

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

ОЛЬГА ШВАЙ

ПРАКТИКУМ
ІЗ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Луцьк-2025

УДК 519.1(075.8)
Ш 33

Рекомендовано до друку вченою радою

Волинського національного університету імені Лесі Українки

Рецензенти:

Романюк А.С. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики НАН України;

Харкевич Ю.І. – кандидат фізико-математичних наук, професор Волинського національного університету імені Лесі Українки;

Швай О. Л.

Ш 33 Практикум із дискретної математики / *Ольга Леонідівна Швай*. 2-ге вид., переробл. і допов. Луцьк: Вежа-Друк, 2025. 230 с.

ISBN 978-966-940-705-4

У посібнику розглянуто розділи курсу дискретної математики (математична логіка, теорія множин і відношень, комбінаторний аналіз, теорія графів, булеві функції, теорія абстрактних автоматів), які мають широке теоретичне і практичне застосування. Матеріал подано у зрозумілій формі з великою кількістю прикладів. Кожен розділ містить питання для самоконтролю, тестові завдання, задачі для самостійного розв'язування, зразки самостійних робіт.

Рекомендовано здобувачам освіти першого курсу, спеціальностей Математика, Середня освіта (Математика), Середня освіта (Інформатика), Комп'ютерні науки, Кібербезпека та захист інформації.

УДК 519.1(075.8)

© Швай О. Л., 2025

© Волинський національний університет
імені Лесі Українки, 2025

ISBN 978-966-940-705-4

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1. Елементи математичної логіки	7
1.1. Висловлення та логічні операції над ними. Логічні формули	7
1.2. Закони логіки висловлень	9
1.3. Поняття предиката	12
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	13
<i>Тести</i>	14
<i>Вправи для самостійного розв'язування</i>	19
<i>Зразки самостійних робіт до теми «Елементи математичної логіки»</i>	23
Розділ 2. Множини та відношення	24
2.1. Поняття множини. Операції над множинами, їх властивості	24
2.2. Прямий добуток множин. Бінарні відповідності	28
2.3. Типи відповідностей. Функціональна відповідність. Відображення	30
2.4. Операції над відповідностями	32
2.5. Відношення на множинах. Типи відношень. Відношення еквівалентності та порядку	33
2.6. Ізоморфізм частково впорядкованих множин.....	35
2.7. Потужність множини. Злічені та незлічені множини	37
2.8. Основні поняття теорії алгебричних структур	39
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	40
<i>Тести</i>	42
<i>Вправи для самостійного розв'язування</i>	52
<i>Зразки самостійних робіт до теми «Множини та відношення»</i>	60
Розділ 3. Елементи комбінаторного аналізу	63
3.1. Основні правила комбінаторного аналізу. Перестановки, розміщення, комбінації	63
3.2. Біном Ньютона. Поліноміальна теорема	70
3.3. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями	73
3.4. Принцип включень та виключень	75
3.5. Метод рекурентних співвідношень	76
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	78
<i>Тести</i>	80
<i>Вправи для самостійного розв'язування</i>	85
<i>Зразки самостійних робіт до теми “Елементи комбінаторного аналізу”</i>	95
Розділ 4. Теорія графів	96
4.1. Неорієнтовані графи: їх різновиди	96
4.2. Маршрути, ланцюги та цикли у графах.....	99
4.3. Орієнтовані графи. Орієнтовані графи та бінарні відношення	100
4.4. Матричне задання графів	102
4.5. Ізоморфізм графів	106
4.6. Частини графа, суграфи та підграфи. Операції над графами	107
4.7. Зв'язність графів. Мости	110

4.8. Задачі пошуку маршрутів у графі	112
4.9. Алгоритм пошуку мінімальних маршрутів	114
4.10. Ейлерові цикли та ланцюги.....	116
4.11. Гамільтонові графи	119
4.12. Дерева. Ліс. Каркасні дерева. Орієнтовані дерева.....	120
4.13. Плоскі та планарні графи	124
4.14. Розфарбування графів.....	126
<i>Запитання та завдання для самоперевірки</i>	<i>129</i>
<i>Тести</i>	<i>130</i>
<i>Вправи для самостійного розв'язування.....</i>	<i>135</i>
<i>Зразки самостійних робіт до теми “Теорія графів”</i>	<i>144</i>
Розділ 5. Булеві функції.....	147
5.1. Булеві функції. Табличний спосіб задання функцій. Реалізація булевих функцій формулами	147
5.3. Алгебри булевих функцій	150
5.3. Спеціальні форми зображення булевих функцій в алгебрі Буля	153
5.4. Поліном Жегалкіна	157
5.5. Повнота системи булевих функцій. Замкнені класи. Критерій функціональної повноти системи булевих функцій	158
5.6. Мінімізація булевих функцій.....	161
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	<i>167</i>
<i>Тести</i>	<i>168</i>
<i>Вправи для самостійного розв'язування.....</i>	<i>172</i>
<i>Зразки самостійних робіт до теми «Булеві функції»</i>	<i>179</i>
Розділ 6. Теорія скінченних автоматів.....	180
6.1. Дискретний перетворювач інформації. Детерміновані функції	180
6.2. Задання детермінованих функцій за допомогою дерев та діаграм Мура	181
6.3. Задання обмежено-детермінованих функцій канонічними рівняннями	184
6.4. Операція суперпозиції над обмежено-детермінованими функціями	188
6.5. Абстрактні автомати. Автомати Мілі та Мура	189
6.6. Мінімізація абстрактних автоматів	191
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	<i>196</i>
<i>Тести</i>	<i>197</i>
<i>Вправи для самостійного розв'язування.....</i>	<i>202</i>
<i>Зразки самостійних робіт до теми “Теорія абстрактних автоматів” ...</i>	<i>205</i>
Список літератури.....	207
Додатки.....	209
1. Відповіді до тестів.....	209
2. Відповіді та вказівки до вправ для самостійного розв'язування	212
3. Завдання для індивідуальних робіт.....	224

ПЕРЕДМОВА

Слово “дискретний” походить від латинського *discretus*, що означає розірваний, складений з окремих частин, тобто протилежний “неперервному”. Дискретна математика є частиною математики, яка вивчає дискретні величини.

До дискретної математики традиційно належать: математична логіка, теорія множин та відношень, комбінаторний аналіз, теорія графів, булеві алгебри, теорія скінченних автоматів, теорія кодування мови та граматики й інші розділи. Масове використання комп’ютерної техніки значно розширює сферу досліджень, у яких все більше застосовується апарат дискретної математики. Методи дискретної математики широко використовуються у багатьох прикладних дослідженнях.

Дискретна математика пов’язана з усіма розділами математики, але найтісніше з алгеброю, обчислювальною математикою, теорією ймовірностей, математичною логікою, теорією алгоритмів та теорією автоматів. Вона є фундаментом математичної кібернетики й теоретичної інформатики.

Активізація творчої самостійності студентів, формування їхнього мислення в процесі оволодіння дискретною математикою найефективніше здійснюється через розв’язування системи вправ. Пропонований “Практикум із дискретної математики” призначений для здобувачів закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальностями Математика, Середня освіта (Математика), Середня освіта (Інформатика), Комп’ютерні науки, Кібербезпека та захист інформації.

Мета написання посібника – сприяти свідомому засвоєнню теорії, розвитку математичного мислення здобувачів освіти через систему вправ.

У “Практикумі”, який складається з шести розділів, у логічній послідовності розкрито такі теми: елементи математичної логіки, множини та відношення, елементи комбінаторного аналізу, теорія графів, булеві функції, теорія скінченних автоматів. Для детального вивчення теоретичного матеріалу на початку кожного розділу вказано відповідну літературу, з якою слід ознайомитися насамперед, принаймні з одним із рекомендованих джерел, а згодом можна розглянути основні теоретичні відомості, які вміщено у “Практикумі”. Це створює можливість акцентувати увагу здобувачів на головному під

час засвоєння навчального матеріалу. Запитання і завдання для самоперевірки, запропоновані після кожного розділу, призначені для встановлення й аналізу логічних зв'язків курсу, систематизації та узагальнення знань студентів.

У посібнику подано зразки розв'язання типових вправ та значну кількість вправ для самостійного розв'язання, зразки самостійних робіт до кожної теми. Підібрано задачі різного рівня складності (завдання підвищеного рівня відмічені символом «*»), що дає змогу справитися з завданнями менш підготовленим студентам і студентам із високим рівнем знань.

Поглибити й перевірити свої знання здобувачі зможуть також за допомогою тестових завдань двох рівнів складності. До кожного завдання тесту запропоновано п'ять варіантів відповідей, із яких тільки одна правильна. Завдання вважається виконаним, якщо у бланку відповідей указана тільки одна цифра, якою позначена правильна відповідь, без пояснень вибору.

У додатках вміщено відповіді до тестів, відповіді й вказівки до більшості вправ для самостійного розв'язання та завдання для індивідуальних робіт, що допоможе підвищити ефективність самостійної роботи студентів.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Література: [4] – розд. 1; [6] – розд. 1.

1.1. Висловлення та логічні операції над ними. Логічні формули

Основні теоретичні відомості

Просте (елементарне) висловлення (висловлювання) – це розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити питання про його правильність або неправильність. Прості висловлення, у яких виражено правильну думку, називають істинними, а ті, у яких виражено неправильну, – хибними.

Не є висловленнями означення, розповідні речення із суб'єктивною думкою, речення зі змінними.

Символи, які використовуються для позначення висловлень, називають *атомами (атомарні формули)*.

У математичній логіці розглядають операції над висловленнями:

- *Запереченням висловлення A називається висловлення $\bar{A}$ (читається “не A ”), яке є істинним тоді й тільки тоді, коли висловлення A хибне, і хибне, коли A істинне.*
- *Кон'юнкцією (логічним добутком) двох висловлень A та B називається висловлення $A \wedge B$ (читається “ A і B ”), яке є істинним тоді й тільки тоді, коли висловлення A та B одночасно істинні, і хибне у всіх інших випадках.*
- *Диз'юнкцією (логічною сумою) висловлень A та B називається висловлення $A \vee B$ (читається “ A або B ”), яке є хибним тоді й тільки тоді, коли висловлення A та B одночасно хибні, й істинне у всіх інших випадках.*
- *Імплікацією висловлень A та B називається висловлення $A \rightarrow B$ (читається “якщо A , то B ”, “з A випливає B ”), яке є хибним тоді й тільки тоді, коли висловлення A істинне, а B хибне, й істинне у всіх інших випадках.*
- *Еквіваленцією (подвійною імплікацією) висловлень A та B називається висловлення $A \leftrightarrow B$ (читається “ A тоді і тільки тоді B ”, “ A еквівалентне B ”), яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлення A та B одночасно істинні або одночасно хибні, і хибне у всіх інших випадках.*

Застосовуючи до елементарних висловлень логічні операції, дістають складені висловлення, яким відповідають так звані *формули, або вирази алгебри висловлень*.

Формули визначають за такими правилами:

- 1) атом є формулою;
- 2) якщо A і B – формули, то вирази $(\bar{A})$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ також є формулами;
- 3) інших формул, які побудовані не за правилами 1) і 2), немає.

Порядок виконання логічних операцій: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.

Якщо формула має n атомів, то існує 2^n способів надання значення істинності її атомам, тобто формула має 2^n інтерпретацій. Всі її інтерпретації можна звести в таблицю істинності з 2^n рядками.

У таблицях 1.1 та 1.2 визначено значення істинності складених висловлень за значеннями істинності відповідних атомів.

Таблиця 1.1

Таблиця істинності для заперечення

$p(A)$	$p(\bar{A})$
0	1
1	0

Таблиця 1.2

Таблиця істинності для інших логічних операцій

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$	$p(A \rightarrow B)$	$p(A \leftrightarrow B)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Приклади

1. Які з наведених нижче речень є висловленнями? Якщо речення є висловленням, то вказати його значення істинності:

- 1) Луцьк – столиця України.
- 2) Число 25 є простим.
- 3) Число 11 більше від числа 4.
- 4) $5 + 12 = 17$.
- 5) Хай живе дискретна математика!.
- 6) Число 0,00004 дуже мале.

Розв'язання

Речення 1)–4) є висловленнями. Перші два висловлення є хибними, а 3) та 4) – істинними. Речення 5) та 6) не є висловленнями, оскільки речення 5) є окличним, а речення 6) містить суб'єктивну думку.

2. Дослідити логічну структуру висловлення: “Якщо я буду мати канікули, то поїду на море чи в гори”. Сформулювати умову, за якої це висловлення хибне.

Розв’язання

Виділимо елементарні висловлення: A = “Я буду мати канікули”, B = “Я поїду на море”, C = “Я поїду в гори”. Тоді логічна структура складеного висловлення: $A \rightarrow B \vee C$.

Висловлення хибне, якщо $p(A)=1$, а $p(B \vee C)=0$. Оскільки $p(B \vee C)=0$ при $p(B)=0$ і $p(C)=0$, то сформульоване складене висловлювання хибне при $p(A)=1, p(B)=0, p(C)=0$.

Відповідь: $A \rightarrow B \vee C$; хибне при $p(A)=1, p(B)=0, p(C)=0$.

3. Для формули $(A \rightarrow B) \wedge C$ побудувати всі її інтерпретації.

Розв’язання

Атомами у цій формулі є A, B і C . Тому формула має $2^3=8$ інтерпретацій. Усі інтерпретації формули $(A \rightarrow B) \wedge C$ подано в таблиці істинності 1.3.

Таблиця 1.3

Таблиця істинності для формули $(A \rightarrow B) \wedge C$

$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$p(A \rightarrow B)$	$p((A \rightarrow B) \wedge C)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

1.2. Закони логіки висловлень

Основні теоретичні відомості

Формула, яка при всіх наборах значень своїх атомів набуває значення 1, називається *тавтологією* (тотожно істинною формулою, законом алгебри висловлень). Той факт, що формула A є тавтологією, позначають так: $\models A$.

Формула, яка набуває значення 0 при всіх наборах значень своїх атомів, називається *суперечністю* (тотожно хибною формулою).

Формула, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називається *нейтральною*.

Формули A і B називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо значення істинності цих формул збігаються в усіх інтерпретаціях цих формул. Рівносильність формул A і B позначають так: $A=B$ або $A \equiv B$.

Закони логіки висловлень

1. Закони ідемпотентності: $A \wedge A = A$
 $A \vee A = A$
2. Закони асоціативності (сполучні закони): $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
3. Закони комутативності (переставні закони): $A \wedge B = B \wedge A$
 $A \vee B = B \vee A$
4. Закон дистрибутивний (розподільний) для кон'юнкції стосовно диз'юнкції (*перший дистрибутивний закон*) і дистрибутивний (розподільний) закон для диз'юнкції стосовно кон'юнкції (*другий дистрибутивний закон*):
 $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$
 $A \wedge B \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
5. Закон подвійного заперечення: $\overline{\overline{A}} = A$.
6. Закони де Моргана: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
 $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
7. Закони поглинання (закони абсорбції): $(A \vee B) \wedge A = A$
 $(A \wedge B) \vee A = A$
8. Співвідношення для констант:

$A \vee I = I$	$\overline{1} = 0$
$A \wedge I = A$	$\overline{0} = 1$
$A \vee F = A$	$A \vee \overline{A} = I$
$A \wedge F = F$	$A \wedge \overline{A} = F$
9. Закон виключення третього: $A \vee \overline{A} = 1$.
10. Закон протиріччя: $A \wedge \overline{A} = 0$

Правила, які безпосередньо впливають із законів логіки висловлень

1. Якщо в логічному добутку один із співмножників хибний, то логічний добуток також хибний.
2. Якщо в логічному добутку, що містить не менше двох співмножників, є істинний співмножник, то цей співмножник можна вилучити.
3. Якщо в логічній сумі, що містить не менше двох доданків, є хибний доданок, то цей доданок можна вилучити.

4. Якщо в логічній сумі один із доданків істинний, то ця сума також істинна.

Приклади

1. Чи є тавтологією формула $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$?

Розв'язання

Атомами у цій формулі є A та B . Тому формула має $2^2 = 4$ інтерпретацій. Побудуємо таблицю істинності для цієї формули (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Таблиця істинності для формули $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \rightarrow B)$	$p((A \rightarrow B) \wedge A)$	$p(((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B)$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Оскільки задана формула істинна в усіх своїх інтерпретаціях, то вона тавтологією.

Відповідь: формула є тавтологією.

2. Чи є рівносильними формули: $A \rightarrow B$ та $\bar{A} \vee B$?

Розв'язання

Побудуємо спільну таблицю істинності для заданих формул (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

Спільна таблиця істинності для формул $A \rightarrow B$ та $\bar{A} \vee B$

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \rightarrow B)$	$p(\bar{A})$	$p(\bar{A} \vee B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Оскільки значення істинності заданих формул збігаються у всіх інтерпретаціях, то вони рівносильні.

Відповідь: формули є рівносильними.

3. Спростити: $A \wedge \bar{B} \vee B$.

Розв'язання

Послідовно застосувавши дистрибутивний закон для диз'юнкції стосовно кон'юнкції та співвідношення для констант, матимемо: $A \wedge \bar{B} \vee B = (A \vee B) \wedge (\bar{B} \vee B) = (A \vee B) \wedge I = A \vee B$.

