

Міністерство освіти і науки України
Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

На правах рукопису

Міщук Анна Анатоліївна

**ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРІЇ 9 КЛАСУ В
ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійна програма: Середня освіта. Математика

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ПАДАЛКО НІНА ЙОСИПІВНА,

доцент кафедри теорії функцій

та методики навчання математики,

кандидат педагогічних наук

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри теорії функцій та методики математики

від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Гембарська С.Б. _____

ЛУЦЬК – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У 9 КЛАСІ.....	7
1.1 Поняття, види та основні властивості геометричних перетворень. Типові задачі з теми у курсі геометрії 9 класу	7
1.2 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автори: Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., та ін.)	13
1.3 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.).....	23
1.4 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автор: Істер О. С.).....	29
1.5 Порівняння змісту та підходу до вивчення теми «Геометричні перетворення» у різних підручниках геометрії для 9 класу	38
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІКТ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ В 9 КЛАСІ.....	49
2.1 Особливості засвоєння теми «Геометричні перетворення» учнями 9 класу та типові труднощі	49
2.2 Методика застосування ІКТ на різних етапах уроку з теми «Геометричні перетворення».....	58
2.3 Розробка та аналіз уроків з теми «Геометричні перетворення» із використанням ІКТ	64
2.4 Апробація методики та аналіз результатів впровадження ІКТ у навчання теми «Геометричні перетворення»	73
ВИСНОВКИ	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	90
ДОДАТКИ.....	103

ВСТУП

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю модернізації методики викладання геометрії у загальноосвітній школі відповідно до вимог сучасного інформаційного суспільства та потреб цифрового покоління учнів. Геометричні перетворення є однією з фундаментальних тем шкільного курсу геометрії, яка формує просторове мислення учнів, розвиває їхні абстрактні уявлення та закладає основи для подальшого вивчення математичних дисциплін у вищій школі. Водночас традиційні методи викладання цієї теми часто не забезпечують достатнього рівня розуміння матеріалу учнями, оскільки креслення у підручниках та на дошці не дозволяють повною мірою продемонструвати динамічну природу геометричних перетворень. Інформаційно-комунікаційні технології відкривають нові можливості для візуалізації геометричних об'єктів та процесів їх перетворення, надають інструменти для інтерактивного дослідження властивостей фігур, сприяють індивідуалізації навчання та підвищенню мотивації учнів до вивчення математики.

Наукове значення дослідження полягає у теоретичному обґрунтуванні методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення геометричних перетворень з урахуванням психологічних особливостей учнів дев'ятого класу, специфіки змісту навчального матеріалу та дидактичних можливостей сучасних цифрових інструментів.

Практичне значення роботи визначається розробкою конкретних методичних рекомендацій щодо застосування інформаційно-комунікаційних технологій на різних етапах уроків геометрії, створенням комплексу навчальних матеріалів із використанням цифрових технологій та апробацією запропонованої методики у реальному освітньому процесі, що дозволяє підвищити ефективність навчання та якість засвоєння учнями теми геометричних перетворень.

Аналіз наукових літературних джерел з теми дослідження охоплює праці вітчизняних та зарубіжних науковців у галузі методики викладання математики, зокрема роботи присвячені загальним питанням методики навчання геометрії в основній школі, дослідження психолого-педагогічних аспектів засвоєння геометричного матеріалу підлітками, праці з теорії та методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у математичній освіті. Особлива увага приділена аналізу сучасних навчальних програм з геометрії для дев'ятого класу закладів загальної середньої освіти, підручників різних авторських колективів, методичних посібників для вчителів та публікацій у фахових педагогічних виданнях, що висвітлюють досвід застосування цифрових технологій у навчанні геометрії такі як: Н. Балик, О. Барна, Г. Шмигер, Ю. Ботузова, В. Олексюк [1], Л. Гриневич, Н. Морзе [4], Н. Валько, І. Василяшко, Д. Васильєва, С. Волянська, О. Гриб'юк, О. Данилова, В. Пікалова, Л. Рождественська, О. Струтинська, та ін.

Проведений аналіз засвідчив, що попри значну кількість досліджень окремих аспектів проблеми, питання комплексної методики використання інформаційно-комунікаційних технологій саме у процесі вивчення геометричних перетворень у дев'ятому класі залишається недостатньо розробленим, що підтверджує актуальність обраної теми магістерської роботи.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування та розробка методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення теми геометричні перетворення в курсі геометрії дев'ятого класу загальноосвітньої школи, яка забезпечить підвищення якості засвоєння навчального матеріалу та розвиток математичної компетентності учнів.

Відповідно до мети сформульовано такі **завдання дослідження**:

- проаналізувати теоретичні та методичні основи вивчення геометричних перетворень у шкільному курсі геометрії,
- розглянути поняття, види та основні властивості геометричних перетворень, систематизувати типові задачі з теми у курсі геометрії дев'ятого класу;

- здійснити порівняльний аналіз модельних навчальних програм з геометрії для сьомого-дев'ятого класів закладів загальної середньої освіти різних авторів та відповідних підручників з точки зору реалізації в них теми геометричні перетворення;
- вивчити особливості засвоєння теми геометричні перетворення учнями дев'ятого класу та визначити типові труднощі, що виникають у процесі її опанування;
- розробити методiku застосування інформаційно-комунікаційних технологій на різних етапах уроку з теми геометричні перетворення;
- створити конкретні розробки уроків із використанням інформаційно-комунікаційних технологій та провести їх апробацію в освітньому процесі;
- проаналізувати результати впровадження запропонованої методики та оцінити її ефективність.

Об'єктом дослідження є процес навчання геометрії в дев'ятому класі загальноосвітньої школи.

Предметом дослідження - використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення теми геометричні перетворення в курсі геометрії дев'ятого класу.

Для вирішення поставлених завдань використано комплекс методів наукового дослідження, зокрема теоретичні методи, які включають аналіз філософської, психолого-педагогічної, методичної літератури та нормативних документів з питань організації навчання геометрії в основній школі, систематизацію та узагальнення наукових положень щодо використання інформаційно-комунікаційних технологій у математичній освіті, порівняльний аналіз навчальних програм та підручників з геометрії різних авторів; емпіричні методи, що охоплюють педагогічне спостереження за навчальним процесом на уроках геометрії, бесіди з учителями та учнями, анкетування учнів з метою виявлення труднощів у засвоєнні теми геометричні перетворення та ставлення до використання інформаційно-комунікаційних

технологій на уроках, педагогічний експеримент з апробації розробленої методики; методи математичної статистики для обробки та інтерпретації результатів дослідження.

Історія розвитку математичної проблеми геометричних перетворень сягає давніх часів, коли в роботах давньогрецьких математиків з'явилися перші ідеї симетрії та руху фігур на площині. Систематичний розвиток теорії геометричних перетворень розпочався у дев'ятнадцятому столітті у зв'язку з роботами видатних математиків, які розглядали геометрію як науку про інваріанти перетворень. У двадцятому столітті ідеї геометричних перетворень отримали важливе значення не лише в математиці, але й у фізиці, техніці, мистецтві, що зумовило необхідність їх вивчення у шкільному курсі.

В українській методичній традиції тема геометричних перетворень поступово входила до шкільних програм, змінюючи обсяг і глибину викладу залежно від загальних концепцій математичної освіти. Сучасний етап розвитку методики навчання геометричних перетворень характеризується активним використанням інформаційно-комунікаційних технологій, які дозволяють реалізувати діяльнісний підхід до вивчення матеріалу, забезпечити наочність та інтерактивність навчального процесу, створити умови для самостійного дослідження учнями властивостей геометричних перетворень та розвитку їхнього математичного мислення.

Апробація роботи. Робота доповідалась на XIV міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта» і результати дослідження опубліковані у збірнику тез «Математика. Інформаційні технології. Освіта» Луцьк-Світязь 13 червня – 15 червня 2025 р. [72, с.223].

Структура роботи складається зі вступу, двох розділів, висновків, переліку використаної літератури і додатків. Загальний обсяг роботи включає 89 сторінок.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У 9 КЛАСІ

1.1 Поняття, види та основні властивості геометричних перетворень. Типові задачі з теми у курсі геометрії 9 класу

Геометричне перетворення являє собою відображення площини на себе, за якого кожній точці площини ставиться у відповідність єдина точка цієї ж площини. Математики розглядають це явище як особливий вид функції, що діє у геометричному просторі. Олександр Погорелов трактував геометричне перетворення як правило, що встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини [31, с.10]. Левон Атанасян розумів під цим поняттям бієктивне відображення множини точок на себе, коли кожна точка має єдиний образ і єдиний прообраз [38, с.5]. Михайло Бурда визначав геометричне перетворення як спосіб переведення фігури у нове положення зі збереженням або зміною певних властивостей [36, с.11].

Центральною ідеєю геометричних перетворень постає принцип відповідності, коли початкова точка називається прообразом, а отримана після перетворення точка отримує назву образу. Вивчення цих процесів дозволяє встановлювати зв'язки між різними геометричними об'єктами та виявляти їхні спільні характеристики. Перетворення площини застосовуються для дослідження симетрії фігур, побудови зображень та розв'язування складних геометричних задач.

Геометричні перетворення поділяються на дві великі категорії залежно від того зберігають вони відстані між точками чи змінюють їх. Рухи належать до перетворень першого типу, адже під час їх виконання всі відстані залишаються незмінними, форма та розміри фігур зберігаються повністю. До рухів належать паралельне перенесення, обертання навколо точки, осьова симетрія та центральна симетрія. Другу категорію становлять перетворення

подібності, що змінюють розміри фігур у певне число разів, але зберігають їхню форму. Гомотетія виступає основним представником цієї групи перетворень [44, с.12].

Паралельне перенесення здійснюється шляхом переміщення кожної точки фігури на однаковий вектор, внаслідок чого фігура змінює своє положення на площині без повороту чи відображення. Обертання навколо центру полягає у повороті всіх точок фігури на заданий кут відносно фіксованої точки. Осьова симетрія передбачає відображення фігури відносно прямої, коли кожна точка переходить у симетричну їй точку по інший бік осі на тій самій відстані від неї. Центральна симетрія здійснює відображення відносно точки, коли центр симетрії є серединою відрізка між прообразом та образом. Гомотетія перетворює фігуру так, що всі відстані змінюються у певний коефіцієнт, а точки прообразу, образу та центру гомотетії лежать на одній прямій.

Головною характеристикою будь-якого геометричного перетворення виступає його взаємна однозначність, що означає наявність у кожній точки площини єдиного образу та єдиного прообразу. Композиція перетворень дозволяє застосовувати послідовно кілька відображень, результат яких теж буде геометричним перетворенням. Оборотноість гарантує існування оберненого перетворення, що повертає образ у початкове положення. Інваріантність певних величин чи властивостей означає їх збереження під час перетворення, наприклад відстаней при рухах або відношень відстаней при подібності [32, с.13].

Рухи зберігають відстані між точками повністю, тому довжини відрізків, величини кутів, площі фігур та їхня форма залишаються незмінними. Внаслідок цього прообраз та образ при русі є рівними фігурами. Перетворення подібності перемножують всі лінійні розміри на один і той самий додатний коефіцієнт, зберігаючи при цьому кути та відношення відповідних відрізків. Площі фігур при гомотетії змінюються пропорційно квадрату коефіцієнта

подібності. Ізометрія як властивість рухів забезпечує збереження метричних характеристик, тоді як подібність зберігає кутові співвідношення та пропорції.

Завдання на паралельне перенесення передбачають побудову образу фігури після зміщення на заданий вектор. Учня пропонується знайти координати вершин многокутника після перенесення, якщо відомі координати вектора переміщення та початкові координати точок. Типовою задачею є побудова трикутника, отриманого паралельним перенесенням вихідного трикутника на вектор з компонентами 3 одиниці по горизонталі та 2 одиниці по вертикалі. Доведення того, що чотирикутник з вершинами у середніх точках сторін довільного чотирикутника є паралелограмом, спирається на властивості паралельного перенесення (табл.1.1 та рис.1.1.).

Таблиця 1.1. – Характеристики основних геометричних перетворень

Перетворення	Позначення	Інваріанти	Властивості образу
Паралельне перенесення	$T(v)$	відстані, кути, площі	рівний прообразу
Обертання	$R(O, \alpha)$	відстані, кути, площі	рівний прообразу
Осьова симетрія	$S(l)$	відстані, кути, площі	рівний прообразу
Центральна симетрія	$S(O)$	відстані, кути, площі	рівний прообразу
Гомотетія	$H(O, k)$	кути, відношення відрізків	подібний прообразу

Джерело: побудовано автором на основі [31; 32]

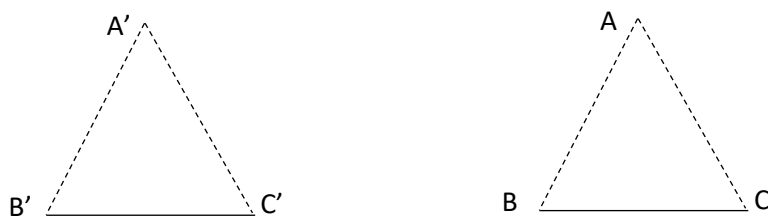


Рисунок 1.1. – Паралельне перенесення трикутника ABC у положення A'B'C'

Джерело: побудовано автором на основі [35; 36]

Обертання застосовується у задачах на побудову правильних многокутників та дослідження симетрії фігур. Дев'ятикласникам пропонується побудувати образ відрізка після повороту навколо заданої точки на кут 60 або

90 градусів. Знаходження центру та кута обертання, при якому один трикутник переходить у інший, розвиває просторове мислення. Доведення рівності відрізків через існування повороту, при якому вони накладаються, демонструє практичну цінність цього перетворення.

Осьова симетрія використовується для побудови симетричних фігур відносно прямої та дослідження властивостей фігур, що мають вісь симетрії. Побудова точки, симетричної даній відносно прямої, виконується шляхом проведення перпендикуляра до осі та відкладання рівної відстані по інший бік. Визначення кількості осей симетрії у правильних багатокутників, прямокутників, ромбів та інших фігур формує розуміння геометричної структури. Розв'язування задач на знаходження образу складної фігури при відображенні відносно осі, вимагає послідовного застосування означення симетрії до кожного елемента (рис.1.2.).

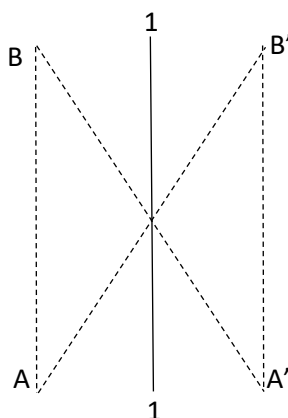


Рисунок 1.2. – Осьова симетрія трикутника відносно прямої l

Джерело: побудовано автором на основі [33; 36]

Центральна симетрія застосовується при вивченні властивостей фігур, що мають центр симетрії. Побудова фігури, що симетрична даній відносно точки, передбачає проведення променів через центр та відкладання рівних відстаней у протилежний бік. Доведення того, що паралелограм має центр симетрії у точці перетину діагоналей, ілюструє зв'язок між перетвореннями та властивостями фігур. Задачі на композицію центральних симетрій відносно

різних центрів показують, що результатом може бути паралельне перенесення [31, с.15].

Гомотетія вивчається у контексті подібності фігур та побудови зображень: побудова образу трикутника при гомотетії з центром у заданій точці та коефіцієнтом 2 або - 0,5 демонструє зміну розмірів та орієнтації, знаходження центру гомотетії та коефіцієнта за двома подібними фігурами розвиває аналітичні здібності, а доведення того, що середня лінія трикутника отримується гомотетією із центром у вершині та коефіцієнтом 0,5, встановлює зв'язок між різними геометричними фактами.

Комбіновані задачі вимагають застосування кількох перетворень послідовно. Знаходження образу точки після паралельного перенесення та наступного обертання формує навички роботи з композицією відображень, доведення рівності або подібності фігур через існування відповідного перетворення становить важливий метод геометричних міркувань, та побудова фігури за заданими умовами симетрії розвиває конструктивні вміння та просторову уяву учнів.

Розв'язування рівнянь та нерівностей геометричними методами спирається на перетворення графіків функцій: паралельне перенесення графіка функції вздовж осей координат дозволяє отримувати нові функції зі зміщеними властивостями; симетрія графіків відносно осей або початку координат вказує на парність або непарність функції; а гомотетія графіків застосовується при розтягуванні або стисканні вздовж координатних осей [44, с.16].

Побудова перерізів просторових тіл площинами використовує уявлення про паралельне перенесення площини. Щоб визначити форми перерізу куба, призми або піраміди потрібно розуміння того, як площина перетинає паралельні грані. Знання симетрії просторових тіл відносно площин або прямих допомагає легше розв'язувати складні стереометричні задачі. Та якщо обертати плоскі фігури навколо осей, створюються нові фігури - тіла обертання, які мають характерні властивості.

Практичні застосування геометричних перетворень зустрічаються у техніці, архітектурі та мистецтві. Наприклад: паралельне перенесення використовується при проектуванні орнаментів з повторюваними елементами; обертальна симетрія лежить в основі конструкції коліс, шестерень та інших обертових механізмів; дзеркальна симетрія архітектурних споруд створює враження гармонії та врівноваженості, а подібність фігур застосовується при масштабуванні креслень та створенні моделей реальних об'єктів [32, с.19].

Координатний метод суттєво спрощує роботу з геометричними перетвореннями: паралельне перенесення на вектор з координатами a та b виражається формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$; обертання навколо початку координат на кут α описується рівняннями $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$; симетрія відносно осі абсцис задається перетворенням $x' = x$, $y' = -y$, а відносно осі ординат формулами $x' = -x$, $y' = y$; центральна симетрія відносно початку координат має вигляд $x' = -x$, $y' = -y$; гомотетія з центром у початку координат та коефіцієнтом k виражається як $x' = kx$, $y' = ky$ (табл.1.2.).

Таблиця 1.2. – Типи задач на геометричні перетворення у 9 класі

Задача	Тип перетворення	Метод розв'язування
Побудова образу точки	будь-яке	застосування означення
Знаходження центру обертання	обертання	перетин серединних перпендикулярів
Доведення рівності фігур	рух	встановлення відповідності точок
Побудова подібної фігури	гомотетія	множення координат на коефіцієнт
Композиція перетворень	комбіноване	послідовне застосування

Джерело: побудовано автором на основі [36; 39]

Отже, вивчення геометричних перетворень формує системне розуміння властивостей фігур та розвиває математичне мислення учнів. Засвоївши цю тему учні не тільки ефективно розв'язують задачі, а й готові до вивчення аналітичної геометрії та лінійної алгебри у старших класах. Найголовніше, що ці знання мають реальну практичну цінність і проявляються у багатьох сферах людської діяльності: від комп'ютерної графіки до кристалографії та молекулярної біології [33, с.18].

1.2 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автори: Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., та ін.)

Модельна навчальна програма з геометрії для 7-9 класів закладів загальної середньої освіти розроблена авторським колективом під керівництвом Аркадія Мерзляка та Дмитра Номіровського відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти. Документ визначає обов'язковий мінімум змісту навчального предмета, очікувані результати навчання та рекомендований розподіл навчального часу за темами курсу. Програма побудована на засадах компетентнісного підходу, що передбачає формування в учнів здатності застосовувати геометричні знання для розв'язування практичних та теоретичних задач.

Структура програми охоплює пояснювальну записку, мету та завдання вивчення геометрії в основній школі, зміст навчального матеріалу за класами, державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів та орієнтовне календарно-тематичне планування. Загальний обсяг навчального часу становить 210 годин протягом трьох років навчання, що розподіляється як 70 годин на рік при двох уроках на тиждень. Автори програми передбачили резерв часу для повторення та узагальнення матеріалу, проведення контрольних робіт та корекції знань учнів [40, с.15].

Концептуальні засади програми спираються на принципи наступності, систематичності та послідовності у викладанні геометричного матеріалу: кожна наступна тема органічно поєднується з попередньою, розширюючи та поглиблюючи геометричні уявлення школярів. Дедуктивний метод побудови курсу передбачає виведення геометричних фактів з невеликої кількості аксіом та раніше доведених тверджень, а наочність та інтуїція доповнюються строгими логічними міркуваннями, що формує математичну культуру учнів.

Тема геометричних перетворень посідає особливе місце у структурі курсу геометрії основної школи, оскільки пронизує весь навчальний матеріал

та забезпечує методологічну основу для вивчення властивостей фігур. Згідно з програмою Мерзляка та Номіровського, систематичне вивчення перетворень розпочинається у 9 класі, проте підготовча робота ведеться впродовж усього курсу геометрії. Пропедевтичні елементи з'являються вже у 7 класі при розгляді рівності фігур та властивостей рівнобедреного трикутника, де неявно використовується ідея осової симетрії [45, с.10].

У 8 класі учні знайомляться з центральною симетрією при вивченні паралелограма та його властивостей, однак формальне означення перетворення ще не вводиться. Також розглядають властивості чотирикутників через призму симетрії, що готує ґрунт для усвідомленого сприйняття теми у 9 класі. Наприкінці року ще вивчається поняття подібності фігур, пов'язане з перетвореннями, хоча явно гомотетія на цьому етапі не розглядається.

Власне тема геометричних перетворень виділена окремим розділом у 9 класі, на вивчення якого відводиться 12 годин. Програма визначає чіткий перелік перетворень, що підлягають обов'язковому засвоєнню, включаючи рух як загальне поняття, та його конкретні види. Паралельне перенесення вивчається тут як найпростіший вид руху, що легко візуалізується та застосовується у практичних задачах, а обертання навколо точки, розглядається як узагальнення поняття повороту, знайоме учням ще з початкової школи та повсякденного життя [47, с.16].

У даній програмі інформація про типи перетворень формується таким чином: осова симетрія отримує строге математичне визначення після тривалої пропедевтичної роботи у попередніх класах; центральна симетрія вивчається як окремий випадок обертання на 180 градусів та водночас як самостійне перетворення з характерними властивостями; гомотетія вводиться як перетворення подібності, що встановлює зв'язок між подібними фігурами через єдиний центр та коефіцієнт; а композиція перетворень розглядається на окремих прикладах без детального вивчення всіх можливих комбінацій.

Метою вивчення теми геометричних перетворень у 9 класі є формування в учнів цілісного уявлення про геометричні фігури як об'єкти, пов'язані певними відношеннями, що описуються через перетворення. Дана програма орієнтує на розвиток просторового мислення та геометричної уяви школярів саме через практичну роботу з побудовою образів фігур при різних перетвореннях, а те, що учні мають розуміння інваріантних властивостей перетворень, сприяє глибшому усвідомленню геометричних закономірностей та зв'язків між різними фактами [51, с.19].

Освітні завдання включають засвоєння учнями означень основних видів геометричних перетворень та їхніх властивостей. Школярі мають не тільки навчитися розпізнавати тип перетворення за описом або зображенням, визначати образи конкретних точок та фігур при заданому перетворенні, а й опанувати важливу практичну складову навчання – формування навичок побудови образів фігур за допомогою креслярських інструментів. Крім того, доведення тверджень про властивості перетворень та застосування їх для обґрунтування геометричних фактів активно розвиває логічне мислення.

Розвивальні завдання теми передбачають формування вміння аналізувати геометричні ситуації через призму перетворень та вибирати найраціональніші способи розв'язування задач. Здатність до узагальнення геометричних фактів відбувається завдяки встановленню спільних властивостей різних видів рухів. А також, просторова уява ефективно удосконалюється під час уявного виконання перетворень та передбачення результатів їх застосування, а креативне мислення стимулюється задачами на композицію перетворень та знаходження нестандартних шляхів розв'язування.

Також дана тема в цій програмі має виховні завдання, які спрямовані на формування естетичного сприйняття геометричних форм через вивчення симетрії у природі та мистецтві. Наприклад: усвідомлення практичної значущості геометричних перетворень у техніці, архітектурі та повсякденному житті підвищує мотивацію до вивчення математики; акуратність та точність у виконанні геометричних побудов виховує старанність та відповідальність, а

колективна робота над складними задачами розвиває комунікативні компетентності та вміння працювати в команді [48, с.13].

Програма визначає поняття відображення площини на себе як основу для введення геометричних перетворень. Учні засвоюють, що перетворення встановлює відповідність між точками площини таким чином, що кожна точка має єдиний образ і, навпаки, кожен образ має єдиний прообраз. Важливе місце займає рух, який визначається як перетворення площини, що зберігає відстані між точками, звідки впливає збереження всіх метричних характеристик фігур. Завдяки цьому рівність фігур тлумачиться через існування руху, що переводить одну фігуру в іншу, що дозволяє об'єднати всі раніше розрізнені випадки рівності трикутників у єдину концепцію.

Паралельне перенесення вводиться як відображення площини, при якому кожна точка переміщується на один і той самий вектор. Програма передбачає вивчення властивостей паралельного перенесення, зокрема того факту, що пряма переходить у паралельну пряму або в себе, відрізок – у рівний відрізок, а кут – у рівний кут. Вивчення паралельного перенесення має практичну цінність, оскільки його застосовують для доведення властивостей паралелограма та інших фігур. Відповідно, побудова образів точок та фігур при паралельному перенесенні на заданий вектор формує в учнів практичні навички роботи з перетвореннями.

Геометричне перетворення - обертання навколо точки, розглядається як таке, при якому кожна точка повертається на заданий кут відносно фіксованого центру. Учні вивчають властивості обертання, включаючи збереження відстаней та кутів, а також той факт, що композиція двох обертань навколо однієї точки є обертанням навколо тієї ж точки. Застосування цього перетворення для побудови правильних багатокутників та дослідження їхньої симетрії показує зв'язок між перетвореннями та геометричними формами, а розв'язування задач на знаходження центру та кута обертання розвиває аналітичні здібності учнів [35, с.14].

Осьова симетрія визначається як відображення площини відносно прямої, при якому кожна точка переходить у точку, симетричну їй відносно осі. Програма акцентує увагу на властивості осьової симетрії як руху, що не є тотожним перетворенням та композицією якого із самою собою є тотожне перетворення. Вивчаючи фігури, що мають вісь симетрії, учні вивчають властивості рівнобедреного та рівностороннього трикутників, прямокутника, ромба, квадрата та кола, що сприяє глибшому розумінню взаємозв'язків між симетрією та геометричними формами.

Центральна симетрія вводиться як відображення площини відносно точки, при якому центр є серединою відрізка між прообразом та образом. Програма розглядає центральну симетрію одночасно як окремий випадок обертання на 180 градусів, та як самостійне перетворення з характерними властивостями. Учні досліджують фігури, що мають центр симетрії, включаючи паралелограм, коло, правильні многокутники з парною кількістю сторін.

Гомотетія з центром у точці та коефіцієнтом вводиться як перетворення подібності, що змінює відстані в певну кількість разів. У межах програми передбачено вивчення властивостей гомотетії: перехід прямої у паралельну пряму, збереження кутів та зміну відстаней і площ згідно з коефіцієнтом. Побудова образів фігур при гомотетії з різними коефіцієнтами, включаючи від'ємні значення, розвиває конструктивні навички в учнів (табл.1.3.).

Таблиця 1.3. – Розподіл навчального часу на вивчення геометричних перетворень у 9 класі

Тема	Кількість годин	Основні поняття	Типи задач
Поняття руху та відображення	1	відображення, рух, рівність фігур	розпізнавання перетворень
Паралельне перенесення	2	вектор перенесення, інваріанти	побудова образів, застосування властивостей
Обертання	2	центр обертання, кут повороту	побудова образів, знаходження центру

Продовження таблиці 1.3.

Осьова симетрія	2	вісь симетрії, симетричні точки	побудова образів, дослідження фігур
Центральна симетрія	2	центр симетрії, композиція	побудова образів, дослідження фігур
Гомотетія	2	центр гомотетії, коефіцієнт	побудова подібних фігур, застосування
Узагальнення та систематизація	1	всі види перетворень	комплексні задачі, композиція

Джерело: побудовано автором на основі [49]

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів з теми геометричних перетворень конкретизовані у програмі через перелік знань, умінь та навичок, що мають бути сформовані після завершення вивчення розділу. Учень повинен: знати означення руху та його основних видів, формулювати властивості кожного типу перетворення, розуміти зв'язок між рухами та рівністю фігур, а розуміння інваріантів різних перетворень та їхніх відмінностей становить основу для усвідомленого застосування знань у розв'язуванні задач.

На рівні застосування учень має вміти будувати образи точок та простих фігур при заданому перетворенні за допомогою креслярських інструментів. Аналітичні компетентності формує в здобувачів освіти визначення виду перетворення за описом його дії на фігуру або за зображенням прообразу та образу. Зокрема, знаходження елементів перетворення за відомими умовами, а саме вектора паралельного перенесення, центру та кута обертання, осі симетрії або центру гомотетії та коефіцієнта, розвиває здатність до зворотних міркувань [28, с.16].

Розв'язування задач на доведення з використанням властивостей перетворень демонструє глибину розуміння матеріалу. Учень повинен уміти обґрунтовувати рівність або подібність фігур через встановлення відповідного перетворення між ними. Застосування композиції перетворень для розв'язування складніших геометричних задач свідчить про сформованість системного мислення.

Програма передбачає диференціацію вимог залежно від рівня складності навчального матеріалу. Обов'язковий рівень включає побудову образів простих фігур при основних перетвореннях та розв'язування стандартних задач на застосування означень і властивостей. Середній рівень передбачає розв'язування комбінованих задач, що вимагають послідовного застосування кількох перетворень або поєднання методів перетворень з іншими геометричними методами. Достатній рівень включає задачі підвищеної складності на композицію перетворень, доведення нестандартних тверджень та творчі завдання на конструювання фігур із заданими властивостями симетрії (табл.1.4.).

Таблиця 1.4. – Диференціація вимог до результатів навчання за рівнями складності

Рівень	Знання	Уміння	Навички
Початковий	означення основних перетворень	розпізнавання виду перетворення	побудова образів за зразком
Середній	властивості перетворень, інваріанти	застосування у стандартних задачах	самостійна побудова образів
Достатній	зв'язки між перетвореннями	розв'язування складних задач	композиція перетворень
Високий	теоретичні узагальнення	дослідницькі задачі	творче застосування методів

Джерело: побудовано автором на основі [54]

Геометричні перетворення не є ізольованою темою у структурі курсу, а органічно пов'язані з усіма основними розділами шкільної геометрії, забезпечуючи методологічну базу для глибшого розуміння геометричних закономірностей. Отже, вивчення рівності трикутників у 7 класі отримує нове осмислення через поняття руху, адже два трикутники є рівними тоді і тільки тоді, коли існує рух, що переводить один трикутник у інший, а властивості рівнобедреного трикутника природно пояснюються через осьову симетрію відносно медіани, проведеної до основи, що об'єднує окремі факти в цілісну картину.

Чотирикутники, що вивчаються у 8 класі, характеризуються наявністю певних симетрій або їх відсутністю: паралелограм має центр симетрії у точці перетину діагоналей, прямокутник володіє як центральною, так і двома осями симетрії, ромб має дві осі симетрії вздовж діагоналей, квадрат поєднує всі види симетрії. Доведення властивостей цих фігур значно спрощується при використанні відповідних перетворень замість традиційних методів. Водночас, трапеція, що не має центру симетрії, може мати вісь симетрії тільки у випадку рівнобічної трапеції [54, с.14].

