system of Boolean algebra. The second chapter is devoted to a detailed analysis of special representation forms - DNF, CNF, PDNF, and PCNF - with descriptions of construction algorithms and a comparative study of their properties. The third chapter substantiates the pedagogical value of the topic in general secondary education, presents the author's design of the elective course, and analyzes the results of its experimental implementation.

Keywords: Boolean algebra, Boolean functions, disjunctive normal form (DNF), conjunctive normal form (CNF), perfect normal forms (PDNF, PCNF), special forms of representation, teaching methodology, elective course, logical reasoning