Відповідь: $A \vee B$.

1.3. Поняття предиката

Основні теоретичні відомості

Речення, яке містить змінні і не є висловлюванням, перетворюється у нього при заміні цих змінних назвами елементів відповідної множини, називається *предикатом*.

Предикати бувають одно-, дво-, ... , n -місними залежно від того, скільки вільних змінних вони містять. Предикат, який містить n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, символічно записують $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Змінну $x_i \in D_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) називають *предметною*, множину D_i – її *предметною областю*, а символ P – n -місним предикатним символом.

Над предикатами виконують ті ж операції, що й над висловленнями.

Нехай $P(x)$ – предикат, D – задана предметна область та $x \in D$. Символи $\forall$ та $\exists$, відповідно, називають квантором загальності та квантором існування. Якщо x – змінна, то вираз $(\forall x)$ читають “для всіх x ”, “для кожного x ”, “для будь-якого x ”. Запис $(\forall x)P(x)$ означає “ $P(x)$ істинний для всіх значень x з предметної області”. Вираз $(\exists x)$ читають “існує x ” або “для деяких x ”. Запис $(\exists x)P(x)$ означає “ $P(x)$ істинний для деякого x з області D ”.

Для скорочення кількості дужок у запису кванторів опускають дужки, записуючи $\forall x$ замість $(\forall x)$ та $\exists x$ замість $(\exists x)$.

За допомогою кванторів можна предикати перетворювати у висловлення. Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називають *зв'язуванням змінної x* , а змінну x – *зв'язаною*. Не зв'язану змінну називають *вільною*. У формулах $\forall x P(x)$ та $\exists x P(x)$ предикат $P(x)$ перебуває в області дії відповідного квантора.

Приклади

1. Записати символікою логіки предикатів твердження: “Всі цілі числа – раціональні, проте деякі раціональні числа є цілими”, позначивши одномісні предикати відповідними предикатними символами.

Розв'язання

Виділимо два одномісні предикати: $P(x)$ = “ x – ціле число” та $R(x)$ = “ x – раціональне число”. Предметна область змінної x – усі дійсні числа. Тоді задане твердження символічною мовою предикатів запишемо так: $\forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (\exists x (R(x) \wedge P(x)))$.

Відповідь: $\forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (\exists x (R(x) \wedge P(x)))$.

2. Записати логічною формулою речення: “Сума двох додатних чисел є додатне число”.

Розв'язання

Перепишемо речення так: “Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число”. Уведемо змінні x та y . Отримаємо речення: “Довільні додатні числа x та y утворюють суму $x + y$, яка є додатним числом”. Предметна область кожної змінної складається з усіх дійсних чисел.

Це речення запишемо формулою: $\forall x \forall y (((x > 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (x + y > 0))$.

Відповідь: $\forall x \forall y (((x > 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (x + y > 0))$.

3. Подати формулу $\forall x (P(x) \vee (\exists y (P(y) \wedge R(x, y))))$ українською мовою, якщо $P(x)$ = “ x – має підручник із дискретної математики”, $R(x, y)$ = “ x та y – друзі”. Предметна область для x та y складається зі студентів першого курсу.

Розв'язання

Формула такого змісту: “Кожний студент має підручник із дискретної математики або має друга, у якого є цей підручник”.

Запитання і завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Що таке висловлення?
2. Які речення не є висловленнями?
3. Яке висловлення називають істинним, хибним?
4. Що таке атомарні формули?
5. Що таке складені висловлення?
6. Які операції можна виконувати над висловленнями?
7. Дайте визначення логічних операцій: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація та еквіваленція.
8. Побудуйте таблиці істинності для заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквіваленції.
9. Який порядок виконання логічних операцій?
10. Що таке логічна формула?
11. Що називається інтерпретацією формули?
12. Скільки існує інтерпретацій формули, яка має n атомів?
13. Яка формула називається тавтологією?
14. Яка формула називається суперечністю, нейтральною?
15. Дайте означення рівносильних формул.
16. Сформулюйте основні закони логіки висловлень.
17. Що таке предикат?
18. Як символічно записують предикат, який містить n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$?

19. Що таке предметна змінна, предметна область, n -місний предикатний символ?
20. Які операції виконуються над предикатами?
21. Як називаються символи $\forall$ та $\exists$?
22. Прочитайте записи $\forall x P(x)$ та $\exists x P(x)$.
23. Що таке зв'язані та вільні змінні?

Тести

Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Яка таблиця істинності відповідає кон'юнкції висловлень M та K (табл. 1.6)?

Таблиця 1.6

$p(M)$	$p(K)$	А	Б	В	Г	Д
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

- | | |
|-------|-------|
| 1) А; | 4) Г; |
| 2) Б; | 5) Д. |
| 3) В; | |

2. Яка таблиця істинності відповідає диз'юнкції висловлень M та K (табл. 1.7)?

Таблиця 1.7

$p(M)$	$p(K)$	А	Б	В	Г	Д
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

- | | |
|-------|-------|
| 1) А; | 4) Г; |
| 2) Б; | 5) Д. |
| 3) В; | |

3. Яка таблиця істинності відповідає імплікації висловлень M та K (табл. 1.8)?

Таблиця 1.8

$p(M)$	$p(K)$	А	Б	В	Г	Д
0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

- 1) А; 4) Г;
2) Б; 5) Д.
3) В;

4. Яка таблиця істинності відповідає еквіваленції висловлень M та K (табл. 1.9)?

Таблиця 1.9

$p(M)$	$p(K)$	А	Б	В	Г	Д
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1

- 1) А; 4) Г;
2) Б; 5) Д.
3) В;

5. Які речення, з наведених нижче, не є висловленнями?

- 1) $3 + 5 = 7$.
2) Слон – риба.
3) Пройдіть далі.
4) $7 \leq 9$.
5) $24 + 3 = 25$.

6. Які речення, з наведених нижче, не є висловленнями?

- 1) Чи існує число менше 10?
2) Сніг чорний.
3) $\ln 1 = 0$.
4) $2 - 4 = 6$.
5) $2 + 3 \leq 5$.

7. Які речення, з наведених нижче, є висловленнями?

- 1) $3 + 5 = 9$.
2) $4x = 7$.
3) Дніпро – велика річка.
4) Трикутник, у якого всі сторони різні, називається рівностороннім.
5) $2 + 5x \geq 25$.

8. Які речення, з наведених нижче, є висловленнями?

- 1) $\sqrt{x^2} = x$.
2) $4x \neq 7$.
3) Дніпро – мала річка.

- 4) 7 – просте число.
- 5) $24 + x = 2$.
9. Формули, які на всіх наборах значень своїх атомів набувають значення 1, називають:
- 1) тавтологіями;
 - 2) суперечностями;
 - 3) виконуваними;
 - 4) нейтральними;
 - 5) висловленнями.
10. Формули, які на всіх наборах значень своїх атомів набувають значення 0, називають:
- 1) тавтологіями;
 - 2) суперечностями;
 - 3) виконуваними;
 - 4) нейтральними;
 - 5) тотожно істинними формулами
11. Формули, для яких значення істинності збігаються в усіх інтерпретаціях цих формул, називають:
- 1) тавтологіями;
 - 2) суперечностями;
 - 3) виконуваними;
 - 4) нейтральними;
 - 5) рівносильними.
12. Оберіть вирази, які відповідають законам ідемпотентності:
- 1) $(A \vee B) \wedge A = A$
 $(A \wedge B) \vee A = A$
 - 2) $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$
 $A \wedge B \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
 - 3) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
 $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
 - 4) $(A \vee B) \wedge A = A$
 $(A \wedge B) \vee A = A$
 - 5) $A \wedge A = A$
 $A \vee A = A$
13. Оберіть вирази, які відповідають законам комутативності:
- 1) $(A \vee B) \wedge A = A$
 $(A \wedge B) \vee A = A$

- 2) $A \wedge B = B \wedge A$
 $A \vee B = B \vee A$
- 3) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
 $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
- 4) $(A \vee B) \wedge A = A$
 $(A \wedge B) \vee A = A$
- 5) $A \wedge A = A$
 $A \vee A = A$

14. Речення, яке містить змінні і не є висловленням, перетворюється у нього при заміні цих змінних назвами елементів відповідної множини, називають:

- 1) тавтологією;
- 2) предикатом;
- 3) виконуваним;
- 4) квантором;
- 5) теоремою.

Рівень 2

15. Операція кон'юнкції для висловлень A та B є істинною тоді й тільки тоді, коли:

- 1) A і B є хибними;
- 2) A і B є істинними;
- 3) A є хибним, а B – істинним;
- 4) A є істинним, а B – хибним;
- 5) завжди істинна.

16. Операція диз'юнкції для висловлень A та B є хибною тоді й тільки тоді, коли:

- 1) A і B є хибними;
- 2) A і B є істинними;
- 3) A є хибним, а B – істинним;
- 4) A є істинним, а B – хибним;
- 5) завжди істинна.

17. Операція імплікації для висловлень A та B є хибною тоді й тільки тоді, коли:

- 1) A і B є хибними;
- 2) A і B є істинними;
- 3) A є хибним, а B – істинним;
- 4) A є істинним, а B – хибним;
- 5) завжди істинна.

- 18.** Операція еквіваленції для висловлень A та B є істинною тоді й тільки тоді, коли:
- 1) A і B одночасно істинні або одночасно хибні;
 - 2) A і B є істинними;
 - 3) A є хибним, а B – істинним;
 - 4) A є істинним, а B – хибним;
 - 5) завжди істинна.
- 19.** Які з наведених формул є тавтологіями?
- 1) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B})$;
 - 2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$;
 - 3) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow \bar{A}$;
 - 4) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$;
 - 5) $A \wedge \bar{B} \wedge B$.
- 20.** Які з наведених формул є суперечностями?
- 1) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B})$;
 - 2) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$;
 - 3) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow \bar{A}$;
 - 4) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$;
 - 5) $A \wedge \bar{B} \wedge B$.
- 21.** Які з наведених формул є нейтральними?
- 1) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \bar{B})$;
 - 2) $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$;
 - 3) $A \vee (A \rightarrow B)$;
 - 4) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$;
 - 5) $A \wedge \bar{B} \wedge B$.
- 22.** Які з наведених формул є рівносильними формулі $A \rightarrow B$?
- 1) $A \rightarrow \bar{B}$;
 - 2) $\bar{A} \vee B$;
 - 3) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$;
 - 4) $A \wedge \bar{B}$;
 - 5) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$.
- 23.** Які з наведених формул є рівносильними формулі $A \leftrightarrow B$?
- 1) $A \rightarrow \bar{B}$;
 - 2) $A \vee \bar{B}$;
 - 3) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;

- 4) $A \wedge \bar{B}$;
- 5) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$.

24. У формулі $\forall x P(x, y)$ змінна x називається:

- 1) зв'язаною;
- 2) вільною;
- 3) не вільною й не зв'язаною;
- 4) істинною;
- 5) хибною.

25. У формулі $\forall x P(x, y)$ змінна y називається:

- 1) зв'язаною;
- 2) вільною;
- 3) не вільною й не зв'язаною;
- 4) істинною;
- 5) хибною.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Які з наведених речень є висловленнями? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним:

- а) Існує найбільше ціле число.
- б) $x^2 > 10$.
- в) Число 243 кратно 9.
- г) Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від $\log_2 9$?
- д) Ця задача легка.
- е) $\pi = 3,14$.
- є) Синтаксис – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів.
- ж) Чи правильна велика теорема Ферма?
- з) Розкрийте підручник на сторінці 23!

2. Визначити істинність чи хибність складних висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, із яких вони складаються:

- а) 144 кратно 12 і не кратно 7.
- б) Якщо $-2 > (-3)$, то $(-2)^2 < (-3)^2$.
- г) $5 = 5$ тоді і тільки тоді, коли $2 + 3 = 4$.
- д) $2 < 3$ або $3 > 5$.
- е) Якщо $1 < 3$, то $1^2 < 3^2$.
- є) Неправильно, що число 21 є простим.

3. Записати логічну структуру складних висловлень та оцінити їхню істинність:
 - а) Якщо $7 > 6$, то $7 = 6$.
 - б) Число A кратне 10001 тоді і тільки тоді, коли воно кратне 73 і 137.
 - в) Якщо чотирикутник не є ромбом, то його діагоналі не взаємно перпендикулярні.
 - г) Неправильно, що задане число не кратне 15 тоді і тільки тоді, коли воно не кратне 5 і не кратне 3.
4. Чи правильне твердження: “Якщо логічні структури двох складних висловлень збігаються, то вони мають одні й ті ж значення істинності?”. У випадку позитивної відповіді це довести, у випадку негативної – спростувати це твердження контр-прикладом.
5. Записати запропоновані твердження у вигляді формули алгебри висловлень, позначаючи прості висловлення буквами, і визначити їх істинність чи хибність:
 - а) Трикутник ABC рівносторонній тільки тоді, коли він рівнобедрений.
 - б) Якщо фігура $ABCD$ – квадрат, то вона є прямокутником.
 - в) Для того, щоб паралелограм $ABCD$ був квадратом, потрібно і достатньо, щоб його діагоналі були рівні між собою.
6. Знайти значення істинності формул:
 - а) $A \wedge B \wedge C \vee B$ при $A = B = 1, C = 0$
 - б) $B \rightarrow A \wedge C \leftrightarrow D$ при $A = C = 0, B = D = 1$
 - в) $\bar{A} \wedge (A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (B \wedge (C \vee A))$ при $A = 1, B = 0, C = 1$
7. Скласти таблиці істинності для формул алгебри висловлень:
 - а) $A \wedge (B \vee C)$;
 - б) $A \leftrightarrow B \vee A \rightarrow C$;
 - в) $(A \rightarrow B) \wedge ((B \vee C) \wedge (C \leftrightarrow A))$;
 - г) $\overline{A \rightarrow B \vee (C \leftrightarrow B)}$;
 - д) $\overline{A \vee B \vee C} \leftrightarrow \overline{A \vee D}$.
8. Застосовуючи таблиці істинності, довести:
 - а) закони дистрибутивності;
 - б) закони де Моргана;
 - в) закони асоціативності;
 - г) закони поглинання.

9. За допомогою побудови таблиць істинності вияснити, чи є тавтологіями формули:
- $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow C$;
 - $((A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)) \rightarrow (C \vee D)$.
10. Скільки рядків містить таблиця істинності для формули алгебри висловлень $A \rightarrow B \vee C \vee D$? Не складаючи таблиці істинності, визначити, в скількох рядках її останнього стовпчика буде 1?
11. Довести двома способами, що формула $\overline{A \rightarrow B \vee C} \wedge \overline{A \wedge C}$ є суперечністю (складанням таблиці істинності й еквівалентними перетвореннями).
12. Довести еквівалентність формул $\overline{A} \vee \overline{B}$ та $A \rightarrow \overline{B}$ без побудови таблиць істинності.
13. Спростити:
- $(A \rightarrow A) \rightarrow A$;
 - $(A \wedge \overline{B}) \vee B$;
 - $\overline{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$;
 - $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$;
 - $A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B})))$
 - $\overline{A \rightarrow B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge B$.
- 14.* Записати символічно твердження:
- Кожний студент групи відвідав Київ або Львів.
 - Кожне натуральне число, яке кратне 10 є кратним і 5.
 - Існує ціле число, яке більше 5.
 - Деякі вписані в коло чотирикутники є квадратами.
 - У множині всіх натуральних чисел не існує найбільшого числа.
 - Для кожного дійсного числа x , відмінного від нуля, існує таке дійсне число y , що $xy = 1$.
15. Дано предикат $P(x, y) = \langle x + y = x - y \rangle$. Предметною областю кожної змінної є множина цілих чисел. Знайти значення істинності таких висловлень:
- $P(1, 1)$;
 - $P(2, 0)$;
 - $\exists x P(x, 2)$;
 - $\forall x \forall y P(x, y)$;
 - $\forall y P(1, y)$.

- 16.** Дано предикат $P(x) = \langle x = x^2 \rangle$. Предметною областю змінної x є множина цілих чисел. Знайти значення істинності таких висловлень:
- $P(0)$;
 - $P(1)$;
 - $\exists x P(x)$;
 - $\forall x P(x)$.
- 17.** Записати формулу $\forall x(C(x) \vee (\exists y)(C(y) \wedge F(x, y)))$ реченням української мови, якщо $C(x) = \langle x - \text{має комп'ютер} \rangle$, $F(x, y) = \langle x \text{ та } y - \text{друзі} \rangle$. Предметна область для x та y – множина студентів першого курсу.
- 18.** Для речень, записаних українською мовою (1–5), знайти відповідні речення, записані за допомогою предикатів (а–д), якщо $J(x) = \langle x - \text{суддя} \rangle$, $L(x) = \langle x - \text{юрист} \rangle$, $S(x) = \langle x - \text{шахрай} \rangle$, $P(x) = \langle x - \text{політик} \rangle$.
- Всі судді – юристи.
 - Деякі юристи шахраї.
 - Не всі юристи судді.
 - Жоден суддя не є шахраєм.
 - Деякі юристи політики.
- $\exists x(L(x) \wedge S(x))$.
 - $\exists x(L(x) \wedge P(x))$.
 - $\forall x(L(x) \rightarrow J(x))$.
 - $\forall x(J(x) \rightarrow L(x))$.
 - $\forall x(J(x) \rightarrow \overline{S(x)})$.
- 19.*** Чотири студентки – Марія, Ніна, Ольга та Алла – зайняли в змаганні перші чотири місця. На запитання, хто яке місце зайняв, було дано три різні відповіді:
- Ольга – перше, Ніна – друге.
 - Ольга – друге, Алла – третє.
 - Марія – друге, Алла – четверте.
- У кожній відповіді одна частина правильна, а друга – ні. Які місця зайняли Марія, Ніна, Ольга та Алла?