Подібність трикутників та багатокутників, вивчена у 8 класі, логічно завершується поняттям гомотетії (перетворення, що встановлює взаємно однозначну відповідність між подібними фігурами). Застосування гомотетії дуже спрощує доведення деяких теорем, як-от теореми про пропорційні відрізки.

Коло та його властивості, що розглядаються протягом усього курсу, демонструють найвищий рівень симетрії серед планіметричних фігур. Коло має безліч осей симетрії, що проходять через його центр, та центральну симетрію відносно центра. Обертання навколо центра кола на будь-який кут переводить коло у себе, що використовується при доведенні властивостей дотичних та хорд. Інверсія відносно кола, хоча й не входить до обов'язкової програми, може розглядатися у класах з поглибленим вивченням математики як узагальнення гомотетії.

Координатний метод дозволяє аналітично описувати геометричні перетворення, встановлюючи зв'язок між геометрією, алгеброю і тригонометрією. Даний метод дуже полегшує роботу, замінюючи побудови на формули змін координат: паралельне перенесення на вектор виражається додаванням координат вектора до координат точки, симетрії відносно координатних осей — зміною знаків відповідних координат, гомотетія з центром у початку координат — множенням координат на коефіцієнт подібності. Найбільш складним є обертання навколо початку координат, воно

описується тригонометричними формулами, що показує інтеграцію між предметами.

Векторний метод отримує додаткові можливості при використанні перетворень для розв'язування геометричних задач: паралельне перенесення на вектор природно описується через операції з векторами, коли радіус-вектор образу дорівнює сумі радіус-вектора прообразу та вектора переміщення; обертання вектора на заданий кут виражається через координати та тригонометричні функції. Також, геометричні задачі на доведення векторних рівностей часто спрощуються при використанні відповідних перетворень.

Досвід упровадження програми Мерзляка та Номіровського у навчальний процес показує ефективність запропонованого підходу до вивчення геометричних перетворень при дотриманні певних педагогічних умов. Зокрема, систематична пропедевтична робота протягом 7-8 класів створює необхідну базу для свідомого засвоєння теми у 9 класі. Тобто учні, які регулярно стикалися з ідеями симетрії та переміщення фігур у попередніх класах, значно легше сприймають формальні означення та доведення властивостей перетворень. Крім того, використання наочних моделей та динамічних демонстрацій допомагає формувати правильні геометричні образи у свідомості школярів.

Диференційований підхід до організації навчальної діяльності забезпечує успішне засвоєння матеріалу учнями різного рівня підготовки та мотивації: слабші учні отримують можливість опанувати базові навички побудови образів при простих перетвореннях та розв'язування стандартних задач репродуктивного характеру; середні учні працюють над задачами, що вимагають комбінування різних методів та самостійного вибору способу розв'язування; сильні учні залучаються до розв'язування задач підвищеної складності, дослідницьких завдань та вивчення додаткового матеріалу про групи перетворень [55, с.14].

Проблемний підхід до викладання теми стимулює пізнавальну активність учнів та формує дослідницькі компетентності. Створення

проблемних ситуацій, коли учні самостійно виявляють властивості перетворень через експеримент та спостереження, сприяє глибшому розумінню матеріалу. Також, евристична бесіда під час введення нових понять залучає учнів до активної розумової діяльності та підтримує інтерес до предмета, а самостійне формулювання гіпотез про властивості перетворень та їх подальша перевірка розвиває логічне мислення та критичність.

Проектна діяльність учнів може включати дослідження симетрії у природі, архітектурі та мистецтві з оформленням результатів у вигляді презентацій або постерів. Учні можуть створювати орнаменти з використанням різних видів симетрії, аналізують геометричну структуру кристалів та біологічних об'єктів, досліджують застосування перетворень у комп'ютерній графіці. Таке математичне моделювання реальних ситуацій з використанням перетворень демонструє практичну значущість вивченого матеріалу, та колективна робота над проектами формує комунікативні навички та вміння працювати в команді [37, с.18].

Формування навичок самостійної роботи передбачає поступове зменшення ступеня допомоги з боку вчителя та збільшення частки самостійних дій учнів: початковий етап включає детальні інструкції та покрокові алгоритми виконання побудов і розв'язування задач; проміжний етап передбачає надання загальних орієнтирів та підказок без конкретизації всіх кроків розв'язування; завершальний етап характеризується повною самостійністю учнів у виборі методів та способів розв'язування задач; а рефлексія власної навчальної діяльності та аналіз помилок сприяють усвідомленому засвоєнню матеріалу.

Отже, дана МНП є компетентісно-орієнтованою, охоплює 210 годин і побудована на принципах системності та дедукції. Реалізується в ній тема геометричних перетворень, вивчення якої починається з підготовчої роботи в 7-8 класах і завершується повним засвоєнням у 9 класі, інтегруючи матеріал та формуючи в учнів здатність до розв'язання як теоретичних, так і практичних завдань.

1.3 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.)

Принципова відмінність підходу Бурди М., Тарасенкової Н. та Васильєва Д. до вивчення геометричних перетворень, полягає у розподілі матеріалу на два етапи з різним рівнем строгості викладання та різними дидактичними цілями. Пропедевтичний етап охоплює 7-8 класи та передбачає формування наочних уявлень про симетрію та рухи фігур без строгого означення перетворення як математичного об'єкта. Основний етап реалізується у 9 класі та включає систематичне вивчення перетворень як відображень площини на себе з доведенням їхніх властивостей та застосуванням для розв'язування задач.

Підготовка до вивчення теми геометричні перетворення відбувається у 7 класі пропедевтично та інтуїтивно. Спочатку учні знайомляться з поняттям рівності фігур через можливість суміщення одної фігури з іншою шляхом накладання, що інтуїтивно готує до розуміння руху як перетворення, яке зберігає форму та розміри. Далі, вивчення властивостей рівнобедреного трикутника супроводжується неформальним обговоренням осової симетрії відносно медіани до основи. Крім того, побудова трикутника за трьома елементами використовує неявно ідею переміщення частин фігури до потрібного положення. Зрештою, розгляд ознак рівності трикутників через призму можливості суміщення готує ґрунт для формального означення конгруентності через існування руху [29, с.14].

Восьмий клас вносить суттєвий внесок у підготовку до систематичного вивчення перетворень через детальний розгляд властивостей чотирикутників, що мають різні види симетрії: паралелограм характеризується наявністю центру симетрії у точці перетину діагоналей, хоча формальне означення центральної симетрії ще не вводиться; прямокутник, ромб та квадрат розглядаються як фігури з особливими властивостями симетрії без

використання строгої термінології перетворень; а рівнобічна трапеція вивчається як фігура, що має вісь симетрії, перпендикулярну до основ і, що проходить через середини основ.

Окрім того у 8 класі відбувається ще така підготовка до теми геометричні перетворення: теорема Фалеса та її застосування для побудови пропорційних відрізків готує до розуміння гомотетії як перетворення, що зберігає паралельність прямих та змінює відстані у певне число разів; подібність трикутників вивчається через ознаки подібності без формального введення перетворення подібності, проте учні набувають досвіду роботи з фігурами однакової форми, але різних розмірів; та властивості подібних фігур, зокрема пропорційність відповідних лінійних елементів і рівність відповідних кутів, створюють основу для усвідомлення інваріантів перетворення подібності [19, с.19].

Дев'ятий клас присвячує систематичному вивченню геометричних перетворень окремий розділ обсягом 14 годин, що на дві години більше порівняно з програмою Мерзляка. Збільшення навчального часу пояснюється включенням додаткового матеріалу про композицію перетворень та більш детальним розглядом застосувань перетворень для доведення геометричних теорем. Програма передбачає вивчення тих самих базових перетворень, що й альтернативні програми, але розставляє інші акценти у поданні матеріалу та системі задач.

Відображення площини на себе вводиться як правило, що кожній точці площини ставить у відповідність єдину точку цієї ж площини, причому різним точкам відповідають різні образи. Взаємна однозначність відображення означає, що кожна точка площини є образом певної точки та цей прообраз є єдиним. Серед відображень тотожне перетворення розглядається як найпростіше, бо в ньому кожна точка переходить сама в себе, а обернене перетворення вводиться як відображення, що повертає кожен образ у його прообраз [18, с.13].

Рух у даній МНП характеризується як відображення площини на себе, що зберігає відстані між будь-якими двома точками, тобто якщо точки A та B переходять у точки A' та B' , то відрізок AB дорівнює відрізку $A'B'$. Учням дається розуміння того, що зі збереження відстаней випливає збереження всіх метричних характеристик фігур, зокрема довжин відрізків, величин кутів, площ многокутників. Зокрема, через існування руху визначається конгруентність або рівність фігур, що переводить одну фігуру в іншу. Також, властивість руху зберігати паралельність та перпендикулярність прямих доводиться як теорема.

Паралельне перенесення вивчається як рух, при якому всі точки площини переміщуються в одному напрямку на однакову відстань, що задається вектором переміщення. Програма М. Бурди приділяє значну увагу векторному тлумаченню паралельного перенесення, встановлюючи зв'язок між геометричними перетвореннями та векторним методом. Властивості паралельного перенесення включають перехід прямої у паралельну пряму, збереження напрямку векторів, композиційність відносно додавання векторів. А практичне застосування паралельного перенесення демонструється на прикладах доведення властивостей середньої лінії трикутника та трапеції [9, с.33].

У даній програмі центральна симетрія розглядається глибше, ніж у програмі Мерзляка, з акцентом на її ролі у розумінні центрально-симетричних фігур. Вона визначається через умову, що центр є серединою відрізка між прообразом та образом, а доведення її приналежності до рухів базується на збереженні відстаней. Серед ключових властивостей — перехід прямої у паралельну пряму та інволютивність. Дослідження центральної симетрії охоплює як геометричні фігури (паралелограм, коло), так і приклади з алгебри (еліпс, гіпербола), інтегруючи знання.

Симетрія відносно прямої вводиться через геометричне означення симетричних точок як точок, що лежать на перпендикулярі до осі симетрії по різні боки від неї на рівних відстанях. Програма акцентує увагу на різниці між

осьовою та центральною симетрією через збереження або зміну орієнтації фігур. Властивості осьової симетрії включають перехід прямої у пряму, збереження кутів між прямими, перпендикулярність прямої та її образу, якщо вони перетинаються. Практичне застосування осьової симетрії демонструється при доведенні властивостей рівнобедреного трикутника, ромба, рівнобічної трапеції.

Обертання навколо точки на заданий кут вивчається як узагальнення центральної симетрії на випадок довільного кута повороту, а не тільки 180 градусів. Означення формулюється через рівність відстаней від центру до прообразу та образу та рівність кута між променями, що сполучають центр з прообразом та образом, заданому куту повороту. Властивості обертання включають збереження відстаней як властивість руху, перехід кола з центром у центрі обертання в себе, композиційність обертань навколо однієї точки. Застосування обертання показується при побудові правильних многокутників та дослідженні їхньої симетрії [31, с.43].

Гомотетія відрізняється від рухів тим, що змінює розміри фігур, залишаючи незмінною їхню форму, тому відноситься до перетворень подібності. Означення вводиться через умову колінеарності прообразу, образу та центру гомотетії та пропорційності відстаней від центру до образу та до прообразу з коефіцієнтом гомотетії. Властивості гомотетії включають перехід прямої у паралельну пряму, збереження кутів між прямими, зміну всіх відстаней в абсолютну величину коефіцієнта разів. Від'ємний коефіцієнт гомотетії викликає додаткову зміну орієнтації фігури, що аналогічно центральній симетрії (табл.1.5.).

Таблиця 1.5. – Розподіл навчального часу та змісту теми у програмі Бурди

Перетворення	Кількість годин	Ключові теореми	Практичні застосування
Загальні поняття про відображення	2	властивості рухів	рівність фігур
Паралельне перенесення	2	властивості паралельних прямих	середня лінія трикутника

Продовження таблиці 1.5.

Центральна симетрія	2	властивості паралелограма	центрально-симетричні фігури
Осьова симетрія	2	властивості рівнобедреного трикутника	осьово-симетричні фігури
Обертання	3	правильні многокутники	поворотна симетрія
Гомотетія	2	подібність фігур	масштабування креслень
Узагальнення	1	композиція перетворень	комплексні задачі

Джерело: побудовано автором на основі [56; 61]

Формування понять геометричних перетворень відбувається через систему спеціально підібраних вправ, що забезпечують поступовий перехід від конкретного до абстрактного, від часткового до загального. Початковий етап вивчення кожного перетворення включає роботу з конкретними прикладами, коли учні виконують побудови образів окремих точок та простих фігур за допомогою креслярських інструментів. Спостереження закономірностей у розташуванні прообразів та образів підводить до формулювання гіпотез про властивості перетворення. Перевірка висунутих припущень при цьому здійснюється через додаткові побудови та вимірювання.

Наступний етап передбачає формулювання означення перетворення на основі виявлених характеристик та обговорення його коректності. Спочатку доведення властивостей перетворення здійснюється за допомогою раніше вивчених геометричних фактів та логічних міркувань. Потім застосування нового перетворення для розв'язування задач демонструє його практичну цінність та мотивує до подальшого вивчення. І узагальнення матеріалу включає порівняння різних перетворень, встановлення спільних та відмінних властивостей, побудову класифікацій [61, с.14].

Навчальні задачі диференціюються не тільки за рівнем складності, але й за характером діяльності учнів при їх розв'язуванні. Наприклад: репродуктивні задачі вимагають застосування означення перетворення або його властивостей у стандартній ситуації без суттєвих перетворень умови; конструктивні задачі передбачають побудову фігур з певними властивостями симетрії або знаходження елементів перетворення за заданими умовами; і дослідницькі

задачі спрямовані на виявлення нових властивостей перетворень або встановлення зв'язків між різними геометричними фактами.

Система задач включає завдання на всі основні види діяльності учнів із геометричними перетвореннями: побудова образів точок та фігур при заданому перетворенні формує практичні навички роботи з кресленням та розвиває просторову уяву; визначення виду перетворення за описом або зображенням розвиває аналітичні здібності та вміння розпізнавати математичні структури; знаходження елементів перетворення за умовами задачі вимагає розв'язування геометричних рівнянь та систем; а доведення тверджень з використанням перетворень демонструє потужність методу перетворень у геометрії.

Особлива увага в програмі приділяється задачам на композицію перетворень, що показують багатство можливостей методу перетворень для розв'язування складних геометричних задач. Вказано, що послідовне застосування двох паралельних перенесень дає паралельне перенесення на суму векторів, а композиція двох центральних симетрій з різними центрами є паралельним перенесенням на подвоєний вектор, що сполучає центри. Крім того, обертання на два різні кути навколо однієї точки еквівалентне обертанню на суму кутів і композиція гомотетій з одним центром дає гомотетію з тим самим центром та коефіцієнтом, що дорівнює добутку коефіцієнтів [56, с.17].

Використання динамічних геометричних середовищ рекомендується програмою як потужний засіб візуалізації перетворень та експериментального дослідження їхніх властивостей. Комп'ютерні програми дозволяють учням спостерігати безперервну зміну образу фігури при зміні параметрів перетворення, що формує динамічні геометричні образи. Саме можливість швидкого виконання великої кількості побудов підвищує ефективність дослідницької роботи та сприяє виявленню закономірностей. Також, інтерактивні вправи забезпечують індивідуалізацію навчання та можливість самостійної роботи учнів у зручному темпі.

Модельна програма під керівництвом М. Бурди та співавторів вивчає геометричні перетворення у два етапи: пропедевтичний (7–8 класи), де інтуїтивно формуються уявлення про симетрію, рух та подібність (Теорема Фалеса); та основний (9 клас, 14 годин), де здійснюється систематичне вивчення руху, симетрій, обертання та гомотетії як відображень площини. Програма вирізняється акцентом на векторному тлумаченні перенесень і глибоким розглядом композиції перетворень. Для засвоєння матеріалу використовується диференційована система задач (репродуктивні, конструктивні, дослідницькі) у поєднанні з візуалізацією в динамічних геометричних середовищах.

1.4 Аналіз і характеристика Модельної навчальної програми «Геометрія. 7-9 класи» ЗЗСО та реалізація в ній теми «Геометричні перетворення» (автор: Істер О. С.)

Модельна навчальна програма з геометрії, розроблена Олександром Істером, демонструє оригінальний погляд на структурування курсу планіметрії у закладах загальної середньої освіти та пропонує власне бачення місця геометричних перетворень у системі математичної освіти підлітків. Автор виходить з переконання, що геометрія повинна формувати не лише формальні математичні компетентності, але й загальну культуру мислення через розвиток просторової уяви, логічних здібностей та естетичного сприйняття форм. Програма спрямована на встановлення балансу між строгістю математичного викладу та доступністю матеріалу для учня середньої школи.

Філософія навчання за програмою Істера ґрунтується на ідеї поетапного формування абстрактних геометричних понять через багаторівневу систему конкретних задач, практичних вправ та теоретичних узагальнень. Кожне нове поняття проходить шлях від життєвого досвіду учнів через експериментальне дослідження властивостей до формального математичного визначення та

логічного доведення теорем. Автор надає великого значення мотивації навчання через демонстрацію практичних застосувань геометричних знань у реальному житті, професійній діяльності, науці та мистецтві.

Загальний розподіл навчального часу складає 210 годин за три роки з рівномірним навантаженням 70 годин щорічно, що відповідає стандартному графіку два уроки на тиждень протягом 35 навчальних тижнів. Програма передбачає гнучкість у плануванні, дозволяючи вчителю перерозподіляти години між темами залежно від рівня підготовки класу та локальних освітніх потреб. Резервний час закладений для поглибленого вивчення складних питань, додаткових тренувань перед контрольними роботами та реалізації проектної діяльності учнів [50, с.34].

Принципова відмінність підходу Істера полягає у максимальній інтеграції теми геометричних перетворень у весь курс планіметрії замість виділення її в окремий ізольований розділ наприкінці навчання. Елементи перетворень з'являються вже з перших уроків геометрії у 7 класі та супроводжують учнів протягом усіх трьох років навчання. Систематизація та узагальнення знань про перетворення здійснюється у 9 класі, коли учні вже мають достатній досвід роботи з різними видами відображень площини на інтуїтивному рівні.

Перший рік вивчення геометрії за програмою Істера розпочинається з теми основних геометричних фігур, де вводиться фундаментальне поняття геометричної фігури як множини точок площини. Далі рівність фігур визначається через можливість їх суміщення, що фактично означає існування руху, який переводить одну фігуру в іншу, хоча сам термін рух ще не використовується. А ось вправи на накладання трикутників один на одний формують інтуїтивне розуміння збереження форми та розмірів при переміщенні фігур у просторі.

Вивчення ознак рівності трикутників супроводжується неформальним обговоренням того, як можна пересунути, повернути або відобразити один трикутник так, щоб він зайняв положення іншого. Учні виконують практичні

роботи з вирізаними паперовими трикутниками, експериментуючи з різними способами їх суміщення. Такий підхід готує ґрунт для майбутнього строгого означення конгруентності через рухи та формує інтуїтивне розуміння інваріантності метричних характеристик при переміщеннях [57, с.22].

Тема рівнобедреного трикутника вводить елементи осьової симетрії без використання формальної термінології. Учні виявляють, що якщо перегнути рівнобедрений трикутник вздовж медіани до основи, то його половини збігаються, що пояснює рівність кутів при основі та інші властивості. Практичні вправи з вирізування та складання паперових моделей розвивають просторову уяву та готують до усвідомлення симетрії як математичного поняття. Відповідно, задачі на побудову фігур із заданими властивостями неявно використовують ідеї відображення та переміщення елементів фігури.

Коло вивчається як фігура з особливою симетрією, хоча явно про безліч осей та обертальну симетрію не говориться. Учні помічають, що коло виглядає однаково з будь-якого боку, що його можна обертати навколо центру, і воно залишається незмінним. При побудові дотичних до кола використовуються властивості симетрії без формального їх називання. А задачі на взаємне розташування кола та прямої готують до розуміння інваріантності відстаней при обертанні навколо точки.

Наприкінці 7 класу учні мають сформовані інтуїтивні уявлення про основні види переміщень та відображень фігур, хоча формальні означення ще не вводилися. Оскільки досвід роботи з конкретними фігурами створює емпіричну базу для майбутнього теоретичного узагальнення. Мова здобувачів освіти збагачується термінами на кшталт суміщення, накладання, переміщення, відображення, що використовуються в інтуїтивному сенсі. Учні набувають практичних навичок роботи з моделями фігур та розуміють, що геометричні об'єкти можна розглядати в різних положеннях на площині.

Другий рік навчання геометрії починається з систематичного вивчення чотирикутників, де симетрія виступає ключовою характеристикою для класифікації та встановлення властивостей різних типів чотирикутників.

Наприклад, паралелограм характеризується наявністю точки, відносно якої протилежні вершини розташовані симетрично, що пояснює рівність протилежних сторін та кутів без формального доведення через трикутники. Учні виконують практичну роботу з паперовими моделями, перевіряючи експериментально існування центру симетрії у точці перетину діагоналей.

Прямокутник в цій МНП вводиться як чотирикутник з додатковими осями симетрії порівняно з паралелограмом. Здобувачі освіти виявляють дві осі симетрії прямокутника через середини протилежних сторін та центр симетрії у точці перетину діагоналей. В ромбі бачать інший тип симетрії з осями вздовж діагоналей та центральною симетрією. Квадрат має фігуру з максимальною симетрією, в нього є чотири осі та центр симетрії, що робить його найбільш регулярним чотирикутником. А щодо трапеції, то вона може мати одну вісь симетрії у випадку рівнобічної трапеції, або не мати жодної симетрії для довільної трапеції.

Вивчення властивостей середніх ліній трикутника та трапеції використовує ідею паралельного переміщення відрізків без формального введення паралельного перенесення як перетворення. Учні помічають, що середня лінія трикутника паралельна основі та дорівнює її половині, що можна інтерпретувати як результат переміщення основи вгору на певну відстань зі зміною довжини вдвічі. Відповідно задачі на побудову паралельних прямих, неявно використовують ідею збереження напрямку при паралельному переміщенні елементів фігури [71, с.13].

Теорема Фалеса та її застосування вводять поняття пропорційності відрізків, що готує до розуміння гомотетії як перетворення, що зберігає відношення відстаней. Здобувачі освіти розв'язують задачі на побудову четвертого пропорційного відрізка, що фактично означає застосування гомотетії з відповідним коефіцієнтом. Подібність трикутників вивчають через ознаки подібності з акцентом на збереження форми при зміні розмірів. Важливо, що практичні задачі на застосування подібності для вимірювання

недоступних відстаней демонструють зв'язок математичних ідей з реальним життям.

Тригонометричні функції гострого кута вводяться як відношення сторін прямокутного трикутника, що не залежать від розмірів трикутника через подібність. Учні усвідомлюють інваріантність тригонометричних відношень як властивість, пов'язану з подібністю трикутників. Щодо розв'язування прямокутних трикутників, то це формує навички роботи з пропорціями та відношеннями, що є основою для розуміння перетворень подібності. Відповідно задачі на застосування тригонометрії у практичних ситуаціях показують універсальність математичних методів.

Вивчення кола та його елементів у даній програмі глибоко пов'язане з ідеєю обертання навколо центру (симетрії обертання). Поняття центральних і вписаних кутів розглядається через призму повороту радіуса на певний кут, тоді як властивість дотичної – її перпендикулярність до радіуса – підкреслюється як інваріантна при обертанні кола навколо його центру. Крім того, аналіз взаємного розташування двох кіл через відстань між їхніми центрами та радіуси готує учнів до усвідомлення інваріантності відстаней, що є ключовою характеристикою будь-якого руху. (табл.1.6.).

Таблиця 1.6. – Інтеграція ідей перетворень у зміст 8 класу за програмою Істера

Тема 8 класу	Елементи перетворень	Практичні вправи	Формовані уявлення
Чотирикутники	центральна та осьова симетрія	перегинання моделей	центри та осі симетрії
Середні лінії	паралельне переміщення	побудова паралельних	збереження напрямку
Подібність	зміна масштабу	побудова подібних фігур	збереження форми
Тригонометрія	інваріантність відношень	обчислення елементів	незалежність від розміру
Коло	обертання	побудова дотичних	симетрія відносно центру

Джерело: побудовано автором на основі [48; 54]

Дев'ятий клас присвячує спеціальний розділ систематизації та формалізації знань про геометричні перетворення обсягом 16 годин, що

більше порівняно з альтернативними програмами. Збільшення часу пояснюється необхідністю узагальнити розрізнені інтуїтивні уявлення, сформовані за попередні роки, та ввести строгі математичні означення. Розділ розпочинається з обговорення різних способів зміни положення фігур на площині, які учні спостерігали раніше, та формулювання загальної ідеї відображення множини точок на себе.

Відображення площини вводиться через поняття функції, що діє на множині точок площини та кожній точці ставить у відповідність єдину точку цієї ж площини. Його бієктивність відображення означає, що кожна точка є образом якоїсь точки та цей прообраз єдиний. Композиція відображень визначається як послідовне застосування двох відображень, результатом чого є нове відображення. Для кожного бієктивного відображення існує обернене відображення та повертає образи у прообрази. Найпростіше – тотожне відображення залишає всі точки на місці та є нейтральним елементом відносно композиції.

Рух як центральне поняття теми визначається через збереження відстаней між будь-якими парами точок площини. Із цієї властивості виводяться всі інші характеристики рухів, зокрема збереження кутів, площ, паралельності та перпендикулярності прямих. Рівність фігур отримує нове означення як існування руху, що переводить одну фігуру в іншу, що об'єднує всі раніше вивчені випадки рівності у єдину концепцію, а властивості рухів формулюються як теореми та доводяться строго на основі означення та раніше встановлених геометричних фактів.

Паралельне перенесення вивчається як найпростіший вид руху з чіткою геометричною інтерпретацією через вектор переміщення. Програма Істера надає велике значення координатному методу опису паралельного перенесення через формули зміни координат точки. Властивості паралельного перенесення, зокрема перехід прямої у паралельну пряму та композиційність відносно додавання векторів, доводяться як за допомогою геометричних, так і за допомогою координатних методів, а застосування паралельного

перенесення демонструється на прикладах доведення класичних теорем про властивості трикутників та чотирикутників альтернативним способом.

Осьова симетрія розглядається детально з різних точок зору як геометричне перетворення, як властивість фігур та як метод розв'язування задач. Побудова образу точки відносно прямої здійснюється за допомогою циркуля та лінійки з докладним поясненням алгоритму. Властивості осьової симетрії включають перехід прямої у пряму, збереження кутів, зміну орієнтації фігур. Фігури з віссю симетрії класифікуються та досліджуються їхні характерні властивості. Застосування осьової симетрії для розв'язування задач на побудову та доведення демонструє потужність цього методу [9, с.16].

Щодо центральної симетрії, то це поняття вводиться не як окремий вид руху, а як композиція двох осьових симетрій з перпендикулярними осями, що перетинаються у центрі симетрії. Такий підхід підкреслює зв'язок між різними перетвореннями та демонструє можливість отримання одного перетворення через комбінацію інших. Властивості цієї центральної симетрії виводяться з властивостей осьової симетрії та аналізу композиції.

Обертання навколо точки на заданий кут представлено тут як узагальнення центральної симетрії на випадок довільного кута, а не тільки 180 градусів. Програма включає докладне вивчення композиції обертань навколо однієї точки та доведення теореми про те, що результатом є обертання навколо тієї ж точки на суму кутів. Обертання кола навколо його центру на довільний кут залишає коло незмінним, що пояснює високу симетрію цієї фігури. А правильні многокутники характеризуються через наявність обертань на певні кути, що переводять многокутник у себе.

Гомотетія завершує вивчення основних перетворень як єдине перетворення подібності у програмі. Означення через колінеарність точок та пропорційність відстаней доповнюється координатним описом через множення координат на коефіцієнт. Властивості гомотетії порівнюються з властивостями рухів для виявлення спільного та відмінного. Застосування гомотетії для доведення теорем про подібність трикутників та властивості

пропорційних відрізків показує єдність різних розділів геометрії. Загалом побудова образів складних фігур при гомотетії формує конструктивні навички учнів [30, с.25].

Композиція перетворень вивчається систематично з розглядом найважливіших випадків та формулюванням загальних правил: композиція двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням на суму векторів; композиція двох осьових симетрій з паралельними осями дає паралельне перенесення на подвоєну відстань між осями; композиція двох осьових симетрій з осями, що перетинаються, є обертанням навколо точки перетину на подвоєний кут між осями; і композиція гомотетій з одним центром є гомотетією з тим самим центром та коефіцієнтом, що дорівнює добутку коефіцієнтів (табл.1.7.).

Таблиця 1.7. – Детальний розподіл навчального часу у розділі про перетворення

Перетворення	Години	Ключові властивості	Методи дослідження
Загальні поняття	2	бієктивність, композиція	аналіз означень
Рух та рівність	2	збереження відстаней	теоретичні доведення
Паралельне перенесення	3	вектор, паралельність	координатний метод
Осьова симетрія	3	вісь, перпендикулярність	геометричні побудови
Центральна симетрія	2	центр, орієнтація	композиція симетрій
Обертання	2	центр, кут повороту	кругова симетрія
Гомотетія	2	центр, коефіцієнт	подібність фігур

Джерело: побудовано автором на основі [72]

Навчальний процес організовується за принципом проблемно-пошукового навчання, коли учні самостійно виявляють властивості перетворень через систему спеціально підібраних завдань дослідницького характеру. Кожен урок розпочинається з постановки проблемної ситуації, що активізує пізнавальну діяльність та створює мотивацію до вивчення нового матеріалу. Під час занять робота в малих групах заохочується для обговорення гіпотез, спільного розв'язування складних задач та взаємного навчання, а презентації результатів роботи груп розвивають комунікативні компетентності та вміння аргументувати власну позицію.

Диференціація навчання реалізується через багаторівневу систему завдань, що дозволяє кожному учню працювати в зоні найближчого розвитку: мінімальний рівень включає завдання на пряме застосування означення перетворення для побудови образів простих фігур; базовий рівень передбачає розв'язування стандартних задач на застосування властивостей перетворень у типових ситуаціях; достатній рівень містить задачі, що вимагають комбінування кількох перетворень або поєднання різних методів; та високий рівень включає творчі та дослідницькі завдання з елементами наукового пошуку.

Використання інформаційних технологій інтегровано у навчальний процес як природний інструмент візуалізації та експериментування з перетвореннями. Ось динамічні геометричні середовища дозволяють учням спостерігати безперервну зміну положення фігури при варіюванні параметрів перетворення, комп'ютерне моделювання композицій перетворень допомагає зрозуміти складні взаємозв'язки між різними видами відображень, а створення власних інтерактивних моделей розвиває технологічну компетентність та поглиблює розуміння математичних концепцій.

Проектна діяльність учнів охоплює дослідження симетрії у різних контекстах від кристалографії до архітектури. Учні не лише створюють мультимедійні презентації про застосування перетворень у комп'ютерній графіці, аналізують геометричну структуру орнаментів різних культур, але й досліджують математичні основи перспективи у живописі. Більше того, колективні проєкти на створення симетричних дизайнів або архітектурних макетів поєднують математику з мистецтвом та технологією, а захист цій проєктів перед класом формує презентаційні навички та здатність до публічного виступу [13, с.52].