**Зразки самостійних робіт
до теми «Елементи математичної логіки»**

Варіант 1

1. Що називається висловленням? Навести приклади висловлень.
2. Скласти таблицю істинності для формули $\overline{A \vee B} \rightarrow (B \vee C)$.
3. Спростити: $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.
4. Записати символічно твердження: “Кожний студент групи любить дискретну математику”.

Варіант 2

1. Яка формула називається тавтологією? Навести приклади тавтологій.
2. Скласти таблицю істинності для формули $\overline{A \leftrightarrow B} \wedge (B \vee \overline{C})$.
3. Спростити: $(A \wedge B \rightarrow C) \vee (A \wedge C \rightarrow B)$.
4. Записати символічно твердження: “У групі є студент, який не має підручника з дискретної математики”.

Варіант 3

1. Яка формула називається суперечністю? Навести приклади суперечностей.
2. Скласти таблицю істинності для формули $\overline{A \rightarrow B} \leftrightarrow (B \wedge C)$.
3. Спростити: $\overline{A \rightarrow B \vee C} \wedge \overline{A \wedge \overline{C}}$.
4. Записати символічно твердження: “У групі є студент, який прослухав усі запропоновані математичні курси”.

Варіант 4

1. Дати означення рівносильних формул. Навести приклади.
2. Скласти таблицю істинності для формули $A \rightarrow (\overline{B} \vee C) \wedge (C \leftrightarrow A)$.
3. Спростити: $A \rightarrow B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$.
4. Записати символічно твердження: “У групі є студент, який відвідав принаймні одну аудиторію кожного з навчальних корпусів університету”.

РОЗДІЛ 2. МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

Література: [2] – розд. 1, § 1.1; [4] – розд. 2, 6; [6] – розд. 2.

2.1. Поняття множини. Операції над множинами, їх властивості

Основні теоретичні відомості

Поняття множини належить до категорії первинних понять математики. Під множиною розуміють сукупність об'єктів, об'єднаних спільною ознакою. Об'єкти, з яких складається множина, називаються *елементами множини*. Множина вважається заданою, якщо про будь-який об'єкт можна сказати: належить він до даної множини чи ні.

Способи задання множин:

- переліком елементів множини;
- характеристичною властивістю, тобто властивістю, яку мають елементи цієї множини й лише вони. Характеристична властивість може бути записана рівнянням, нерівністю тощо;
- породжуючою процедурою. При цьому способі спочатку задають вихідні елементи множини, а потім формулюють правила, як із вихідних елементів побудувати інші елементи цієї множини.

Множина може взагалі не містити елементів. Така множина називається *порожньою (пустою)* і позначається символом $\emptyset$.

Дві множини називаються *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Рівність множин A та B символічно позначається $A=B$. Для доведення рівності двох множин потрібно показати, що кожен елемент першої множини належить другій і, навпаки, що кожен елемент другої множини належить першій:

$$A = B \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

Множина A називається *підмножиною* множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A є елементом множини B :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B). \quad (1)$$

Означення рівності множин, ураховуючи співвідношення (1), можна записати:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \text{ – принцип подвійного включення.}$$

Множина, яка складається з усіх підмножин заданої множини A , називається *булеаном* цієї множини й позначається $B(A)$. Сама множина A і порожня множина називаються *невласними* підмножи-

нами множини A , всі інші – *власними* підмножинами. Можна довести, що множина, яка складається з n -елементів, має 2^n підмножин.

Усі множини, які розглядають, є підмножинами деякої множини, яку називають *універсальною* множиною. Універсальну множину позначають через U .

Нехай A і B деякі множини.

- *Об'єднанням* двох множин A і B називається множина $A \cup B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній із цих множин, тобто $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.
- *Переріз*ом (перетином) множин A і B називається множина $A \cap B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B , тобто $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
- *Різницею* множин A і B називається множина $A \setminus B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B , тобто $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- *Симетричною різницею* множин A і B називається множина $A \Delta B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B , й усіх елементів B , які не належать множині A , та яка не містить інших елементів, тобто $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- *Доповненням* $\bar{A}$ множини A називається множина $U \setminus A$, тобто $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$.

Властивості операцій над множинами:

1. Ідемпотентність: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
2. Комутативність: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
3. Асоціативність: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. Дистрибутивність:
 $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$ – перший дистрибутивний закон;
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – другий дистрибутивний закон.
5. Закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
6. Закони поглинання: $A \cap (B \cup A) = A$; $A \cup (B \cap A) = A$.
7. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 $A \cup U = U$, $A \cap U = A$;
 $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
 $\bar{\bar{U}} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = U$.

Сукупність булеану множини з визначеними на ньому операціями об'єднання, перерізу, доповнення називається *алгеброю множин*.

Нехай $F(X_1; X_2; \dots; X_n)$ вираз побудований з множин $X_1; X_2; \dots; X_n$ за допомогою операцій об'єднання, перерізу й доповнення.

Двоїстим до F називається вираз: $F^*(X_1; X_2; \dots; X_n) = \overline{F(\overline{X_1}; \overline{X_2}; \dots; \overline{X_n})}$.

Теорема (принцип двоїстості). Якщо вирази $F(X_1; X_2; \dots; X_n)$ та $G(X_1; X_2; \dots; X_n)$, які побудовані лише з операцій об'єднання, перерізу, доповнення, тотожно рівні, то двоїсті до них вирази $F^*(X_1; X_2; \dots; X_n)$ та $G^*(X_1; X_2; \dots; X_n)$ також рівні.

Зауваження: для спрощення запису формул прийнято такі узгодження:

- операцію перерізу вважати старшою за об'єднання;
- якщо знак доповнення належить до виразу, то цей вираз у дужки не беруть;
- знак перерізу можна не писати.

Приклади

1. Чи є рівними множини:

а) $A = \{x : (x - 2)(x - 3) = 0\}$, $B = \{2, 3\}$,

б) $A = \{\{2, 3\}\}$, $B = \{2, 3\}$?

Розв'язання

а) оскільки коренями рівняння $(x-2)(x-3) = 0$ є числа 2 та 3, то $A = B$;

б) у цьому разі $A \neq B$, бо множина A – одноелементна множина, що містить свій єдиний елемент $\{2, 3\}$, а множина B – два елементи 2 й 3.

2. Знайти булеан множини $M = \{a, b, c\}$.

Розв'язання

$B(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.

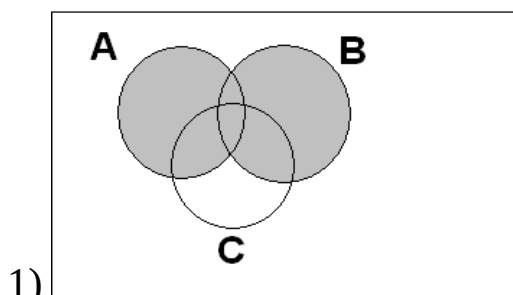
3. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$.

Розв'язання

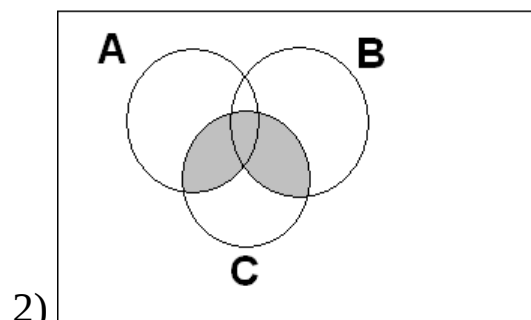
$A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$. $A \Delta B = \{1, 3\}$.

4. Проілюструвати справедливість першого дистрибутивного закону $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$ на діаграмах Венна.

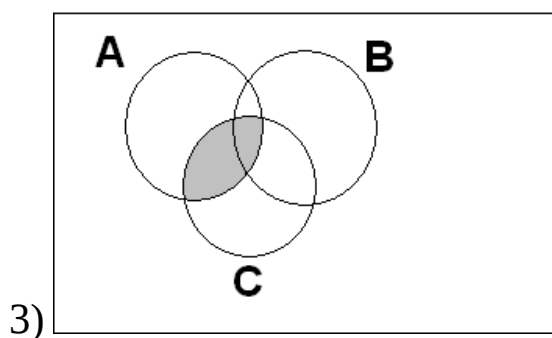
Розв'язання



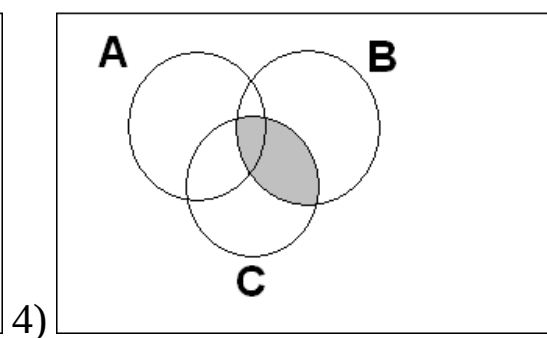
$$A \cup B$$



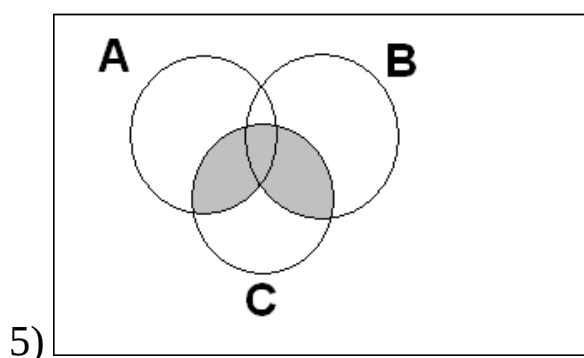
$$(A \cup B) \cap C$$



$$A \cap C$$



$$B \cap C$$



$$A \cap C \cup B \cap C$$

Висновок: оскільки на діаграмах 2 і 5 заштриховано однакові фігури, то рівність виконується.

5. Довести дистрибутивну властивість $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$ на основі принципу подвійного включення.

Розв'язання

1. Покажемо, що $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cap C \cup B \cap C$.

Візьмемо довільне $x \in (A \cup B) \cap C$. За означеннями операцій перерізу та об'єднання отримаємо $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C)$. За властивістю дистрибутивності $(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$, тобто $(x \in (A \cap C)) \vee (x \in (B \cap C))$. Звідси $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, що й треба було довести.

2. Покажемо, що $(A \cap C \cup B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.

Візьмемо довільне $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. За означеннями об'єднання та перерізу множин, матимемо $(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$. Використовуючи дистрибутивну властивість, отримаємо $(x \in A \vee B) \wedge (x \in C)$.

Звідси, $x \in (A \cup B) \cap C$, що й треба було довести.

Отже, на основі принципу подвійного включення рівність виконується.

6. Спростити: $(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D)$.

Розв'язання

Послідовно застосовуючи властивості операцій над множинами, маємо $(A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap D) = (A \cap B \cap C \cap \bar{D}) \cup ((\bar{A} \cup \bar{B} \cup D) \cap C) = ((A \cap B \cap \bar{D}) \cup (\overline{A \cap B \cap \bar{D}})) \cap C = U \cap C = C$.

Відповідь: C.

2.2. Прямий добуток множин. Бінарні відповідності

Основні теоретичні відомості

Упорядкованою парою називається двоелементна множина, у якій указано порядок слідування елементів. Позначається $(a; b)$, a – перша компонента, b – друга компонента.

Прямим (декартовим) добутком множин A й B називається множина всіх впорядкованих пар, перша компонента яких належить множині A , друга – B . Позначається $A \times B$, тобто

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Декартів добуток природно узагальнюється на випадок довільної скінченної сукупності множин:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Набір $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ називають *кортежем*, *вектором* або *впорядкованим набором*. Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ однакової довжини вважаються рівними тоді й тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати. Множину $A \times A \times \dots \times A$ називають n -м *декартовим (прямим) степенем множини A* і позначають A^n .

Відповідністю між множинами A та B називається будь-яка підмножина прямого добутку цих множин. Відповідності позначаються малими буквами грецького алфавіту: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ й символічно записують: $\alpha \subset A \times B$ або $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Множина A називається *множиною відправлення*, B – *прибуття*, а множини A і B називаються *базовими*.

Якщо $(a,b) \in \alpha$, то кажуть, що елемент b відповідає елементу a при відповідності α . Символічно це записують так: $(a,b) \in \alpha$ або $a \alpha b$.

Множина всіх перших компонент відповідності α називається *областю визначення* ($Dom \alpha$). Множина всіх других компонент – *областю значень* ($Im \alpha$).

Образом $a \in A$ називається множина всіх $b \in B$, для яких $(a,b) \in \alpha$. Прообразом елемента $b \in B$ називається множина всіх $a \in A$, для яких $(a,b) \in \alpha$. Позначається так: образ $\alpha(a)$, прообраз $\alpha^{-1}(b)$.

Приклади

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Обчислити $A \times B$.

Розв'язання

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

2. На множинах $A = \{1; 7; 8; 9\}$ та $B = \{5; 6; 10\}$ задана відповідність $\alpha = \langle a > b \rangle$. Задати цю відповідність парами та знайти область визначення $Dom \alpha$ та область значень $Im \alpha$.

Розв'язання

$$\alpha = \{(7; 5); (7; 6); (8; 5); (8; 6); (9; 5); (9; 6)\}, Dom \alpha = \{7; 8; 9\}, Im \alpha = \{5; 6\}.$$

3. На множинах $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{3, 4\}$ задана відповідність α парами так: $\alpha = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$. Задати цю відповідність матрицею, графом і графіком.

Розв'язання

Матричний спосіб задання відповідностей ґрунтується на поданні відповідності α прямокутною таблицею (матрицею), яка складається з нулів та одиниць, у якій рядки нумеруються елементами множини A , стовпці – елементами множини B . На перетині i -го рядка та j -го стовпця буде 1 тоді й тільки тоді, якщо $(a_i b_j) \in \alpha$, 0 – якщо $(a_i b_j) \notin \alpha$.

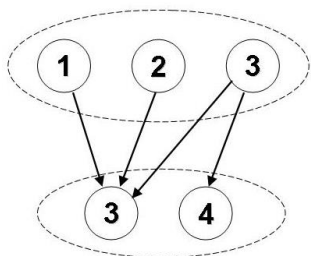
A \ B	3	4
	1	0
1	1	0
2	1	0
3	1	1

– матриця відповідності α .

Графом називається множина точок (*вершини графа*) і ліній (*ребра графа*), які сполучають певні вершини (див. розділ 4).

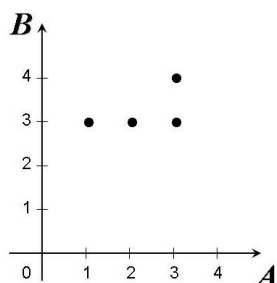
Для побудови графів відповідностей в одному рядку розміщують точки, позначені елементами множини A , у другому – точки, позначені елементами множини B .

чені елементами множини B . Із точки a_i першого рядка проводимо стрілку в точку b_j другого рядка тоді й тільки тоді, коли $(a_i b_j) \in \alpha$.



— граф відповідності α .

Графіком можна задавати відповідності $\alpha \subset A \times B$ у разі, якщо елементам множин A та B природно поставити у відповідність точки на числовій осі. Тоді множина A задається як підмножина осі Ox , множина B — як підмножина осі Oy , елементам відповідності α зіставляються точки на координатній площині.



— графік відповідності α .

4. На множинах $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ задана відповідність β ($\beta \subset \hat{A} \times \hat{A}$) характеристичною властивістю $\beta = \{x: y\}$. Задати цю відповідність переліком елементів.

Розв'язання

Із прямого добутку множин $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ вибираємо впорядковані пари, у яких перша компонента ділиться націло на другу. Маємо $\beta = \{(3, 3)\}$.

Відповідь: $\beta = \{(3, 3)\}$.

2.3. Типи відповідей. Функціональна відповідність. Відображення

Основні теоретичні відомості

Порожня відповідність $\alpha = \emptyset$. Матриця такої відповідності складається лише з нулів, а граф — лише з вершин.

Повна відповідність $\alpha = \hat{A} \times \hat{A}$. Матриця такої відповідності складається лише з одиниць, а у графі відповідності від кожного елемента першої множини йдуть стрілки до кожного елемента другої множини.

Відповідність $f \subseteq A \times B$ називається *функціональною*, якщо її елементи (впорядковані пари) мають різні перші координати, тобто

кожному елементові $a \in A : (a, b) \in f$ відповідає тільки один елемент $b \in B$.

Якщо f – функція з A в B , то кажуть, що функція має тип $A \rightarrow B$ і позначають $f: A \rightarrow B$ або $A \xrightarrow{f} B$.

Усюди визначена функціональна відповідність $f \subseteq A \times B$ називається *відображенням* A в B . Відображення типу $A \rightarrow A$ називають *перетвореннями* множини A .

Теорема. Нехай множини X та Y містять відповідно n та m елементів. Тоді кількість усіх можливих відображень множини X у множину Y дорівнює m^n .

Відображення f називається *сюр'єктивним* (сюр'єкцією), або відображенням на множину B , якщо $f(A) = B$.

Відображення f називається *ін'єктивним* (ін'єкцією) відображенням, якщо різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B .

Відображення, яке є одночасно сюр'єктивним і ін'єктивним, називається *бієктивним* відображенням, або *бієкцією* (взаємно однозначним відображенням).

Приклади

1. На множинах $A = \{1, 2\}$ та $B = \{a, b\}$ задано відображення $\varphi: A \rightarrow B$. Визначити ці відображення за допомогою таблиць.

Розв'язання

Усіх можливих відображень $\varphi: A \rightarrow B \in 2^2 = 4$. Вони задані таблицями:

1	2
a	a

1	2
b	b

1	2
a	b

1	2
b	a

2. Чи є відображення $f: N \rightarrow N$, для якого $f(n) = n^3 + 1$, ін'єктивним, сюр'єктивним?

Розв'язання

Відображення $f: N \rightarrow N$, для якого $f(n) = n^3 + 1$, є ін'єктивним, бо для довільних $x_1, x_2 \in N: x_1 \neq x_2$ випливає $f(x_1) \neq f(x_2)$. Воно не є сюр'єктивним, бо $Im f \neq N$.

Відповідь: ін'єктивне, але не сюр'єктивне.

2.4. Операції над відповідностями

Основні теоретичні відомості

Оскільки відповідності є множинами, то до відповідностей можуть бути застосовані всі відомі теоретико-множинні операції: об'єднання, переріз, різниця, доповнення тощо.

Доповненням відповідності α називається така відповідність α' , що $\alpha \cup \alpha' = A \times B$ і $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$.

Над відповідностями можна виконувати дві специфічні операції: операцію композиції та операцію обертання.

Композицією (суперпозицією, добутком) двох відповідностей α і β ($\alpha \subset A \times B$, $\beta \subset B \times C$) називається відповідність γ ($\gamma \subset A \times C$), яка складається з тих пар $(a, c) \in \gamma$, для яких $\exists b \in B : (a, b) \in \alpha \wedge (b, c) \in \beta$.

Композицію можна розглядати лише тих відповідностей, у яких множина прибуття першої збігається з множиною відправлення другої.

Оберненою до відповідності α називають відповідність α^{-1} , яка складається тільки з тих пар (y, x) , для яких $(x, y) \in \alpha$.

Можна показати, що

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$$

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Композиція двох функціональних відповідностей є відповідність функціональна.

Приклади

1. Дано $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3, 4\}$. На прямому добутку множин $A \times B$ задано відповідності $\alpha \subset A \times B$ та $\beta \subset A \times B$. Знайти $\alpha \cap \beta, \alpha \cup \beta, \alpha \setminus \beta, \alpha^{-1}$ та доповнення α' відповідності α .

Розв'язання

$$\alpha \cap \beta = \{(1; 3), (2; 4)\}, \quad \alpha \cup \beta = \{(1; 3), (1; 4), (2; 4), (2; 3), (3; 3)\},$$

$$\alpha \setminus \beta = \{(1; 4)\}, \quad \alpha^{-1} = \{(3; 1); (4; 1); (4; 2)\}$$

Доповненням відповідності α буде відповідність $\alpha' = \{(2; 3); (3; 3); (3; 4)\}$.

2. Нехай задано множини $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 1, 2\}$. На множинах A та B задано відповідність $\alpha = \{(1; 1), (1; 4), (2, 3), (3, 1) (3, 4)\}$, на множинах B та C відповідність $\beta = \{(1; 0), (2; 0), (3, 1), (3, 2) (4, 1)\}$. Знайти композицію $\alpha \circ \beta$.

Розв'язання

Виберемо впорядковані пари з відповідностей α та β такі, що другий елемент пари з α збігається з першим елементом пари з β . Наприклад, пари $(2; 3) \in \alpha$ та $(3; 1) \in \beta$ породжують пару $(2; 1) \in \alpha \circ \beta$.

Виконуючи описані дії, отримаємо: $\alpha \circ \beta = \{(1;0), (1;1), (2;1), (2;2), (3;0), (3;1)\}$.

Відповідь: $\alpha \circ \beta = \{(1;0), (1;1), (2;1), (2;2), (3;0), (3;1)\}$.

3. Довести, що композиція двох функціональних відповідностей є відповідність функціональна.

Доведення

Нехай $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times Z$ – дві функціональні відповідності. Покажемо, що композиція $f \circ g$ також функціональна відповідність, тобто кожному елементу $x \in X$ відповідає не більше як один елемент із множини Z .

Припустимо від супротивного. Нехай елементу $x \in X$ відповідають два елементи $z_1 \in Z$ і $z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$. Оскільки розглядається композиція f і g , то: $\exists y_1 \in Y (x, y_1) \in f$ і $(y_1, z_1) \in g$, тобто $f(x) = y_1$ і $g(y_1) = z_1$.

Аналогічно, за означенням композиції:

$\exists y_2 \in Y (x, y_2) \in f$ і $(y_2, z_2) \in g$, тобто $f(x) = y_2$ і $g(y_2) = z_2$.

Оскільки f – функціональна відповідність, тому

$(f(x) = y_1 \text{ і } f(x) = y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 = y$.

Аналогічно g – функціональна відповідність, тому

$(g(y_1) = z_1 \text{ і } g(y_2) = z_2) \Rightarrow (g(y) = z_1 \text{ і } g(y) = z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.

Отримана суперечність. Це означає, що припущення не правильне, а тому композиція двох функціональних відповідностей є відповідність функціональна.

2.5. Відношення на множинах. Типи відношень.

Відношення еквівалентності та порядку

Основні теоретичні відомості

Відношенням називається відповідність між елементами однієї і тієї ж множини.

Бінарне відношення α , задане на множині A , називається на цій множині:

- *рефлексивним*, якщо $\forall a \in A: a\alpha a$;
- *антирефлексивним*, якщо $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$;
- *нерефлексивним*, якщо $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$;
- *симетричним*, якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$;
- *антисиметричним*, якщо $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)$;
- *асиметричним*, якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow \overline{b\alpha a}$;
- *транзитивним*, якщо $\forall a, b, c \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha c) \Rightarrow (a\alpha c)$.

Нехай множина X має n елементів. Тоді число усіх бінарних відношень, які можна означити на множині X , дорівнює 2^{n^2} , рефлексивних – 2^{n^2-n} , симетричних – $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Бінарне відношення α , задане на множині A , називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне, транзитивне. Елементи a і b називаються *еквівалентними*, якщо $a\alpha b$ (позначається $a \sim b$).

Класом еквівалентності, породженим елементом a , називається множина всіх елементів множини A , які еквівалентні елементу a (символічно – a/α). Множина усіх класів еквівалентності за відношенням еквівалентності α називається *фактор-множиною множини A* і позначається A/α .

Множина $\mathcal{A}$ непорожніх підмножин множини A називається *розбиттям множини A* на класи, якщо:

- 1) $\forall X, Y \subset \mathcal{A}: X=Y$ або $X \cap Y = \emptyset$;
- 2) $\cup X = A, X \subset \mathcal{A}$.

Теорема. *Фактор-множина множини A за відношенням еквівалентності α утворює розбиття множини A і, навпаки, якщо $\mathcal{A}$ розбиття множини A , то існує відношення еквівалентності α на множині A таке, що $\mathcal{A} = A/\alpha$.*

Відношення α , задане на множині A , називається *відношенням порядку*, якщо воно антисиметричне і транзитивне.

Відношення α , задане на множині A , називається *відношенням часткового (нестрогого) порядку*, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне. Множина A , на якій задано відношення часткового порядку, називається *частково впорядкованою множиною*.

Елементи $a, b \in A$ називаються *порівнюваними* за відношенням α , якщо виконується $a\alpha b$ або $b\alpha a$.

Частково впорядкована множина A , у якій будь-які два елементи є порівнюваними між собою, називається *лінійно впорядкованою множиною (ланцюгом)*. Відповідне відношення α , задане на лінійно впорядкованій множині, називається *лінійним (досконалим) порядком*.

Приклади

1. Числа a і b називаються порівнюваними за модулем m , якщо їх різниця ділиться на m . Символічно це записується так: $a \equiv b \pmod{m}$, тобто $(a \equiv b \pmod{m}) \Leftrightarrow ((a-b):m)$.

Довести, що відношення «порівнювання за модулем m » є відношенням еквівалентності на множині цілих чисел.

Розв'язання

Перевіримо виконання рефлексивності, симетричності та транзитивності відношення.

1. Рефлексивність: $\forall a \in Z : a \equiv a \pmod{m}$, бо $(a - a) : m$.

2. Симетричність: $\forall a, b \in Z : (a \equiv b \pmod{m}) \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$, бо $(a - b) : m \Rightarrow (b - a) : m$.

3. Транзитивність:

$\forall a, b, c \in Z : (a \equiv b \pmod{m}) \text{ і } b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow (a \equiv c \pmod{m})$, бо $(a - b) : m$ і $(b - c) : m$, тоді $a - c = (a - b) + (b - c) \Rightarrow (a - c) : m$.

Отже, задане відношення є відношенням еквівалентності.

2. Побудувати усі можливі розбиття множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання

$\mathcal{M}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ – поелементне розбиття;

$\mathcal{M}_2 = \{\{a, b, c\}\}$ – ціле розбиття;

$\mathcal{M}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$;

$\mathcal{M}_4 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$;

$\mathcal{M}_5 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$.

2.6. Ізоморфізм частково впорядкованих множин

Основні теоретичні відомості

Дві частково впорядковані множини A і B називаються *ізоморфними*, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність, яка зберігає відношення порядку.

Скінченну частково впорядковану множину M зручно зображати у вигляді *діаграми (структурного графа)*, вершини якого відповідають елементам множини M . З вершини a проводиться стрілка у вершину b , якщо $a \leq b$ і не існує такого c , що $a \leq c$ і $c \leq b$. Стрілки (петлі), що відповідають діагональним парам (a, a) , не проводяться.

Приклади

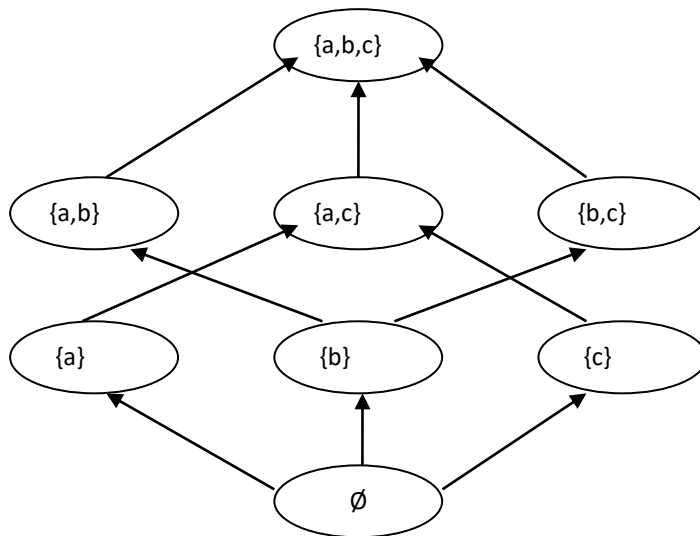
1. Побудувати діаграму (структурний граф) для

а) булеана $B(M)$ множини $M = \{a, b, c\}$ з відношенням включення « $\subseteq$ »;

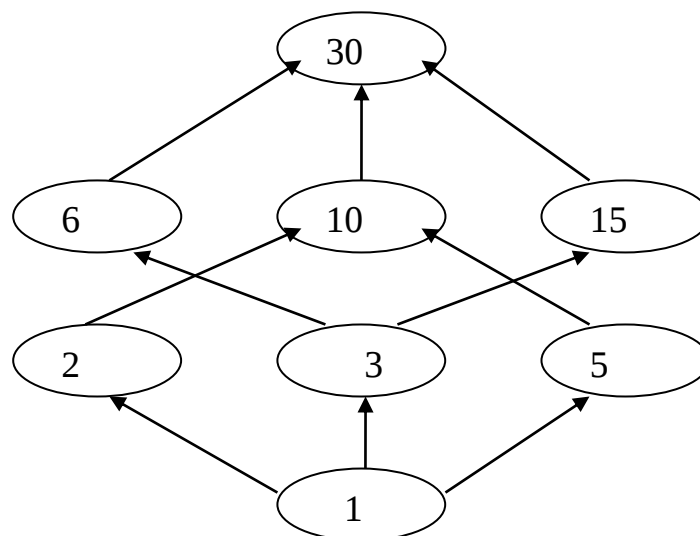
б) частково впорядкованої множини $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ із відношенням $\alpha =$ «ділитися націло».

Розв'язання

а) Оскільки булеан множини $M : B(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$, то структурний граф матиме вигляд:



б)



2. Довести, що скінченні лінійно впорядковані множини, які мають однакову кількість елементів, ізоморфні.

Доведення

Покажемо спочатку, що скінченна лінійно впорядкована множина завжди має найменший (найбільший) елемент.

Нехай задана лінійно впорядкована множина $(A, \leq)$, яка має m елементів.

Доведемо, що множина A має найменший елемент $a_1 \in A$.

Якщо a_1 не є найменшим елементом, то існує $a_2 \in A : a_2 \leq a_1$. Якщо a_2 не є найменшим елементом, то існує $a_3 \in A : a_3 \leq a_2$ і т. д.

Принаймні за m кроків буде знайдено найменший елемент.

Аналогічні міркування і для найбільшого елемента.

Нехай $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ – лінійно впорядковані скінченні множини, які мають по m елементів.

У множинах A і B виділимо найменші елементи a_1 і b_1 . У множинах $A \setminus \{a_1\}$, $B \setminus \{b_1\}$ знову виділимо найменші елементи, позначимо їх a_2 та b_2 і т. д.

Через m кроків отримаємо $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ та $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$.

Між виділеними елементами встановимо взаємно однозначну відповідність: $a_1 \leftrightarrow b_1, a_2 \leftrightarrow b_2, \dots, a_m \leftrightarrow b_m$.

Отже, між множинами A і B встановлено ізоморфізм.

2.7. Потужність множини. Злічені та незлічені множини

Основні теоретичні відомості

Дві множини називаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Рівнопотужність множин A та B позначають $A \sim B$.

Множина, яка еквівалентна множині натуральних чисел, називається *зліченною* (зчисленною).

Властивості злічених множин:

- будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною множиною;
- об'єднання скінченної сукупності злічених множин є зліченною множиною;
- об'єднання зліченної сукупності злічених множин є множина зліченна.

Числова множина W називається *щільною*, якщо для будь-якої пари чисел $a, b \in W$ ($a < b$) завжди існує число $c \in W$ таке, що $a < c < b$.

Факт існування множин, які не є зліченими (*незлічених множин*), вперше встановив Георг Кантор (Gantor Georg) за допомогою діагонального методу, який він запропонував.

Теорема. Множина всіх дійсних чисел з інтервалу $(0, 1)$ незліченна.

Множина, рівнопотужна множині всіх дійсних чисел з інтервалу $(0, 1)$, називається *континуальною*, або множиною потужності континуум.

Кардинальним числом (позначається $|A|$, $\overline{A}$ або $\text{Card } A$) називають деякий об'єкт для позначення потужності будь-якої множини із сукупності множин, рівнопотужних множині A . Можна вважати, що кардинальне число є узагальненням поняття числа елементів множини. Для скінченних множин це ще один термін для позначення рівнопотужності множин.

Кардинальне число множини N усіх натуральних чисел, а значить, і будь-якої зчисленної множини позначають через $\aleph_0$ (читається – «алеф-нуль»). Кардинальне число континуальних множин позначають через c або $\aleph_1$ («алеф-один»).

Теорема. *Потужність множини підмножин будь-якої непорожньої множини A більша, ніж потужність даної множини A : $|B(A)| > |A|$.*

Наслідок. Не існує множини, яка має найбільшу потужність.

Приклади

1. Чи є рівнопотужною:

а) множина N натуральних чисел множині $S = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$, яка складається з квадратів натуральних чисел;

б) множина Z всіх цілих чисел множині P усіх парних чисел?

Розв'язання

а) Множина N натуральних чисел рівнопотужна множині $S = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$, яка складається з квадратів натуральних чисел. Необхідна взаємно однозначна відповідність встановлюється за законом (n, n^2) , $n \in N, n^2 \in S$.

б) Множина Z всіх цілих чисел рівнопотужна множині P усіх парних чисел. Взаємно однозначна відповідність встановлюється таким чином: $(n, 2n)$, $n \in Z, 2n \in P$.

Відповідь: а) рівнопотужна, б) рівнопотужна.

2. Довести, що з будь-якої нескінченної множини M можна виділити зліченну підмножину A так, що різниця $M \setminus A$ також буде нескінченною.