Формування дослідницьких компетентностей відбувається шляхом залучення учнів до самостійного виявлення властивостей перетворень. Це реалізується через експериментування з параметрами у динамічних середовищах для висунення гіпотез про закономірності. Подальша перевірка

гіпотез за допомогою логічних міркувань формує навички наукового методу, а оформлення результатів у звітах розвиває письмове математичне мовлення.

Програма Олександра Істера інтегрує вивчення геометричних перетворень у весь курс (7–8 класи) через інтуїтивні уявлення (симетрія фігур, подібність), а систематизація відбувається у 9 класі (16 годин). Ключові особливості: акцент на координатному методі, детальний розгляд композиції перетворень та використання проблемно-пошукового навчання з динамічними середовищами для розвитку дослідницьких навичок.

1.5 Порівняння змісту та підходу до вивчення теми «Геометричні перетворення» у різних підручниках геометрії для 9 класу

Поняття відображення площини на себе як фундаментальна основа теми перетворень формулюється у підручниках з різним рівнем строгості та різною опорою на попередні знання учнів. Мерзляк вводить відображення через аналогію з функцією, що діє на множині точок замість множини чисел, акцентуючи увагу на взаємній однозначності відповідності. Бурда використовує більш наочний підхід через ідею правила, що кожній точці ставить у відповідність нову точку, поступово підводячи до формального означення. Істер починає з обговорення різних способів зміни положення фігур, знайомих учням з повсякденного досвіду, та узагальнює їх до математичного поняття відображення.

Рух як центральне поняття теми визначається через властивість збереження відстаней, проте акценти у підручниках розставлені по-різному залежно від загальної методичної концепції. Мерзляк надає формальне означення руху одразу після введення відображення та доводить основні властивості рухів як теореми на основі означення. Бурда використовує інтуїтивне розуміння руху як переміщення фігури без деформації, сформоване у попередніх класах, та поступово переходить до строгого означення через

збереження відстаней. Істер демонструє різні приклади рухів, знайомі учням з життя та фізики, перш ніж сформулювати загальне математичне означення.

Зв'язок між рухами та рівністю фігур встановлюється як ключовий результат теорії перетворень, що об'єднує раніше розрізнені випадки конгруентності у єдину концепцію. Підручник автора Мерзляк формулює теорему про те, що дві фігури рівні тоді і тільки тоді, коли існує рух, що переводить одну фігуру в іншу, та використовує це як нове означення рівності. Бурда в своєму підручнику показує, як усі раніше вивчені ознаки рівності трикутників випливають з існування відповідного руху між ними. Істер використовує цей зв'язок для ретроспективного аналізу матеріалу попередніх класів та демонстрації потужності методу перетворень.

Композиція перетворень як операція, що дозволяє отримувати нові перетворення з відомих, вивчається з різним ступенем повноти у різних підручниках: Мерзляк вводить поняття композиції формально та розглядає основні випадки як окремі вправи без систематичного дослідження всіх можливостей; Бурда приділяє композиції окремий параграф та детально вивчає результати композиції перетворень одного типу; а Істер використовує композицію як основний метод отримання нових перетворень, показуючи, наприклад, що центральна симетрія є композицією двох осьових симетрій.

Обернене перетворення вводиться як відображення, що повертає образи у прообрази, проте його роль у загальній теорії оцінюється авторами по-різному: Мерзляк формулює означення оберненого перетворення та доводить його існування для будь-якого бієктивного відображення як теорему; Бурда обмежується розглядом оберненого перетворення для конкретних видів рухів, показуючи, що осьова симетрія є оберненою до себе, а обернене до обертання є обертанням на протилежний кут; а Істер використовує поняття оберненого перетворення для введення групової структури множини рухів без формального викладу теорії груп (табл.1.8.).

Таблиця 1.8. – Характеристики методичних підходів у різних підручниках

Підручник	Строгість означень	Опора на інтуїцію	Систематичність викладу	Глибина теорії
Мерзляк	висока	низька	концентрована	базова
Бурда	середня	висока	розподілена	середня
Істер	середня	висока	інтегрована	розширена

Джерело: побудовано автором

Паралельне перенесення як найпростіший вид руху вивчається у всіх підручниках на початку теми, проте глибина розгляду та акценти суттєво різняться: Мерзляк формулює означення через вектор переміщення та доводить основні властивості паралельного перенесення як наслідки означення; Бурда приділяє значну увагу векторній інтерпретації паралельного перенесення та встановлює зв'язок з операціями над векторами; Істер у своєму підручнику використовує координатний метод для опису паралельного перенесення через формули зміни координат точки, що готує до аналітичної геометрії у старших класах.

Система вправ на паралельне перенесення відрізняється за типом задач та рівнем складності у різних підручниках: Мерзляк пропонує стандартний набір задач на побудову образів фігур, знаходження вектора переміщення за заданими умовами, застосування паралельного перенесення для доведення властивостей паралелограма; Бурда включає додаткові вправи на композицію паралельних перенесень та знаходження фігур, що переходять у себе при паралельному перенесенні; Істер пропонує задачі прикладного характеру на застосування паралельного перенесення у фізиці, техніці, комп'ютерній графіці.

Осьова симетрія розглядається у всіх підручниках як одне з найважливіших перетворень через її наочність та широке застосування у різних галузях. Мерзляк вводить осьову симетрію через геометричне означення симетричних точок відносно прямої та доводить властивості як теореми. Бурда використовує практичну роботу з перегинанням паперу для

формування інтуїтивного розуміння осьової симетрії перед введенням формального означення. Істер акцентує увагу на зміні орієнтації фігури при осьовій симетрії на відміну від паралельного перенесення, що зберігає орієнтацію.

Дослідження фігур з віссю симетрії здійснюється з різним ступенем повноти та систематичності у різних підручниках: Мерзляк пропонує класифікацію багатокутників за кількістю осей симетрії та дослідження властивостей осьово-симетричних фігур; Бурда включає вправи на конструювання фігур із заданим числом осей симетрії та аналіз симетрії складних орнаментів; Істер використовує осьову симетрію для альтернативного доведення теорем про властивості рівнобедреного трикутника, ромба, рівнобічної трапеції.

Центральна симетрія вивчається як окреме перетворення у підручниках Мерзляка та Бурди, тоді як Істер розглядає її переважно як композицію двох осьових симетрій з перпендикулярними осями. Мерзляк формулює означення центральної симетрії через властивість центру бути серединою відрізка між прообразом та образом. Бурда показує зв'язок центральної симетрії з обертанням на 180 градусів та розглядає їх як два погляди на одне й те саме перетворення. Істер використовує композиційний підхід для виведення властивостей центральної симетрії з властивостей осьової симетрії.

Обертання навколо точки вивчається у всіх підручниках як узагальнення центральної симетрії на випадок довільного кута повороту. Мерзляк у своєму підручнику вводить обертання через означення з використанням центру та кута повороту, доводить властивості обертання як руху. У підручнику Бурди приділено значну увагу побудові образів фігур при обертанні за допомогою транспортира та циркуля, формуючи практичні навички. Істер використовує обертання для дослідження правильних багатокутників та встановлення їхніх властивостей через наявність поворотної симетрії.

Гомотетія як єдине перетворення подібності завершує вивчення основних геометричних перетворень у всіх підручниках: Мерзляк формулює

означення гомотетії через колінеарність точок та пропорційність відстаней, доводить основні властивості; Бурда встановлює зв'язок гомотетії з раніше вивченою подібністю фігур та показує, що гомотетія є математичною моделлю масштабування; Істер використовує координатний опис гомотетії через множення координат на коефіцієнт та показує застосування у аналітичній геометрії (табл.1.9.).

Таблиця 1.9. – Акценти у вивченні різних видів перетворень

Перетворення	Мерзляк	Бурда	Істер
Паралельне перенесення	векторне означення	композиційність	координатний опис
Осьова симетрія	геометричне означення	практичні моделі	зміна орієнтації
Центральна симетрія	окреме перетворення	зв'язок з обертанням	композиція симетрій
Обертання	центр та кут	побудови транспортиром	правильні багатокутники
Гомотетія	колінеарність точок	зв'язок з подібністю	координатний метод

Джерело: побудовано автором

Структура системи вправ у підручниках відображає різні погляди авторів на співвідношення між формуванням теоретичних знань та практичних умінь учнів: Мерзляк пропонує традиційну трирівневу систему з поділом задач на усні вправи, базові завдання та задачі підвищеної складності з чітким маркуванням рівня; Бурда використовує більш гнучку систему з поступовим наростанням складності без явного поділу на рівні, що дозволяє учню самостійно обирати темп просування; Істер структурує вправи за типом діяльності на репродуктивні, конструктивні, дослідницькі та творчі з різними позначеннями для кожного типу.

Задачі на побудову образів фігур при заданому перетворенні становлять основу практичної роботи учнів з темою у всіх підручниках, проте технічні аспекти виконання побудов викладені з різною детальністю: Мерзляк надає алгоритми побудови образів основних фігур при кожному перетворенні з покроковими інструкціями; Бурда включає у підручник фотографії процесу виконання побудов з коментарями до кожного кроку; Істер використовує

покрокові анімації у електронній версії підручника, що демонструють послідовність дій при побудові образів.

Завдання на знаходження елементів перетворення за заданими умовами формують аналітичні здібності учнів та вимагають розв'язування геометричних задач зворотного типу. У своєму підручнику Мерзляк пропонує задачі на знаходження вектора паралельного перенесення, центру обертання, осі симетрії за відомими прообразами та образами. Підручник Бурди включає вправи на визначення коефіцієнта гомотетії або кута обертання за заданими властивостями образу. А Істер додає задачі на знаходження всіх перетворень певного типу, що переводять дану фігуру у себе або в іншу задану фігуру.

Задачі на доведення властивостей фігур з використанням перетворень демонструють потужність методу перетворень як інструменту геометричних міркувань. Мерзляк пропонує альтернативні доведення класичних теорем про властивості трикутників та чотирикутників через застосування відповідних перетворень. Бурда включає вправи на встановлення рівності або подібності фігур шляхом вказівки руху або гомотетії, що переводить одну фігуру в іншу. Істер використовує задачі на доведення для демонстрації переваг методу перетворень порівняно з традиційними підходами.

Задачі на композицію перетворень представлені у різних підручниках з різною повнотою та систематичністю розгляду всіх можливих комбінацій: Мерзляк обмежується кількома прикладами композиції перетворень одного типу та найпростішими випадками комбінування різних типів; Бурда приділяє композиції окремий параграф з детальним дослідженням результатів різних комбінацій перетворень; Істер використовує композицію як основний метод дослідження зв'язків між перетвореннями та отримання нових перетворень з відомих (табл.1.10.)

Таблиця 1.10. – Особливості систем задач у різних підручниках

Тип задач	Мерзляк	Бурда	Істер
Побудова образів	алгоритми	фотоінструкції	анімації
Знаходження елементів	стандартні вправи	зворотні задачі	пошук всіх розв'язків

Продовження таблиці 1.10.

Доведення	альтернативні способи	встановлення рівності	порівняння методів
Композиція	окремі приклади	систематичний розгляд	метод дослідження
Прикладні задачі	орнаменти	практичні виміри	міжпредметні зв'язки

Джерело: побудовано автором

Прикладні задачі на застосування перетворень у реальних ситуаціях різняться за тематикою та рівнем складності у різних підручниках: Мерзляк включає задачі на побудову орнаментів з використанням симетрії та паралельного перенесення; Бурда пропонує завдання на застосування подібності та гомотетії для розв'язування практичних задач на визначення недоступних відстаней; а Істер додає задачі з фізики на описання руху тіл через геометричні перетворення та завдання з комп'ютерної графіки на трансформацію зображень.

Творчі та дослідницькі завдання призначені для розвитку креативності та наукового мислення учнів з високою мотивацією до вивчення математики розподілені по підручниках так: Мерзляк пропонує задачі на конструювання фігур із заданими властивостями симетрії без детальних вказівок щодо способу розв'язування; Бурда включає завдання на виявлення нових властивостей перетворень шляхом експериментування з параметрами; Істер використовує проектні завдання на дослідження симетрії у природі, архітектурі, мистецтві з оформленням результатів у вигляді презентацій або звітів.

Ілюстративний матеріал відіграє головну роль у формуванні геометричних уявлень учнів, особливо для теми перетворень, що вимагає розвиненої просторової уяви. Мерзляк у підручнику використовує класичні чорно-білі креслення високої якості з чіткими позначеннями та однозначною інтерпретацією. Підручник автора Бурди включає кольорові ілюстрації з виділенням прообразів та образів різними кольорами для полегшення сприйняття. А Істер використовує комбінацію статичних зображень у

друкованій версії та інтерактивних анімацій у електронному додатку до підручника.

Теоретичний матеріал структурується за допомогою різних графічних елементів для виділення найважливіших означень, теорем, алгоритмів у підручниках так: Мерзляк використовує рамки для означень та теорем, курсив для нових термінів, жирний шрифт для ключових понять; Бурда застосовує кольорове виділення з різними кольорами для різних типів теоретичної інформації; Істер використовує піктограми для позначення типу інформації та рівня складності матеріалу.

Розібрані приклади демонструють зразки розв'язування типових задач та оформлення геометричних міркувань: Мерзляк пропонує детальні розв'язання з поясненням кожного кроку та обґрунтуванням застосованих методів; Бурда включає альтернативні способи розв'язування однієї задачі для демонстрації різних підходів; Істер використовує діалогову форму викладу розв'язання з запитаннями та відповідями для активізації мислення учнів.

Додатковий матеріал для розширення знань учнів представлений у всіх підручниках, але з різним обсягом та тематикою: Мерзляк включає рубрику для цікавих математикою з відомостями про історію розвитку теорії перетворень та біографіями математиків; Бурда пропонує рубрику практичного застосування з прикладами використання перетворень у різних професіях; Істер додає рубрику дослідницьких проектів з пропозиціями тем для самостійного вивчення.

Апарат контролю та самоконтролю включає різноманітні засоби перевірки засвоєння матеріалу учнями: Мерзляк пропонує контрольні питання після кожного параграфа та підсумкову контрольну роботу після розділу; Бурда включає тести для самоперевірки у форматі множинного вибору з відповідями наприкінці підручника; Істер використовує чек-листи для самооцінювання рівня засвоєння матеріалу за чітко сформульованими критеріями.

Електронні освітні ресурси як доповнення до друкованих підручників різняться за обсягом та функціональністю у різних навчально-методичних комплектів: Мерзляк пропонує електронну версію підручника з базовим набором інтерактивних елементів; Бурда включає окремий диск з динамічними моделями перетворень у середовищі динамічної геометрії; Істер розробив комплексну освітню платформу з інтерактивними вправами, тестами, навчальними відео, форумом для обговорення складних питань.

Методичні рекомендації для вчителів містять детальні поради щодо організації навчального процесу та подолання типових труднощів учнів: Мерзляк пропонує поурочні розробки з детальним плануванням кожного етапу уроку; Бурда включає варіанти організації диференційованого навчання для класів з різним рівнем підготовки; Істер додає рекомендації щодо використання інформаційних технологій та організації проектної діяльності учнів.

Формування предметних компетентностей здійснюється через систему завдань, що вимагають застосування знань про перетворення у різноманітних ситуаціях: Мерзляк акцентує увагу на формуванні здатності до логічних міркувань через доведення властивостей перетворень та теорем з їх використанням; Бурда спрямований на розвиток практичних умінь побудови образів фігур та розпізнавання типу перетворення за зображенням; Істер орієнтується на формування дослідницьких компетентностей через експериментування з перетвореннями у динамічних середовищах.

Математичні компетентності включають володіння математичною мовою, символікою, методами математичних міркувань. Мерзляк формує здатність до строгих логічних доведень з використанням формальних означень та теорем. Бурда розвиває вміння перекладати геометричні задачі мовою перетворень та навпаки. Істер акцентує увагу на формуванні здатності вибирати раціональні методи розв'язування задач з урахуванням особливостей конкретної ситуації (табл.1.11.).

Таблиця 1.11. – Реалізація компетентнісного підходу у різних підручниках

Компетентність	Мерзляк	Бурда	Істер
Предметна	логічні доведення	практичні побудови	дослідницька діяльність
Математична	строгість міркувань	переклад задач	раціональні методи
Ключова	міжпредметні зв'язки	різноманітні приклади	інтеграція з життям
Інформаційна	традиційні методи	динамічна геометрія	системна інтеграція
Комунікативна	окремі завдання	групова робота	проектна діяльність
Уміння вчитися	алгоритми	рефлексія	самооцінювання

Джерело: побудовано автором

Ключові компетентності формуються через інтеграцію математичних знань з іншими предметами та життєвим досвідом учнів у різних підручниках так: Мерзляк включає задачі на застосування перетворень у фізиці при описуванні механічного руху та симетрії фізичних систем; Бурда пропонує завдання на аналіз симетрії у хімії при вивченні структури молекул та кристалів; Істер використовує приклади застосування перетворень у біології при дослідженні симетрії живих організмів.

Інформаційно-цифрова компетентність розвивається через використання сучасних технологій для вивчення перетворень, розглянемо як це виражається у оглядових підручниках: Мерзляк обмежується традиційними методами без активного залучення комп'ютерних технологій у навчальний процес; Бурда включає завдання на використання програм динамічної геометрії для дослідження властивостей перетворень; Істер системно інтегрує цифрові технології у всі етапи навчання від введення нових понять до контролю знань.

Комунікативна компетентність формується через організацію колективних форм роботи над задачами та проектами, це подається у підручниках так: Мерзляк пропонує окремі завдання для роботи в парах без детальних рекомендацій щодо організації взаємодії; Бурда включає завдання для групової роботи з розподілом ролей та чіткими інструкціями для кожного

учасника; а Істер використовує проектну діяльність для формування навичок командної роботи, презентації результатів, ведення дискусії.

Уміння вчитися розвивається через формування навичок самостійної роботи з навчальним матеріалом та самоконтролю. Мерзляк пропонує алгоритми самостійного вивчення нового матеріалу та розв'язування задач. Бурда включає рефлексивні завдання на аналіз власного розуміння теми та виявлення прогалин у знаннях. Істер використовує систему самооцінювання за чітко сформульованими дескрипторами для кожного рівня досягнень.

Креативність та ініціативність стимулюються через творчі та дослідницькі завдання відкритого типу: Мерзляк обмежується традиційними задачами з однозначною відповіддю без можливості для творчості; Бурда включає завдання на конструювання фігур із заданими властивостями, що допускають множину розв'язків; а Істер пропонує проектні завдання, що вимагають самостійного формулювання проблеми, планування дослідження, аналізу результатів.

Аналіз підходів трьох авторів (Мерзляк, Бурда, Істер) до вивчення геометричних перетворень у 9 класі виявив три різні методичні моделі. Мерзляк пропонує найбільш строгий, концентрований курс із високим рівнем формальності, акцентуючи на логічних доведеннях та базовій теорії. Бурда використовує розподілену структуру, більше спирається на інтуїтивне розуміння та практичні побудови, приділяючи значну увагу векторній інтерпретації та композиції перетворень. Істер же пропонує інтегрований, розширений підхід, де елементи перетворень вводяться протягом усього курсу (7–9 класи), а систематизація у 9 класі фокусується на координатному методі, дослідницькій діяльності та системній інтеграції ІТ (динамічні середовища, анімації). Таким чином, вибір підручника визначає не лише обсяг, а й тип компетентностей, які будуть домінуюче формуватися в учнів: логічна строгість (Мерзляк), практичні навички (Бурда) або дослідницька компетентність (Істер).

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІКТ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ В 9 КЛАСІ

2.1 Особливості засвоєння теми «Геометричні перетворення» учнями 9 класу та типові труднощі

Засвоєння геометричних перетворень учнями дев'ятого класу становить особливий етап у математичній освіті, оскільки саме в цей період відбувається перехід від статичного розгляду фігур до динамічного сприйняття геометричних об'єктів.

Дев'ятикласники вперше зустрічаються з систематичним вивченням перетворень площини, що вимагає від них нового рівня абстрактного мислення та просторової уяви. До початку вивчення цієї теми учні мають досвід роботи із властивостями фігур, їхніми елементами та співвідношеннями між ними, проте ідея руху фігури в площині як збереження певних властивостей виявляється для багатьох принципово новою концепцією [62, с.22].

Психологічні особливості учнів цього віку суттєво впливають на процес засвоєння матеріалу. У віці 14-15 років відбувається активний розвиток формально-логічного мислення, проте конкретно-образне мислення все ще відіграє значну роль у пізнавальній діяльності. Саме тому дев'ятикласники краще сприймають геометричні перетворення через конкретні приклади та візуальні моделі, ніж через абстрактні визначення. Здатність до узагальнення у цьому віці розвинена недостатньо, що проявляється у труднощах із формулюванням загальних властивостей перетворень на основі окремих випадків (табл.2.1.).

Таблиця 2.1. – Вікові особливості когнітивного розвитку учнів 9 класу та їх вплив на засвоєння геометричних перетворень

Психологічна характеристика	Прояв у навчанні	Типові труднощі
Перехід до формально-логічного мислення	Здатність працювати з абстрактними поняттями	Недостатня сформованість абстрактного мислення для розуміння композиції перетворень
Збереження конкретно-образного мислення	Потреба у візуалізації перетворень	Складність сприйняття перетворень без наочних моделей
Розвиток просторової уяви	Можливість уявити перетворення фігури	Труднощі з ментальною візуалізацією обертання та гомотетії
Обмежений об'єм робочої пам'яті	Утримання декількох параметрів одночасно	Помилки при виконанні багатокрокових побудов
Формування логічної культури	Побудова ланцюжків міркувань	Неповні доведення, пропуск логічних кроків

Джерело: побудовано автором на основі [62; 65]

Початкове знайомство з поняттям перетворення площини потребує від учнів розуміння відповідності між точками, що є нетривіальною абстракцією. Учням складно усвідомити, що кожна точка площини переходить у якусь іншу точку за певним правилом, особливо коли це правило не можна виразити простою геометричною дією. Поняття образу та прообразу викликає плутанину, оскільки дев'ятикласники часто не розрізняють початкове положення фігури та результат перетворення, особливо коли виконується композиція декількох перетворень (рис.2.1.).

Паралельне перенесення як перше вивчене перетворення здається учням інтуїтивно зрозумілим через життєвий досвід, однак формалізація цього уявлення створює перешкоди. Учні дев'ятого класу розуміють ідею зсуву фігури, але відчувають труднощі з точним визначенням вектора переносу за заданими умовами. Особливо проблематичним виявляється випадок, коли потрібно знайти вектор переносу, якщо відомі образи лише деяких точок фігури. Учні часто помилково вважають, що паралельне перенесення змінює властивості фігури, зокрема площу чи периметр, не усвідомлюючи інваріантності геометричних характеристик.

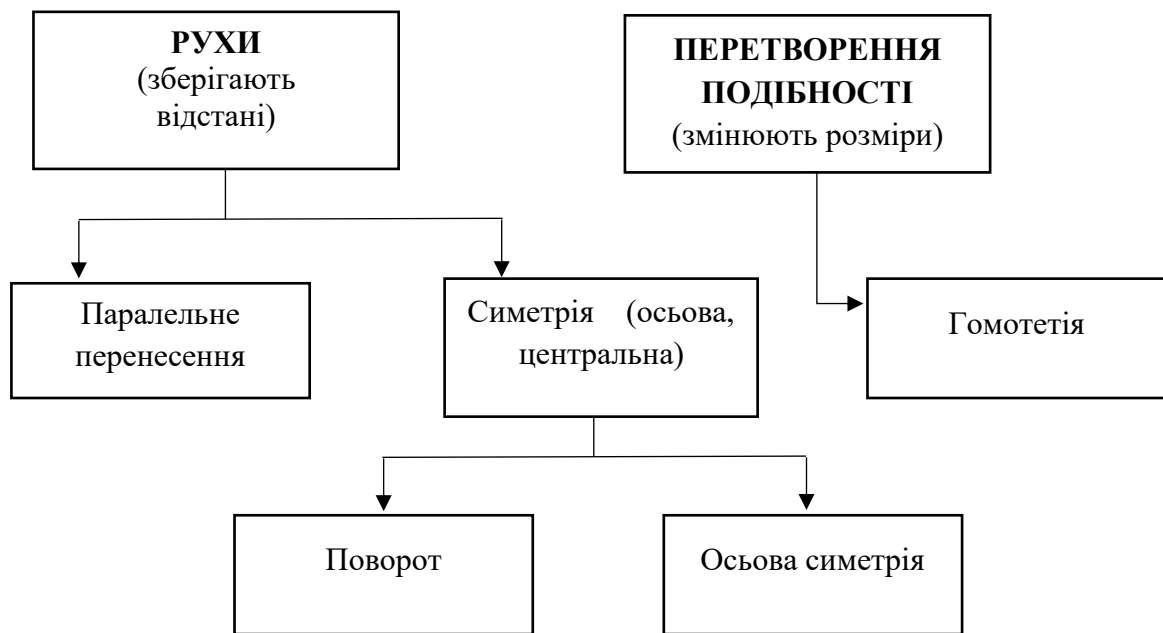


Рисунок 2.1. – Схема базових геометричних перетворень площини

Джерело: побудовано автором на основі [64]

Осьова симетрія викликає двояке ставлення з боку дев'ятикласників. З одного боку, симетричність фігур сприймається інтуїтивно та асоціюється з естетичною привабливістю, що полегшує початкове розуміння. З іншого боку, побудова образу точки відносно заданої осі вимагає точності та розуміння перпендикулярності, рівності відстаней, що часто порушується через недостатні навички роботи з кресленням. Труднощі тут виникають під час визначення осі симетрії заданої фігури, особливо якщо вісь розташована під кутом до координатних осей, або проходить через нестандартні точки (табл.2.2.).

Таблиця 2.2. – Порівняльна характеристика основних видів геометричних перетворень

Тип перетворення	Параметри	Що зберігається	Що змінюється	Рівень складності для учнів
Паралельне перенесення	Вектор переносу	Відстані, кути, площі, форма	Положення фігури	Низький
Осьова симетрія	Вісь симетрії	Відстані, кути, площі, форма	Орієнтація фігури	Середній
Центральна симетрія	Центр симетрії	Відстані, кути, площі, форма	Орієнтація фігури	Середній

Продовження таблиці 2.2.

Поворот	Центр, кут, напрямок	Відстані, кути, площі, форма	Положення та орієнтація	Високий
Гомотетія	Центр, коефіцієнт	Кути, форма, відношення відстаней	Розміри, площі, абсолютні відстані	Дуже високий

Джерело: побудовано автором на основі [55; 46]

Центральна симетрія потребує від учнів розуміння поняття центру як точки, через яку проходять усі відрізки, що сполучують відповідні точки фігури та її образу. Дев'ятикласники часто плутають центральну симетрію з поворотом на 180 градусів, не усвідомлюючи, що це різні назви одного перетворення. Побудова центральньо-симетричних фігур викликає помилки у визначенні напрямку відкладання відстаней, оскільки учні забувають про необхідність відкладати відстань в протилежний бік від центру. Визначення центру симетрії за заданими точками та їхніми образами становить значну складність, оскільки вимагає розуміння, що центр лежить на середині відрізка між відповідними точками [55, с.13].

Поворот навколо точки виявляється найскладнішим перетворенням для засвоєння учнями через необхідність одночасного врахування трьох параметрів: центру повороту, кута повороту та напрямку обертання. Учні відчують труднощі з розумінням того, що під час повороту всі точки фігури повертаються на один і той самий кут, але описують різні дуги залежно від відстані до центру. Побудова образу точки при повороті вимагає використання кутоміра або транспортира, що додає технічних складнощів до концептуальних. Особливо проблематичними є задачі, де потрібно визначити центр і кут повороту за відомими положеннями фігури до та після перетворення (табл.2.3.).

Гомотетія представляє найвищий рівень абстракції серед вивчених перетворень, оскільки на відміну від попередніх не є рухом і змінює розміри фігури, зберігаючи лише форму. Поняття коефіцієнта гомотетії викликає численні непорозуміння. Учні дев'ятого класу часто не розуміють, що

від'ємний коефіцієнт означає не зменшення фігури, а її розташування по інший бік від центру гомотетії. Визначення координат образу точки при гомотетії з центром у початку координат виявляється механічною операцією множення координат на коефіцієнт, але учні не пов'язують цю формулу з геометричним змістом перетворення.

Таблиця 2.3. – Типові помилки учнів при виконанні геометричних перетворень

Вид перетворення	Типова помилка	Причина помилки	Частота прояву у відсотках
Паралельне перенесення	Неправильне визначення напрямку вектора	Нерозуміння поняття вектора	35%
Осьова симетрія	Неправильна побудова перпендикуляра	Технічні навички побудови	48%
Центральна симетрія	Відкладання відстані в той самий бік від центру	Невірне розуміння центральної симетрії	52%
Поворот	Плутанина з напрямком обертання	Незасвоєння поняття додатного напрямку	67%
Гомотетія	Нерозуміння від'ємного коефіцієнта	Недостатність абстрактного мислення	73%
Композиція перетворень	Порушення послідовності виконання	Неуважність, поспішність	61%

Джерело: побудовано автором на основі [46]

Композиція перетворень становить окрему категорію труднощів, оскільки вимагає від учнів не лише розуміння окремих перетворень, але й здатності послідовно застосовувати їх та аналізувати результат. Учні часто порушують порядок виконання перетворень, не усвідомлюючи, що зміна послідовності може призвести до іншого результату. Визначення результату композиції двох перетворень одного типу викликає складнощі, наприклад, розуміння того, що два послідовні паралельні перенесення дають паралельне перенесення на суму векторів, або що два повороти навколо однієї точки дають поворот на суму кутів (табл.2.4.).

Доведення властивостей перетворень потребує від здобувачів освіти володіння логічними прийомами міркування, які у дев'ятому класі ще недостатньо сформовані. Учні відчувають труднощі з побудовою логічного

ланцюжка від умови задачі до висновку, часто замінюючи доведення перевіркою на конкретних прикладах. Формулювання тверджень про інваріантність властивостей при перетвореннях викликає складність через необхідність точного словесного виразу математичних ідей. Дев'ятикласники схильні до надмірного скорочення міркувань, пропускаючи проміжні логічні кроки, що робить доведення неповним [49, с.30].

Таблиця 2.4. – Результати композиції основних геометричних перетворень

Перше перетворення	Друге перетворення	Результат композиції	Складність розуміння
Паралельне перенесення на вектор a	Паралельне перенесення на вектор b	Паралельне перенесення на вектор $a+b$	Низька
Поворот на кут α навколо точки O	Поворот на кут β навколо точки O	Поворот на кут $\alpha+\beta$ навколо точки O	Середня
Осьова симетрія відносно осі l	Осьова симетрія відносно осі l	Тотожне перетворення	Середня
Осьова симетрія відносно паралельних осей	Осьова симетрія відносно паралельних осей	Паралельне перенесення	Висока
Гомотетія з коефіцієнтом k_1	Гомотетія з коефіцієнтом k_2	Гомотетія з коефіцієнтом k_1k_2	Висока

Джерело: побудовано автором на основі [45; 49]

Координатний підхід до перетворень відкриває нові можливості для розв'язування задач, але одночасно створює додаткові труднощі. Учні дев'ятого класу часто не бачать зв'язку між геометричним описом перетворення та його координатним представленням. Складання формул перетворення координат вимагає алгебраїчних навичок, які у частини учнів розвинені недостатньо. Застосування координатного методу для доведення геометричних властивостей здається дев'ятикласникам штучним та незрозумілим, оскільки вони не усвідомлюють переваг алгебраїчного підходу над суто геометричним (табл.2.5.).