Доведення

Нехай M – нескінченна множина. Виділимо з неї два різні елементи a_1 і b_1 . $M_1 = M \setminus \{a_1, b_1\}$. Множина M_1 – також нескінченна. Виділимо з неї два різні елементи a_2 та b_2 . Отримаємо множину $M_2 = M_1 \setminus \{a_2, b_2\}$.

Продовжуючи цей процес нескінченно, ми вилучимо із множини M дві зліченні множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ та $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$.

Множина B – зліченна, а тому нескінченна.

Отже, якщо з нескінченної множини M вилучити лише одну зліченну множину A , то отримана при цьому різниця $M \setminus A$ буде містити нескінченну множину B .

Отже, вона нескінченна.

3. Довести, що множина раціональних чисел Q зліченна.

Доведення

Множину Q можна подати як об'єднання таких злічених множин:

$A_1 = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ – усі цілі числа (або дроби виду $\frac{n}{1}$, $n \in \mathbb{Z}$),

$A_2 = \{\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\}$ – усі дроби виду $\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$A_3 = \{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, -\frac{3}{3}, \dots\}$ – усі дроби виду $\frac{n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$,

.....

$A_k = \{\frac{0}{k}, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, -\frac{2}{k}, \frac{3}{k}, -\frac{3}{k}, \dots\}$ – усі дроби виду $\frac{n}{k}$, $n \in \mathbb{Z}$,

.....

Оскільки об'єднання зліченної сукупності злічених множин є множина зліченна, то Q – зліченна.

2.8. Основні поняття теорії алгебраїчних структур

Основні теоретичні відомості

Бінарною операцією, заданою на множині A , називається правило (закон), за яким двом елементам із множини A ставиться у відповідність елемент цієї ж множини.

Бінарна операція « $*$ » на множині A називається:

- *комутативною*, якщо для будь-яких $a, b \in A$: $a * b = b * a$;
- *асоціативною*, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *дистрибутивною відносно додавання*, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$: $(a+b) * c = a * c + b * c$.

Елемент Θ називається *нейтральним* відносно бінарної операції « $*$ », якщо для будь-якого $a \in A$: $a * \Theta = \Theta * a = a$.

Елемент b називається *симетричним* відносно операції « $*$ » до елемента a , якщо $a * b = \Theta$.

Відносно операції додавання симетричний елемент позначається $-a$ і називається *протилежним*, відносно операції множення симетричний елемент позначається $\frac{1}{a}$ і називається *оберненим*. До нейтрального елемента Θ симетричним є сам нейтральний елемент.

Нехай на множині X задані бінарні операції $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Множина $\Phi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ називається *сигнатурою* множини X .

Множина разом із її сигнатурою називається *алгеброю*. Залежно від операцій, визначених на множині X , виділяють частинні випадки алгебр.

Алгебра з однією операцією називається *групоїдом* (X, ψ) .

Групоїд, у якому операція асоціативна, називається *півгрупою*.

Півгрупа, яка містить нейтральний елемент, називається *моноїдом*.

Моноїд називається *групою*, якщо для будь-якого елемента цієї множини існує симетричний елемент.

Якщо операція « $*$ » є операцією додавання, то група називається *адитивною*, якщо « $*$ » – операція множення, то група називається *мультиплікативною*.

Якщо в алгебрі визначено дві бінарні операції, то приходимо до поняття кільця і поля.

Дві групи $(G, *)$ та $(H, \circ)$ називаються *ізоморфними*, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність ψ таку, що для довільних $a, b \in G$ виконується умова: $\psi(a * b) = \psi(a) \circ \psi(b)$.

Приклади

1. Довести, що бінарна операція може мати лише один нейтральний елемент.

Доведення

Припустимо від супротивного, що відносно бінарної операції « $*$ » існує два нейтральні елементи $\Theta \neq \Theta'$.

Тоді $\Theta = \Theta * \Theta' = \Theta'$, що й потрібно було довести.

2. Довести ізоморфізм алгебри $(R, +)$, тобто множини дійсних чисел із визначеною операцією додавання, та $(R^+, \times)$ – множини додатних дійсних чисел із операцією множення.

Розв'язання

Встановимо між множинами R та R^+ взаємно однозначну відповідність: $\forall x \in R : \psi(x) = 2^x$.

Тоді $\forall a, b \in R$ виконується $\psi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \times 2^b = \psi(a) \times \psi(b)$.

Отже, множини R та R^+ ізоморфні.

Запитання і завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Що таке множина?

2. Які існують способи задання множин?
3. У яких випадках можна говорити, що множини A та B рівні?
4. Які основні операції виконуються над множинами?
5. Що таке універсальна множина?
6. Назвіть основні властивості операцій над множинами.
7. Що таке підмножина?
8. Що таке булеан деякої множини A ?
9. Множина M складається з n елементів. Скільки існує різних підмножин множини M ?
10. У чому полягає відмінність між поняттями кортеж та множина?
11. Що таке прямий добуток множин?
12. Чи є операція прямого добутку множин комутативною?
13. Що таке відповідність?
14. Які існують способи задання відповідностей?
15. Що таке бінарне відношення?
16. Що таке сюр'єкція, ін'єкція та бієкція?
17. Які операції виконуються над відповідностями?
18. Назвіть основні властивості бінарних відношень.
19. Скільки можна означити бінарних відношень на множині, яка містить n елементів?
20. Яке відношення називається рефлексивним, антирефлексивним, не рефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним?
21. Скільки рефлексивних відношень можна означити на множині, яка містить n елементів?
22. Скільки симетричних відношень можна означити на множині, яка містить n елементів?
23. Що таке відношення еквівалентності?
24. Які особливості матриці відношення еквівалентності?
25. Що таке клас еквівалентності, породжений елементом a ?
26. Дайте означення фактор-множини.
27. Сформулюйте теорему про зв'язок між фактор-множиною і розбиттям множини.
28. Що таке відношення порядку, нестрогого порядку, строгого порядку?
29. Які особливості матриці відношення порядку (нестрогого порядку, строгого порядку)?

30. Дайте означення ізоморфних частково впорядкованих множин.
31. Що таке рівнопотужні множини ?
32. Яка множина називається зліченною?
33. Сформулюйте властивості злічених множин.
34. За допомогою якого методу Г. Кантору вдалося довести існування незлічених множин?
35. Як називається множина, рівнопотужна множині всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$?
36. Що таке кардинальне число?
37. Як позначають кардинальне число множини N усіх натуральних чисел?
38. Як позначають кардинальне число континуальних множин?
39. Чи існує найбільше кардинальне число?
40. Що таке бінарна операція?
41. Чи є бінарною операція ділення на множині цілих чисел?
42. Дайте означення комутативної, асоціативної та дистрибутивної бінарної операції.
43. Який елемент називається нейтральним відносно бінарної операції?
44. Скільки нейтральних елементів може мати бінарна операція?
45. Який елемент називається симетричним до елемента a відносно бінарної операції?
46. Який елемент є симетричним до нейтрального елемента?
47. Що таке алгебра?
48. Дайте означення групи.
49. Що таке групоїд?
50. Дайте означення підгрупи.
51. Що таке моноїд?
52. Які групи називаються ізоморфними?

Тести

Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Множина, яка не містить елементів, називається:
 - 1) скінченною;
 - 2) порожньою;
 - 3) універсальною;
 - 4) булеаном;

- 5) предикатом.
2. Як задається множина переліком елементів?
- 1) перелічуються усі елементи множини у круглих дужках;
 - 2) перелічуються усі елементи у квадратних дужках;
 - 3) перелічуються усі елементи у фігурних дужках;
 - 4) перелічуються усі елементи у стовпчик;
 - 5) перелічуються перші три елементи у фігурних дужках.
3. Які з множин не є підмножинами множини $\{3, 5, 7, 9\}$?
- 1) $\{3, 5\}$;
 - 2) $\{\{3, 5\}, 7, 9\}$;
 - 3) $\{3, 5, 7, 9\}$;
 - 4) $\emptyset$;
 - 5) $\{3\}$.
4. Оберіть вираз, який відповідає означенню операції об'єднання множини A та множини B :
- 1) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
 - 2) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
 - 3) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
 - 4) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 - 5) $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
5. Оберіть вираз, який відповідає означенню операції перерізу множини A та множини B :
- 1) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
 - 2) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
 - 3) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
 - 4) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 - 5) $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
6. Оберіть вираз, який відповідає означенню операції симетричної різниці множини A та множини B :
- 1) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
 - 2) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
 - 3) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
 - 4) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 - 5) $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

7. Оберіть вираз, який відповідає означенню операції різниці множини A та множини B :
- 1) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
 - 2) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
 - 3) $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
 - 4) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 - 5) $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
8. Як називається операція над множинами A та B , якщо її результат складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B ?
- 1) об'єднанням множин A та B ;
 - 2) перерізом множин A та B ;
 - 3) різницею множин A та B ;
 - 4) різницею множин B та A ;
 - 5) симетричною різницею множин A та B .
9. Як називається операція над множинами A та B , якщо її результат складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B ?
- 1) об'єднанням множин A та B ;
 - 2) перерізом множин A та B ;
 - 3) різницею множин A та B ;
 - 4) різницею множин B та A ;
 - 5) симетричною різницею множин A та B .
10. Як називається операція над множинами A та B , якщо її результат складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із множин A та B ?
- 1) об'єднанням множин A та B ;
 - 2) перерізом множин A та B ;
 - 3) різницею множин A та B ;
 - 4) різницею множин B та A ;
 - 5) симетричною різницею множин A та B .
11. Множина A називається підмножиною множини B , якщо:
- 1) кожен елемент B є елементом множини A ;
 - 2) кожен елемент A є елементом множини B ;
 - 3) кожен елемент B є елементом множини A і, навпаки, кожен елемент A є елементом множини B ;

- 4) множина B містить елементи множини A ;
5) множина A містить елементи множини B .
- 12.** Оберіть множини, які є порожніми:
- 1) $\{\emptyset\}$;
 - 2) $\{x : x - \text{дільник числа } 100\}$;
 - 3) $\{x : x - \text{буква слова «математика»}\}$;
 - 4) $\{x : x - \text{розв'язок рівняння } \sin x = 1\}$;
 - 5) $\{x : x - \text{розв'язок рівняння } \sin x = 2\}$.
- 13.** Дві множини A та B називаються рівними, якщо вони складаються з:
- 1) упорядкованих пар;
 - 2) однакової кількості елементів;
 - 3) одних і тих же елементів;
 - 4) чисел;
 - 5) елементів універсальної множини.
- 14.** Множина, елементами якої є всі підмножини множини A , називається:
- 1) підмножиною множини A ;
 - 2) універсальною множиною;
 - 3) порожньою множиною;
 - 4) власною підмножиною множини A ;
 - 5) булеаном множини A .
- 15.** Оберіть із поданих назв законів алгебри множин той, який відповідає виразам $A \cup A = A$, $A \cap A = A$:
- 1) асоціативний закон;
 - 2) дистрибутивний закон;
 - 3) комутативний закон;
 - 4) закон ідемпотентності;
 - 5) закон поглинання.
- 16.** Оберіть із поданих назв законів алгебри множин той, який відповідає виразам $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$:
- 1) асоціативний закон;
 - 2) дистрибутивний закон;
 - 3) комутативний закон;
 - 4) закон ідемпотентності;
 - 5) закон поглинання.

- 17.** Оберіть із поданих назв законів алгебри множин той, який відповідає виразам $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$:
- 1) асоціативний закон;
 - 2) дистрибутивний закон;
 - 3) комутативний закон;
 - 4) закон ідемпотентності;
 - 5) закон поглинання.
- 18.** Оберіть вирази, які відповідають законам де Моргана:
- 1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
 - 2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
 - 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 - 4) $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
 - 5) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- 19.** Прямим добутком множин A та B називається:
- 1) множина спільних елементів A та B ;
 - 2) множина упорядкованих пар елементів $(a; b)$, де $a \in A, b \in B$;
 - 3) множина всіх упорядкованих пар елементів $(a; b)$, де $a \in A, b \in B$;
 - 4) множина всіх упорядкованих пар елементів $(a; b)$, де $a \in B, b \in A$;
 - 5) множина всіх упорядкованих пар елементів $(a; b)$, де $a \in A$.
- 20.** Оберіть вираз, який відповідає означенню операції декартового добутку множин A й B :
- 1) $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$;
 - 2) $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \notin B\}$;
 - 3) $A \times B = \{(a, b) : a \in A \vee b \in B\}$;
 - 4) $A \times B = \{(a, b) : a \notin A \wedge b \in B\}$;
 - 5) $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.
- 21.** Множини A й B подано кругами Ейлера (рис. 2.1). За допомогою операцій над множинами визначте, який із наведених виразів відповідає області **I**:

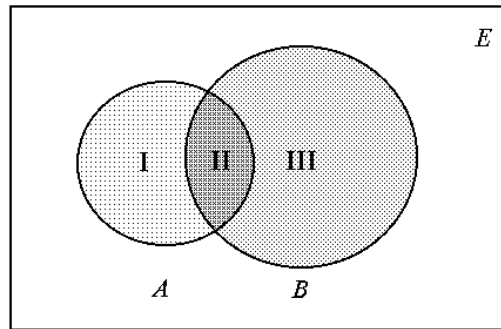


Рис. 2.1. Множини A й B

- 1) $A \setminus B$;
- 2) $A \cup B$;
- 3) $A \cap B$;
- 4) $B \setminus A$;
- 5) $A \setminus (B \cap A)$.

22. Множини A й B подано кругами Ейлера (рис. 2.1). За допомогою операцій над множинами визначте, який із наведених виразів відповідає області **II**:

- 1) $A \setminus B$;
- 2) $A \cup B$;
- 3) $A \cap B$;
- 4) $B \setminus A$;
- 5) $A \setminus (B \cap A)$.

23. Множини A й B подано кругами Ейлера (рис. 2.1). За допомогою операцій над множинами визначте, який із наведених виразів відповідає області **III**:

- 1) $A \setminus B$;
- 2) $A \cup B$;
- 3) $A \cap B$;
- 4) $B \setminus A$;
- 5) $A \setminus (B \cap A)$.

24. Бінарне відношення α , задане на множині A , називається на цій множині рефлексивним, якщо:

- 1) $\forall a \in A: a\alpha a$;
- 2) $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$;
- 3) $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$;
- 4) $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$;
- 5) $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)$.

25. Бінарне відношення α , задане на множині A , називається на цій множині антирефлексивним, якщо:
- 1) $\forall a \in A: a\alpha a$;
 - 2) $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 3) $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 4) $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$;
 - 5) $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)$.
26. Бінарне відношення α , задане на множині A , називається на цій множині симетричним, якщо:
- 1) $\forall a \in A: a\alpha a$;
 - 2) $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 3) $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 4) $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$;
 - 5) $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)$.
27. Бінарне відношення α , задане на множині A , називається на цій множині антисиметричним, якщо:
- 1) $\forall a \in A: a\alpha a$;
 - 2) $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 3) $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$;
 - 4) $\forall a, b \in A: a\alpha b \Rightarrow b\alpha a$;
 - 5) $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \Rightarrow (a = b)$.
28. Відношення α , задане на множині A , називається на цій множині відношенням еквівалентності, якщо воно:
- 1) симетричне й транзитивне;
 - 2) рефлексивне й транзитивне;
 - 3) рефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - 4) антирефлексивне, симетричне й транзитивне;
 - 5) рефлексивне, симетричне й транзитивне.
29. Відношення α , задане на множині A , називають відношенням часткового порядку, якщо воно:
- 1) рефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - 2) рефлексивне й транзитивне;
 - 3) рефлексивне, симетричне й транзитивне;
 - 4) антирефлексивне, антисиметричне й транзитивне;
 - 5) антисиметричне й транзитивне.
30. Відповідність $f \subseteq A \times B$ називається функціональною, якщо її елементи (впорядковані пари) мають:

- 1) різні перші координати;
- 2) різні другі координати;
- 3) однакові перші координати;
- 4) однакові другі координати;
- 5) різні перші та другі координати.

31. Зліченною множиною є:

- 1) множина всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,1)$;
- 2) множина всіх дійсних чисел із сегмента $[0,1]$;
- 3) об'єднання скінченної кількості скінченних множин;
- 4) будь-яка підмножина зліченної множини;
- 5) множина еквівалентна множині натуральних чисел.

32. Множина, рівнопотужна множині всіх дійсних чисел з інтервалу $(0, 1)$, називається:

- 1) зліченною;
- 2) континуальною;
- 3) скінченною;
- 4) порожньою;
- 5) впорядкованою.

33. Бінарна операція « $*$ » на множині A називається асоціативною, якщо:

- 1) $\exists a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$;
- 2) $\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$;
- 3) $\forall a, b, c \in A: (a + b) * c = a * c + b * c$;
- 4) $\exists a, b, c \in A: (a + b) * c = a * c + b * c$;
- 5) $\forall a, b \in A: a * b = b * a$.

34. Бінарна операція « $*$ » на множині A називається комутативною, якщо:

- 1) $\exists a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$;
- 2) $\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$;
- 3) $\forall a, b, c \in A: (a + b) * c = a * c + b * c$;
- 4) $\exists a, b, c \in A: (a + b) * c = a * c + b * c$;
- 5) $\forall a, b \in A: a * b = b * a$.

35. Множина разом із її сигнатурою називається:

- 1) геометрією;
- 2) алгеброю;
- 3) групоїдом;

- 4) групою;
- 5) півгрупою.

36. Алгебра з однією операцією називається:

- 1) півгрупою;
- 2) моноїдом;
- 3) групоїдом;
- 4) групою;
- 5) кільцем.

37. Відносно операції додавання симетричний елемент називається:

- 1) мультиплікативним;
- 2) нейтральним;
- 3) оберненим;
- 4) протилежним;
- 5) адитивним.

38. Відносно операції множення симетричний елемент називається:

- 1) мультиплікативним;
- 2) нейтральним;
- 3) оберненим;
- 4) протилежним;
- 5) адитивним.

Рівень 2

39. Знайдіть переріз множин A й B , якщо $A = \{x : 2 < x < 5\}$, $B = \{x : -2 \leq x < 3\}$.

- 1) $A \cap B = \{x : 2 < x < 5\}$;
- 2) $A \cap B = \{x : -2 < x < 3\}$;
- 3) $A \cap B = \{x : -2 < x < 5\}$;
- 4) $A \cap B = \{x : 2 < x < 3\}$;
- 5) $A \cap B = \{x : -2 < x < 2\}$.

40. Знайдіть прямий добуток множин $A = (2; 5)$ й $B = [3; 4)$:

- 1) $A \times B = \{(a, b) : (2 < a < 5) \wedge (3 < b < 4)\}$;
- 2) $A \times B = \{(2; 3), (2; 4), (5; 3), (5; 4)\}$;
- 3) $A \times B = \{(a, b) : (2 < a < 5) \wedge (3 \leq b < 4)\}$;
- 4) $A \times B = \{(2; 3), (2; 4)\}$;
- 5) $A \times B = \{a : (2 < a < 5) \wedge (3 \leq b < 4)\}$.

41. Знайдіть прямий добуток множин $A = \{2; 5\}$ та $B = \{3; 4\}$:

- 1) $A \times B = \{(a, b) : (2 < a < 5) \wedge (3 < b < 4)\};$
- 2) $A \times B = \{(2; 3), (2; 4), (5; 3), (5; 4)\};$
- 3) $A \times B = \{(a, b) : (2 < a < 5) \wedge (3 \leq b < 4)\};$
- 4) $A \times B = \{(2; 3), (2; 4)\};$
- 5) $A \times B = \{a : (2 < a < 5) \wedge (3 \leq b < 4)\}.$

42. На множині $A = \{2, 3, 4\}$ задане відношення α матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Задайте це відношення парами:}$$

- 1) $\alpha = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\};$
- 2) $\alpha = \{(2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3), (2, 4), (4, 4)\};$
- 3) $\alpha = \{(2, 3), (3, 2), (4, 2)\};$
- 4) $\alpha = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\};$
- 5) $\alpha = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}.$

43. Знайдіть найменше відношення, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$, яке містить відношення $\alpha = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, c), (d, b)\}$ та є одночасно рефлексивним і симетричним:

- 1) $\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, c), (d, b)\};$
- 2) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, c), (d, b)\};$
- 3) $\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, c), (d, b), (b, d)\};$
- 4) $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c), (d, b), (b, d)\};$
- 5) $\{(b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (c, d), (d, c), (d, b), (b, d)\}.$

44. Знайдіть найменше відношення, задане на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, яке містить відношення $\alpha = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ та є відношенням еквівалентності:

- 1) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\};$
- 2) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\};$
- 3) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (2, 2), (4, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\};$
- 4) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\};$
- 5) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}.$

45. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $\alpha = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Встановіть чи є це відношення відно-

шенням еквівалентності. Якщо ϵ , то знайдіть фактор-множину A/α .

1) $A/\alpha = \{\{1, 2\}; \{3\}\};$

2) $A/\alpha = \{\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}\};$

3) $A/\alpha = \{\{1, 2\}; \{3\}; \{4\}\};$

4) $A/\alpha = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}\};$

5) не ϵ відношенням еквівалентності.

46. Укажіть, які з відношень, заданих матрицями, ϵ відношеннями еквівалентності:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

47. Знайдіть переріз відношень $\alpha = \langle x \leq y \rangle$ та $\beta = \langle x : y \rangle$, які задані на множині $M = \{1, 2, 3\}$:

1) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\};$

2) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\};$

3) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\};$

4) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3)\};$

5) $\{(1, 1)\}.$

48. Знайдіть об'єднання відношень $\alpha = \langle x \leq y \rangle$ та $\beta = \langle x : y \rangle$, які задані на множині $M = \{1, 2, 3\}$:

1) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\};$

2) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\};$

3) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\};$

4) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (2, 3)\};$

5) $\{(1, 1)\}.$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Визначити множину, яка задана характеристичною властивістю:

а) $X = \{x : x - \text{цілий дільник числа } 6\};$

б) $X = \{x : x - \text{літера слова «математика»}\};$

в) $X = \{x : |x - 3| > 2\};$

- г) $X = \{x : |x - 1| < 2\}$.
2. Задати множину натуральних чисел породжуючою процедурою.
 3. Які з наведених нижче співвідношень хибні і чому?
 - а) $x \in \{3, v, x\}$;
 - б) $4 \in \{3, \{4, v, x\}, x\}$;
 - в) $\{3, v\} \subset \{\{3, v\}, v\}$.
 4. Які з поданих тверджень виконуються для довільних множин A , B та C ?
 - а) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;
 - б) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$.
 5. Знайти усі підмножини множин: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{a, v\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$.
 6. Чи пов'язані множини A та B відношенням включення? Якщо так, то вказати, яка з них є підмножиною іншої:
 - а) $A = \{a, v, c\}$; $B = \{v, c, d, k\}$;
 - б) $A = \{a, v, c\}$; $B = \{v, c, d, a\}$;
 - в) $A = \{a, (v, c), d\}$; $B = \{v, (c, d), k\}$;
 - г) $A = \{1, 3\}$, $B = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$.
 7. У яких відношеннях перебувають між собою множини A , B , C ?
 - а) $A = \{1, 3\}$; $B = \{x : x - \text{ціле число}\}$; $C = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$;
 - б) $A = \{2, 5\}$; $B = \{x : x - \text{ціле число}\}$; $C = \{x : x^2 - 7x + 10 = 0\}$.
 8. Для множини перших 20 натуральних чисел записати такі її підмножини: A – парних чисел; B – непарних чисел; C – квадратів чисел; D – простих чисел. У яких відношеннях перебувають ці підмножини?
 9. Довести, що множина, яка складається з n елементів, має 2^n підмножин.
 10. Побудувати круги Ейлера для множин:
 - а) A – множина дерев в саду,
 B – множина фруктових дерев у цьому саду,
 C – множина яблунь у цьому саду,
 D – множина груш у цьому саду,
 L – множина лип у цьому саду;
 - б) A – множина чотирикутників,
 B – множина трапецій,
 C – множина паралелограмів,

D – множина прямокутників,
 E – множина ромбів,
 F – множина квадратів.

11. Нехай N – універсальна множина. Показати на діаграмах Ейлера переріз простих дільників чисел 210, 1122, 2002.
12. Нехай універсальна множина U – множина цілих чисел. Із яких елементів складається множина $M = A \cap B$, якщо A складається із чисел виду $4n$, а множина B – із чисел виду $3n$, де $n \in N$?
13. Чи існують підмножини A, B, C універсальної множини U , для яких одночасно мали б місце такі співвідношення:
 $C \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset, (A \cap B) \setminus C = \emptyset$?
14. Універсальна множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайти елементи множини $M = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, якщо:
 - а) $A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 4, 5\}$;
 - б) $A = \{2, 4, 5\}, B = \{1, 4\}$;
 - в) $A = \{1\}, B = \emptyset$;
 - г) $A = \{3, 4, 5\}, B = \{5\}$.
15. Нехай A – область визначення функції $y = 3^{\sqrt{-\sin^2 x}}$, B – область визначення функції $y = \sqrt{3-x}$, C – множина розв'язків нерівності $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. Знайдіть $A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A \setminus B, B \setminus C, A \setminus C$.
16. Довести або спростувати тотожності:
 - а) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
 - б) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
 - в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 - г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
 - д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
 - е) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
 - є) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
 - ж) $A \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
17. Чи існують множини A, B, C такі, що $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset$ і $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?
18. Нехай $A \subset C$ і $B \subset C$. Довести, що $A \cup B \subset C$ і $A \cap B \subset C$.
19. Задані множини $A = \{a, в, с\}; B = \{x, y\}; C = \{0, 1\}$. Знайти декартові добутки $A \times B \times C; C \times A \times B; C \times B \times A; A \times A \times A$.

20. Знайти декартовий добуток множин A і B та зобразити його у прямокутній системі координат, якщо:
- $A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 4\};$
 - $A = [1, 3]; B = [2, 4];$
 - $A = \{-1\}; B = (3, 4).$
21. Довести:
- $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2);$
 - $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C);$
 - $(\alpha \cup \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) \cup (\beta \circ \gamma);$
 - $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1};$
 - $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$
22. Дати геометричну інтерпретацію відношень:
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\};$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\};$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ або } 0 \leq y \leq 1\};$
 - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ і } 0 \leq y \leq 1\}.$
23. На множині $A = \{1, 2, 3\}$ задано відношення α . Задати його матрицею, якщо:
- $\alpha = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3)\};$
 - $\alpha = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 3)\};$
 - $\alpha = \{(1, 3); (3, 1)\}.$
24. Побудувати матрицю, граф і графік відповідності α , якщо:
- $A = \{1, 3, 4, 5\}; B = \{2, 7, 10\}; \alpha = \langle a + b < 11 \rangle.$
 - $A = \{1, 2, 3\}; B = \{1, 2, 7, 11\}; \alpha = \langle a \leq b \rangle.$
25. Відношення задане на множині $A = \{1, 2, 3\}$ матрицею
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Задати це відношення парами.
26. Задати відповідність $\alpha \subset A \times B$ матрицею і графом, якщо:
- $A = \{\text{Тарас Шевченко, Леся Українка, Іван Франко}\};$
 $B = \{\langle \text{Сон} \rangle, \langle \text{Гайдамаки} \rangle, \langle \text{Лісова пісня} \rangle, \langle \text{Захар Беркут} \rangle, \langle \text{Борислав сміється} \rangle, \langle \text{Заповіт} \rangle, \langle \text{Ліс Микита} \rangle\};$
 $\alpha = \{(a, b) : a \in A \text{ і } b \in B, a - \text{автор } b\};$
 - $A = \{\text{краб, ведмідь, карась, вовк, засць, змія}\};$
 $B = \{\text{ліс, річка, поле, море, степ}\};$
 $\alpha = \{(a, b) : a \in A \text{ і } b \in B; a - \text{живе в } b\};$

- в) $A = \{\text{банан, яблуко, жолудь, груша}\};$
 $B = \{\text{яблуня, дуб, пальма, береза, груша}\};$
 $\alpha = \{(a, b) : a \in A \text{ і } b \in B; a - \text{плід } b\}.$

27. Задати на множині $M = \{2, 4, 6, 7, 14\}$ відношення $\alpha = \langle x : y \rangle$ матрицею, графом і графіком.
28. Скільки бінарних відношень існує на множині з n елементів?
29. Навести приклади відношень, які:
- не є ані симетричними, ані антисиметричними;
 - не є ані рефлексивними, ані антирефлексивними;
 - є симетричними і антисиметричними одночасно.
30. Чи є переріз рефлексивних (відповідно симетричних, транзитивних) відношень рефлексивним (відповідно симетричним, транзитивним) відношенням?
31. Дати відповідь на питання попередньої вправи для випадку об'єднання відношень.
32. Навести приклад рефлексивного відношення, яке не є симетричним і транзитивним.
33. Навести приклад симетричного відношення, яке не є рефлексивним і транзитивним.
34. Навести приклад транзитивного відношення, яке не є рефлексивним і симетричним.
35. Навести приклад рефлексивного і симетричного відношення, яке не є транзитивним.
36. Навести приклад рефлексивного і транзитивного відношення, яке не є симетричним.
37. Заповнити таблицю:

№	Відношення	Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Транзитивність
1	« x проживає в одному будинку з y » на множині жителів Луцька					
2	« x батько або мати y » на множині людей					
3	« x сестра y » на множині людей					
4	« $x > y$ » на множині N					

5	« $x : y$ » на множині N					
6	« x взаємно просте з y » на множині Z					

38. Нехай α та β відношення еквівалентності. Довести, що $\alpha \cap \beta$ теж відношення еквівалентності. Чи є відношенням еквівалентності відношення $\alpha \cup \beta$?

39. Скільки відношень еквівалентності можна побудувати на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

40. Які з матриць зображають відношення еквівалентності?

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

41. Чи є перетин та об'єднання двох відношень часткового порядку, визначених на тій самій множині, знову відношенням часткового порядку?

42. Навести приклади відношень часткового порядку, які є одночасно і відношеннями еквівалентності.

43. Визначити, які з наведених відношень на множині натуральних чисел N рефлексивні, симетричні, антисиметричні, транзитивні:

- а) $m + n$ – парне;
- б) $m + n \leq 7$;
- в) $m + n$ – непарне;
- г) $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб;
- д) mn – непарне.

44. Довести: якщо α – відношення еквівалентності, то α^{-1} – також відношення еквівалентності.

45. Дві множини A і B евклідової площини називають ізометричними, якщо існує $f : A \rightarrow B$, яке зберігає відстань між точками. Довести, що ізометричність є відношенням еквівалентності.

46. На множині $M = \{2, 4, 3, 7\}$ задано відношення $\alpha =$ «бути меншим». Побудувати граф цього відношення і встановити, користуючись графом, властивості α .

47. На множині прямих $B = \{a, b, c\}$ задано відношення $\alpha = \text{«бути паралельним»}$. Відомо, що $a \parallel b \parallel c$. Побудувати граф відношення α . Встановити, користуючись графом, властивості α .
48. Відношення $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ визначено на декартовому квадраті множини $A = \{1, 2, 3\}$. Довести, що α – відношення еквівалентності. Виписати класи еквівалентності.
49. Знайти найменше відношення на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, яке містить відношення $\alpha = \{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ та є відношенням еквівалентності.
- 50*. На множині пар натуральних чисел N^2 задано відношення α так, що: $(m_1, n_1) \alpha (m_2, n_2) \leftrightarrow (m_1 + n_2 = n_1 + m_2)$. Довести, що α – відношення еквівалентності.
- 51*. На множині пар дійсних чисел R^2 задано відношення α так що: $(x, y) \alpha (u, v) \leftrightarrow xv = uy$. Перевірити, чи є α відношенням еквівалентності.
52. Довести, що кожна частково впорядкована множина містить не більше ніж один найбільший (найменший) елемент.
53. Побудувати граф відношення α , заданого на множині M . Довести, що це відношення є відношенням еквівалентності. Знайти фактор-множину, якщо:
- а) $\alpha = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
 $M = \{1, 2, 3, 4\}$;
- б) $\alpha = \text{«число } x \text{ має таку ж остачу при діленні на 3, що і число } u\text{»}$;
 $M = \{x : x \in N \wedge x \leq 8\}$.
54. Нехай $S = \{p, g, r, s, t, u\}$. Вказати серед поданих нижче класів підмножин такі, які складають розбиття S :
- а) $\{\{p, s, t\}, \{g, r\}, \{t, u\}\}$;
- б) $\{\{p\}, \{g\}, \{r, u\}, \{s, t\}\}$;
- в) $\{\{r, s, t\}, \{p, g, u\}, \emptyset\}$;
- г) $\{\{p, g, r, s, t, u\}\}$.
55. Побудувати усі можливі розбиття множини $M = \{1, 2, 3, 4\}$.
56. Нехай U – множина натуральних чисел $U = \{1, 2, 3, \dots\} = N$. Показати, що множина $\{C_1, C_2, C_3\}$, де $C_1 = \{x : x = 3n, n = 1, 2, \dots\}$, $C_2 = \{x : x = 3n-1, n = 1, 2, \dots\}$, $C_3 = \{x : x = 3n-2, n = 1, 2, \dots\}$, утворює розбиття множини U .

57. Довести, що відношення $\alpha = \langle x:y \rangle$ на множині натуральних чисел є відношенням нестрогого порядку.
58. Побудувати приклад частково впорядкованої множини, що не має найменшого елемента, але має єдиний мінімальний елемент.
59. Чи є відношення $\alpha = \{(1, a), (1, e), (2, a)\}$, яке визначене на декартовому добутку множин $A = \{1, 2\}$ та $B = \{a, e\}$, функцією?
60. Знайти образ відрізка $[1; 10]$ при відображенні $y = \lg x$.
61. Знайти прообраз відрізка $[-1; 1]$ при відображенні $y = \sin x$.
62. Чи є функція $y = x^2$ ін'єктивною?
63. Чи є відношення $\alpha = \{(a_1, v_1), (a_2, v_2), (a_3, v_2)\}$, яке визначене на декартовому добутку множин $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ та $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, функцією?
64. Чи є відношення $\alpha = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, яке визначене на декартовому квадраті множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$, бієктивним відображенням?
65. Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх натуральних чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2, і множиною натуральних чисел.
66. Довести, що відрізки $[0; 1]$ та $[0; 2]$ рівнопотужні.
67. Довести, що інтервал $(0; 1)$ та промінь $(0; 1]$ рівнопотужні.
- 68*. Довести: якщо множина A нескінченна, а множина B скінченна або зліченна, то об'єднання $A \cup B$ рівнопотужне множині A .
- 69*. Довести, що множина $N \times N = N^2$ зліченна.
70. Довести, що кожний сегмент $[a, b]$, кожний інтервал (a, b) і кожний напівсегмент $(a, b]$ або $[a, b)$ має потужність континуум.
71. Довести, що на множині невироджених матриць n -го порядку ($n \geq 1$) множення матриць є бінарною операцією, а додавання матриць не є бінарною операцією.
72. Довести, що операція « $*$ », задана на множині раціональних чисел правилом $x * b = ax + by$, де a, b – фіксовані раціональні числа, неасоціативна.