Застосування перетворень для розв'язування задач становить окрему проблему, оскільки учні не вміють розпізнати ситуації, де використання

перетворень спрощує розв'язання. Дев'ятикласники зазвичай намагаються розв'язати задачу традиційними методами, не помічаючи, що застосування симетрії чи повороту може значно спростити міркування. Особливо складними виявляються задачі на знаходження найкоротшої відстані, де потрібно використати осьову симетрію для побудови оптимального шляху. Задачі на побудову фігури, що має певні властивості симетрії, вимагають просторової уяви та здатності до планування послідовності дій [7, с.26].

Таблиця 2.5. – Координатні формули основних геометричних перетворень

Тип перетворення	Координатна формула	Приклад застосування	Рівень засвоєння учнями
Паралельне перенесення на вектор (a; b)	$x' = x + a, y' = y + b$	Точка (2; 3) при векторі (1; -2) переходить у (3; 1)	Достатній
Осьова симетрія відносно осі Ox	$x' = x, y' = -y$	Точка (3; 4) переходить у (3; -4)	Достатній
Осьова симетрія відносно осі Oy	$x' = -x, y' = y$	Точка (5; 2) переходить у (-5; 2)	Достатній
Центральна симетрія відносно початку координат	$x' = -x, y' = -y$	Точка (4; -3) переходить у (-4; 3)	Середній
Поворот на 90° навколо початку координат	$x' = -y, y' = x$	Точка (2; 5) переходить у (-5; 2)	Низький
Гомотетія з центром O(0;0) та коефіцієнтом k	$x' = kx, y' = ky$	Точка (3; 2) при k=2 переходить у (6; 4)	Низький

Джерело: побудовано автором на основі [7]

Взаємозв'язок між різними перетвореннями залишається для більшості дев'ятикласників неочевидним. Учні вивчають кожне перетворення окремо, не усвідомлюючи, що між ними існують глибокі зв'язки. Розуміння того, що центральна симетрія є окремим випадком повороту, або що паралельне перенесення можна розглядати як граничний випадок повороту, коли центр віддаляється у нескінченність, виходить за межі можливостей більшості учнів цього віку. Класифікація перетворень на рухи та перетворення подібності вимагає здатності до узагальнення, яка у дев'ятому класі ще формується (табл.2.6.).

Таблиця 2.6. – Розподіл навчального часу та рівень засвоєння різних типів перетворень

Тип перетворення	Кількість годин у програмі	Відсоток учнів із достатнім рівнем	Відсоток учнів із високим рівнем	Необхідна кількість годин
Паралельне перенесення	3 години	76%	28%	4-5 годин
Осьова симетрія	4 години	68%	22%	5-6 годин
Центральна симетрія	3 години	61%	18%	4-5 годин
Поворот	4 години	52%	12%	6-7 годин
Гомотетія	3 години	43%	8%	5-6 годин
Композиція перетворень	2 години	38%	5%	4-5 годин
Застосування у задачах	3 години	45%	10%	5-6 годин

Джерело: побудовано автором на основі [71]

Практична частина вивчення теми створює технічні труднощі, пов'язані з недостатньою сформованістю навичок геометричних побудов. Учні дев'ятого класу часто неточно будують перпендикуляри, відкладають кути, проводять паралельні прямі, що призводить до накопичення похибок у складних побудовах. Використання креслярських інструментів вимагає акуратності та точності, які не всі дев'ятикласники можуть забезпечити. Перевірка правильності побудови образу фігури при перетворенні потребує критичного мислення та здатності до самоконтролю, що є проблемою для учнів з недостатньо розвиненою саморегуляцією [71, с.43].

Мотивація до вивчення геометричних перетворень у здобувачів освіти часто знижена через відсутність очевидного практичного застосування. Учні не бачать зв'язку між вивченим матеріалом та реальним життям, що зменшує їхню зацікавленість. Демонстрація застосування перетворень у мистецтві, архітектурі, природі може підвищити мотивацію, але вимагає від вчителя додаткової підготовки та використання наочних матеріалів. Складність теми та абстрактність понять призводять до того, що частина учнів втрачає впевненість у власних математичних здібностях (рис.2.2.).

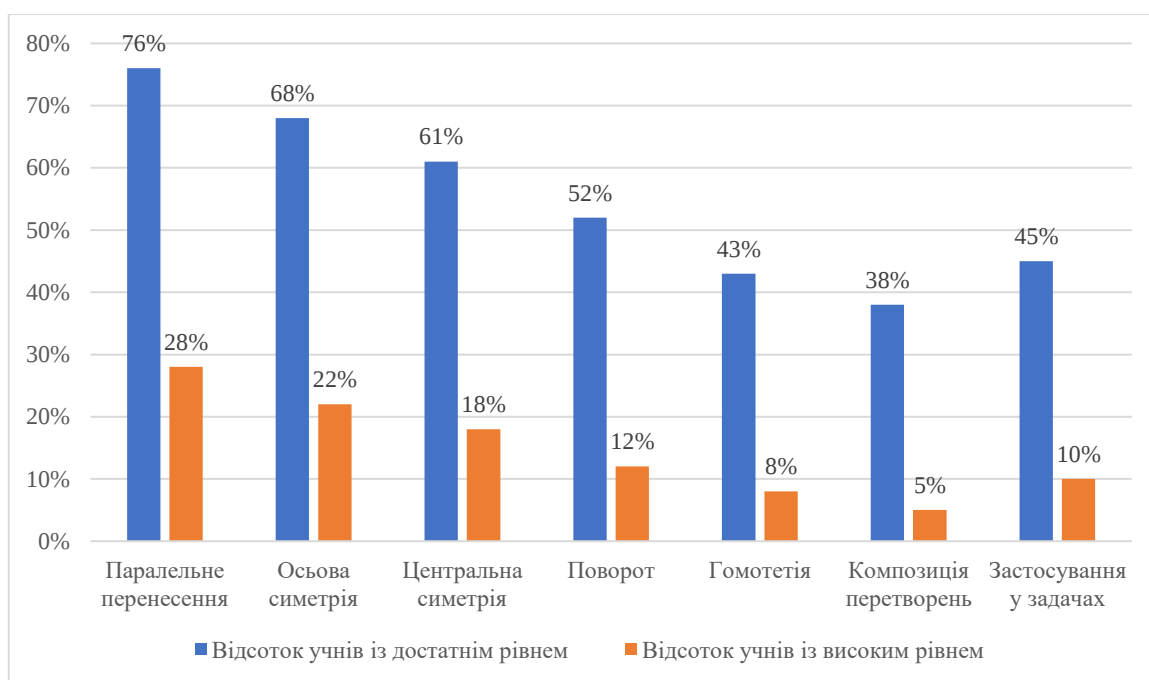


Рисунок 2.2. – Динаміка розуміння геометричних перетворень протягом навчального року

Джерело: побудовано автором

Диференціація учнів за рівнем підготовки стає особливо помітною під час вивчення геометричних перетворень. Учні з високим рівнем просторового мислення швидко схоплюють суть перетворень та здатні розв'язувати складні задачі, тоді як учні з переважанням вербально-логічного типу мислення відчують значні труднощі з візуалізацією. Недостатня підготовка з попередніх тем геометрії, зокрема з властивостей фігур та геометричних побудов, створює додаткові перешкоди для засвоєння нового матеріалу. Учні, які мають прогалини у базових знаннях, змушені одночасно заповнювати їх та засвоювати нову складну тему.

Час, відведений навчальною програмою на вивчення геометричних перетворень, часто виявляється недостатнім для якісного засвоєння матеріалу всіма учнями. Дев'ятикласникам потрібен час на осмислення кожного нового поняття, виконання достатньої кількості вправ для формування навичок, проте програма передбачає досить швидкий темп проходження теми. Це призводить до поверхневого розуміння матеріалу, коли учні механічно виконують типові

завдання, але не розуміють глибинної суті перетворень та не можуть застосувати знання у нестандартних ситуаціях.

Отже, засвоєння геометричних перетворень у 9 класі є складним етапом, що вимагає переходу від конкретно-образного до абстрактного мислення та динамічного сприйняття фігур. Основні труднощі учнів полягають у недостатньому розвитку просторової уяви, плутанині між поняттями, технічними помилками у геометричних побудовах та складнощах з координатним методом. Найбільш проблематичними виявляються композиція перетворень, через порушення послідовності, та гомотетія, через нерозуміння від'ємного коефіцієнта. Недостатність навчального часу та низька мотивація, спричинена відсутністю очевидних практичних зв'язків, посилюють ці проблеми, що вимагає від викладача активного використання візуалізації та проблемно-пошукових методів.

2.2 Методика застосування ІКТ на різних етапах уроку з теми «Геометричні перетворення»

Сучасний урок математики передбачає органічне поєднання традиційних методів навчання з можливостями цифрових технологій, що дозволяє підвищити наочність матеріалу та глибину розуміння учнями складних геометричних концепцій. Геометричні перетворення як розділ шкільної математики потребують особливої уваги до візуалізації процесів, динамічного представлення змін фігур та формування просторового мислення учнів. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій на кожному етапі уроку створює умови для ефективного засвоєння матеріалу через інтерактивну взаємодію з геометричними об'єктами.

Підготовчий етап уроку починається з актуалізації опорних знань, де використання інтерактивної дошки або презентаційного програмного забезпечення допомагає швидко відновити в пам'яті учнів основні поняття про фігури, їхні властивості та координатну площину. На екрані демонструються

зображення різних геометричних фігур, які учні мають ідентифікувати та описати, що активізує їхню увагу та налаштовує на роботу. Використання анімованих слайдів з поступовим з'явленням елементів дозволяє контролювати темп роботи класу та уникати перевантаження інформацією. Електронні тестові системи на цьому етапі допомагають швидко перевірити рівень готовності учнів до сприйняття нового матеріалу через короткі завдання на розпізнавання фігур, визначення координат точок або обчислення відстаней між точками на площині [5, с.10].

Мотиваційний компонент уроку підсилюється демонстрацією відеофрагментів або анімацій, що показують застосування геометричних перетворень у реальному житті. Симетрія в архітектурі, паралельне перенесення в механізмах, обертання в природних явищах стають зрозумілішими через динамічні зображення на екрані. Програми для тривимірного моделювання дозволяють показати, як площинні перетворення переходять у просторові, що розширює уявлення учнів про можливості математики. Інтерактивні завдання з елементами гри, де потрібно перетворити одну фігуру на іншу за допомогою певних операцій, викликають зацікавленість та створюють проблемну ситуацію для подальшого вивчення теми [2, с.20].

Етап пояснення нового матеріалу передбачає використання спеціалізованих геометричних програм, які дозволяють будувати фігури та виконувати з ними перетворення в режимі реального часу. Програма GeoGebra стає незамінним інструментом для демонстрації осьової симетрії, коли вчитель будує фігуру, задає вісь симетрії та миттєво отримує симетричний образ. Учні бачать, що відстані від відповідних точок до осі симетрії однакові, а відрізок, що з'єднує точку з її образом, перпендикулярний до осі. Динамічна зміна положення вихідної фігури демонструє інваріантність властивостей симетричного перетворення. Паралельне перенесення візуалізується через побудову вектора переміщення, і учні спостерігають, як кожна точка фігури

зміщується на цей самий вектор, зберігаючи форму та розміри об'єкта (рис.2.3.).

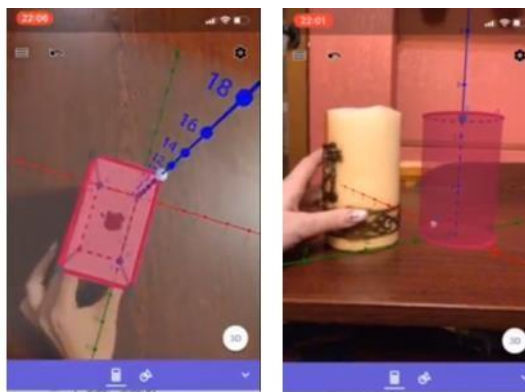


Рисунок 2.3. – Демонстраційні програми GeoGebra AR
Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Поворот навколо точки вимагає розуміння кута повороту та напрямку обертання, що легко демонструється на екрані через покрокову анімацію. Вчитель задає центр обертання, будує промені до вихідної точки та її образу, вимірює кут між ними, і учні бачують, що для всіх точок фігури цей кут однаковий. Гомотетія, як перетворення подібності, показується через зміну масштабу фігури відносно центру гомотетії з певним коефіцієнтом, причому програма автоматично обчислює відношення відстаней від центру до відповідних точок (табл.2.7.).

Таблиця 2.7. – Властивості геометричних перетворень

Перетворення	Зберігає розміри	Зберігає форму	Зберігає орієнтацію	Зберігає відстані
Паралельне перенесення	Так	Так	Так	Так
Осьова симетрія	Так	Так	Ні	Так
Центральна симетрія	Так	Так	Так	Так
Поворот	Так	Так	Так	Так
Гомотетія	Ні	Так	Так	Ні

Джерело: побудовано автором на основі [8]

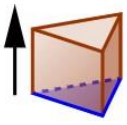
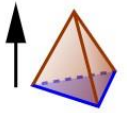
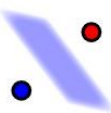
Формування вмінь та навичок відбувається через виконання учнями практичних завдань на комп'ютерах або планшетах з використанням тих самих програм, що застосовувалися під час пояснення. Кожен учень отримує

індивідуальне завдання на побудову фігури та виконання конкретного перетворення, що дозволяє працювати у власному темпі та багаторазово повторювати дії до отримання правильного результату. Програма надає миттєвий зворотний зв'язок через візуальне відображення результату і учень самостійно оцінює правильність виконання завдання. Диференційований підхід реалізується через надання завдань різного рівня складності: від простих перетворень окремих точок, до композиції декількох послідовних перетворень складних фігур [8, с.34].

Інтерактивні вправи на визначення виду перетворення за заданими вихідною фігурою та її образом розвивають аналітичне мислення. Учні досліджують розміщення фігур, вимірюють відстані та кути, висувують гіпотези про тип виконаного перетворення та перевіряють їх за допомогою інструментів програми. Завдання на знаходження осі симетрії, центру обертання чи коефіцієнта гомотетії формують навички дослідницької роботи. Використання координатної площини дозволяє перейти до аналітичного опису перетворень через формули, коли учні записують координати образу точки залежно від координат вихідної точки та параметрів перетворення.

Закріплення матеріалу здійснюється через розв'язування комплексних задач, де потрібно виконати послідовність перетворень або знайти відповідне перетворення як композицію кількох простих. Інтерактивні завдання з перетягування об'єктів допомагають учням експериментувати з порядком виконання перетворень та спостерігати, як це впливає на кінцевий результат. Програми з елементами конструювання дозволяють створювати орнаменти та візерунки на основі геометричних перетворень, що поєднує математичну діяльність з творчістю. Учні будують базовий елемент та застосовують до нього систему перетворень для отримання складного симетричного малюнка, що наочно демонструє практичне застосування вивченого матеріалу (табл.2.8.).

Таблиця 2.8. – Приклади інструментів для здійснення побудов

№	Зображення інструмента	Інструмент	Застосування
1		<i>Куб</i>	двічі клацнути у вікні 3D-виду для створення точок, які задають ребро куба
2		<i>Витиснути призму</i>	дозволяє витиснути призму з багатокутника чи циліндр з кола
3		<i>Витиснути піраміду</i>	дозволяє побудувати піраміду з багатокутника або конус з кола
4		<i>Обертання 3D графіки</i>	дозволяє обертання в тривимірному просторі
5		<i>Розгортка</i>	дозволяє побудувати розгортку до зазначеного многогранника
6		<i>Сфера: центр та точка</i>	дозволяє побудувати сферу, вибравши центральну точку і будь-яку точку поверхні
7		<i>Площина через 3 точки</i>	побудова площини, послідовно обравши три точки
8		<i>Симетрія відносно площини</i>	виберіть об'єкт, який хочете відобразити, а потім вкажіть площину відображення
9		<i>Вигляд з</i>	дозволяє перевести вид в положення нормалі до обраного об'єкта

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Колективна робота на інтерактивній дошці під час обговорення розв'язків складних задач дозволяє залучити до процесу весь клас. Один учень виконує побудови біля дошки, інші коментують його дії, пропонують альтернативні способи розв'язання, виправляють помилки. Можливість швидкого видалення невірних елементів та повторного виконання дій знімає страх помилки та заохочує до активної участі. Запис процесу розв'язування в програмі дозволяє зберегти хід міркувань та повернутися до нього пізніше для аналізу або повторення матеріалу.

Контроль і оцінювання знань проводиться з використанням електронних тестових систем, що містять завдання різних типів: завдання з вибором однієї правильної відповіді перевіряють знання основних понять та властивостей перетворень. Завдання на встановлення відповідності між фігурами та видами перетворень розвивають уміння аналізувати геометричні об'єкти; завдання відкритого типу, де потрібно записати координати точки після перетворення або знайти параметри перетворення, перевіряють обчислювальні навички та розуміння аналітичного опису перетворень; а графічні завдання в електронному середовищі, де учень має виконати побудову образу фігури, дозволяють оцінити практичні вміння роботи з геометричними інструментами.

Автоматизована перевірка тестових завдань забезпечує швидке отримання результатів та об'єктивність оцінювання. Система фіксує час виконання кожного завдання, кількість спроб, що дає додаткову інформацію про рівень засвоєння матеріалу. Детальна статистика помилок допомагає вчителю виявити найбільш проблемні питання теми та скорегувати подальшу роботу. Учні отримують миттєвий зворотний зв'язок з коментарями до кожного завдання, що має навчальний ефект та допомагає усвідомити свої помилки.

Домашнє завдання з використанням цифрових технологій може включати перегляд навчальних відео з поясненням додаткових властивостей перетворень або нестандартних способів розв'язування задач. Інтерактивні

онлайн вправи на освітніх платформах дозволяють учням продовжити тренування навичок у зручний час та отримати додаткові бали за активність. Творчі завдання на створення власних геометричних композицій з використанням вивчених перетворень розвивають креативність та поглиблюють розуміння математичних закономірностей. Форуми та чати класу в електронному середовищі дають можливість обговорювати складні питання, обмінюватися досвідом розв'язування задач, що створює навчальне співтовариство поза межами класної кімнати.

Рефлексія як завершальний етап уроку також використовує цифрові інструменти для збору швидкого зворотного зв'язку від учнів: онлайн опитування через мобільні пристрої дозволяє за кілька хвилин з'ясувати, наскільки зрозумілою була тема, які моменти викликали труднощі, що сподобалося на уроці; хмара слів, створена з відповідей учнів на запитання про ключові поняття теми, візуально показує, що запам'яталося найбільше; а електронний щоденник настрою з використанням емоційних символів допомагає відстежити емоційний стан учнів та їхнє ставлення до процесу навчання.

Отже, сучасний урок математики з вивчення геометричних перетворень інтегрує цифрові технології на всіх етапах, що значно підвищує наочність та динамічність матеріалу. Використання динамічних геометричних середовищ є ключовим, оскільки дозволяє візуалізувати процеси перетворень у режимі реального часу, демонструючи інваріантність властивостей. Така системна інтеграція сприяє формуванню не лише предметних, а й дослідницьких та інформаційно-цифрових компетентностей учнів.

2.3 Розробка та аналіз уроків з теми «Геометричні перетворення» із використанням ІКТ

Проектування сучасного уроку математики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій починається з ретельного аналізу

навчальної програми та виділення ключових компетентностей, які мають бути сформовані в учнів під час вивчення геометричних перетворень. Учитель визначає місце конкретного уроку в системі занять з теми, встановлює міжпредметні зв'язки, формулює чіткі навчальні цілі, що охоплюють знаннявий, діяльнісний та ціннісний компоненти освіти. Добір цифрових інструментів здійснюється відповідно до специфіки навчального матеріалу та можливостей технічного обладнання навчального закладу. Педагогічна доцільність використання кожного цифрового ресурсу обґрунтовується його внеском у досягнення поставлених цілей та переваг над традиційними методами навчання.

Розробка уроку на тему паралельного перенесення як першого виду руху в геометрії передбачає створення системи завдань, що поступово ускладнюються від побудови образу однієї точки до перетворення складних фігур. На етапі актуалізації знань використовується презентація з інтерактивними елементами, де учні на інтерактивній дошці позначають точки на координатній площині та визначають їхні координати. Завдання на обчислення довжини вектора за координатами його початку та кінця підготовлює базу для розуміння вектора переміщення при паралельному перенесенні. Мотивація досягається демонстрацією відеофрагменту руху ескалятора або конвеєрної стрічки, де всі точки об'єкта переміщуються в одному напрямку на однакову відстань, що є життєвим прикладом паралельного перенесення.

Пояснення нового матеріалу відбувається через роботу в програмі GeoGebra, де вчитель будує трикутник з вершинами в точках з конкретними координатами та задає вектор переміщення. Програма автоматично будує образ трикутника після паралельного перенесення, і учні спостерігають збереження форми, розмірів та орієнтації фігури. Вчитель вимірює відповідні сторони та кути вихідного трикутника та його образу, демонструючи рівність цих величин. Побудова векторів від кожної вершини вихідного трикутника до відповідної вершини образу показує, що всі ці вектори рівні заданому вектору

переміщення. Аналітичний опис паралельного перенесення вводиться через формули зміни координат точки, де до кожної координати додається відповідна координата вектора переміщення.

Практична робота учнів організується в комп'ютерному класі, де кожен отримує індивідуальне завдання на виконання паралельного перенесення заданої фігури на заданий вектор. Учні відкривають програму GeoGebra на своїх комп'ютерах, будують вихідну фігуру за координатами вершин, задають вектор переміщення та використовують вбудовану функцію паралельного перенесення для отримання образу. Перевірка правильності виконання завдання здійснюється візуально через порівняння отриманого результату з еталоном на екрані вчителя або через вимірювання параметрів побудованої фігури. Диференціація реалізується через варіацію складності фігур, від простих трикутників до багатокутників зі складною конфігурацією, та через різні способи задання вектора переміщення, через координати або через дві точки.

Закріплення матеріалу включає розв'язування задач на знаходження координат образу точки за формулами, що виконується в електронному зошиті з автоматичною перевіркою відповідей. Учні вводять обчислені координати в спеціальні поля, і система миттєво повідомляє про правильність результату. Задачі на знаходження координат вихідної точки за координатами образу та вектора переміщення розвивають оберненість мислення та розуміння взаємозв'язку між елементами перетворення. Творче завдання на створення орнаменту методом багаторазового паралельного перенесення базового елемента демонструє естетичні можливості математики та формує уявлення про застосування перетворень у мистецтві та дизайні.

Урок на тему осової симетрії потребує особливої уваги до побудови осі симетрії та розуміння перпендикулярності як ключової властивості цього перетворення. Актуалізація знань включає повторення означення перпендикулярних прямих, серединного перпендикуляра до відрізка, властивостей рівнобедреного трикутника. Інтерактивна вправа на

розпізнавання симетричних фігур у природі та мистецтві через демонстрацію зображень метеликів, квітів, архітектурних споруд активізує наявний життєвий досвід учнів. Проблемне питання про те, як математично описати симетрію, створює пізнавальну потребу у формалізації інтуїтивного розуміння.

Дослідницька діяльність на етапі вивчення нового матеріалу організовується через групову роботу учнів з планшетами, де кожна група отримує завдання побудувати кілька пар симетричних точок відносно заданої прямої та виявити закономірності їх розміщення. Програма дозволяє вимірювати відстані від точок до осі симетрії, кути між відрізком, що з'єднує симетричні точки, та віссю. Учні формують гіпотези про властивості симетричних точок, які потім узагальнюються вчителем у строге означення осьової симетрії. Демонстрація на інтерактивній дошці побудови образу складної фігури через знаходження образів ключових точок та їх з'єднання закріплює алгоритм виконання перетворення.

Особлива увага приділяється випадку, коли вісь симетрії паралельна одній з координатних осей або співпадає з нею, що спрощує аналітичний опис перетворення. Симетрія відносно осі ординат змінює знак абсциси точки при збереженні ординати, що легко перевіряється побудовою кількох прикладів у програмі. Симетрія відносно осі абсцис аналогічно змінює знак ординати. Симетрія відносно довільної прямої вимагає складніших обчислень, але програма виконує їх автоматично, демонструючи результат (табл.2.9.).

Таблиця 2.9. – Формули для різних випадків розміщення осі симетрії

Вісь симетрії	Координати вихідної точки	Координати образу
Вісь ординат	(x, y)	$(-x, y)$
Вісь абсцис	(x, y)	$(x, -y)$
Пряма $y = x$	(x, y)	(y, x)
Пряма $y = -x$	(x, y)	$(-y, -x)$

Джерело: побудовано автором на основі [4]

Практикум з виконання осьової симетрії включає серію завдань зростаючої складності, від побудови образу відрізка до симетрії

багатокутників та кіл. Завдання на визначення, чи є задана фігура симетричною відносно певної прямої, розвивають аналітичні здібності. Учні використовують інструменти програми для побудови передбачуваного образу та перевірки його співпадіння з частиною вихідної фігури. Задачі на побудову фігури за її половиною та віссю симетрії мають практичне значення та часто зустрічаються в технічному кресленні.

Центральна симетрія як окремий вид перетворення вивчається через порівняння з осьовою симетрією та виявлення спільних і відмінних властивостей. Актуалізація включає повторення поняття середини відрізка та її координат через формули середньої арифметичної. Мотивація досягається демонстрацією центральносиметричних фігур, букв алфавіту, символів, що однаково виглядають після повороту на 180 градусів. Інтерактивна гра на розпізнавання центральносиметричних об'єктів серед запропонованих зображень залучає увагу та створює позитивний емоційний фон.

Побудова в програмі GeoGebra пари центральносиметричних точок відносно заданого центра демонструє, що центр симетрії є серединою відрізка, який з'єднує симетричні точки. Вимірювання відстаней від центра до вихідної точки та її образу підтверджує їх рівність. Побудова трикутника та його образу при центральній симетрії показує збереження форми та розмірів, але можливу зміну орієнтації залежно від вибору системи відліку. Аналітичний опис центральної симетрії відносно початку координат особливо простий, кожна координата точки змінює знак на протилежний, що легко запам'ятовується учнями.

Порівняльний аналіз осьової та центральної симетрії проводиться через складання таблиці властивостей та виконання серії завдань на розпізнавання виду симетрії за розміщенням вихідної фігури та її образу. Учні формують критерії розрізнення, такі як наявність осі або центра, орієнтація фігур, можливість суміщення шляхом перегинання або обертання. Завдання на композицію двох осьових симетрій з паралельними осями приводить до

відкриття, що результатом є паралельне перенесення, що демонструє глибокі зв'язки між різними видами перетворень.

Урок на тему повороту навколо точки вимагає розвиненого просторового уявлення та розуміння кутових величин. Підготовча робота включає повторення способів вимірювання кутів, переведення градусів у радіани, поняття орієнтованого кута з урахуванням напрямку обертання. Демонстрація відео обертання механізмів, стрілок годинника, астрономічних об'єктів створює зв'язок з реальним світом. Інтерактивна модель обертання точки навколо центра з можливістю зміни кута повороту за допомогою повзунка дозволяє учням самостійно досліджувати залежність положення образу від параметрів перетворення.

Алгоритм побудови образу точки при повороті включає кілька кроків, кожен з яких демонструється окремо на інтерактивній дошці. Спочатку будується промінь з центра повороту через вихідну точку, потім від цього променя відкладається заданий кут у визначеному напрямку, на новому промені відкладається відстань, рівна відстані від центра до вихідної точки. Програма дозволяє виконувати ці побудови покроково з можливістю повернення до попереднього кроку при виникненні помилки. Автоматизація побудови через вбудовану функцію повороту показує результат миттєво, але розуміння алгоритму залишається необхідним для свідомого виконання перетворення.

Дослідження властивостей повороту включає вимірювання відстаней між відповідними точками вихідної фігури та її образу, кутів між відповідними сторонами, площ фігур. Учні переконуються в збереженні всіх метричних характеристик та подібності конфігурації фігур. Особливі випадки повороту на 90, 180 та 270 градусів розглядаються детально через їх практичне значення та простоту аналітичного опису. Поворот на 180 градусів навколо початку координат збігається з центральною симетрією відносно цієї точки, що демонструє зв'язок між різними перетвореннями.

Практичні завдання включають побудову орнаментів методом багаторазового повороту базового елемента на кути, кратні певній величині. Поворот на 60 градусів навколо центра шість разів створює шестикутну розетку, поворот на 45 градусів вісім разів дає восьмикутну. Учні експериментують з різними базовими фігурами та кутами повороту, створюючи унікальні візерунки. Збереження створених орнаментів у графічних файлах дозволяє використовувати їх для оформлення проєктів, презентацій, що підвищує мотивацію до виконання завдання.

Вивчення гомотетії як перетворення подібності відрізняється від попередніх тем необхідністю розуміння поняття коефіцієнта та його впливу на розміри фігури. Актуалізація включає повторення подібності фігур, відношення відрізків, пропорцій. Мотивація здійснюється через демонстрацію зображень під мікроскопом або через збільшувальне скло, фотографій різного масштабу одного об'єкта. Обговорення того, як математично описати збільшення або зменшення зображення зі збереженням форми, підводить до введення поняття гомотетії.

Побудова образу точки при гомотетії з центром та коефіцієнтом демонструється покроково в програмі GeoGebra. Будується промінь з центра гомотетії через вихідну точку, вимірюється відстань від центра до вихідної точки, відстань множиться на коефіцієнт гомотетії, отримане значення відкладається на промені від центра. Для додатного коефіцієнта образ лежить по той самий бік від центра, що й вихідна точка, для від'ємного по протилежний. Побудова образу трикутника показує, що всі лінійні розміри змінюються в однакове число разів, рівне модулю коефіцієнта.

Дослідження властивостей гомотетії включає вимірювання відношень відповідних сторін, відстаней від центру до відповідних точок, площ фігур. Учні встановлюють, що відношення відповідних сторін дорівнює коефіцієнту гомотетії, відношення площ дорівнює квадрату коефіцієнта. Кути між відповідними сторонами зберігаються, що робить фігури подібними.

Особливий випадок гомотетії з коефіцієнтом - один дає центральну симетрію, що знову демонструє зв'язки між перетвореннями.

Аналітичний опис гомотетії з центром у початку координат записується через множення кожної координати точки на коефіцієнт гомотетії. Для довільного центра формули ускладнюються, але програма виконує обчислення автоматично. Завдання на знаходження коефіцієнта гомотетії за координатами вихідної точки та її образу розвивають алгебраїчні навички. Задачі на побудову фігури, гомотетичної даній відносно заданого центра з відомим коефіцієнтом, формують просторове мислення та конструктивні вміння.

Узагальнюючий урок з теми геометричних перетворень спрямований на систематизацію знань про всі вивчені види перетворень та їхні властивості. Інтерактивна схема класифікації перетворень на рухи та перетворення подібності створюється колективно на інтерактивній дошці з участю учнів. До кожного виду перетворення додаються його визначення, властивості, формули, приклади застосування. Завдання на розпізнавання виду перетворення за розміщенням вихідної фігури та її образу без додаткових позначень розвивають аналітичне мислення.