73. Довести, що операція, яка задана формулою $a * b = \frac{a+b}{2}$ на множині дійсних чисел R , є: 1) бінарна; 2) комутативна; 3) неасоціативна.
74. Довести, що на множині раціональних чисел Q операція, яка виконується за правилом $ab = \frac{ab}{2}$, є: 1) бінарна; 2) комутативна; 3) асоціативна.
Знайти нейтральний елемент Θ . Для елемента $a = 8$ знайти симетричний.
75. Довести, що адитивна група цілих чисел ізоморфна адитивній групі парних чисел.
- 76*. На множині G пар раціональних чисел (a, b) , де $a \neq 0$, визначено операцію «*» так: $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$. Довести, що G група.
77. Нехай для всіх $x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)$: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Довести, що операція «*» задовольняє аксіоми групи.

Зразки самостійних робіт до теми «Множини та відношення»

Самостійна робота 1

Варіант 1

1. Дати означення підмножини множини A . Навести приклади.
2. Знайти множини A та B , якщо $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}$, $B \cap A = \{3, 6, 9\}$.
3. Перевірити за допомогою кругів Ейлера рівність: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Варіант 2

1. Що таке характеристична властивість множини? Навести приклади.
2. Нехай A – область визначення функції $y = \ln(x-1)$, B – область визначення функції $y = \sqrt{5-x}$. Знайти $A \cap B$, $A \setminus B$.
3. Перевірити за допомогою кругів Ейлера рівність:
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Варіант 3

1. Які дві множини називаються рівними? Навести приклади.

- Множини A та B – скінченні, причому $|A|=n$, $|B|=m$. Знайти $\max|A \cup B|$, $\min|A \cup B|$.
- Перевірити за допомогою кругів Ейлера рівність:
 $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Варіант 4

- Що таке булеан множини? Навести приклади.
- Множини A та B – скінченні, причому $|A|=n$, $|B|=m$. Знайти $\max|A \cap B|$, $\min|A \cap B|$.
- Перевірити за допомогою кругів Ейлера співвідношення:
 $(A \cap B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Самостійна робота 2

Варіант 1

- Дати означення прямого добутку множин A й B . Навести приклади.
- Чи є відношення, задане матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, відношенням часткового порядку?
- Перевірити чи є відношення α , задане на множині $A = \{0, 1, 2, 3\}$, відношенням еквівалентності, якщо $\alpha = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

Варіант 2

- Що таке бінарна відповідність між множинами A та B ? Навести приклади.
- Чи є відношення, задане матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, відношенням часткового порядку?
- Перевірити чи є відношення α , задане на множині $A = \{0, 1, 2, 3\}$, відношенням еквівалентності, якщо $\alpha = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Варіант 3

1. Яке відношення називається відношенням еквівалентності? Навести приклади.
2. Знайти найменше відношення на множині цілих чисел, яке містить відношення $\alpha = \{(a, b) : a > b\}$ та є одночасно рефлексивним і симетричним.
3. Перевірити, чи є відношення α , задане на множині $A = \{0, 1, 2, 3\}$, відношенням часткового порядку, якщо $\alpha = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Варіант 4

1. Що таке композиція двох відповідностей? Навести приклади.
2. Знайти найменше відношення, задане на множині $A = \{a, b, c, d\}$, яке містить відношення $\alpha = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, d), (d, c), (d, b)\}$, та є одночасно рефлексивним і симетричним.
3. Перевірити чи є відношення α , задане на множині $A = \{0, 1, 2, 3\}$, відношенням часткового порядку, якщо $\alpha = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Література: [2] – розд. 1, § 1.2; [4] – розд. 3; [6] – розд. 3.

3.1. Основні правила комбінаторного аналізу.

Перестановки, розміщення, комбінації

Основні теоретичні відомості

Однією з центральних у комбінаториці є теорія перелічувань, в основі якої лежать правила суми й добутку.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати n способами і при кожному з цих виборів об'єкт B можна вибрати m способами, то вибір пари (A, B) можна здійснити $n \cdot m$ способами.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати n способами, а об'єкт B – m способами, причому ніякий вибір A не збігається з жодним із виборів B , то один з об'єктів A або B можна вибрати $n+m$ способами.

Правило суми, як і правило добутку, можна узагальнити для k об'єктів. Нехай M є n -елементною множиною.

Перестановкою з n елементів називається будь-яке розміщення даних n елементів у деякому певному порядку.

Кількість усіх можливих перестановок з n елементів позначається символом P_n і обчислюється за формулою $P_n = n!$

Множина, яка містить n елементів, називається *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.

Розміщенням із n елементів по k ($k \leq n$) називається будь-яка впорядкована k -елементна підмножина n -елементної множини.

Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k і обчислюється за формулою: $A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$.

Ураховуючи позначення $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$, останню формулу можна переписати: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Комбінацією з n елементів по k називається будь-яка k -елементна підмножина n -елементної множини.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, \text{ яку часто записують так: } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

Таблица 3.1

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Приклади

1. Обчислити: а) $\frac{P_{10} - 9P_8}{P_9}$; б) $\frac{P_m}{P_{m-2}}$.

$$\text{a) } \frac{P_{10} - 9P_8}{P_0} = \frac{10! - 9 \cdot 8!}{9!} = \frac{9! \cdot 10 - 9!}{9!} = \frac{9!(10 - 1)}{9!} = 9;$$

$$6) \frac{P_m}{P_{m-2}} = \frac{m!}{(m-2)!} = \frac{(m-2)!(m-1)m}{(m-2)!} = m(m-1).$$

2. На вершину гори веде сім стежок. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї. Дайте відповідь на це ж запитання, якщо підйом і спуск потрібно здійснити різними стежками?

Стежку для підйому і стежку для спуску можна вибрати сімома способами. Тому, за правилом добутку всіх способів, $7 \times 7 = 49$.

Відповідь: 49 способів; 42 способи.

3. Група студентів опановує сім навчальних дисциплін. На понеділок планується заняття з чотирьох різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок?

Розв'язання

На перше заняття можна вибрати одну з семи дисциплін. Цей вибір можна здійснити сімома способами. На друге – одну із шести дисциплін шістьма способами, на третє – одну з п'яти дисциплін п'ятьма способами, на четверте – одну із чотирьох дисциплін чотирма способами.

Загальна кількість способів: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Відповідь: 840 способів.

4. На диск сейфа нанесено 12 літер, а код складається з п'яти літер. Скільки невдалих спроб відкриття сейфа може зробити людина, яка не знає коду, а знає лише, що він складається з п'яти літер?

Розв'язання

Людині потрібно зробити п'ять дій: набрати першу літеру, потім другу і т. д. Кожну з цих дій вона може зробити 12 способами, тому всіх спроб може бути: $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^5 = 248\,832$, невдалих на одну менше.

Відповідь: 248 831 спроб.

5. Нехай із пункту A до пункту B веде m доріг, із пункту A до C – n доріг, із C до D – l доріг, із B до D – k доріг. Пункти B і C між собою дорогами не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з A до D ?

Розв'язання

Згідно з правилом добутку з пункту A до D через B веде mk доріг, через C веде nl доріг. За правилом суми число всіх доріг із A до D – $mk + nl$.

Відповідь: $(mk + nl)$ доріг.

6. У кошику 12 яблук та 10 апельсинів. Олег вибирає або яблуко, або апельсин. Після цього Надійка вибирає з фруктів, що залишилися, яблуко й апельсин одночасно. Скільки можливостей такого вибору?

Розв'язання

Олег може вибрати яблуко 12 способами. Надійка для кожного з виборів Олега може вибрати яблуко й апельсин 11×10 способами.

Якщо ж Олег одним із 10 можливих способів вибрав апельсин, то Надійка вибрати яблуко й апельсин може вже меншим числом способів, а саме 12×9 . Використовуючи правило добутку та суми, одержимо $12 \times 11 \times 10 + 12 \times 10 \times 9 = 2\,400$ способів.

Відповідь: 2 400 можливостей.

7. Скільки існує способів розмістити на полиці сім книжок?

Розв'язання

Оскільки йдеться про кількість упорядкування 7-елементної множини, то потрібно застосувати формулу для перестановок: $P_7 = 7! = 5\,040$.

Відповідь: 5 040 способів.

8. Скількома способами можна розмістити 12 осіб за столом, біля якого поставлено 12 стільців?

Розв'язання

Застосовуючи формулу для перестановок, матимемо: $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$.

Відповідь: 479 001 600 способами.

9. Скількома способами можна упорядкувати n -елементну множину $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 3$) так, щоб останні два елементи були $n - 1$ і n ?

Розв'язання

Оскільки два останні елементи зафіксовані, то число способів упорядкування множини A буде $P_{n-2} = (n - 2)!$

Відповідь: $(n - 2)!$ способів.

10. Скільки словників потрібно видати, щоб мати можливість безпосередньо виконувати переклади із п'яти мов (української, англійської, німецької, французької, іспанської) на будь-яку іншу з них?

Розв'язання

Оскільки йдеться про визначення кількості впорядкованих підмножин, то можна застосувати формулу для обчислення кількості розміщень із п'яти елементів по два: $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$.

Відповідь: 20 словників.

11. Клавіатура піаніно складається з 88 клавіш. Скільки різних музичних фраз можна скласти із шести нот, якщо не допускати в одній фразі повторення звуків, які вже траплялися?

Розв'язання

Музичні фрази, про які йдеться в умові задачі, відрізняються одна від одної або нотами, або порядком їх у фразі. Отже, треба знайти число розміщень із 88 елементів по шість.

Матимемо: $A_{88}^6 = 88 \times 87 \times 86 \times 85 \times 84 \times 83 = 390\,190\,489\,920$.

Відповідь : 390 190 489 920 фраз.

12. Комісія складається з голови, його заступника й ще п'яти членів. Скількома способами сім членів комісії можуть розподілити між собою обов'язки?

Розв'язання

Очевидно, що на кількість способів впливає лише вибір голови та його заступника, бо інші члени комісії «визначаються» автоматично. Отже, усього розподіл обов'язків може відбутися $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ способами.

Відповідь: 42 способами.

13. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 так, щоб у кожен дріб уходило два числа?

Розв'язання

Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику, можна скласти $A_8^2 = 8 \times 7 = 56$, але лише половина з них правильні. Отже, правильних дробів можна скласти 28.

Відповідь: 28 дробів.

14. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному числі була цифра 1 (цифри в числі не повинні повторюватися)?

Розв'язання

Чисел, у яких одиниця стоїть на першому місці, буде A_7^3 . Чисел, у яких одиниця стоїть на другому (третьому, четвертому) місці, теж було б по A_7^3 , якби в цей набір цифр не входив нуль. Тому слід виключити ті числа, де нуль стоїть на першому місці, а їх по A_6^2 .

Остаточнo маємо $A_7^3 + 3 \cdot (A_7^3 - A_7^2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5) = 756$ (чисел).

Відповідь: 756 чисел.

15. Розв'язати рівняння: $A_n^{n-3} = n \times P_{n-2}$.

Розв'язання

Очевидно, що $n \geq 3$, $n \in N$.

Використаємо формули для розміщень і перестановок:

$$\frac{n!}{(n-(n-3))!} = n(n-2)!, \quad \frac{(n-2)!(n-1)n}{3!} = n(n-2)!.$$

Оскільки $(n-2)! \neq 0$, $n \neq 0$, то $\frac{n-1}{6} = 1$, $n = 7 > 3$. Отже, $n = 7$.

Відповідь: $n = 7$.

16. При яких значеннях параметра a рівняння $A_{n+1}^{a+1} \cdot P_{n-a} = 72 \cdot P_{n-1}$ має розв'язок? Знайдіть його.

Розв'язання

$$1) \ n \in \mathbb{N}, n-a \in \mathbb{Z}_+, a \geq -1, a \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \ \frac{(n+1)!}{(n-a)!} \cdot (n-a)! = 72 \cdot (n-1)!.$$

Оскільки $(n-a)! \neq 0$ та $(n-1)! \neq 0$, то маємо $n(n+1) = 72$.

$$3) \ n^2 + n - 72 = 0. \text{ Отже, } n=8. \text{ Тоді } 8-a \geq 0 \text{ і } a \geq -1.$$

Отже, при $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ рівняння має розв'язок $n=8$.

Відповідь: при $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ рівняння має розв'язок $n=8$.

17. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі трьох осіб?

Розв'язання

Оскільки йдеться про кількість підмножин даної множини й порядок розміщення в них елементів не має значення, то шукана кількість способів є число комбінацій із 30 по 3. Матимемо $C_{30}^3 = \frac{30 \times 29 \times 28}{1 \times 2 \times 3} = 4\ 060$.

Відповідь: 4 060 способами.

18. Скількома способами можна вибрати: а) чотири фарби з шести; б) дві фарби з шести?

Розв'язання

Шукана кількість способів є число комбінацій

$$\text{а) з 6 по 4, тобто } C_6^4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15;$$

$$\text{б) з 6 по 2, тобто } C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15.$$

Відповідь: а) 15 способами, б) 15 способами.

19. Скільки прямих можна провести через вісім точок, із яких ніякі три не лежать на одній прямій?

Розв'язання

Пряма визначається двома точками. Тому шукане число дорівнюватиме числу різних пар точок, які можна скласти з даних восьми точок. При цьому, щоб прямі не збігалися, пари точок повинні відрізнятися хоча б однією точкою. Тому маємо комбінації з восьми елементів по два, тобто $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$.

Відповідь: 28 прямих.

20. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожен учитель викладатиме у двох класах?

Розв'язання

Перший вчитель може вибрати два класи із шести C_6^2 різними способами. Після вибору першого вчителя другий може вибрати два класи з чотирьох, що залишилися, C_4^2 різними способами. Тому ці два вчителі можуть вибрати по два класи $C_6^2 C_4^2$ різними способами. Якщо вони зробили вибір, то третій може взяти лише ті два класи, що залишилися.

Звідси шукане число способів дорівнює: $C_6^2 C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 90$.

Відповідь: 90 способами.

21. Скільки різних добутоків, кратних 10, можна дістати із чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13?

Розв'язання

Будемо складати добутки, кратні 10, у вигляді $2 \cdot 5 \cdot n$, де n – усі можливі добутки з чисел 3, 7, 11, 13. У число n можуть включатися від 0 до 4 множників.

Отже, усіх можливих добутоків, що задовольняють умові, буде $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$.

Відповідь: 16 добутоків.

22. Скільки різних дільників має число 2 310 ?

Розв'язання

Оскільки $2\,310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, то його дільником буде лише те число, яке є добутком чисел із набору 2, 3, 5, 7, 11. Складемо всі можливі добутки з цих чисел (вони містять від 1 до 5 множників) і додамо 1 як дільник даного числа.

Отже, число 2 310 має $1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$ (дільника).

Відповідь: 32 дільника.

23. Із лабораторії, у якій працюють 25 осіб, п'ять співробітників мають їхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його заступник і головний інженер одночасно їхати не можуть?

Розв'язання

Кількість усіх можливих варіантів формування групи C_{25}^5 . Проте не всі ці варіанти можливі. Підрахуємо кількість варіантів вибору групи, які не влаштовують працівників лабораторії. При цьому три вакансії займуть начальник лабораторії, його заступник і головний інженер, а решту дві можуть бути сформовані C_{22}^2 способами.

Отже, можливих варіантів буде $C_{25}^5 - C_{22}^2 = 53\,130 - 231 = 52\,899$.

Відповідь: 52 899 складів.

24. У речовій лотереї розігруються вісім предметів. Усього в урні 50 квитків. Виймається п'ять квитків. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб:

а) рівно два з них були виграшними, б) принаймні два з них були виграшними?

Розв'язання

а) Два виграшних і, відповідно, три неиграшних квитки можна вибрати $C_8^2 \cdot C_{42}^3 = 321\,440$ способами.

б) Якщо серед п'яти квитків буде два виграшні й три неиграшні, то це можна вийняти $C_8^2 \cdot C_{42}^3$ способами; якщо три виграшні й два неиграшні, то $C_8^3 \cdot C_{42}^2$ способами; якщо чотири виграшні і один неиграшний, то $C_8^4 \cdot C_{42}^1$ способами; якщо всі п'ять виграшних, то C_8^5 способами.