Композиція перетворень як нова тема вводиться через практичні приклади послідовного виконання кількох перетворень до однієї фігури. Учні спостерігають, що результат залежить від порядку виконання перетворень, за винятком деяких спеціальних випадків. Дослідження комутативності композицій різних видів перетворень проводиться експериментально в програмі через порівняння результатів при зміні порядку. Виявляється, що композиція двох паралельних перенесень комутативна та дає знову паралельне перенесення, а композиція повороту та паралельного перенесення зазвичай некомутативна.

Задачі на знаходження результуючого перетворення для композиції кількох простих перетворень мають дослідницький характер. Учні висувують гіпотези про те, яким перетворенням можна замінити послідовність заданих

перетворень, перевіряють свої припущення побудовами в програмі, формують висновки. Виявлення того, що композиція двох симетрій відносно паралельних прямих дає паралельне перенесення, а відносно прямих, що перетинаються, дає поворот, демонструє глибинні зв'язки в геометрії.

Тематичне оцінювання з використанням комп'ютерного тестування охоплює всі аспекти вивченої теми від знання означень до вміння розв'язувати комплексні задачі. Тест складається з трьох рівнів складності, кожен з яких оцінюється певною кількістю балів. Перший рівень містить завдання з вибором однієї правильної відповіді на знання властивостей перетворень, другий рівень включає завдання на обчислення координат образів точок за формулами та побудову образів простих фігур, третій рівень пропонує комплексні задачі на композиції перетворень та доведення геометричних тверджень з використанням перетворень.

Графічні завдання в електронному тесті вимагають від учнів виконання побудов у вбудованому редакторі або вибору правильного зображення з кількох запропонованих варіантів. Завдання на встановлення відповідності між аналітичними описами перетворень та їхніми геометричними інтерпретаціями перевіряють розуміння зв'язку між алгебраїчним та геометричним підходами. Завдання відкритого типу, де потрібно записати розгорнуту відповідь або навести доведення, оцінюються вчителем вручну з використанням критеріїв оцінювання, доступних в електронній системі.

Отже, використання ІКТ на уроках геометрії в 9 класі при вивченні теми геометричні перетворення допомагає втримати увагу учнів, а заодно швидко і ефективно засвоїти навчальний матеріал, та сформувати ключові компетентності здобувача освіти.

2.4 Апробація методики та аналіз результатів впровадження ІКТ у навчання теми «Геометричні перетворення»

Експериментальне впровадження розробленої методики навчання геометричних перетворень з використанням інформаційно-комунікаційних технологій здійснювалося протягом повного навчального року в закладі загальної середньої освіти. До апробації залучили 2 класи дев'ятого року навчання загальною кількістю 56 учнів, що дало змогу отримати дані про ефективність запропонованих методичних рішень.

Підготовча робота до експерименту передбачала детальне планування всіх організаційних моментів та створення необхідної матеріально-технічної бази. Вчителем було пройдено спеціальне навчання з використанням програмного забезпечення GeoGebra, роботи з інтерактивними дошками, створення електронних навчальних матеріалів та організації комп'ютерно-орієнтованих уроків. (табл.2.10.).

Таблиця 2.10. – Програма підготовки до експерименту

День	Тема навчання	Тривалість	Форма роботи
1	Основи роботи з GeoGebra	4 год	Практичний семінар
2	Створення інтерактивних моделей перетворень	4 год	Майстер-клас
3	Методика використання ІКТ на уроках геометрії	3 год	Лекція-дискусія
4	Проектування комп'ютерно-орієнтованих уроків	4 год	Практикум
5	Електронне оцінювання та тестування	3 год	Практичний семінар
6	Організація групової роботи з ІКТ	2 год	Майстер-клас
7-10	Розробка власних навчальних матеріалів	16 год	Самостійна робота з консультаціями

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Формування експериментальної та контрольної групи відбувалося з дотриманням принципу рівності початкових умов. Один клас визначався як експериментальний, де навчання геометричних перетворень проводилося з активним використанням інформаційно-комунікаційних технологій на

кожному уроці, другий клас працював за традиційною методикою з мінімальним залученням цифрових засобів. Початковий рівень математичної підготовки учнів обох груп визначався за результатами контрольної роботи з геометрії за попередній навчальний рік та тестування математичних здібностей. (табл.2.11.).

Таблиця 2.11. – Початковий рівень математичної підготовки учнів

Показник	Експериментальний клас	Контрольний клас
Середній бал за попередній рік	7,2	7,1
Тест математичних здібностей (бали)	12,4	12,2
Просторове мислення (бали)	15,8	15,6
Логічне мислення (бали)	16,2	16,4
Алгебраїчні навички (%)	68,5	67,8

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Перший етап експерименту полягав у вивченні теми паралельного перенесення як найпростішого виду руху в геометрії. Експериментальний клас працював у комп'ютерному класі, де кожен учень мав доступ до персонального комп'ютера з встановленою програмою GeoGebra. Урок розпочинався з демонстрації відеофрагменту руху конвеєрної стрічки на заводі, після чого вчитель ставив проблемне запитання про математичний опис такого переміщення. Робота в програмі дозволяла учням самостійно будувати точки на координатній площині, задавати вектор переміщення та спостерігати за утворенням образу при паралельному перенесенні. Візуалізація процесу перетворення в реальному часі з можливістю зміни параметрів створювала умови для формування динамічного уявлення про геометричні об'єкти. Контрольний клас вивчав той самий матеріал за підручником з використанням крейди та дошки, де вчитель виконував статичні креслення та пояснював формули зміни координат.

Спостереження за навчальною діяльністю учнів в експериментальному класі виявило значно вищий рівень залученості та активності порівняно з традиційними уроками. Учні з ентузіазмом працювали з програмою, експериментували з різними векторами переміщення, самостійно відкривали

властивості паралельного перенесення через побудову численних прикладів. Можливість миттєво побачити результат дій стимулювала дослідницьку поведінку, коли учні ставили собі запитання та перевіряли гіпотези через побудови. Особливо помітним було підвищення активності учнів з низькою навчальною мотивацією, яких зазвичай важко залучити до роботи на традиційному уроці геометрії. Інтерактивний характер діяльності перетворював засвоєння математичних понять на захоплюючий процес відкриття закономірностей.

Проміжне тестування після вивчення паралельного перенесення показало перші відмінності в результатах навчання. Експериментальний клас виконував тест в електронній формі безпосередньо на комп'ютерах, що дозволило отримати миттєві результати та автоматично згенеровану статистику. Контрольний клас писав традиційну паперову контрольну роботу з аналогічними завданнями. Порівняння середніх балів виявило перевагу експериментального класу на 1,3 бала за дванадцятибальною шкалою. Детальний аналіз показав, що найбільша різниця спостерігалася в завданнях на побудову образів складних фігур, де експериментальна група демонструвала на 24 відсотки вищий показник правильних відповідей. Завдання на обчислення координат образу точки за формулами виконувалися приблизно однаково в обох групах, що свідчить про ефективність обох методик у формуванні обчислювальних навичок (рис.2.4.).

Аналіз типових помилок показав якісні відмінності в характері непорозумінь учнів. У контрольному класі найпоширенішими були помилки в розумінні напрямку переміщення та плутанина між координатами вектора і координатами точки. Експериментальний клас рідше допускав концептуальні помилки, але інколи мав технічні неточності при введенні даних у програму або при зчитуванні координат з екрану. Проте загальна кількість помилок в експериментальній групі була нижчою, а якість розуміння властивостей паралельного перенесення виявилася глибшою. Учні експериментального класу краще формулювали означення перетворення своїми словами та

наводили життєві приклади застосування паралельного перенесення (табл.2.12.).



Рисунок 2.4. – Результати проміжного тестування після вивчення паралельного перенесення

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Таблиця 2.12. – Аналіз типових помилок при вивченні паралельного перенесення

Тип помилки	Експериментальний клас	Контрольний клас
Непорозуміння напрямку переміщення	8,0%	23,5%
Плутанина між координатами вектора і точки	5,7%	18,8%
Помилки в обчисленнях	12,6%	15,3%
Неточність побудови	15,8%	28,2%
Технічні помилки роботи з програмою	11,5%	-
Невірне формулювання властивостей	6,9%	19,4%

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Наступний етап експерименту присвячувався вивченню осьової симетрії як перетворення з іншими властивостями порівняно з паралельним перенесенням. Методика роботи в експериментальному класі передбачала

груповий дослідницький проєкт, де команди по чотири учні отримували завдання побудувати кілька пар симетричних точок відносно різних прямих та виявити загальні закономірності. Кожна група працювала з планшетом або ноутбуком, де у програмі GeoGebra будувала точки, відзначала передбачувану вісь симетрії та використовувала інструменти вимірювання для перевірки гіпотез. Робота в групах сприяла розвитку комунікативних навичок, адже учні обговорювали свої спостереження, дискутували про правильність висновків, разом формулювали властивості осьової симетрії. Вчитель виконував роль фасилітатора, який не давав готових відповідей, а направляв дослідження учнів через навідні запитання.

Контрольний клас вивчали осьову симетрію традиційно через пояснення вчителя з побудовами на дошці та виконання вправ з підручника. Учні працювали індивідуально у зошитах, виконуючи побудови за допомогою лінійки та олівця. Перевірка правильності побудов вимагала значних зусиль вчителя, який мав підійти до кожного учня та оцінити якість креслення. Часто виникали ситуації, коли неточність побудови приводила до помилкових висновків про властивості перетворення, а виявлення джерела помилки було ускладненим через відсутність можливості швидко переробити креслення.

Особливу увагу під час вивчення осьової симетрії приділяли формуванню розуміння зв'язку між геометричним та аналітичним описом перетворення. Експериментальний клас мав можливість побудувати в програмі образ точки геометрично через перпендикуляр до осі та одночасно побачити зміну координат цієї точки в числовому вигляді. Синхронне представлення геометричної та алгебраїчної інформації сприяло встановленню міцних зв'язків між різними способами опису математичних об'єктів. Учні самостійно виводили формули для перетворення координат при симетрії відносно осей координат через спостереження за змінами числових значень при побудовах (табл.2.13.).

Таблиця 2.13. – Результати контрольної роботи з теми «Осьова симетрія»

Тип завдання	Експериментальний клас (середній бал)	Контрольний клас (середній бал)	Різниця
Побудова образу точки за означенням	9,2	7,4	+1,8
Застосування формул для осей координат	8,8	8,1	+0,7
Побудова образу трикутника	8,4	6,8	+1,6
Дослідження симетричності фігури	7,8	4,2	+3,6
Знаходження осі симетрії	8,0	5,8	+2,2
Доведення властивостей симетрії	7,5	5,5	+2,0
Загальний середній бал	8,1	6,5	+1,6

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Контрольна робота після вивчення осьової симетрії включала завдання трьох типів: на побудову образу точки за означенням, на застосування формул для знаходження координат образу та на дослідження симетричності заданої фігури відносно певної прямої. Результати показали ще більшу різницю між експериментальною та контрольною групою порівняно з першою контрольною роботою. Середній бал експериментального класу склав 8,1 проти 6,5 у контрольному класі за дванадцятибальною шкалою. Найбільша перевага спостерігалася в завданнях дослідницького характеру, де потрібно було визначити наявність або відсутності осі симетрії у заданої фігури. Експериментальний клас демонстрував на 38 відсотків кращі результати в таких завданнях, що свідчить про розвиток аналітичного мислення та здатності до узагальнення.

Якісний аналіз робіт показав, що учні експериментального класу краще розуміли суть перетворення, а не лише формально запам'ятали алгоритм побудови. Вони вміли пояснити, чому вісь симетрії є серединним перпендикуляром до відрізка, який з'єднує симетричні точки, наводили аргументи на підтвердження збереження відстаней при цьому перетворенні.

Контрольний клас частіше демонстрували механічне виконання побудов без глибокого розуміння геометричної сутності процесу. Помилки в контрольній групі часто мали систематичний характер, що вказувало на неправильно сформоване уявлення про перетворення, тоді як помилки експериментальної групи були переважно випадковими описками або неточностями вимірювань.

Вивчення центральної симетрії проводилося з акцентом на порівнянні з осьовою симетрією та виявленні спільних і відмінних властивостей. Експериментальний клас створював порівняльні таблиці в електронному форматі, де заповнювали комірки характеристиками обох перетворень на основі власних досліджень у програмі. Інтерактивна модель з можливістю перемикання між осьовою та центральною симетрією для однієї фігури дозволяла наочно побачити відмінності в розміщенні образів. Завдання на визначення виду симетрії за розташуванням вихідної фігури та її образу розвивало навички класифікації та аналізу геометричних конфігурацій.

Проміжні результати після вивчення трьох видів перетворень дали підставу для перших висновків про ефективність методики. Експериментальний клас показував стабільно вищі результати в усіх типах завдань, особливо в тих, що вимагали розуміння властивостей перетворень та творчого застосування знань. Різниця в середніх балах між експериментальною та контрольною групою становила від 1,2 до 1,8 бала залежно від контингенту учнів (рис. 2.5.).

Опитування учнів експериментального класу виявило високий рівень задоволеності процесом навчання та зростання інтересу до математики. На запитання про те, чи подобається їм вчити геометрію з використанням комп'ютерних програм, ствердно відповіли 89 відсотків учнів. Основними причинами позитивного ставлення учні називали наочність матеріалу, можливість самостійно експериментувати з перетвореннями, швидкість отримання результату та цікавість роботи з технологіями. Лише 11 відсотків учнів висловили нейтральне ставлення, пояснюючи це звичністю традиційних методів або особистою неприязню до роботи з комп'ютерами. Жодного

негативного відгуку про використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики не було зафіксовано.

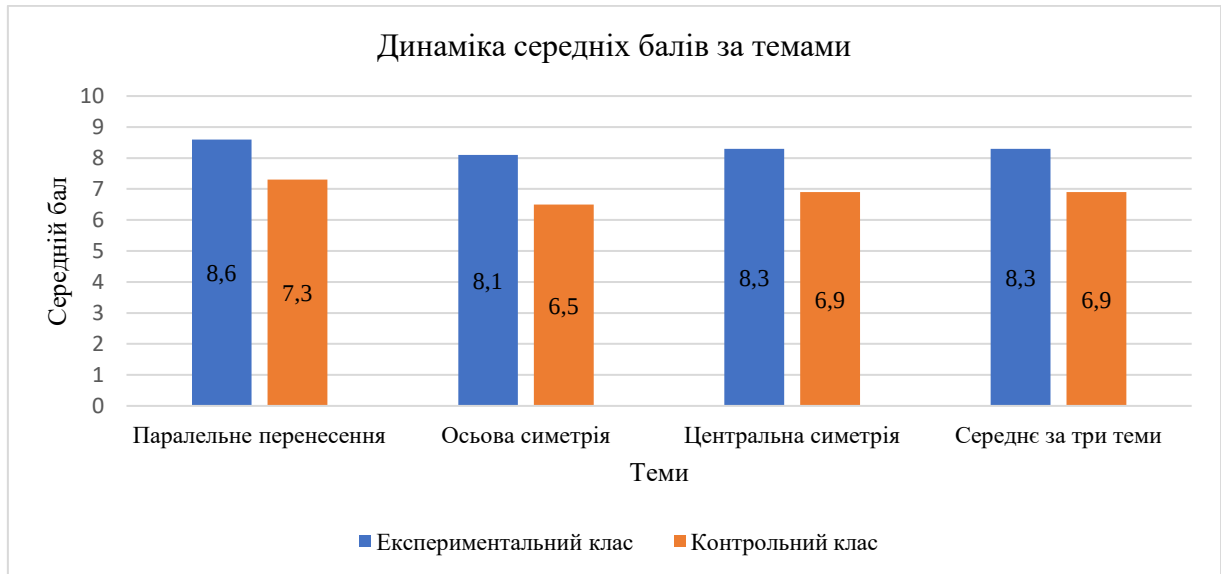


Рисунок 2.5. – Динаміка середніх балів за темами

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Опитування учнів експериментального класу виявило високий рівень задоволеності процесом навчання та зростання інтересу до математики. На запитання про те, чи подобається їм вчити геометрію з використанням комп'ютерних програм, ствердно відповіли 89 відсотків учнів. Основними причинами позитивного ставлення учні називали наочність матеріалу, можливість самостійно експериментувати з перетвореннями, швидкість отримання результату та цікавість роботи з технологіями. Лише 11 відсотків учнів висловили нейтральне ставлення, пояснюючи це звичністю традиційних методів або особистою неприязню до роботи з комп'ютерами. Жодного негативного відгуку про використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики не було зафіксовано.

Вивчення повороту як більш складного перетворення вимагало від учнів розвиненого просторового уявлення та розуміння кутових величин. Експериментальний клас працював з інтерактивною моделлю, де за допомогою повзунка можна було змінювати кут повороту та спостерігати за плавним переміщенням фігури навколо центра. Покрокова демонстрація

алгоритму побудови образу точки при повороті з можливістю повернення до будь-якого кроку допомагала усвідомити логіку перетворення. Завдання на створення розеток методом багаторазового повороту базового елемента поєднувало математику з мистецтвом та викликало високу мотивацію до виконання.

Контрольний клас виконував побудови повороту в зошитах за допомогою транспортира для відкладання кутів та циркуля для відкладання відстаней. Технічні труднощі точного виконання побудов часто заважали зосередитися на математичній сутності перетворення. Неточність вимірювання кутів транспортиром приводила до помітних викривлень фігури після кількох послідовних поворотів, що ускладнювало виконання завдань на композицію перетворень.

Тестування після вивчення повороту показало найбільшу різницю в результатах між експериментальною та контрольною групою за весь період експерименту. Середній бал експериментального класу склав 8,4 проти 6,2 у контрольному класі. Особливо великою була різниця в завданнях на побудову орнаментів та розеток, де точність та естетичність результату в експериментальних групах значно перевищували можливості ручної побудови. Завдання на обчислення координат образу точки при повороті навколо початку координат на кути 90, 180 та 270 градусів виконувалися приблизно однаково в обох групах, що свідчить про можливість успішного формування обчислювальних навичок різними методами (табл.2.14.).

Таблиця 2.14. – Результати тестування після вивчення теми «Поворот»

Показник	Експериментальний клас	Контрольний клас	Різниця
Середній бал	8,4	6,2	+2,2
Успішність	98,9%	85,9%	+13,0%
Якість знань	81,6%	54,1%	+27,5%
Високий рівень	35,6%	15,3%	+20,3%
Достатній рівень	46,0%	38,8%	+7,2%
Середній рівень	17,2%	31,8%	-14,6%
Початковий рівень	1,1%	14,1%	-13,0%

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Вивчення гомотетії як перетворення подібності вимагало розуміння впливу коефіцієнта на розміри фігури. Експериментальний клас мав можливість в інтерактивному режимі змінювати коефіцієнт гомотетії за допомогою повзунка та спостерігати за плавним збільшенням або зменшенням фігури зі збереженням форми. Одночасне відображення значення коефіцієнта та відношення площ вихідної фігури і образу дозволяло самостійно відкрити квадратичну залежність між цими величинами. Завдання на знаходження такого коефіцієнта, щоб образ фігури пройшов через задану точку, розвивало навички розв'язування рівнянь у геометричному контексті.

Узагальнюючий етап експерименту включав вивчення композиції перетворень та систематизацію знань про всі види перетворень. Експериментальний клас створював інтерактивні схеми класифікації перетворень у вигляді ментальних карт з використанням спеціалізованих програм. До кожного елемента схеми додавалися динамічні приклади перетворень, створені в GeoGebra. Дослідження комутативності композицій різних перетворень проводилося експериментально через побудову прикладів та контрприкладів. Учні самостійно виявили, що композиція двох паралельних перенесень завжди комутативна, а композиція повороту та паралельного перенесення зазвичай не є комутативною.

Підсумкове тематичне оцінювання проводилося в обох групах за ідентичними завданнями, але в різній формі. Експериментальний клас виконував комп'ютерний тест з автоматичною перевіркою більшості завдань та можливістю миттєвого отримання результату. Контрольний клас писав традиційну паперову контрольну роботу, яка перевірялася вчителем протягом кількох днів. Порівняння результатів показало значну перевагу експериментальної групи за всіма показниками успішності та якості знань.

Статистична обробка результатів підсумкового оцінювання виявила наступні закономірності. Середній бал експериментального класу склав 8,3, проти 6,7 у контрольному класі. Якість знань, тобто відсоток учнів з високим та достатнім рівнями, у експериментальної групи становила 78 відсотків проти

58 відсотків у контрольній групі (рис.2.6). Успішність, тобто відсоток учнів, які засвоїли програмний матеріал, в експериментальному класі досягла 96 відсотків порівняно з 87 відсотками в контрольному класі. Найбільша різниця спостерігалася в завданнях високого рівня складності на композицію перетворень та доведення геометричних тверджень з використанням властивостей перетворень (табл.2.15.).

Таблиця 2.15. Порівняння результатів навчання в експериментальній та контрольній групі

Показник	Експериментальний клас	Контрольний клас	Різниця
Середній бал	8,3	6,7	1,6
Якість знань	78%	58%	20%
Успішність	96%	87%	9%

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження



Рисунок 2.6. – Динаміка середніх балів за темами

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Аналіз результатів за окремими темами показав неоднорідність ефекту від використання інформаційно-комунікаційних технологій. Найбільша різниця між експериментальною та контрольною групою спостерігалася в темах повороту та гомотетії, де візуалізація процесу перетворення має

критичне значення для розуміння. Дещо менша, але все ще значуща різниця виявлена в темах осьової та центральної симетрії. Найменша різниця зафіксована в завданнях на обчислення координат образів точок за формулами, де традиційні методи навчання показують достатню ефективність (рис.2.7.).

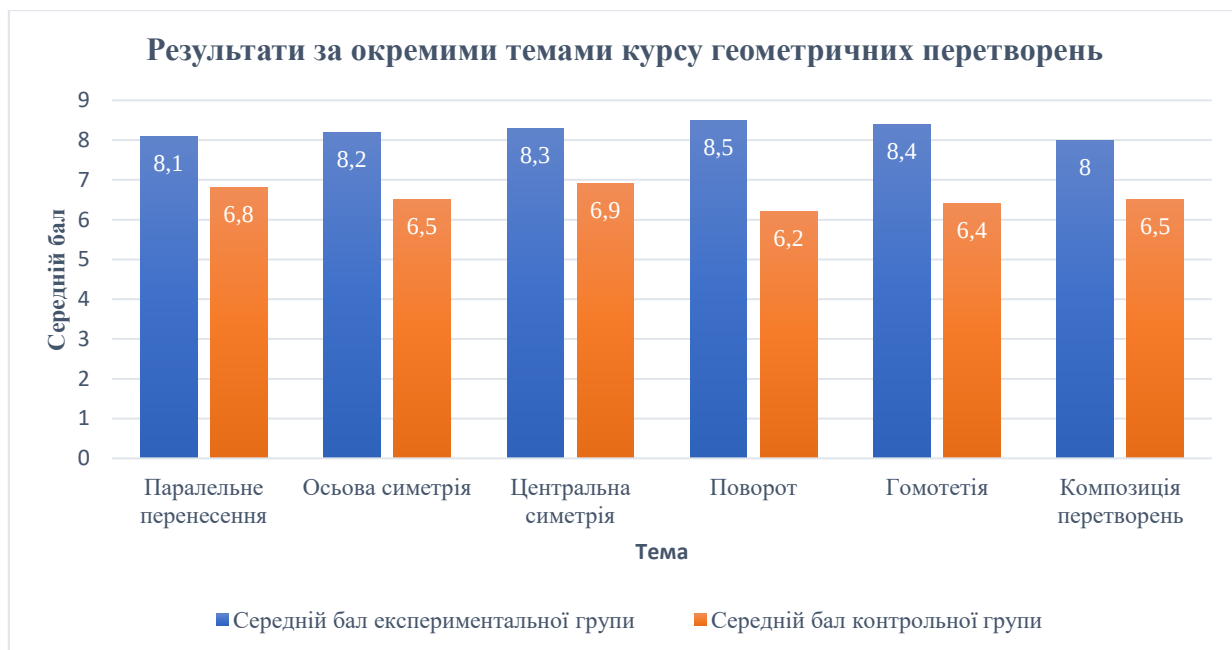


Рисунок 2.7. – Результати за окремими темами курсу геометричних перетворень

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Якісний аналіз контрольних робіт виявив суттєві відмінності в характері знань та умінь учнів експериментальної і контрольної групи. Експериментальний клас демонстрував глибше розуміння геометричної суті перетворень, здатність до узагальнення властивостей, гнучкість у виборі способу розв'язування задач. Учні експериментальної групи частіше використовували графічні ілюстрації для підтвердження своїх міркувань, наводили альтернативні способи розв'язування, формулювали власні гіпотези та перевіряли їх. Контрольний клас частіше демонстрував репродуктивний рівень знань з орієнтацією на відтворення зразків розв'язування задач з підручника.

Спостереження за роботою учнів під час уроків дозволили зафіксувати позитивні зміни в навчальній поведінці експериментального класу. Підвищився рівень самостійності при виконанні завдань, адже програмне забезпечення давало можливість перевірити правильність результату без звернення до вчителя. Розвинулися навички самоконтролю та самооцінювання, учні навчилися аналізувати власні помилки та шукати способи їх виправлення. Зменшилася кількість дисциплінарних проблем, оскільки цікавість до роботи з комп'ютерними програмами тримала увагу учнів зосередженою на навчальному завданні.

Дослідження динаміки навчальної мотивації проводилося через опитування на початку та в кінці експерименту з використанням стандартизованої методики вимірювання мотивації до вивчення математики. Результати показали значне зростання показників внутрішньої мотивації в експериментальному класі, тобто бажання вчити математику через інтерес до самого предмета, а не лише заради оцінок або схвалення дорослих. Середній показник внутрішньої мотивації в експериментальній групі зріс з 5,2 до 7,4 бала за десятибальною шкалою, тоді як у контрольних групах зміни були незначними з 5,1 до 5,6 бала. Показники зовнішньої мотивації залишилися приблизно на одному рівні в обох групах (рис.2.7.).

Вплив використання інформаційно-комунікаційних технологій на різні категорії учнів виявився неоднорідним. Найбільший ефект спостерігався у учнів з середнім рівнем математичної підготовки, які за традиційної методики не демонструють високих результатів через недостатню абстрактність мислення або слабкі просторові уявлення. Візуалізація процесів перетворень та можливість маніпулювати об'єктами в динаміці компенсували ці недоліки та дозволили таким учням досягти значно кращих результатів. Сильні учні також отримали переваги через можливість працювати в індивідуальному темпі, виконувати додаткові завдання підвищеної складності, реалізовувати власні ідеї в проєктах.



Рисунок 2.7. – Результати опитування учнів про задоволеність процесом навчання

Джерело: побудовано автором на основі проведеного дослідження

Слабкі учні, які мають стійкі труднощі в засвоєнні математики, показали менш виражений прогрес порівняно з іншими категоріями, але все ж таки їхні результати в експериментальному класі виявилися кращими за результати аналогічних учнів контрольної групи. Основною причиною покращення стало підвищення мотивації через цікавість до роботи з технологіями та зниження тривожності завдяки можливості виправити помилку без негативних наслідків. Автоматична перевірка відповідей в електронних тестах сприймалася такими учнями як менш загрозлива порівняно з оцінюванням вчителем.

Отже, використання ІКТ при вивченні даної теми показало позитивні результати. Однак потрібно розуміти, що для проведення таких уроків потрібно, щоб школа мала все необхідне обладнання.

ВИСНОВКИ

У ході дослідження було проведено ґрунтовний аналіз теоретичних та методичних основ вивчення геометричних перетворень у шкільному курсі геометрії, що дозволило встановити фундаментальне значення цієї теми для формування математичної компетентності учнів та розвитку їхнього просторового мислення.

Детальне вивчення понять, видів та основних властивостей геометричних перетворень показало, що центральними об'єктами дослідження є рух на площині, зокрема осьова та центральна симетрії, паралельне перенесення та поворот, а також подібність фігур та їх властивості, при цьому особлива увага приділялася взаємозв'язкам між різними видами перетворень та їх інваріантним властивостям.

Систематизація типових задач з теми у курсі геометрії дев'ятого класу дала змогу виділити основні напрями роботи з учнями, серед яких побудова образів фігур при різних перетвореннях, знаходження центрів та осей симетрії, застосування геометричних перетворень до доведення теорем та розв'язування конструктивних задач, а також використання властивостей перетворень для встановлення рівності та подібності фігур.

Порівняльний аналіз модельних навчальних програм з геометрії для сьомого-дев'ятого класів закладів загальної середньої освіти різних авторів виявив суттєві відмінності у послідовності викладення матеріалу, обсязі годин, відведених на вивчення теми, та рівні теоретичної строгості викладу, водночас дослідження відповідних підручників показало різноманітність методичних підходів до введення понять геометричних перетворень, від наочно-інтуїтивного до формально-аксіоматичного, що підтверджує необхідність гнучкого підходу до викладання теми з урахуванням особливостей конкретного навчального закладу та підготовленості учнів.

Вивчення особливостей засвоєння теми геометричні перетворення учнями дев'ятого класу дозволило визначити типові труднощі, що виникають

у процесі її опанування, зокрема складність розуміння абстрактного поняття перетворення як відображення площини на себе, проблеми з побудовою образів складних фігур, труднощі у застосуванні властивостей перетворень для розв'язування задач, недостатній рівень розвитку просторової уяви та складність встановлення зв'язків між різними видами геометричних перетворень.

На основі виявлених труднощів було розроблено методику застосування інформаційно-комунікаційних технологій на різних етапах уроку з теми геометричні перетворення, яка передбачає використання динамічного геометричного середовища для візуалізації перетворень на етапі введення нових понять, застосування інтерактивних вправ та симуляцій для формування практичних навичок побудови образів фігур, використання комп'ютерних презентацій та відеоматеріалів для пояснення складних теоретичних положень, впровадження онлайн-тестів та автоматизованих систем перевірки знань для оцінювання та самоконтролю, а також застосування проєктної діяльності з використанням цифрових інструментів для поглибленого вивчення окремих аспектів теми.

Створення конкретних розробок уроків із використанням інформаційно-комунікаційних технологій включало детальне планування структури занять, добір відповідного програмного забезпечення та цифрових ресурсів, підготовку інтерактивних демонстрацій та дидактичних матеріалів, розробку систем завдань різного рівня складності з можливістю автоматизованої перевірки, а також створення методичних рекомендацій для вчителів щодо ефективного використання запропонованих матеріалів у навчальному процесі.

Апробація розроблених уроків в освітньому процесі проводилася в кількох дев'ятих класах різних закладів загальної середньої освіти, що дало можливість оцінити ефективність запропонованої методики в різних умовах та з різними групами учнів, при цьому особлива увага приділялася спостереженню за динамікою засвоєння навчального матеріалу, рівнем

залученості учнів до навчальної діяльності та їхньою мотивацією до вивчення теми.

Аналіз результатів впровадження запропонованої методики здійснювався на основі порівняння показників успішності учнів експериментальної та контрольної груп, анкетування учнів, аналізу виконання контрольних робіт та тестових завдань, спостереження за навчальною діяльністю учнів на уроках, що дозволило встановити позитивну динаміку у засвоєнні теми геометричні перетворення учнями експериментального класу порівняно з контрольною групою, де навчання проводилося традиційними методами.

Оцінка ефективності запропонованої методики показала, що використання інформаційно-комунікаційних технологій сприяє підвищенню якості засвоєння теоретичних знань про геометричні перетворення, покращенню практичних навичок побудови образів фігур та застосування властивостей перетворень для розв'язування задач, розвитку просторового мислення та геометричної інтуїції учнів, підвищенню їхньої мотивації до вивчення геометрії та формуванню позитивного ставлення до предмета, а також сприяє індивідуалізації навчального процесу та створенню умов для самостійної дослідницької діяльності учнів, що підтверджує доцільність широкого впровадження розробленої методики у практику викладання геометрії в закладах загальної середньої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Balyk N., Barna O., Shmyger G. Model of Professional Retraining of Teachers Based on the Development of STEM Competencies. ICT in Education, Research and Industrial Applications. Proc. 14th Int. Conf. ICTERI, 2018. Vol. 2104, P. 318–331. URL: https://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_157.pdf (date of access: 25.10.2022).
2. Design methodology for immersive educational resources. S. O. Semerikov et al. Educational Dimension. 2022. Vol. 6. P. 176–199.
3. Gokbulut B. The effect of Mentimeter and Kahoot applications on university students'e-learning. World Journal on Educational Technology: Current Issues, 2020. Vol. 12, № 2. P. 107–116.
4. Hrynevych L. M., Morze H. B., Boiko M. A. Scientific education as the basis for innovative competence formation in the conditions of digital transformation of the society. Information Technologies and Learning Tools. 2020. Vol. 77, № 3. P. 1–26. URL: <https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3980>.
5. Kramarenko T. H., Pylypenko O. S., Muzyka I. O. Application of GeoGebra in Stereometry teaching. CEUR Workshop Proc. 2020. Vol. 2643, P. 705–718. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2643/paper42.pdf> (date of access: 12.02.2021).
6. Kramarenko T. H., Pylypenko O. S., Zaselskiy V. I. GeoGebra AR Demo 3: Cylinder, 2020. YouTube. URL: <https://youtu.be/fCBqCeGxymM> (date of access: 03.02.2020).
7. Kramarenko T. H., Pylypenko O. S., Zaselskiy V. I. Prospects of using the augmented reality application in STEM-based Mathematics teaching. CEUR Workshop Proc. 2019. Vol. 2547. P. 130–144. URL: <http://ceurws.org/Vol-2547/paper10.pdf> (date of access: 03.02.2020).
8. Kramarenko T., Pylypenko O., Serdiuk O. Digital Technologies in Specialized Mathematics Education: Application of GeoGebra in Stereometry

Teaching. In Proceedings of the 1st Symposium on Advances in Educational Technology : AET. 2022. Vol. 1. P. 576–589.

9. Mathematics with a computer / M. I. Zhaldak, Y. V. Goroshko, E. F. Vinnychenko, G.Y. Tsybko. Kyiv, National Dragomanov Pedagogical University, 2016. 305 p. URL: <https://ktoi.fi.npu.edu.ua/navchalni-posibnyky-tapidruchnyky?download=7:mathematics-with-a-computer> (date of access: 16.02.2023).

10. Means B. et al. STEM-focused high schools as a strategy for enhancing readiness for postsecondary STEM programs. *Journal of Research in Science Teaching*. 2016. Vol. 53. № 5. P. 709–736.

11. Morze N., Strutynska O. STEAM Competence for Teachers: Features of Model Development. *E-learning in the Time of COVID-19*. 2021. P. 187–198.

12. Personal e-learning environment of a mathematics teacher / Vlasenko K., Chumak O., Achkan V., Lovianova I., Kondratyeva O. *Universal Journal of Educational Research*, 2020. Vol. 8, № 8. P. 3527–3535.

13. Rashevskaya N. V., Soloviev V. N. Augmented Reality and the Prospects for Applying Its in the Training of Future Engineers. *Augmented Reality in Education : Proceedings of the 1st International Workshop (AREdu 2018)*. Kryvyi Rih, Ukraine, October 2, 2018. Vol. 2257. P. 192–197. URL: <http://ceurws.org/Vol-2257/paper18.pdf> (date of access: 03.02.2023).

14. Sada M. Probabilidad: simulaciones y problemas : GeoGebraBook. URL: <https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs> (date of access: 31.07.2022).

15. Semenikhina O. V., Drushlyak M. G., Shishenko I. V. STEM-project as a means of learning modeling for pre-service mathematics and computer science teachers, 2022. Vol. 90, № 4, P. 46–56.

16. Semenikhina O., Kudrina O., Koriakin O., Ponomarenko L., Korinna H., Krasilov A. The Formation of Skills to Visualize by the Tools of Computer Visualization. *TEM Journal*, 2020. Vol. 9, № 4. P. 1704–1710.

17. Shyshkina M., Kohut U., Popel M. The Systems of Computer Mathematics in the CloudBased Learning Environment of Educational Institutions.

Proceedings of the 12th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer, 2018. Vol. 1844. 10 p. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1844/10000396.pdf> (date of access: 31.07.2022).

18. Soo B. N. Exploring STEM competences for the 21st century. Current and Critical Issues in Curriculum, Learning and Assessment, In-Progress Reflection, 2019. Vol. 30. 53 p. URL: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000368485.locale=en> (date of access: 01.02.2020).

19. STEM education in the context of improving the science and mathematics literacy of pupils. L. M. Hrynevych et al. Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2288, № 1. P. 012031.

20. Strutynska O., Umryk M. Learning startups as a project based approach in STEM education. E-learning and STEM Education Scientific Ed. Eugenia Smyrnova-Trybulska "E-learning", Katowice-Cieszyn, 2019. Vol. 11. P. 529–555.

21. Symonenko S. V., Osadchyi V. V., Sysoieva S. O. A. Cloud technologies for enhancing communication of IT professionals. CTE Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2643, № 7. P. 225–236.

22. STEM-Education: Ways of Implementation and Prospects. Edited by O. I. Danylova, V. V. Surhaieva. Kherson : Kherson Academy of Continuous Education, 2016. 120 p.

23. Tarnoff J. STEM to STEAM. Recognizing the Value of Creative Skills in the Competitive. URL: http://www.huffingtonpost.com/john-tarnoff/stem-to-steamrecognizing_b_756519.html (date of access: 01.02.2020).

24. Technologies of distance learning for programming basics on the principles of integrated development of key competences / Shokaliuk S. V., Bohunenko Y. Yu., Lovianova I. V., Shyshkina M. P. CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2643. P. 548–562.

25. The use of digital visualization tools to form mathematical competence of students / M. Astafieva, D. Bodnenko, O. Lytvyn, V. Proshkin. CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2740. P. 416–422.

26. Training of Mathematical Disciplines Teachers for Higher Educational Institutions as a Contemporary Problem / Vlasenko K., Kondratieva O., Lovianova I., Sitak I., Chumak O. *Universal Journal of Educational Research*, Horizon Research, 2019. Vol. 7, № 9. P. 1892–1900.

27. Vakaliuk T. A. Features of distance learning of cloud technologies for the organization educational process in quarantine / T. A. Vakaliuk, O. M. Spirin, N. M. Lobanchykova, L. A. Martseva, I. V. Novitska, V. V. Kontsedailo. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. Vol. 1840.

28. Vlasenko K., Lovianova I., Armash T. A competency-based approach to the systematization of mathematical problems in a specialized school. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. Vol. 1946, № 1.

29. Zavalevskyi Y., Gorbenko S., Lozova O. Psychological and pedagogical conditions for the development of STEM education. *Problems of Education*. 2022. Vol. 2, № 97. P. 61–77.

30. Zetriuslita Z., Nofriyandi N., Istikomah E. The Increasing Self-Efficacy and Self-Regulated through GeoGebra Based Teaching reviewed from Initial Mathematical Ability (IMA) Level. *International Journal of Instruction*. 2021. Vol. 14, № 1. P. 587–598.

31. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.рівень : підруч. для 9 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 512 с.

32. Балик Н. Р., Шмигер Г. П. Підходи та особливості сучасної STEM-освіти. *Фізико-математична освіта : зб. наук. праць*. Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2017. Вип. 2, № 12. С. 26–30.

33. Банада О. С. Використання системи динамічної математики GeoGebra; О. С. Банада, Т. Г. Крамаренко. *Актуальні аспекти розвитку STEM-освіти у навчанні природничо-математичних дисциплін*: зб. матеріалів І Міжнар. наук.-практ. конф., 16–17 трав. 2018 р. Кропивницький, 2018. С. 80–83.

34. Банада О. С. Робототехніка як напрямок STEM-освіти та її зв'язок з математикою; О. С. Банада, Т. Г. Крамаренко. *Вісник міжнародного дослідного центру «Людина: мова, культура, пізнання»* : наук. журнал / за заг. ред. В. В. Корольського. Кривий Ріг, 2018. Т. 42. С. 90–99.
35. Банада О. С. Урізноманітнення форм навчання математики в контексті STEM-освіти. *STEM–освіта як напрям модернізації методик навчання природничо-математичних дисциплін у середніх і вищих навчальних закладах* : зб. матер. Всеукр. студентської наук.-практ. конф. Херсон, 2018. С. 86–87.
36. Барна О. В. STEM-освіта: реальні кроки до успіху. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=oAigBUCILzo> (дата звернення: 20.11.2018).
37. Бевз А. В. Особливості формування професійної компетентності фахових молодших бакалаврів. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. 2020. Вип. 191, № 1. С. 212–216.
38. Биков В., Спірін О., Пінчук О. Сучасні завдання цифрової трансформації освіти. Вісн. Кафедри ЮНЕСКО «Неперервна професійна освіта XXI століття». Голов. ред. Г. І. Сотська. Київ: Талком, 2020. № 1. С. 27–36. DOI: 10.35387/ucj.1(1).2020.27-36.
39. Білецька Г. А. Критерії, показники й рівні сформованості природничо-наукової компетентності майбутніх екологів. *Освіта та педагогічна наука*, 2014. Вип. 163, № 2. С. 19–24.
40. Ботузова Ю. В. Динамічні моделі GeoGebra на уроках математики як основа STEM-підходу. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 17, № 3. С. 31–35.
41. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти , 2023.
42. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2019.
43. Буркова Л. В. Проектний підхід в освіті: концептуальні основи. *Педагогічні інновації: ідеї, реалії, перспективи*. 2015. Вип. 2. С. 6–14.

44. Валько Н. В. Система підготовки майбутніх учителів природничо-математичних дисциплін до застосування STEM технологій у професійній діяльності : автореф. дис. д-ра пед. Наук: 13.00.04. Запоріжжя, 2020. 40 с.

45. Василяшко І. П. Методичні рекомендації щодо впровадження STEM-освіти у загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладах України на 2017-2018 н.р./ І. П. Василяшко, С. Л. Горбенко, О. В. Лозова, О. О. Патрикеева. Методист. Київ: Видавництво «Шкільний світ», 2017. Вип. 68, № 8. С. 37–43.

46. Василяшко І. П. Упровадження STEM-навчання – відповідь на виклик часу. І. П. Василяшко, Т. В. Білик. Управління освітою. Київ, 2017. Вип. 386, № 2. С. 28–31.

47. Василевич Л. Ф., Семеняка С. О. Фінансова математика: навч. посіб. Київ, ун-т ім. Б. Грінченка, 2020. 228 с.

48. Васильєва Д. В. Методика навчання математики учнів 8–9 класів з використанням мультимедійної дошки : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02. Київ, 2013. 20 с

49. Волянська С. Є. STEM-освіта. Довідник сучасного педагога. Харків: Основа, 2016. С. 124–125.

50. Гиндюк В. В., Юрченко Н. В. Компетентнісний підхід до викладання математики та вищої математики для студентів спеціальності 181 Харчові технології на прикладі застосування правила Крамера. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота». Гол. ред. О. Бартош, І. Козубовська. Ужгород : Говерла, 2022. Вип. 2, № 51. С. 37–41.

51. Голіченко І. І., Клесов О.І., Тимошенко О. А. Фінансова математика та елементи актуарної математики: навч. посіб. для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Страхова та фінансова математика». Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2019. 104 с.

52. Гриб'юк О. О. Комп'ютерне моделювання та робототехніка в навчально-виховному процесі сучасного навчального закладу. *FOSS Lviv2017*:

матеріали 7 міжнар. наук.-практ. конф., 27–30 квіт. 2017 р. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2017. С. 38–43.

53. Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л. Розв'язування евристичних задач в контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*: зб. наук. праць. Київ-Вінниця : Планер, 2015. Вип. 27. С. 138–155.

54. Гузій І. С. Інтегративний підхід до професійної підготовки майбутніх фахівців інформаційної, бібліотечної та архівної справи: дис. на здобуття ступеня д-ра філософії; Національний університет «Львівська політехніка». Львів, 2020. 267 с.

55. Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti> (дата звернення: 08.11.2021).

56. Доценко С. О., Лебедева В. В. STEM-освіта як засіб активізації творчого потенціалу особистості. URL: <http://www.dgma.donetsk.ua/docs/konf/2017/mkonf2017/dopovidy/it/Доценко-Лебедева.pdf> (дата звернення: 17.11.2018).

57. 89. Жалдак М. І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики : посіб. для вчителів / М. І. Жалдак, В. В. Лапінський, М. І. Шут. Київ : Дініт, 2004. 110 с

58. Жалдак М. І., Біляй І. М. Стохастика : посіб. для вчителів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. 304 с. URL: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2022).

59. Жалдак М. І., Михалін Г. О., Біляй І. М. Початки стохастики : факультативний курс для учнів старшої школи. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. 163 с. URL: <http://www.ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalniposibnyky-ta-pidruchnyky> (дата звернення: 30.06.2022).

60. Закарлюка І. С. STEM-освіта: трансдисциплінарний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін. *Проблеми математичної освіти* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф. 6–7 квіт. 2023 р. Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023. С. 200–201.
61. Зіненко І. М. Визначення рівнів сформованості математичної компетентності учнів загальноосвітньої школи. Розвиток освіти в умовах поліетнічного регіону : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. Ялта : РВВ КГУ, 2014. Вип. 5. Ч. 1. С. 173–176.
62. Зубик Л. В. Формування професійних компетентностей майбутніх бакалаврів з інформаційних технологій у процесі вивчення фахових дисциплін : канд. пед. наук : 13.00.04. Рівне, 2016. 358 с.
63. Іванова Г. І. Формування культури розумової праці студентів у процесі навчання математичних дисциплін : дис. д-ра. філос. 011 / Криворізький держ. пед. ун-т. Кривий Ріг, 2020. 314 с.
64. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с.
65. Інститут модернізації змісту освіти. STEM-освіта. URL: <https://imzo.gov.ua/stem-osvita/> (дата звернення: 17.02.2018).
66. Істер О.С. Геометрія: підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти, 2020.
67. Істер О. С. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти, 2023.
68. Кислова М. А., Словак К. І. Методика використання мобільного навчального середовища у навчанні вищої математики майбутніх інженерів електромеханіків. Інформаційні технології і засоби навчання. 2016. Т. 51. Вип. 1. С. 77–94.
69. Коваленко О., Сапрунова О. STEM-освіта: досвід упровадження в країнах ЄС та США. Рідна школа. 2016. № 4. С. 46–49.

70. Козаченко Н. П. Критичне мислення: граничні підходи та оптимальні шляхи. Актуальні проблеми духовності : зб. наук. праць. Кривий Ріг, 2017. Вип. 18. С. 165–178.

71. Мерзляк А.Г. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2017.

72. Міщук А.А., Падалко Н.Й. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні геометрії // *Математика. Інформаційні технології: Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції, Луцьк-Світязь 13-15 червня 2025 р./ Волинський національний університет імені Лесі Українки. – Луцьк. с.223-225*

73. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С., 2022.

АНОТАЦІЯ

Автор: Міщук А.А.

Назва роботи: Використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні геометрії 9 класу в закладах загальної середньої освіти.

Місто, Рік: Луцьк, 2025.

Структура роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел із 73 найменувань та додатків. Загальний обсяг роботи – 89 сторінок, на яких представлено 7 рисунків, 26 таблиць і 3 додатки.

Мета: теоретичне обґрунтування та розробка методики використання ІКТ у процесі вивчення геометричних перетворень у курсі геометрії 9-го класу, що забезпечить підвищення якості засвоєння матеріалу та розвиток математичної компетентності учнів.

Об'єкт дослідження: процес навчання геометрії в дев'ятому класі загальноосвітньої школи.

Предмет дослідження: використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення теми «Геометричні перетворення» в курсі геометрії дев'ятого класу.

У ході дослідження було проаналізовано теоретичні основи теми «Геометричні перетворення», порівняно навчальні програми та визначено ключові труднощі учнів 9-го класу, що включають складність розуміння абстрактного поняття перетворення та проблеми з просторовою уявою. Для їх подолання розроблено методику застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), що базується на використанні динамічного геометричного середовища для візуалізації, інтерактивних вправ та онлайн-тестів. Апробація методики підтвердила її ефективність: встановлено позитивну динаміку у засвоєнні матеріалу експериментальною групою, а також доведено, що ІКТ сприяє підвищенню якості засвоєння теоретичних знань, розвитку просторового мислення та зростанню навчальної мотивації учнів.

Методи дослідження: теоретичні (аналіз, синтез, узагальнення, порівняння, прогнозування), емпіричні (педагогічний експеримент, діагностичні методи (тестування, аналіз результатів контрольних робіт та тестових завдань, анкетування), спостереження), математичні (статистичні) (кількісний та якісний аналіз даних, статистична обробка даних, графічні методи).

Наукове значення полягає у теоретичному обґрунтуванні нової методики використання ІКТ у викладанні геометричних перетворень, яка враховує специфіку змісту та психологічні особливості учнів 9-го класу.

Практичне значення роботи полягає у розробці конкретних методичних рекомендацій та комплексу навчальних матеріалів із застосуванням цифрових технологій.

Ключові слова: інформаційно-комунікаційні технології; геометричні перетворення; методика навчання геометрії; 9 клас; динамічне геометричне середовище; візуалізація; просторове мислення.

ABSTRACT

Author: Mishchuk A.A.

Thesis Title: The Use of Information and Communication Technologies in Teaching 9th Grade Geometry in General Secondary Education Institutions.

City, Year: Lutsk, 2025.

Thesis Structure: the thesis consists of an introduction, two chapters, conclusions, a list of 73 references, and appendices. The total volume of the work is 89 pages, which include 7 figures, 26 tables, and 3 appendices.

Goal (Objective): theoretical substantiation and development of a methodology for using ICT in the process of studying geometric transformations in the 9th grade geometry course, which will ensure an increase in the quality of material acquisition and the development of students' mathematical competence.

Object of Research: the process of teaching geometry in the ninth grade of general secondary school.

Subject of Research: the use of information and communication technologies in the process of studying the topic "Geometric Transformations" in the ninth grade geometry course.

The study involved the analysis of the theoretical foundations of the topic "Geometric Transformations," comparison of curricula, and identification of key difficulties encountered by 9th-grade students, including the complexity of understanding the abstract concept of transformation and issues with spatial imagination. To overcome these challenges, a methodology for using Information and Communication Technologies (ICT) was developed, based on the application of dynamic geometry software (DGS) for visualization, interactive exercises, and online tests. The approbation (testing) of the methodology confirmed its effectiveness: a positive dynamic was established in the experimental group's material acquisition, and it was proven that ICT contributes to improving the quality of theoretical knowledge acquisition, developing spatial thinking, and increasing students' learning motivation.

Research Methods: theoretical (analysis, synthesis, generalization, comparison, forecasting), empirical (pedagogical experiment, diagnostic methods (testing, analysis of control work and test results, surveying), observation), mathematical (statistical) (quantitative and qualitative data analysis, statistical data processing, graphical methods).

The scientific significance lies in the theoretical substantiation of a new methodology for using ICT in teaching geometric transformations, which takes into account the content specifics and psychological features of 9th-grade students.

The practical significance of the work lies in the development of specific methodological recommendations and a complex of educational materials utilizing digital technologies.

Keywords: information and communication technologies; geometric transformations; geometry teaching methodology; 9th grade; dynamic geometry software; visualization; spatial thinking.

ДОДАТКИ

Додаток А

ПЛАН-КОНСПЕКТ

уроку з курсу Геометрія 9 клас

на тему: Геометричні перетворення. Паралельне перенесення.

Мета:

Формувати в учнів систему знань про паралельне перенесення як вид геометричного перетворення площини, його властивості та способи задання через вектор переміщення. Удосконалювати навички побудови образів геометричних фігур при паралельному перенесенні з використанням як традиційних креслярських інструментів, так і сучасного програмного забезпечення для динамічної геометрії.

Розвивати просторове мислення через візуалізацію перетворень у цифровому середовищі та встановлення зв'язків між аналітичним описом перетворення через координати і геометричною інтерпретацією на площині. Виховувати інтерес до математики через демонстрацію застосування геометричних перетворень у природі, мистецтві, архітектурі та технічних науках за допомогою мультимедійних матеріалів.

Методи і прийоми навчання: пояснювально-ілюстративний метод з використанням презентації, дослідницький підхід через роботу в програмі GeoGebra, проблемно-пошукова бесіда, практична робота в парах, інтерактивні вправи на інтерактивній дошці, робота з координатною площиною.

Обладнання: інтерактивна дошка, мультимедійний проектор, ноутбук з презентацією, комп'ютерний клас з програмою GeoGebra, роздатковий матеріал з індивідуальними завданнями, координатні площини на

клітинчастому папері, лінійки, олівці, планшети або смартфони учнів для доступу до електронних ресурсів.

Основні питання уроку:

1. Означення паралельного перенесення та вектор переміщення.
2. Властивості паралельного перенесення.
3. Аналітичний запис паралельного перенесення через координати.
4. Алгоритм побудови образу точки та фігури.
5. Застосування паралельного перенесення до розв'язування задач.

Використані джерела:

1. Мерзляк А.Г. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2017.
2. Навчальна програма з математики для 5-9 класів, затверджена МОН України.
3. Методичні рекомендації щодо використання ІКТ на уроках математики.
4. Електронна освітня платформа GeoGebra для динамічної геометрії.

ХІД УРОКУ:

I. Організаційний момент 2 хв.

Перевірка готовності учнів до уроку включає наявність зошитів, підручників, креслярських інструментів та технічну справність комп'ютерного обладнання в класі. Вчитель вітає клас, відзначає присутніх у електронному журналі та коротко повідомляє про структуру уроку, оголошує тему та мету заняття. Учні відкривають програму GeoGebra на своїх комп'ютерах і переконуються, що всі функції працюють коректно. Роздається дидактичний матеріал з координатними площинами та картками завдань різних рівнів

складності для подальшої самостійної роботи. Створюється робоча атмосфера через налаштування на активну пізнавальну діяльність та співпрацю в парах під час виконання практичних завдань.

II. Мотивація навчальної та пізнавальної діяльності 5 хв.

Урок починається з демонстрації короткого відеофрагменту, де показано рух ескалатора в метро, конвеєрної стрічки на заводі, човна, що пливе за течією річки. Учні спостерігають, що всі точки об'єкта переміщуються одночасно в одному напрямку на однакову відстань, зберігаючи взаємне розміщення. Вчитель запитує клас про те, які характеристики предметів змінюються під час такого руху, а які залишаються незмінними.

Виникає обговорення, де учні висловлюють припущення про збереження форми, розмірів, кутів між елементами фігури. На інтерактивній дошці демонструється слайд з орнаментами на тканині, де один елемент повторюється багато разів через рівномірне переміщення в певному напрямку. Вчитель звертає увагу на візерунки українських вишиванок, де геометричні мотиви створюються саме методом паралельного повторення базового елемента. Постановка проблемного запитання полягає в тому, як математично описати такий вид руху або переміщення фігури, щоб можна було точно побудувати її нове положення. Учні намагаються сформулювати власні ідеї про те, які параметри потрібно знати для виконання такого переміщення. Актуалізація знань про вектори відбувається через запитання про те, що таке вектор, як його задають, які дії з векторами вони вивчали раніше. На екрані з'являється зображення координатної площини з кількома векторами, учні називають їхні координати та обчислюють довжини за формулою кореня квадратного з суми квадратів координат.

Нагадується поняття рівних векторів, які мають однакові координати незалежно від положення їхніх початків на площині. Завершується мотивація формулюванням теми уроку та переліком питань, на які учні мають отримати відповіді протягом заняття.

III. Вивчення нового матеріалу 35 хв.

1. Означення паралельного перенесення та вектор переміщення.

Вчитель вмикає презентацію на інтерактивній дошці та починає пояснення нового матеріалу з введення поняття геометричного перетворення площини як відображення площини на себе, де кожній точці ставиться у відповідність єдина точка, яку називають образом. Паралельне перенесення визначається як таке відображення площини на себе, за якого всі точки переміщуються в одному напрямку на однакову відстань.

На екрані демонструється анімація, де трикутник плавно переміщується вправо та вгору, всі його вершини рухаються синхронно вздовж паралельних прямих. Вводиться позначення паралельного перенесення через букву T з індексом вектора переміщення або через стрілку над літерою. Вектор переміщення визначає напрямок та величину зсуву кожної точки площини при перетворенні. Вчитель будує на дошці вектор з координатами $(3; 2)$, що означає переміщення на 3 одиниці вправо та на 2 одиниці вгору. Обирається довільна точка $A(1;1)$, від неї відкладається побудований вектор, кінець вектора позначається як точка $A' (4; 3)$. Учні перевіряють, що для отримання координат образу потрібно до координат вихідної точки додати відповідні координати вектора переміщення.

Будується ще кілька точок та їхніх образів для підтвердження цього правила. Вчитель підкреслює, що вектор переміщення один і той самий для всіх точок площини при даному паралельному перенесенні. Записується символічне позначення паралельного перенесення точки A в точку A' та зазначається, що точка A' є образом точки A при перетворенні. Учні записують означення в зошити разом з малюнком, який демонструє дві відповідні точки та з'єднуючий їх вектор переміщення.

2. *Властивості паралельного перенесення.*

Дослідження властивостей паралельного перенесення відбувається через роботу в програмі GeoGebra, яка запущена на всіх учнівських комп'ютерах. Вчитель демонструє на інтерактивній дошці побудову трикутника з вершинами в точках з конкретними координатами, потім вибирає з меню інструментів функцію паралельного перенесення, задає вектор переміщення через дві точки. Програма автоматично будує образ трикутника, що дозволяє порівняти вихідну фігуру та її образ.

Вчитель використовує інструменти вимірювання для визначення довжин сторін обох трикутників, виявляється повна рівність відповідних сторін. Кути трикутників також вимірюються, результати показують збереження всіх кутових величин. Площі трикутників обчислюються програмою, вони виявляються однаковими. Вчитель будує додаткові відрізки, що з'єднують відповідні вершини вихідного трикутника та його образу, вимірювання показує, що всі ці три відрізки мають однакову довжину та напрямок, тобто є рівними векторами.

Формулюються властивості паралельного перенесення, які учні записують у вигляді переліку в зошити. Паралельне перенесення зберігає відстані між точками, що означає рівність відповідних відрізків вихідної фігури та її образу. Кути між відповідними прямими або відрізками залишаються незмінними, що робить фігури конгруентними. Площі фігур зберігаються при паралельному перенесенні. Паралельні прямі переходять у паралельні прямі, перпендикулярні прямі переходять у перпендикулярні. Будь-яка фігура та її образ при паралельному перенесенні є рівними фігурами. Виконується додаткова демонстрація з кругом, який переноситься на заданий вектор, радіус образу вимірюється та виявляється рівним радіусу вихідного круга.

Паралельні дотичні до вихідного круга переходять у паралельні дотичні до круга-образу. Учні працюють разом з вчителем, повторюючи всі побудови

на своїх комп'ютерах та перевіряючи властивості на власних прикладах з іншими фігурами.

3. Аналітичний запис паралельного перенесення через координати.

Перехід до аналітичного опису паралельного перенесення починається з узагальнення спостережень про зміну координат точок. На дошці записується загальна формула, де координати образу точки обчислюються як сума координат вихідної точки та координат вектора переміщення. Позначається вихідна точка $M(x; y)$, вектор переміщення має координати $(a; b)$, образ точки $M'(x'; y')$.

Записуються формули $x' = x + a$; $y' = y + b$. Вчитель пояснює, що ці формули дозволяють знаходити координати образу будь-якої точки без виконання геометричних побудов, лише за допомогою обчислень. Розглядається числовий приклад, де точка $P(-2; 5)$, вектор переміщення має координати $(4; -3)$. Підстановка значень у формули дає координати образу $-2+4=2$ та $5+(-3)=2$, отже точка $P'(2; 2)$. Перевірка виконується побудовою на координатній площині, де дійсно точка з координатами $(2; 2)$ є кінцем вектора, відкладеного від точки з координатами $(-2; 5)$.

Розглядається обернена задача, де за координатами вихідної точки та її образу потрібно знайти координати вектора переміщення. Записується система рівнянь, де координати вектора виражаються як різниця координат образу та вихідної точки.

Числовий приклад демонструє точку $K(3; -1)$ та $K'(-2; 4)$, координати вектора обчислюються як $-2-3=-5$ та $4-(-1)=5$. Учні виконують кілька аналогічних обчислень самостійно з наступною перевіркою результатів через побудову в програмі GeoGebra.

4. Алгоритм побудови образу точки та фігури.

Практична частина уроку присвячена оволодінню алгоритмом побудови образів геометричних об'єктів при паралельному перенесенні. Вчитель

демонструє покрокову процедуру побудови образу точки за допомогою креслярських інструментів на фізичній моделі координатної площини.

Спочатку позначається вихідна точка A та задається вектор переміщення через його координати або через побудову від деякої точки до іншої. Від точки A відкладається вектор, рівний вектору переміщення, це виконується через побудову паралелограма або через відкладання відстаней, рівних координатам вектора, вздовж напрямків координатних осей. Кінець відкладеного вектора позначається як точка A' , яка є шуканим образом. Для побудови образу відрізка знаходяться образи його кінцевих точок, потім вони з'єднуються відрізком, що дає образ вихідного відрізка. Побудова образу трикутника виконується аналогічно через знаходження образів трьох вершин та їх послідовне з'єднання.

Вчитель підкреслює, що для складніших фігур достатньо знайти образи ключових точок, які визначають форму фігури. Демонстрація в програмі GeoGebra показує ті самі побудови у цифровому середовищі з можливістю динамічної зміни параметрів. Учні отримують індивідуальні завдання на картках, де потрібно побудувати образ заданої фігури при паралельному перенесенні на заданий вектор. Завдання диференційовані за складністю: перший рівень містить побудову образу відрізка або трикутника з цілими координатами вершин, другий рівень включає чотирикутники та вектори з дробовими координатами, третій рівень пропонує побудову образів кіл або складніших багатокутників.

Робота виконується спочатку на папері з клітинчастою координатною площиною, потім перевіряється через побудову в програмі на комп'ютері. Вчитель обходить клас, надає індивідуальні консультації, допомагає учням, які мають труднощі з виконанням побудов.

5. Застосування паралельного перенесення до розв'язування задач.

Завершальна частина вивчення нового матеріалу демонструє практичне застосування паралельного перенесення для розв'язування геометричних

задач. На екрані з'являється задача про знаходження координат четвертої вершини паралелограма за трьома відомими вершинами. Вчитель пояснює, що протилежні сторони паралелограма є рівними та паралельними, отже одна сторона може бути отримана з іншої паралельним перенесенням на певний вектор. Будується паралелограм з вершинами A , B , C , де $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(3;6)$, потрібно знайти координати вершини D .

Вектор переміщення з A в B має координати $(3;1)$, такий самий вектор переміщує точку D в точку C . Записується система рівнянь для координат точки D , розв'язання дає координати $(0; 5)$. Перевірка виконується побудовою паралелограма в програмі GeoGebra з використанням отриманих координат четвертої вершини. Друга задача стосується побудови орнаменту методом багаторазового паралельного перенесення базового елемента.

Вибирається простий геометричний елемент, наприклад, прямокутний трикутник з катетами 2 та 1. Цей трикутник переноситься на вектор з координатами $(3;0)$, що створює ряд трикутників, розміщених горизонтально. Потім весь ряд переноситься на вектор з координатами $(0;2)$, що створює другий ряд трикутників над першим. Повторення цієї процедури кілька разів дає регулярний орнамент, що покриває площину.

Учні створюють власні орнаменти у програмі, експериментуючи з різними базовими елементами та векторами переміщення. Найцікавіші роботи демонструються класу через проектор, обговорюються математичні закономірності створених візерунків.

IV. Закріплення нових знань, умінь та навичок 5 хв.

Систематизація вивченого матеріалу відбувається через фронтальне опитування з використанням інтерактивних елементів на дошці. Вчитель задає запитання про означення паралельного перенесення, учні формулюють його своїми словами, найточніша відповідь виводиться на екран. Запитання про те, що таке вектор переміщення і як його задати, супроводжується показом кількох варіантів на координатній площині. Учні перелічують властивості

паралельного перенесення, для кожної властивості на екрані з'являється ілюстрація з конкретним прикладом. Обговорюється питання про те, чи може фігура співпадати зі своїм образом при паралельному перенесенні, учні доходять висновку, що це можливо лише для нескінченних фігур, наприклад координатних осей або прямих, паралельних вектору переміщення.

Демонструється інтерактивна вправа на дошці, де показані п'ять пар точок, з'єднаних стрілками, потрібно визначити, чи можуть всі ці пари бути отримані одним паралельним перенесенням. Учні аналізують напрямки та довжини векторів між парами точок, роблять висновок про можливість або неможливість такого перетворення. До дошки викликається один учень, який позначає координати вектора переміщення для тих пар, що задовольняють умову, клас перевіряє правильність відповіді через вимірювання в програмі.

Практичне завдання на закріплення виконується індивідуально на роздаткових картках, де на координатній площині зображений багатокутник та вектор переміщення, потрібно побудувати образ багатокутника креслярськими інструментами. Учні працюють самостійно протягом п'яти хвилин, застосовуючи вивчений алгоритм побудови образів ключових точок з наступним їх з'єднанням.

Після завершення побудови відбувається взаємоперевірка в парах, де сусіди обмінюються картками та перевіряють правильність виконання за критеріями: точність знаходження координат образів вершин, акуратність з'єднання точок відрізками, правильність форми отриманої фігури. Вчитель викликає до документ-камери трьох учнів з різним рівнем складності завдань, їхні роботи транслуються на великий екран для колективного аналізу. Клас обговорює кожну роботу, вказує на сильні моменти та можливі помилки, пропонує способи виправлення недоліків. Електронне швидке опитування проводиться через освітню платформу, де кожен учень на своєму комп'ютері відповідає на п'ять коротких питань з вибором однієї правильної відповіді.

Питання стосуються формул обчислення координат образу, визначення властивостей перетворення, розпізнавання ситуацій застосування

паралельного перенесення. Система автоматично підраховує правильні відповіді кожного учня та виводить загальну статистику класу на екран вчителя. Результати опитування дозволяють виявити прогалини в розумінні окремих учнів для подальшої індивідуальної роботи на консультаціях.

У. Підсумок уроку 5 хв.

Завершення уроку відбувається через узагальнення всього вивченого матеріалу та рефлексію навчальної діяльності учнів. Вчитель повертається до цілей уроку, сформульованих на початку заняття, та разом з класом аналізує ступінь їх досягнення. Запитується, чи навчилися учні розпізнавати паралельне перенесення серед інших геометричних перетворень, чи можуть вони самостійно виконати побудову образу заданої фігури, чи зрозуміли формули для обчислення координат образів точок. Кілька учнів діляться враженнями про урок, розповідають, які моменти були найцікавішими, що викликало найбільші труднощі, які навички вони хотіли б додатково відпрацювати вдома. Один учень відзначає зручність використання програми GeoGebra для швидкої перевірки правильності ручних побудов, інший учень висловлює задоволення від творчого завдання з створення орнаментів.

На екрані демонструється узагальнююча схема, де в центрі розміщене поняття паралельного перенесення, від нього відходять стрілки до блоків з означенням, властивостями, алгоритмом побудови, формулами координат, прикладами застосування. Схема залишається на екрані кілька хвилин, учні фотографують її на свої телефони або швидко замальовують основні елементи в зошити для подальшого повторення матеріалу. Вчитель підкреслює місце паралельного перенесення в системі геометричних перетворень площини, повідомляє, що на наступних уроках буде вивчатися осьова та центральна симетрія, поворот навколо точки, а потім композиції різних перетворень. Оцінювання роботи учнів здійснюється з урахуванням активності під час фронтального опитування, правильності відповідей на запитання, якості

виконання практичних побудов на картках, результатів електронного опитування.

Вчитель називає прізвища п'ятьох учнів, які найкраще працювали протягом уроку, виставляє їм оцінки дванадцять або одинадцять балів у електронний журнал з коментарями про високу активність, правильність міркувань, акуратність виконання завдань. Ще кілька учнів отримують оцінки десять або дев'ять балів за хорошу роботу з окремими недоліками, наприклад недостатньою точністю побудов або помилками в обчисленнях.

Учні, які мали значні труднощі на уроці, отримують рекомендації відвідати консультацію для додаткового опрацювання матеріалу та не отримують оцінок, щоб мати можливість покращити свої результати. Вчитель дякує всьому класу за увагу, зосередженість, активну участь у роботі та висловлює впевненість, що вивчений матеріал стане міцною основою для подальшого освоєння геометричних перетворень.

VI. Домашнє завдання 3 хв.

Домашнє завдання формулюється чітко з поділом на обов'язкову та додаткову частини для врахування індивідуальних можливостей учнів. Обов'язкова частина включає опрацювання теоретичного матеріалу з підручника, а саме параграфів 13 та 14, де викладено означення паралельного перенесення, його властивості, наведені приклади розв'язання типових задач на побудову образів фігур та обчислення координат.

Учні мають уважно прочитати текст параграфів, вивчити всі означення напам'ять, розглянути малюнки та схеми, які ілюструють процес побудови образів при перетворенні. Письмові вправи з підручника включають № 345, 347, 349 з базового рівня, де потрібно знайти координати образів заданих точок при паралельному перенесенні на вектор з відомими координатами, використовуючи формули додавання координат. №351 середнього рівня вимагає побудувати образ трикутника з заданими координатами вершин при

перенесенні на вектор, виконати побудову на міліметровому папері з використанням лінійки та олівця.

№353 містить задачу на знаходження координат вектора переміщення, якщо відомі координати точки та її образу, розв'язання вимагає складання системи рівнянь та виконання обчислень. Додаткова частина для учнів, які хочуть поглибити свої знання, включає №356 високого рівня, де потрібно довести, що дві задані фігури можуть бути суміщені паралельним перенесенням, знайти координати відповідного вектора переміщення. Творче завдання полягає в створенні власного орнаменту методом паралельного перенесення базового елемента у двох напрямках для заповнення прямокутної області, базовий елемент може бути довільної форми на розсуд учня.

Орнамент має бути виконаний або на папері кольоровими олівцями з дотриманням точності координат, або в програмі GeoGebra з наступним збереженням файлу для демонстрації на наступному уроці. Вчитель рекомендує учням, які мали труднощі на уроці, переглянути відеоурок з теми паралельного перенесення на освітній платформі Khan Academy або на каналі Математика для всіх, посилання на ресурси надаються через електронний журнал. Додатково можна виконати інтерактивні вправи на тренування навичок побудови образів на сайті GeoGebra Materials, де доступні готові шаблони з автоматичною перевіркою правильності розв'язання. Вчитель записує на дошці номери всіх завдань великими цифрами, учні переписують їх у щоденники, ставлять запитання щодо незрозумілих моментів формулювання задач.

Нагадується про необхідність акуратного оформлення всіх письмових робіт з виділенням дано, знайти, розв'язання, відповідь, використанням лінійки для креслення відрізків та стрілок векторів. Повідомляється, що на наступному уроці буде проведена перевірка виконання домашнього завдання через збір зошитів на перевірку від половини класу, інша половина здасть зошити через урок, що дозволяє вчителю ретельно перевірити роботи кожного учня з коментарями та рекомендаціями.

ПЛАН-КОНСПЕКТ

уроку з курсу Геометрія 9 клас

на тему: Геометричні перетворення. Осьова симетрія.

Мета: Сформувати в учнів глибоке розуміння осьової симетрії як геометричного перетворення площини, за якого точки відображаються відносно прямої з дотриманням рівності відстаней та перпендикулярності з'єднувальних відрізків до осі.

Удосконалювати вміння розпізнавати симетричні фігури в навколишньому середовищі, природі, мистецтві та архітектурі через аналіз мультимедійних зображень та інтерактивних моделей.

Розвивати конструктивні навички побудови образів точок та складних геометричних фігур відносно заданої осі симетрії з використанням традиційних креслярських інструментів та сучасного програмного забезпечення.

Виховувати естетичне сприйняття математичної гармонії через створення симетричних композицій та орнаментів у цифровому середовищі. Формувати здатність до аналітичного мислення через дослідження властивостей осьової симетрії та встановлення зв'язків між геометричними та алгебраїчними характеристиками перетворення.

Методи і прийоми навчання: дослідницький метод через групову роботу з планшетами для виявлення закономірностей розміщення симетричних точок, пояснювально-ілюстративний підхід з демонстрацією анімованих побудов на інтерактивній дошці, проблемно-пошукова бесіда для підведення учнів до самостійного формулювання означення симетрії, практична робота в парах з взаємоперевіркою виконаних побудов, інтерактивні вправи на розпізнавання симетричних фігур через гру на

електронній платформі, індивідуальна робота з диференційованими завданнями різного рівня складності.

Обладнання: інтерактивна дошка з мультимедійним проектором для демонстрації презентації та відеоматеріалів, комп'ютерний клас з робочими місцями, обладнаними програмою GeoGebra та доступом до освітніх онлайн ресурсів, планшети для групової дослідницької роботи учнів, роздатковий матеріал з картками індивідуальних завдань на побудову симетричних фігур, координатні площини на міліметровому папері, креслярські набори з лінійками, циркулями, трикутниками, олівцями, дзеркала для демонстрації ефекту відображення, фізична модель координатної площини з магнітними фігурами, документ-камера для трансляції учнівських робіт на великий екран.

Основні питання уроку:

1. Поняття осьової симетрії та означення симетричних точок.
2. Вісь симетрії та її властивості як множини нерухомих точок.
3. Властивості осьової симетрії як геометричного перетворення.
4. Алгоритм побудови образу точки відносно заданої прямої.
5. Побудова образів складних фігур методом ключових точок.
6. Симетричні фігури та їхні характеристики в природі й мистецтві.
7. Аналітичний запис осьової симетрії для спеціальних випадків осей.

Використані джерела:

1. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів, 2019.
2. Навчальна програма з математики для основної школи, затверджена МОН України, 2021.
3. Методичні рекомендації з використання динамічної геометрії на уроках математики.

4. Онлайн платформа Khan Academy розділ геометричних перетворень.

5. Колекція зображень симетричних об'єктів з бази даних освітніх ресурсів.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент 5 хв.

Вчитель зустрічає учнів біля входу до кабінету математики, де на дверях розміщено симетричний орнамент, який одразу привертає увагу до теми уроку. Учні займають свої місця за комп'ютерними столами, перевіряють наявність усіх необхідних матеріалів для роботи, включаючи зошити, підручники, креслярські інструменти. Технічна підготовка включає увімкнення комп'ютерів, запуск програми GeoGebra на кожному робочому місці, перевірку справності інтерактивної дошки та проектора.

Вчитель проводить перекличку через електронний журнал, фіксує відсутніх та коротко нагадує правила роботи в комп'ютерному класі. Оголошується тема уроку, яка з'являється на головному екрані разом з красивим зображенням метелика як природного прикладу симетрії. Учні отримують роздатковий матеріал з координатними площинами та картками завдань, які будуть використовуватися протягом уроку.

Створюється позитивний емоційний настрій через демонстрацію цитати відомого математика про красу симетрії в геометрії та природі. Формулюються очікувані результати уроку, що учні зможуть розпізнавати симетричні фігури, будувати образи при осьовій симетрії, застосовувати властивості для розв'язування задач.

II. Мотивація навчальної та пізнавальної діяльності 15 хв.

Урок розпочинається з демонстрації яскравої презентації, де на слайдах послідовно з'являються зображення об'єктів з осьовою симетрією з різних сфер

навколишнього світу. Спочатку демонструються природні об'єкти: метелики з ідеально симетричними крилами, квіти з радіальною будовою, листя дерев, сніжинки під мікроскопом, обличчя людини. Учні обговорюють, що всі ці об'єкти мають спільну рису, яку інтуїтивно називають симетрією або дзеркальністю. Вчитель бере справжнє дзеркало та розміщує його вертикально на столі, ставить перед ним геометричну фігуру з паперу, учні спостерігають відображення в дзеркалі та порівнюють його з оригіналом.

Наступна серія слайдів показує архітектурні споруди: фасади класичних будівель, готичні собори, українські церкви, де чітко простежується вертикальна вісь симетрії посередині споруди. Демонструються українські вишиванки, килими, писанки, де орнаменти побудовані на основі симетричного повторення елементів відносно центральної лінії. Вчитель показує відеофрагмент про застосування симетрії в техніці, зокрема в конструкції літаків, автомобілів, кораблів, де симетрична будова забезпечує стійкість та ефективність руху. Обговорюється запитання про те, чому природа та людина так часто використовують симетрію в своїх творіннях. Учні висловлюють думки про красу, гармонію, раціональність симетричних форм. На інтерактивній дошці вчитель запускає інтерактивну гру, де потрібно визначити, чи є запропоновані фігури симетричними, і якщо так, то позначити розміщення осі симетрії.

До дошки виходять кілька учнів, які намагаються провести лінію так, щоб ліва та права частини фігури були дзеркальними відображеннями. Виникають дискусії щодо деяких складніших випадків, що створює проблемну ситуацію та пізнавальну потребу. Вчитель формулює проблемне запитання про те, як математично точно визначити, чи є дві точки симетричними відносно даної прямої, які умови повинні виконуватися. Учні пропонують варіанти відповідей: точки мають бути на однаковій відстані від прямої, відрізок між точками має бути перпендикулярним до прямої. Вчитель фіксує ці ідеї на дошці та повідомляє, що саме ці умови стануть основою математичного означення осьової симетрії.

III. Вивчення нового матеріалу 45 хв.

1. Поняття осьової симетрії та означення симетричних точок.

Пояснення нового матеріалу починається з побудови на інтерактивній дошці координатної площини та довільної прямої, яка буде виконувати роль осі симетрії. Вчитель обирає для першого прикладу вертикальну пряму, що проходить через точку з координатами $(3;0)$ паралельно осі ординат, оскільки такий випадок найпростіший для візуального сприйняття. Позначається довільна точка $A(1;2)$, що розміщена зліва від осі. Вчитель формулює завдання знайти точку A' , симетричну точці A відносно побудованої прямої.

Використовуючи інструменти програми GeoGebra, від точки A будується перпендикуляр до осі симетрії, позначається точка перпендикуляра з віссю як точка N . Вимірюється відстань від точки A до точки N , вона дорівнює 2 одиницям. На продовженні перпендикуляра за точку N відкладається така сама відстань 2 одиниці, кінець відкладеного відрізка позначається як точка A' . Координати точки A' виявляються рівними 5 та 2.

Вчитель підкреслює ключові моменти: відрізок AA' перпендикулярний осі симетрії, точка N є серединою відрізка AA' , відстані AN та NA' рівні між собою. Записується означення симетричних точок відносно прямої: дві точки називаються симетричними відносно даної прямої, якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка, що з'єднує ці точки. Учні записують означення в зошити разом з ілюстративним малюнком.

Розглядається особливий випадок, коли точка лежить на самій осі симетрії, з'ясовується, що така точка симетрична сама собі, тобто є нерухомою при перетворенні. Будується кілька таких точок на осі, підкреслюється, що вся вісь симетрії складається з нерухомих точок. Вводиться позначення осьової симетрії через літеру S з індексом, що вказує на вісь, або через символ дзеркального відображення. Учні виконують пробні побудови симетричних точок на своїх комп'ютерах, обираючи різні положення вихідних точок відносно осі.

2. Вісь симетрії та її властивості як множини нерухомих точок.

Дослідження властивостей осі симетрії проводиться через серію інтерактивних експериментів у програмі GeoGebra. Вчитель будує пряму під кутом 45 градусів до осей координат та просить учнів знайти образи кількох точок, що лежать на цій прямій. Учні виконують побудови та виявляють, що кожна точка осі залишається на місці після перетворення. Формулюється властивість: вісь симетрії є геометричним місцем точок, які не змінюють свого положення при даному перетворенні. Обговорюється питання про кількість осей симетрії для різних фігур.

Будується рівносторонній трикутник, учні шукають його осі симетрії, виявляється три осі, кожна з яких проходить через вершину та середину протилежної сторони. Для квадрата знаходяться чотири осі симетрії: дві діагоналі та дві прямі, що проходять через середини протилежних сторін. Коло має нескінченну кількість осей симетрії, будь-який діаметр є віссю симетрії круга. Розрізняється поняття фігури, що має вісь симетрії, та симетричної фігури як образу іншої фігури. Будується довільний трикутник, який не має жодної осі симетрії, потім будується його образ відносно деякої прямої, вихідний трикутник та його образ разом утворюють симетричну композицію відносно цієї прямої.

Учні в групах по двоє отримують завдання на планшетах: дослідити, скільки осей симетрії мають правильні многокутники з різною кількістю сторін.

Виявляється закономірність, що правильний многокутник з парною кількістю сторін має стільки осей симетрії, скільки в нього сторін, причому половина осей проходить через протилежні вершини, а половина через середини протилежних сторін. Правильний многокутник з непарною кількістю сторін також має кількість осей, рівну кількості сторін, але всі вони проходять через вершину та середину протилежної сторони.

3. *Властивості осьової симетрії як геометричного перетворення.*

Систематичне дослідження властивостей осьової симетрії організовується через фронтальну роботу класу з використанням інтерактивної дошки. Вчитель будує трикутник з вершинами А, В, С та обирає горизонтальну пряму як вісь симетрії. Використовуючи вбудовану функцію симетрії в програмі, автоматично будується трикутник А' В' С'.

Вимірюються довжини сторін обох трикутників за допомогою інструмента вимірювання відстані, результати записуються в таблицю на дошці. Виявляється, що відповідні сторони мають однакові довжини: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Вимірюються кути трикутників, знову виявляється рівність відповідних кутів. Обчислюються площі трикутників програмою, вони виявляються однаковими. Формулюється перша властивість: осьова симетрія зберігає відстані між точками, тобто вихідна фігура та її образ є рівними фігурами. Будується відрізок, що з'єднує відповідні вершини А та А', перевіряється, що вісь симетрії є серединним перпендикуляром до цього відрізка. Така сама перевірка виконується для інших пар відповідних вершин. Будується пряма через точки А та В вихідного трикутника, будується пряма через точки А' та В' образу, вимірюється кут між цими прямими, кут дорівнює нулю, що означає паралельність прямих.

Перевіряється кут нахилу обох прямих до осі симетрії, виявляється, що ці кути рівні за величиною, але розміщені по різні боки від осі. Формулюється властивість: якщо пряма не перпендикулярна осі симетрії, то образ цієї прямої паралельний їй і утворює з віссю кут, рівний вихідному. Особливо розглядається випадок прямої, перпендикулярної осі симетрії, такі прямі переходять у прямі, також перпендикулярні осі. Будується коло з центром поза віссю симетрії, його образ також є колом з тим самим радіусом, центр якого симетричний вихідному центру. Учні формулюють узагальнену властивість: осьова симетрія перетворює геометричну фігуру в рівну їй фігуру. Обговорюється питання про орієнтацію фігур, вчитель демонструє, що при обході вершин вихідного трикутника за годинниковою стрілкою обхід вершин

образу відбувається проти годинникової стрілки, тобто орієнтація змінюється на протилежну.

4. *Алгоритм побудови образу точки відносно заданої прямої.*

Практична частина уроку присвячена відпрацюванню алгоритму побудови образів за допомогою креслярських інструментів на папері. Вчитель демонструє покрокову процедуру на фізичній моделі з використанням документ-камери, що транслює зображення на великий екран. Роздається роздатковий матеріал, де на координатній площині зображена похила пряма як вісь симетрії та позначена точка А.

Крок перший полягає в побудові перпендикуляра з точки А до осі симетрії, для цього використовується трикутник з прямим кутом або циркуль. Вчитель демонструє обидва способи побудови перпендикуляра. При використанні циркуля з центром у точці А будується дуга довільного радіуса, яка перетинає вісь у двох точках, позначаються ці точки як N_1 та N_2 . З центрами в точках N_1 та N_2 будуються дві дуги однакового радіуса, більшого за половину відстані між N_1 та N_2 , ці дуги перетинаються в деякій точці по інший бік осі. Пряма через точку А та точку перетину дуг є шуканим перпендикуляром до осі. Позначається точка N як перетин перпендикуляра з віссю симетрії.

Крок другий вимагає вимірювання відстані AN за допомогою лінійки або циркуля. Відстань фіксується на циркулі, ніжка циркуля встановлюється в точку N, на продовженні перпендикуляра за точку N робиться засічка, що визначає положення точки А'. З'єднання точки А' з віссю перевіряє перпендикулярність, вимірювання відстані НА штрих підтверджує рівність відстаней. Учні виконують аналогічну побудову на своїх роздаткових матеріалах, вчитель обходить клас та перевіряє правильність виконання кожного кроку.

Для учнів, які швидко впоралися з завданням, пропонується додаткова задача на побудову образу відрізка, для цього потрібно знайти образи кінцевих

точок та з'єднати їх. Після завершення ручних побудов учні перевіряють свої результати в програмі GeoGebra, де вводять координати вихідної точки та рівняння осі симетрії, програма автоматично будує образ.

5. *Побудова образів складних фігур методом ключових точок.*

Перехід до побудови образів складніших фігур здійснюється через демонстрацію на інтерактивній дошці трикутника, розміщеного з одного боку від вертикальної осі симетрії. Вчитель пояснює, що для побудови образу трикутника достатньо знайти образи трьох його вершин, оскільки три точки однозначно визначають трикутник. Послідовно виконуються побудови образів кожної вершини за алгоритмом, описаним раніше. Отримані три точки A' , B' , C' з'єднуються відрізками, утворюючи трикутник-образ. Вимірювання параметрів підтверджує рівність трикутників.

Розглядається побудова образу чотирикутника, знову застосовується метод ключових точок, знаходяться образи чотирьох вершин та послідовно з'єднуються. Особлива увага приділяється випадку, коли частина фігури перетинає вісь симетрії. Будується відрізок, один кінець якого лежить зліва від осі, а другий справа. Вчитель показує, що потрібно знайти образи обох кінцевих точок, а також образ точки перетину відрізка з віссю. Виявляється, що точка перетину є нерухомою, тому образ відрізка також проходить через цю точку.

Будується коло, центр якого розміщений поза віссю симетрії, для побудови образу знаходиться образ центра, потім будується коло з таким самим радіусом навколо цього образу. Розглядається складніша фігура, що складається з кількох відрізків та дуг, учні визначають мінімальний набір ключових точок, образи яких треба знайти.

Групова робота організовується так, що кожна пара учнів отримує зображення певної фігури та осі симетрії на папері, потрібно побудувати образ фігури креслярськими інструментами, потім перевірити результат у програмі. Вчитель пропонує завдання різного рівня: простий рівень містить побудову

образу многокутника відносно вертикальної або горизонтальної осі, середній рівень включає похилу вісь та фігури з округлими елементами, високий рівень пропонує побудову композиції з кількох фігур з подальшим розфарбуванням для створення симетричного орнаменту.

6. Симетричні фігури та їхні характеристики в природі й мистецтві.

Повернення до питання застосування симетрії в реальному світі відбувається через аналіз конкретних прикладів з використанням мультимедійних матеріалів. На екрані демонструється зображення метелика, вчитель пропонує учням визначити, де проходить вісь симетрії, учні показують вертикальну лінію посередині тіла комахи. Обговорюється біологічна доцільність симетричної будови живих організмів, що забезпечує збалансованість руху, ефективність роботи парних органів. Демонструються фотографії різних квітів, учні визначають кількість осей симетрії для кожної квітки залежно від кількості пелюсток.

Аналізуються архітектурні споруди України, зокрема Софійський собор у Києві, де простежується вертикальна вісь симетрії фасаду. Вчитель показує орнаменти українських вишиванок, де базовий елемент відображається відносно вертикальної осі для створення збалансованої композиції. Учні розглядають зразки народних килимів, писанок, де симетрія є основою побудови візерунку. Демонструється відеофрагмент про створення симетричних візерунків у сучасному графічному дизайні, де комп'ютерні програми автоматично створюють дзеркальні відображення елементів. Обговорюється використання симетрії в геральдиці, на прикладі герба України аналізується симетричність зображення тризуба.

Учні отримують творче завдання створити власний симетричний орнамент у програмі GeoGebra, використовуючи інструменти побудови геометричних фігур та осьову симетрію. Кожен учень обирає базовий елемент, будує його з одного боку від вертикальної осі, потім створює дзеркальне

відображення. Найцікавіші роботи зберігаються та демонструються класу через проектор, обговорюються художні та математичні аспекти створених композицій.

7. Аналітичний запис осьової симетрії для спеціальних випадків осей.

Завершальна частина вивчення нового матеріалу присвячена формульному опису осьової симетрії для найпростіших випадків розміщення осі. Вчитель пояснює, що коли вісь симетрії співпадає з однією з координатних осей або паралельна їм, формули перетворення координат стають особливо простими. Розглядається перший випадок, коли віссю симетрії є вісь ординат, тобто пряма з рівнянням x дорівнює 0. Будується точка $M(3;2)$, її образ M' має координати $(-3;2)$, що легко перевірити побудовою.

Записується правило: при симетрії відносно осі ординат абсциса точки змінює знак на протилежний, а ордината залишається незмінною. Формули записуються як $x' = -x$ та $y' = y$. Другий випадок стосується симетрії відносно осі абсцис з рівнянням y дорівнює 0. Аналогічна побудова показує, що тепер ордината змінює знак, а абсциса зберігається. Формули мають вигляд $x' = x$ та $y' = -y$.

Третій випадок розглядає симетрію відносно бісектриси першого координатного кута, прямої з рівнянням $y = x$. Будується точка з координатами $(2; 5)$, вчитель демонструє, що її образ має координати $(5;2)$, тобто координати міняються місцями. Формули записуються як $x' = y$ та $y' = x$. Четвертий випадок стосується прямої $y = -x$, побудова показує, що координати міняються місцями та змінюють знаки. Всі формули систематизуються в таблиці на дошці, яку учні переносять у зошити.

Таблиця формул осьової симетрії для координатних осей та бісектрис координатних кутів створюється на дошці з чотирма рядками:

№	Вісь симетрії	Рівняння осі	Вихідна точка	Координати образу (x',y')
1	Вісь y	$x=0$	(x,y)	$(-x,y)$
2	Вісь x	$y=0$	(x,y)	$(x,-y)$
3	Перша бісектриса	$y=x$	(x,y)	(y,x)
4	Друга бісектриса	$y=-x$	(x,y)	$(-y,-x)$

Учні виконують серію вправ на застосування цих формул, де потрібно знайти координати образу заданої точки при симетрії відносно кожної з чотирьох розглянутих осей. Обчислення перевіряються побудовою в програмі GeoGebra. Розглядається обернена задача, де за координатами образу та віссю симетрії потрібно знайти координати вихідної точки. Учні застосовують ті самі формули, розуміючи, що осьова симетрія є інволюцією, тобто подвійне застосування повертає точку в початкове положення.

IV. Закріплення нових знань, умінь та навичок 12 хв.

Систематизація вивченого матеріалу проводиться через фронтальне опитування з використанням інтерактивних елементів. Вчитель запитує про означення симетричних точок відносно прямої, кілька учнів формують відповідь своїми словами, найточніша версія виводиться на екран. Питання про те, які точки є нерухомими при осьовій симетрії, спрямоване на усвідомлення ролі осі як множини інваріантних точок.

Обговорюється питання про властивості осьової симетрії, учні перелічують збереження відстаней, кутів, площ, для кожної властивості на екрані з'являється графічна ілюстрація. Запитання про те, чи може фігура повністю співпадати зі своїм образом при осьовій симетрії, призводить до обговорення симетричних фігур, що мають власну вісь симетрії. Демонструються приклади таких фігур: рівнобедрений трикутник співпадає з образом при симетрії відносно медіани до основи, коло співпадає з образом при симетрії відносно будь-якого діаметра.

Практичне завдання на закріплення виконується на індивідуальних картках, де зображена похила пряма та кілька точок, потрібно побудувати образи всіх точок та з'єднати їх у тій самій послідовності, що й вихідні точки.

Утворюється дві фігури, симетричні відносно даної прямої. Учні працюють самостійно приблизно п'ять хвилин, потім обмінюються картками для взаємоперевірки. Критерії оцінювання включають правильність побудови перпендикулярів, рівність відстаней від точок до осі, акуратність креслення. Вчитель викликає до документ-камери двох учнів, роботи яких транслюються на екран, клас аналізує правильність виконання та обговорює можливі помилки.

Електронне тестування проводиться через освітню платформу, де кожен учень на своєму комп'ютері отримує набір запитань з вибором правильної відповіді. Тест містить десять питань різного типу: розпізнавання симетричних точок на координатній площині, визначення координат образу за формулами, вибір правильного твердження про властивості симетрії, визначення кількості осей симетрії для заданих фігур. Результати тесту автоматично оцінюються системою, учні одразу бачать свій бал та правильні відповіді на питання, де були допущені помилки. Статистика результатів класу виводиться на екран вчителя, що дозволяє оцінити загальний рівень засвоєння матеріалу.

У. Підсумок уроку 5 хв.

Узагальнення результатів уроку починається з короткого повторення основних понять та властивостей, вивчених на занятті. Вчитель запитує учнів про те, що нового вони дізналися про осьову симетрію, які факти здалися найцікавішими, де виникали труднощі. Кілька учнів діляться враженнями про роботу з програмою GeoGebra, відзначають зручність автоматичних побудов та можливість експериментувати з різними параметрами.

Обговорюється практична значущість вивченого матеріалу для розуміння навколишнього світу, архітектури, дизайну, біології. Вчитель демонструє підсумкову схему, де систематизовані всі основні елементи теми: означення, властивості, алгоритм побудови, формули для спеціальних випадків, приклади застосування. Схема залишається на екрані кілька хвилин,

щоб учні могли сфотографувати її або замалювати в зошити. Оцінювання роботи учнів відбувається з урахуванням активності під час обговорення, правильності виконання практичних завдань, результатів електронного тестування.

Вчитель називає прізвища учнів, які найкраще працювали на уроці, виставляє оцінки в електронний журнал з коментарями про сильні сторони та аспекти, що потребують покращення. Позитивно відзначається творчий підхід при створенні симетричних орнаментів, акуратність геометричних побудов, вміння застосовувати формули для знаходження координат образів. Вчитель дякує учням за активну роботу та налаштовує на подальше вивчення геометричних перетворень на наступних уроках.

VI. Домашнє завдання 3 хв.

Домашнє завдання включає кілька компонентів різного характеру для закріплення вивченого матеріалу та розвитку творчих здібностей. Перша частина полягає в опрацюванні відповідних параграфів підручника, а саме параграфів 15 та 16, де викладено теоретичний матеріал про осьову симетрію з доведеннями властивостей та розв'язаними прикладами. Учні мають прочитати текст параграфів, звернути увагу на виділені означення та теореми, розглянути всі малюнки та схеми. Друга частина містить письмові вправи з підручника, номери яких вчитель записує на дошці та дублює в електронному журналі. Вправи диференційовані за рівнями складності: базовий рівень включає номери 345, 347, 349, де потрібно побудувати образи точок та простих фігур відносно координатних осей. Середній рівень містить номери 351, 353, що вимагають застосування властивостей симетрії для доведення рівності фігур або розв'язування задач на обчислення.

Високий рівень представлений номерами 356, 358, де потрібно розв'язати конструктивні задачі з використанням симетрії або дослідити умови, за яких фігура має вісь симетрії. Третя частина домашнього завдання має творчий характер: учням пропонується знайти в інтернеті або зробити

власні фотографії п'яти об'єктів з осьовою симетрією, роздрукувати або намалювати їх, позначити осі симетрії та підготувати коротку презентацію про математичні властивості симетрії цих об'єктів. Альтернативне творче завдання полягає в створенні складного симетричного орнаменту в програмі GeoGebra з використанням різних геометричних фігур, кольорів, з обов'язковим збереженням файлу для демонстрації на наступному уроці. Четверта частина для бажаючих передбачає перегляд освітнього відео про застосування симетрії в природі та техніці на освітній платформі Khan Academy в розділі геометричних перетворень, після перегляду написати короткий конспект з основними ідеями відео.

Вчитель нагадує про необхідність акуратного оформлення письмових робіт, використання креслярських інструментів для геометричних побудов, перевірки обчислень. Повідомляється, що на наступному уроці будуть розглянуті найцікавіші творчі роботи учнів, обговорені складні випадки з домашніх вправ. Учні записують домашнє завдання в щоденники, ставлять запитання щодо незрозумілих моментів, отримують додаткові роз'яснення від вчителя. Урок завершується організованим виходом учнів з кабінету після збереження файлів з виконаними завданнями та коректного вимкнення комп'ютерів.

ПЛАН-КОНСПЕКТ

уроку з курсу Геометрія 9 клас

на тему: Геометричні перетворення. Поворот навколо точки.

Мета: Сформувати в учнів цілісне уявлення про поворот навколо точки як геометричне перетворення площини, що зберігає відстані та визначається центром обертання і кутом повороту з урахуванням напрямку.

Удосконалювати вміння виконувати побудову образів геометричних фігур при повороті з використанням циркуля, транспортира та можливостей програмного забезпечення для динамічної геометрії. Розвивати просторове мислення через візуалізацію обертального руху в тривимірному просторі та проекцію його на площину з використанням анімаційних моделей.

Виховувати розуміння практичної значущості перетворення повороту через демонстрацію його застосування в механіці, астрономії, комп'ютерній графіці та створенні орнаментів. Формувати навички дослідницької діяльності через самостійне виявлення властивостей повороту в процесі експериментальної роботи з цифровими інструментами та аналізу отриманих результатів.

Методи і прийоми навчання: демонстрація відеофрагментів обертальних рухів у природі та техніці для мотивації вивчення теми, пояснювально-ілюстративний метод з покроковим показом алгоритму побудови на інтерактивній дошці, дослідницька робота в групах з планшетами для виявлення залежності положення образу від величини кута повороту, практична робота учнів з індивідуальними завданнями на побудову образів при різних кутах обертання, інтерактивні вправи на розпізнавання параметрів повороту за розміщенням фігури та її образу, робота в парах з взаємним контролем правильності виконання геометричних побудов.

Обладнання: інтерактивна дошка з мультимедійним проектором для демонстрації анімованих моделей обертання фігур, комп'ютерний клас з програмою GeoGebra на кожному робочому місці для динамічного моделювання, планшети для групової дослідницької роботи з інтерактивними моделями, роздатковий матеріал з картками завдань різного рівня складності та координатними площинами, креслярські набори з циркулями, транспортирами, лінійками для ручних побудов, фізичні моделі обертальних механізмів для демонстрації практичного застосування, документ-камера для трансляції процесу виконання побудов з учнівських зошитів, модель координатної площини з обертовими елементами для наочної ілюстрації перетворення.

Основні питання уроку:

1. Означення повороту навколо точки та його параметри: центр та кут.
2. Напрямок повороту та угода про знак кута обертання.
3. Властивості повороту як руху на площині.
4. Алгоритм побудови образу точки при повороті навколо центра.
5. Особливі випадки повороту на 90, 180 та 270 градусів.
6. Побудова образів складних фігур та композицій.
7. Застосування повороту для створення циклічних орнаментів.

Використані джерела:

1. Істер О.С. Геометрія: підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти, 2020.
2. Навчальна програма з математики для 5-9 класів закладів загальної середньої освіти, МОН України, 2022.
3. Методичні рекомендації щодо використання інформаційно-комунікаційних технологій у викладанні геометрії.

4. Електронна платформа GeoGebra для інтерактивної геометрії та візуалізації математичних об'єктів.
5. Відеоматеріали про обертальний рух у природі та техніці з освітніх ресурсів.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент 5 хв.

Вчитель зустрічає учнів біля входу до комп'ютерного класу, де на дверях розміщено зображення годинника з рухомими стрілками, що натякає на тему обертального руху. Учні займають місця за комп'ютерними столами згідно з попередньо розподіленими номерами, що забезпечує рівномірний розподіл учнів з різним рівнем підготовки по класу. Перевірка готовності до уроку включає наявність зошитів з геометрії, підручників, креслярських інструментів, зокрема циркулів та транспортирів, які будуть необхідні для виконання побудов.

Технічна підготовка передбачає увімкнення всіх комп'ютерів, запуск програми GeoGebra з попередньо підготовленим шаблоном координатної площини, перевірку справності інтерактивної дошки та якості проекції зображення. Вчитель проводить швидку перекличку через електронний журнал, відзначає відсутніх та запитує про причини пропусків попереднього уроку в учнів, які були відсутні. Оголошується тема уроку, яка виводиться на головний екран великими літерами разом з епіграфом про красу обертального руху в природі від відомого фізика. Роздається дидактичний матеріал, що включає картки з індивідуальними завданнями трьох рівнів складності, аркуші з координатними площинами для ручних побудов, довідкові таблиці з формулами тригонометрії.

Створюється робоча атмосфера через встановлення чітких правил поведінки в комп'ютерному класі, нагадування про бережливе ставлення до

обладнання, дотримання техніки безпеки при роботі з електронними пристроями.

II. Мотивація навчальної та пізнавальної діяльності 13 хв.

Урок починається з демонстрації короткого відеоролика, змонтованого з фрагментів різних обертальних рухів у природі та техніці. Спочатку показується обертання Землі навколо власної осі з відповідною анімацією зміни дня і ночі, потім обертання планет навколо Сонця з акцентом на збереженні форми орбіт. Наступні кадри демонструють роботу механізмів: обертання коліс автомобіля, турбін електростанцій, пропелерів літаків, стрілок годинника на різних швидкостях. Показуються природні приклади обертання: віхола торнадо, водовороти в річках, обертання балерини під час піруету, гімнаста на перекладині. Учні спостерігають спільну характеристику всіх цих явищ, що полягає в обертанні об'єкта або його частин навколо певної точки або осі. Вчитель ставить запитання про те, що залишається незмінним під час такого руху, учні відповідають про збереження форми, розмірів, відстані від центра обертання.

На столі демонструється фізична модель обертового механізму, де картонний трикутник закріплений на осі, що дозволяє його обертати. Вчитель повертає трикутник на різні кути, учні спостерігають зміну його положення при збереженні всіх геометричних характеристик. Обговорюється питання про те, які параметри потрібно задати, щоб повністю описати таке перетворення. Учні висловлюють ідеї про необхідність знати точку, навколо якої відбувається обертання, величину кута повороту, напрямок обертання. На інтерактивній дошці запускається інтерактивна модель з програми GeoGebra, де трикутник може обертатися навколо заданої точки, а учні за допомогою повзунка змінюють кут повороту від 0 до 360 градусів.

Спостерігається плавна зміна положення фігури, що дозволяє побачити всі проміжні стани між початковим та кінцевим положенням. Демонструються слайди з прикладами орнаментів, побудованих на основі повороту базового

елемента: розетки з кількох пелюсток, колеса з спицями, сніжинки з симетричними променями. Вчитель пояснює, що всі ці візерунки створені шляхом багаторазового повороту одного елемента на однаковий кут навколо центральної точки. Показується відеофрагмент створення такого орнаменту в графічному редакторі, де дизайнер малює один елемент, потім програма автоматично створює його копії, повернуті на певні кути.

Актуалізація знань про вимірювання кутів відбувається через фронтальне опитування про одиниці вимірювання, переведення градусів у радіани, поняття орієнтованого кута з урахуванням напрямку відліку. На екрані з'являється зображення кола з позначеними кутами 0, 90, 180, 270, 360 градусів та відповідними позначеннями в радіанах $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Повторюється поняття додатного напрямку відліку кутів проти годинникової стрілки та від'ємного напрямку за годинниковою стрілкою, що є загальноприйнятою угодою в математиці. Формулюється проблемне запитання про те, як математично точно описати положення точки після повороту на заданий кут навколо заданого центра, які геометричні побудови потрібно виконати для знаходження цього положення.

III. Вивчення нового матеріалу 48 хв.

1. *Означення повороту навколо точки та його параметри: центр та кут.*

Пояснення нового матеріалу розпочинається з побудови на інтерактивній дошці координатної площини та позначення точки $O(0;0)$, яка буде виконувати роль центра повороту. Вчитель формулює, що поворотом площини навколо точки O на кут альфа називається таке відображення площини на себе, за якого кожна точка M переходить у точку M' так, що відстань OM дорівнює відстані OM' , а кут між променями OM та OM' дорівнює заданому куту альфа.

Записується символічне позначення повороту через літеру R з нижнім індексом O та верхнім індексом альфа. Вчитель будує конкретний приклад: позначається точка $A(3; 0)$ на додатній півосі абсцис, задається кут повороту 60 градусів у додатному напрямку. За допомогою інструментів програми GeoGebra виконується поворот точки A навколо початку координат на 60 градусів, автоматично будується точка A' . Вимірюються відстані OA та OA' , обидві дорівнюють 3 одиницям, що підтверджує збереження відстані від центра. Вимірюється кут AOA' , він дорівнює 60 градусам, що відповідає заданому куту повороту.

Будується промінь OA та промінь OA' , кут між ними виділяється кольором та підписується. Учні записують означення в зошити разом з малюнком, що показує центр повороту, вихідну точку, її образ та кут між променями. Обговорюється питання про те, що відбувається з точкою, яка співпадає з центром повороту, з'ясовується, що центр є нерухомою точкою при будь-якому куті повороту. Розглядається приклад повороту на кут 0 градусів, виявляється, що при такому повороті всі точки площини залишаються на місці, тобто перетворення є тотожним. Вводиться поняття повного обороту при куті 360 градусів, де кожна точка повертається у вихідне положення. Будується кілька точок на різних відстанях від центра повороту, виконуються їхні повороти на той самий кут 60 градусів, учні спостерігають, що всі точки обертаються на однаковий кут, але на різні лінійні відстані залежно від радіуса обертання. Точки, розміщені на одному промені з центром у точці O , після повороту опиняються на іншому промені, що утворює заданий кут з вихідним променем.

2. *Напрямок повороту та угода про знак кута обертання.*

Детальне обговорення напрямку повороту розпочинається з демонстрації годинника на екрані, де стрілки рухаються за годинниковою стрілкою. Вчитель пояснює, що в математиці прийнято вважати додатним напрямком обертання проти годинникової стрілки, а від'ємним за

годинниковою стрілкою. Будується точка $B(2;2)$, виконується її поворот навколо початку координат на кут $+90$ градусів, тобто в додатному напрямку.

Образ точки B' має координати приблизно $(-2;2)$, що перевіряється вимірюванням координат у програмі. Виконується поворот тієї самої точки B на кут -90 градусів, образ B'' має координати приблизно $(2;-2)$. Порівнюються два образи, виявляється, що вони розміщені симетрично відносно вихідної точки щодо центра повороту. На дошці малюється схема з позначенням додатного напрямку дугою проти годинникової стрілки та від'ємного напрямку дугою за годинниковою стрілкою. Розглядаються кути різних знаків та величин: поворот на $+45$ градусів, -45 градусів, $+135$ градусів, -135 градусів. Для кожного випадку виконується побудова образу точки та перевіряються її координати. Обговорюється питання про те, чи можна отримати той самий результат за допомогою поворотів на різні кути. З'ясовується, що поворот на 90 градусів дає той самий результат, що й поворот на 450 градусів або на мінус 270 градусів, оскільки вони відрізняються на повний оберт. Формулюється правило, що повороти на кути, які відрізняються на 360 градусів або кратні цій величині, дають однакові результати. Будується таблиця еквівалентних кутів повороту на дошці.

Основний кут (α)	Радіани (rad)	Еквівалентні кути ($\alpha+360^\circ \cdot k$)
0°		$0, 360^\circ, 720^\circ, -360^\circ, \dots$
90°	2π	$450^\circ, -270^\circ, 810^\circ, \dots$
180°	π	$540^\circ, -180^\circ, 900^\circ, \dots$
270°	3π	$630^\circ, -90^\circ, 990^\circ, \dots$
360°	2π	$0^\circ, 720^\circ, -360^\circ, \dots$

Учні виконують вправи на визначення основного значення кута повороту в діапазоні від 0 до 360 градусів для заданих кутів 420 , -150 , 750 градусів шляхом додавання або віднімання повних обертів.

3. Властивості повороту як руху на площині.

Дослідження властивостей повороту організовується через групову роботу учнів з планшетами, кожна група отримує завдання побудувати в

програмі GeoGebra трикутник та виконати його поворот на заданий кут навколо заданої точки. Перша група працює з поворотом на 45 градусів навколо вершини трикутника, друга група з поворотом на 120 градусів навколо центра трикутника, третя група з поворотом на 180 градусів навколо точки поза трикутником. Учні виконують побудови, вимірюють параметри вихідного трикутника та його образу за допомогою інструментів програми, заповнюють таблицю результатів.

Вимірюються довжини всіх трьох сторін обох трикутників, результати записуються в таблицю для порівняння. Виявляється повна рівність відповідних сторін, що підтверджує збереження лінійних розмірів. Вимірюються всі три кути трикутників, знову виявляється рівність відповідних кутів. Обчислюються площі трикутників програмою, площі виявляються однаковими. Кожна група формулює висновки про властивості повороту на основі своїх вимірювань, потім представники груп виходять до дошки та презентують результати класу. Вчитель узагальнює всі спостереження та формулює загальні властивості повороту. Перша властивість стверджує, що поворот зберігає відстані між точками, тобто для будь-яких двох точок A та B відстань AB дорівнює відстані $A'B'$ між їхніми образами. Друга властивість вказує на збереження величин кутів між прямими або відрізками. Третя властивість формулює збереження площ фігур при повороті. Четверта властивість стверджує, що поворот перетворює пряму в пряму, промінь у промінь, відрізок у рівний йому відрізок. П'ята властивість описує збереження паралельності прямих, якщо дві прямі паралельні, то їхні образи також паралельні. Шоста властивість вказує на збереження перпендикулярності прямих. Узагальнена властивість формулюється так: поворот є рухом площини, тобто перетворенням, що зберігає відстані, а отже перетворює фігуру в рівну їй фігуру. Учні записують всі властивості в зошити у вигляді пронумерованого переліку з ілюстраціями для кожної властивості.

4. *Алгоритм побудови образу точки при повороті навколо центра.*

Практична частина уроку присвячена опануванню алгоритму побудови образів за допомогою традиційних креслярських інструментів без використання комп'ютера. Вчитель демонструє покроковий процес на фізичній моделі з використанням документ-камери, зображення транслюється на великий екран для зручності спостереження всім класом. Роздається роздатковий матеріал, де на координатній площині позначена точка O як центр повороту, точка M як вихідна точка, задано кут повороту α дорівнює 60 градусів у додатному напрямку. Крок перший алгоритму полягає в побудові променя OM за допомогою лінійки, промінь проводиться олівцем тонкою лінією.

Крок другий вимагає вимірювання відстані OM за допомогою лінійки або фіксації цієї відстані на циркулі, відстань позначається як r . Крок третій передбачає використання транспортира для відкладання заданого кута від променя OM у додатному напрямку проти годинникової стрілки. Центр транспортира суміщається з точкою O , нульова відмітка суміщується з променем OM , відмітка 60 градусів визначає напрямок нового променя. Крок четвертий полягає в проведенні нового променя з точки O через позначку на транспортірі. Крок п'ятий вимагає відкладання на новому промені від точки O відстані r , яка була виміряна раніше, це виконується циркулем або лінійкою.

Кінцева точка відкладеного відрізка позначається як M' , це є шуканий образ точки M при повороті. Крок шостий включає перевірку правильності побудови через вимірювання відстаней OM та OM' , які мають бути рівними, та вимірювання кута MOM' транспортиром, який має дорівнювати 60 градусам. Вчитель повільно виконує всі кроки на своєму роздатковому матеріалі під камерою, коментуючи кожну дію, учні одночасно повторюють побудову на своїх аркушах. Після завершення першої побудови учні виконують ще кілька аналогічних завдань з різними кутами повороту: $- 90$ градусів, 120 градусів, $- 45$ градусів.

Вчитель обходить клас, перевіряє правильність виконання кожного кроку, допомагає учням, які мають труднощі з використанням транспортира або циркуля. Для учнів, які швидко впоралися з базовими завданнями, пропонуються додаткові задачі на побудову образу відрізка, де потрібно знайти образи обох кінцевих точок та з'єднати їх.

5. *Особливі випадки повороту на 90, 180 та 270 градусів.*

Детальне вивчення найбільш поширених кутів повороту здійснюється через серію побудов у програмі GeoGebra на інтерактивній дошці. Розглядається поворот навколо початку координат на кут 90 градусів, будується точка $A(4; 0)$ на додатній півосі абсцис. Виконується поворот на 90 градусів, образ $A'(0; 4)$, що лежить на додатній півосі ординат. Будується загальна точка $M(x; y)$, виконується її поворот на 90 градусів, координати образу вимірюються програмою та виявляються рівними $(-y; x)$. Записується формула перетворення координат при повороті на 90 градусів навколо початку координат: $x' = -y$, $y' = x$. Учні перевіряють цю формулу на кількох числових прикладах, підставляючи конкретні значення координат. Розглядається поворот на 180 градусів, точка з координатами $(x; y)$ переходить у точку з координатами $(-x; -y)$, тобто обидві координати змінюють знак на протилежний.

Вчитель звертає увагу, що поворот на 180 градусів навколо початку координат дає той самий результат, що й центральна симетрія відносно цієї точки, яка вивчалася раніше. Записується формула: $x' = -x$, $y' = -y$. Будується трикутник та виконується його поворот на 180 градусів, образ виглядає як відображення вихідного трикутника через центр. Розглядається поворот на 270 градусів у додатному напрямку, що еквівалентно повороту на -90 градусів. Точка з координатами $(x; y)$ переходить у точку з координатами $(y; -x)$. Записується формула: $x' = y$, $y' = -x$. Всі формули для особливих кутів систематизуються в таблиці на дошці.

Таблиця формул повороту навколо початку координат для особливих кутів створюється з чотирма рядками

Кут повороту (θ)	Вихідна точка (x, y)	Координати образу (x', y')
90°	(x, y)	$(-y, x)$
180°	(x, y)	$(-x, -y)$
270°	(x, y)	$(y, -x)$
360°	(x, y)	(x, y)

Учні переносять таблицю в зошити та виконують серію вправ на застосування формул для обчислення координат образів заданих точок.

6. Побудова образів складних фігур та композицій.

Перехід до роботи зі складнішими об'єктами здійснюється через демонстрацію на дошці побудови образу трикутника при повороті навколо точки, що не є його вершиною. Будується трикутник ABC з координатами вершин A (2; 1), B (5; 1), C (3; 4), позначається центр повороту O (-1; -1), задається кут повороту 60 градусів. Вчитель пояснює, що для побудови образу трикутника достатньо знайти образи трьох його вершин за алгоритмом, описаним раніше, потім з'єднати отримані точки відрізками.

Послідовно виконуються повороти вершин A, B, C навколо центра O на кут 60 градусів, отримуються точки A', B', C'. Ці три точки з'єднуються відрізками, утворюючи трикутник A'B'C', який є образом вихідного трикутника. Вимірювання параметрів підтверджує рівність трикутників. Розглядається складніша фігура у вигляді чотирикутника з однією стороною, що є дугою кола, центр повороту розміщений всередині фігури. Обговорюється, як будувати образ дуги, вчитель пояснює, що дуга кола при повороті переходить у дугу кола того самого радіуса, достатньо знайти образи кінцевих точок дуги та центра кола, з якого побудована дуга. Виконується побудова в програмі з покроковою демонстрацією кожного етапу. Групова робота організовується так, що кожна пара учнів отримує картку з зображенням певної фігури та параметрами повороту, потрібно виконати побудову образу спочатку на папері креслярськими інструментами, потім

перевірити результат у програмі GeoGebra. Завдання диференційовані за складністю: базовий рівень містить побудову образу трикутника або чотирикутника при повороті на кути 90 або 180 градусів навколо вершини фігури, середній рівень включає поворот на довільні кути навколо точки поза фігурою, високий рівень пропонує побудову образів фігур зі скругленими елементами або композицій з кількох фігур. Вчитель обходить клас, спостерігає за роботою пар, надає допомогу в разі виникнення труднощів, заохочує учнів до самостійного пошуку оптимальних способів виконання побудов.

7. Застосування повороту для створення циклічних орнаментів.

Творча частина уроку присвячена використанню повороту для створення красивих симетричних композицій та орнаментів. На екрані демонструється презентація з прикладами розеток, що мають центральну симетрію різного порядку. Розетка третього порядку складається з трьох однакових елементів, розміщених під кутами 0, 120 та 240 градусів навколо центральної точки. Розетка четвертого порядку має чотири елементи під кутами 0, 90, 180 та 270 градусів. Розетка шостого порядку містить шість елементів, розміщених через кожні 60 градусів.

Вчитель пояснює принцип побудови таких орнаментів: обирається базовий елемент, він повертається навколо центральної точки кілька разів на кут, який дорівнює 360 градусів, поділений на кількість елементів у композиції. Демонструється покрокове створення розетки шостого порядку в програмі GeoGebra. Будується базовий елемент у вигляді невеличкого трикутника з вершиною в центрі майбутньої розетки. Виконується поворот цього трикутника на кут 60 градусів, отримується другий трикутник. Потім поворот повторюється ще чотири рази з кроком 60 градусів, всього утворюється шість трикутників, які разом створюють шестипроменеву зірку.

Кожен елемент розфарбовується в окремий колір для естетичного ефекту. Учні отримують завдання створити власні циклічні орнаменти в

програмі, використовуючи інструменти побудови геометричних фігур та функцію повороту. Кожен учень обирає кількість елементів у своїй розетці від трьох до дванадцяти, відповідно обчислює кут повороту як частку від ділення 360 на цю кількість. Створюється базовий елемент довільної форми, може бути комбінацією кількох фігур: трикутників, кіл, відрізків. Виконуються послідовні повороти базового елемента на обчислений кут, утворюється повна композиція. Застосовується розфарбування елементів у різні кольори або з використанням градієнтів для посилення візуального ефекту. Найцікавіші роботи учнів демонструються через проектор на великому екрані, клас обговорює математичні та художні аспекти створених орнаментів. Вчитель відзначає оригінальність форми базового елемента, правильність виконання геометричних побудов, гармонійність кольорової гами. Збережені файли з орнаментами можуть бути використані учнями для оформлення власних проєктів, презентацій, або надруковані для створення фізичних декоративних виробів.

IV. Закріплення нових знань, умінь та навичок 10 хв.

Систематизація вивченого матеріалу проводиться через комбінацію фронтального опитування та інтерактивних вправ на інтерактивній дошці. Вчитель запитує про означення повороту навколо точки, кілька учнів формулюють відповідь, найповніша версія записується на дошці як еталонна. Питання про параметри, що визначають поворот, спрямоване на усвідомлення ролі центра обертання та величини кута. Обговорюється угода про знак кута, учні пояснюють різницю між додатним та від'ємним напрямками обертання. Запитання про властивості повороту призводить до перелічення збереження відстаней, кутів, площ, паралельності та перпендикулярності прямих.

На екрані з'являється інтерактивна вправа, де показані чотири пари фігур, для кожної пари потрібно визначити, чи може одна фігура бути отримана з іншої поворотом, і якщо так, то вказати приблизне розміщення центра повороту та величину кута. До дошки виходять чотири учні, кожен

аналізує одну пару фігур, позначає передбачуваний центр повороту, вказує кут. Клас обговорює правильність відповідей, вчитель підтверджує або коригує висновки. Практичне завдання виконується на індивідуальних картках, де зображена точка, центр повороту та заданий кут, потрібно побудувати образ точки за алгоритмом з використанням циркуля та транспортира. Учні працюють самостійно протягом п'яти хвилин, потім обмінюються картками з сусідом для взаємоперевірки. Критерії оцінювання включають правильність відкладання кута транспортиром, точність відкладання відстані циркулем, акуратність креслення та оформлення.

Електронне тестування проводиться через освітню платформу, де кожен учень отримує десять питань різного типу на своєму комп'ютері. Тест містить питання на вибір правильного твердження про властивості повороту, обчислення координат образу точки за формулами для особливих кутів, визначення кута повороту за розміщенням вихідної та образної точок, розпізнавання фігур, що мають центральну симетрію певного порядку. Система автоматично оцінює відповіді, учні одразу бачують свої результати та помилки.

Статистика результатів класу дозволяє вчителю оцінити загальний рівень засвоєння теми та виявити питання, що потребують додаткового пояснення на наступному уроці.

V. Підсумок уроку 4 хв.

Завершення уроку відбувається через короткий огляд всього вивченого матеріалу та рефлексію навчальної діяльності. Вчитель підводить підсумки, підкреслюючи основні досягнення уроку: учні навчилися виконувати побудову образів точок та фігур при повороті, засвоїли властивості цього перетворення, створили власні циклічні орнаменти. Запитується думка учнів про те, які моменти уроку були найцікавішими, що викликало найбільші труднощі, які навички вони хотіли б додатково відпрацювати. Кілька учнів діляться враженнями про роботу з програмою GeoGebra, відзначають зручність візуалізації обертання фігур та можливість експериментувати з

різними параметрами повороту. Обговорюється практична значущість вивченого перетворення для розуміння обертальних рухів у фізиці, астрономії, техніці, для створення дизайнерських композицій. Вчитель демонструє узагальнюючу схему, де систематизовані всі елементи теми: означення повороту, його параметри, властивості, алгоритм побудови, формули для особливих кутів, застосування для створення орнаментів. Схема залишається на екрані, учні фотографують її або замальовують основні моменти в зошити. Оцінювання роботи учнів враховує активність під час фронтального опитування, правильність виконання практичних побудов, якість створених орнаментів, результати електронного тесту. Вчитель називає прізвища учнів, які найкраще працювали протягом уроку, виставляє оцінки в електронний журнал з коментарями про сильні сторони та рекомендаціями щодо покращення. Особливо відзначаються творчі та оригінальні роботи з орнаментами, точність геометричних побудов, вміння застосовувати формули для обчислення координат. Вчитель дякує класу за активну роботу, зосередженість, творчий підхід до виконання завдань та налаштовує на подальше вивчення геометричних перетворень.

VI. Домашнє завдання 4 хв.

Домашнє завдання структуроване за кількома напрямками для комплексного закріплення вивченого матеріалу. Перша частина включає опрацювання теоретичного матеріалу з підручника, а саме параграфів 17 та 18, де викладено означення повороту, його властивості, наведені доведення теорем та розв'язані типові задачі. Учні мають уважно прочитати текст, вивчити всі означення та формулювання властивостей, розглянути малюнки та схеми побудов. Друга частина містить письмові вправи з підручника, номери яких записуються на дошці та дублюються в електронному журналі для зручності.

Базовий рівень представлений номерами 367, 369, 371, де потрібно побудувати образи точок при повороті на прості кути 90, 180 градусів навколо початку координат або обчислити координати образів за формулами.

Середній рівень включає номери 373, 375, 377, що вимагають побудови образів трикутників та чотирикутників при повороті на довільні кути навколо різних центрів з використанням транспортира та циркуля.

Високий рівень містить номери 379, 381, де потрібно розв'язати конструктивні задачі на знаходження центра повороту за положенням фігури та її образу або дослідити умови, за яких фігура має центральну симетрію певного порядку. Третя частина має дослідницький характер: учням пропонується виміряти кути між годинниковою та хвилинною стрілками годинника в різні моменти часу протягом години та пояснити, чому хвилинна стрілка обертається швидше за годинникову, обчислити швидкості обертання обох стрілок у градусах за хвилину.

Четверта частина є творчою: потрібно створити в програмі GeoGebra складний циклічний орнамент восьмого або дванадцятого порядку з використанням комбінації різних геометричних фігур як базового елемента, застосувати кольорове оформлення, зберегти файл для демонстрації на наступному уроці. П'ята частина для бажаючих передбачає знайти в інтернеті або навколишньому середовищі п'ять прикладів об'єктів, що мають центральну симетрію, сфотографувати або намалювати їх, визначити порядок симетрії, підготувати короткий опис математичних властивостей симетрії кожного об'єкта.

Вчитель нагадує про необхідність акуратного оформлення всіх побудов з використанням креслярських інструментів, підписування всіх елементів конструкції, перевірки обчислень. Повідомляється, що на наступному уроці буде проведена самостійна робота з теми геометричних перетворень, яка охопить паралельне перенесення, осьову симетрію та поворот. Учні мають повторити весь матеріал попередніх уроків, опрацювати приклади розв'язання задач з підручника, виконати додаткові тренувальні вправи з електронної

платформи. Запитання щодо незрозумілих моментів домашнього завдання приймаються вчителем, надаються додаткові роз'яснення та рекомендації. Урок завершується організованим збереженням файлів учнівських робіт, коректним закриттям програм, вимкненням комп'ютерів та виходом з класу.