За правилом суми загальна кількість способів:

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 + C_8^3 \cdot C_{42}^2 + C_8^4 \cdot C_{42}^1 + C_8^5 = 372\,652.$$

Відповідь: а) 321 440 способами; б) 372 652 способами.

25. Скількома способами можна розділити колоду із 36 карт порівну так, щоб в кожній частині було по два тузи?

Розв'язання

Для поділу колоди карт порівну потрібно вибрати 16 карт, відмінних від тузів, із 32 карт і два тузи із чотирьох. Перший вибір можна зробити C_{32}^{16} способами, другий – C_4^2 способами.

$$\text{Загальна кількість способів: } C_{32}^{16} \cdot C_4^2 = \frac{32!}{(16!)^2} \cdot \frac{4!}{(2!)^2} = 6 \cdot \frac{32!}{(16!)^2}.$$

Відповідь: $6 \cdot \frac{32!}{(16!)^2}$ способами.

3.2. Біном Ньютона. Поліноміальна теорема

Основні теоретичні відомості

При довільному натуральному n має місце формула

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n \text{ або } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (1)$$

яка називається *формулою бінома Ньютона*.

Основні властивості формули бінома Ньютона:

- 1) розклад n -го степеня бінома (1) містить $n + 1$ членів;
- 2) показники степеня при a спадають від n до 0; показники степеня при b зростають від 0 до n . Сума показників степенів при a і b у кожному члені розкладу дорівнює n ;

- 3) біноміальні коефіцієнти розкладу є числа, які стоять у n -му рядку трикутника Паскаля. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців, рівні між собою;
- 4) якщо показник степеня бінома парне число, то біноміальний коефіцієнт середнього члена є найбільшим; якщо ж показник степеня бінома непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою і є найбільшими;
- 5) $(k+1)$ -й член розкладу T_{k+1} визначається за формулою:
 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, де $k = 0, 1, 2, \dots, n$;
- 6) перший біноміальний коефіцієнт дорівнює 1, другий – n (показник степеня бінома). Щоб знайти кожний наступний коефіцієнт, потрібно біноміальний коефіцієнт попереднього члена помножити на показник a цього члена і знайдений добуток поділити на число, яке відповідає порядковому номеру члена, біноміальний коефіцієнт якого визначається, тобто $C_n^k = C_n^{k-1} \frac{(n-(k-1))}{k}$, $1 \leq k+1 \leq \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$;
- 7) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$, $\forall n, k \in \mathbb{Z}_+, n \leq k$;
- 8) сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які розміщені на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів членів розкладу, які розміщені на непарних місцях, тобто $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$.

Ісаак Ньютон (Newton Isaacs) уперше показав, що вираз $(1+x)^\alpha$, де $|x| < 1, \alpha$ – будь-яке дійсне число, дорівнює такій сумі нескінченної кількості доданків:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + \dots$$

Звідси випливає формула, яка виражає наближену рівність:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \text{ де } |x| < 1, \alpha - \text{будь-яке дійсне число.}$$

Узагальненням формули бінома Ньютона є формула піднесення до n -го степеня суми $x_1 + x_2 + \dots + x_m$.

Теорема (поліноміальна)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m},$$

де підсумовування поширюється на всі можливі системи невід'ємних цілих значень, які задовольняють умову $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

Коефіцієнти $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}$, з якими члени $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ входять до розкладу $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$, називаються *поліноміальними*.

Приклади

1. Обчислити $(3x - 2)^5$.

Розв'язання

Використовуючи формулу бінома Ньютона, матимемо:

$$(3x - 2)^5 = C_5^0 (3x)^5 + C_5^1 (3x)^4 (-2) + C_5^2 (3x)^3 (-2)^2 + C_5^3 (3x)^2 (-2)^3 + C_5^4 (3x) (-2)^4 + C_5^5 (-2)^5 = 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32.$$

2. Обчислити $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 &= \frac{3!}{3!0!0!0!} x_1^3 + \frac{3!}{0!3!0!0!} x_2^3 + \frac{3!}{0!0!3!0!} x_3^3 + \frac{3!}{0!0!0!3!} x_4^3 + \\ &+ \frac{3!}{2!1!0!0!} x_1^2 x_2 + \frac{3!}{2!1!0!0!} x_1^2 x_2 + \frac{3!}{2!0!1!0!} x_1^2 x_3 + \frac{3!}{2!0!0!1!} x_1^2 x_4 + \frac{3!}{0!2!1!0!} x_2^2 x_3 + \frac{3!}{0!2!0!1!} x_2^2 x_4 + \\ &+ \frac{3!}{0!0!2!1!} x_3^2 x_4 + \frac{3!}{1!2!0!0!} x_1 x_2^2 + \frac{3!}{1!0!2!0!} x_1 x_3^2 + \frac{3!}{1!0!0!2!} x_1 x_4^2 + \frac{3!}{0!1!2!0!} x_2 x_3^2 + \frac{3!}{0!1!0!2!} x_2 x_4^2 + \\ &+ \frac{3!}{0!0!1!2!} x_3 x_4^2 + \frac{3!}{1!1!1!0!} x_1 x_2 x_3 + \frac{3!}{1!1!0!1!} x_1 x_2 x_4 + \frac{3!}{1!0!1!1!} x_1 x_3 x_4 + \frac{3!}{0!1!1!1!} x_2 x_3 x_4 = \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + 3(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + x_1 x_2^2 + \\ &+ x_1 x_3^2 + x_1 x_4^2 + x_2 x_3^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2) + 6(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4). \end{aligned}$$

3. Обчислити наближене значення $\sqrt[4]{1,04}$.

Розв'язання

Використаємо формулу для наближеного обчислення:

$$\sqrt[4]{1,04} = \sqrt[4]{1+0,04} = (1+0,04)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 1,01.$$

Відповідь: 1,01.

4. Знайти сьомий член розкладу бінома $(a^2 \sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a})^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена дорівнює 36.

Розв'язання

За формулою загального члена розкладу бінома $T_3 = C_n^2 (a^2 \sqrt{a})^{n-2} (\frac{\sqrt[3]{a}}{a})^2$.

Біноміальний коефіцієнт третього члена $C_n^2 = 36$, тобто $\frac{n(n-1)}{2} = 36$.

Звідки $n^2 - n - 72 = 0$. Оскільки $n \in \mathbb{N}$, то $n = 9$.

Тому сьомий член розкладу $T_7 = C_9^6 (a^{\frac{5}{2}})^3 (a^{-\frac{2}{3}})^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \sqrt{a} = 84 a^3 \sqrt{a}$.

Відповідь: $T_7 = 84 a^3 \sqrt{a}$.

5. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься у цьому розкладі? Знайти серед них член із найбільшим біноміальним коефіцієнтом.

Розв'язання

Оскільки $C_n^2 = C_n^{n-2}$, то $2C_n^2 = 9900$, $n(n-1) = 9900$, $n^2 - n - 9900 = 0$, $n = 100$. Отже, маємо розклад $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^{100}$.

$$\text{Загальний член } T_{k+1} = C_{100}^k (\sqrt[3]{4})^k \cdot (\sqrt[4]{3})^{100-k} = C_{100}^k \cdot 4^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{25-\frac{k}{4}}.$$

Звідси випливає, що k має ділитися на 12. Серед натуральних чисел, які менші за 100, таких буде дев'ять. Оскільки послідовність із чисел вигляду C_{100}^k зростає при $k \leq 50$ і спадає при $k \geq 50$, та, крім того, оскільки найближчим до 50 числом, кратним 12, є число 48, то

$$\text{шуканим членом буде } T_{49} = C_{100}^{48} \cdot 4^{\frac{48}{3}} \cdot 3^{25-\frac{48}{4}} = C_{100}^{48} \cdot 4^{16} \cdot 3^{13}.$$

Отже, всього у розкладі буде дев'ять раціональних членів, причому найбільший біноміальний коефіцієнт буде мати член T_{49} .

Відповідь: 9; $T_{49} = C_{100}^{48} \cdot 4^{16} \cdot 3^{13}$.

3.3. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями

Основні теоретичні відомості

Нехай дано множину M , яка містить n елементів будь-якої природи.

Перестановкою з повтореннями з n елементів називається будь-яке впорядкування n -елементної множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів n -елементної множини M є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_k елементів k -го типу ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то кількість усіх перестановок такої множини позначається $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Для перестановок із повтореннями виконується формула:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Дана формула допускає також інше комбінаторне тлумачення:

$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ – це кількість способів, якими можна здійснити розбиття n -елементної множини на k множин без спільних елементів.

Розміщенням із повтореннями з n елементів по k (k – довільне натуральне число) називається будь-який впорядкований k -елементний набір виду $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, де $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ ($a_1, a_2, \dots, a_k$ не обов'язково різні).

Кількість розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{A}_n^k$ і обчислюється за формулою: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається будь-який k -елементний набір виду $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, де кожен з елементів $a_1, a_2, \dots, a_k$ належить до одного з n типів. Позначається $\overline{C}_n^k$.

При довільних натуральних n і k має місце формула:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклади

1. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою дев'яти цифр 1, 2, ..., 9, якщо цифри в запису числа можуть повторюватися?

Розв'язання

З умови випливає, що трицифрові числа можна скласти так, щоб у них були однакові цифри. Отож, щоб знайти кількість усіх трицифрових чисел, які можна утворити із даних цифр, потрібно використати формулу розміщень із повтореннями: $\overline{A}_9^3 = 9^3 = 729$.

Відповідь: 729 чисел.

2. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

Розв'язання

Якщо приписати i -тій особі номер a_i , то кожному способу виходу відповідатиме впорядкований набір $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$, де a_i набуває значень 2, 3, ..., 12 (на першому поверсі ніхто не виходить).

Тому кількість способів виходу дорівнює $\overline{A}_{11}^{10} = 11^{10}$.

Відповідь: 11^{10} способами.

3. Скільки різних чотирицифрових чисел, які діляться на чотири, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 при умові, що кожна цифра може траплятися у числі декілька разів?

Розв'язання

Число ділиться на чотири, тому повинно закінчуватися однією з п'яти комбінацій: 12, 24, 32, 44, 52. Перші ж дві цифри шуканого числа можуть бути довільними, тому способів їх вибору є $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

Загальна кількість способів за правилом добутку: $5 \cdot 25 = 125$.

Відповідь: 125 чисел.

4. Скільки різних “слів”, у тому числі й беззмистовних, можна отримати, переставляючи букви у слові “математика”?

Розв'язання

Буква **м** повторюється у слові “математика” два рази, буква **а** – три рази, буква **т** – два рази, буква **е** – один раз, буква **и** – один раз, буква **к** – один раз.

Тому різних слів можна отримати $P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151\,200$.

Відповідь: 151 200 слів.

5. Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 кісточок доміно?

Розв’язання

Шукана кількість способів: $P_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4} \approx 4,7 \cdot 10^{15}$.

Відповідь: $4,7 \cdot 10^{15}$ способами.

6. Скількома способами можна купити вісім тістечок у кондитерській, де є шість різних сортів тістечок.

Розв’язання

Оскільки кількість сортів тістечок менша, ніж кількість тістечок, яку потрібно купити, і порядок купівлі не має значення, то відповідь дістаємо, скориставшись формулою для обчислення комбінацій із шести по вісім елементів, а саме: $\overline{C}_6^8 = C_{13}^8 = C_{13}^{13-8} = C_{13}^5 = 1\,287$.

Відповідь: 1287 способами.

7. У ящику лежать сині, жовті та білі кулі. Скількома способами можна вибрати з нього набір із п’яти куль.

Розв’язання

Набір із п’яти куль можна вибрати $\overline{C}_3^5 = C_7^5 = \frac{7!}{2!5!} = 21$.

Відповідь: 21 способом.

3.4. Принцип включень та виключень

Основні теоретичні відомості

Нехай A і B дві скінченні множини. Кількість їх елементів позначається $N(A)$ і $N(B)$. Тоді $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто A і B не мають спільних елементів, то

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

За допомогою методу математичної індукції формулу можна узагальнити на випадок n множин.

Для довільних скінченних множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ має місце формула:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n N(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n).$$

Цю формулу називають *формулою включень і виключень*.

Приклади

1. У групі 15 студентів відвідують секцію плавання; 20 – секцію легкої атлетики; 5 – беруть участь в обох секціях. Скільки в групі студентів, якщо кожен відвідує принаймні одну із цих секцій?

Розв'язання

Нехай A – множина студентів, які відвідують секцію плавання, B – множина студентів, які відвідують секцію легкої атлетики. Тоді $A \cup B$ – це множина всіх студентів даної групи.

За умовою $N(A) = 15$, $N(B) = 20$.

Використовуючи формулу включень і виключень, матимемо:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 15 + 20 - 5 = 30.$$

Відповідь: 30 студентів.

2. Із 100 студентів 40 знають англійську мову, 35 – німецьку, 28 – французьку. Англійську й німецьку мови знають 12 студентів, англійську й французьку – сім студентів, німецьку й французьку – шість студентів. Усі три мови знають чотири студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

Розв'язання

Нехай A – це множина студентів, які знають англійську мову, B – німецьку, C – французьку. Тоді $A \cup B \cup C$ – множина студентів, які знають принаймні одну з цих мов.

Матимемо: $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) = 40 + 35 + 28 - 12 - 7 - 6 + 4 = 82$.

Отже, принаймні одну з мов знають 82 студенти. Жодної із цих мов не знають $100 - 82 = 18$ студентів.

Відповідь: 18 студентів.

3.5. Метод рекурентних співвідношень.

Розв'язування лінійних рекурентних співвідношень k -го порядку

Основні теоретичні відомості

Метод рекурентних співвідношень полягає в тому, що розв'язання комбінаторної задачі з n предметами виражається через розв'язання аналогічної задачі з меншим числом предметів за допомогою деякого співвідношення, яке називається рекурентним. Користуючись цим співвідношенням, шукану величину можна обчислити, виходячи з того, що для невеликої кількості предметів (одного, двох) розв'язок задачі легко знаходиться.

Рекурентне співвідношення називається порядку k , якщо воно дозволяє виразити $f(n + k)$ через $f(n)$, $f(n + 1)$, ..., $f(n + k - 1)$.

Послідовність $a_n = f(n)$ (1) називається розв'язком рекурентного співвідношення, якщо підстановка послідовних членів (1) у рекурентне співвідношення перетворює його у тотожність.

Розв'язок рекурентного співвідношення k -го порядку називається загальним, якщо він залежить від k довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_k$ і шляхом підбору цих сталих можна отримати будь-який розв'язок даного співвідношення. Розв'язати рекурентне співвідношення означає знайти його загальний розв'язок.

Загальних правил розв'язування рекурентних співвідношень не існує. Проте існує клас рекурентних співвідношень, який розв'язується єдиним методом. Це лінійні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами.

Рекурентне співвідношення k -го порядку називається лінійним, якщо кожен наступний член цього рекурентного співвідношення є лінійною комбінацією k попередніх членів.

При $k = 2$ отримується лінійне рекурентне співвідношенням другого порядку: $f(n + 2) = a_1f(n + 1) + a_2f(n)$.

Щоб розв'язати лінійне рекурентне співвідношенням другого порядку складють характеристичне рівняння

$$r^2 = a_1r + a_2. \quad (2)$$

Якщо рівняння (2) має:

- два різні корені r_1 та r_2 , то загальний розв'язок рекурентного співвідношення:

$$f(n) = C_1r_1^{n-1} + C_2r_2^{n-1}.$$

- два однакові корені $r_1 = r_2$, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення:

$$f(n) = C_1r_1^{n-1} + C_2nr_1^{n-1} = r_1^{n-1}(C_1 + C_2n).$$

Для лінійного рекурентного співвідношення k -го порядку $f(n + k) = a_1f(n + k - 1) + a_2f(n + k - 2) + \dots + a_kf(n)$ маємо таке характеристичне рівняння: $r^k = a_1r^{k-1} + a_2r^{k-2} + \dots + a_k$.

- Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення k -го порядку має k різних коренів $r_1, r_2, \dots, r_k$, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення матиме вигляд:

$$f(n) = C_1r_1^{n-1} + C_2r_2^{n-1} + \dots + C_kr_k^{n-1}.$$

- Якщо r_1 є коренем кратності k характеристичного рівняння $r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_k$, то функції $f_1(n) = r_1^{n-1}$, $f_2(n) = n r_1^{n-1}$, $f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}$, ..., $f_k(n) = n^{k-1} r_1^{n-1}$ та їх лінійна комбінація $r_1^{n-1}(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_k n^{k-1})$

будуть розв'язками рекурентного співвідношення.

- Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення k -го порядку має корінь r_1 кратності k_1 , корінь r_2 кратності k_2 , корінь r_p кратності k_p ($k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$), то загальний розв'язок рекурентного співвідношення має такий вигляд:

$$f(n) = r_1^{n-1} \sum_{i=1}^{k_1} C_{i1} n^{i-1} + r_2^{n-1} \sum_{i=1}^{k_2} C_{i2} n^{i-1} + \dots + r_p^{n-1} \sum_{i=1}^{k_p} C_{ip} n^{i-1}.$$

Приклади

1. Розв'язати рекурентні співвідношення:

а) $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n)$;

б) $f(n+2) = -4f(n+1) - 4f(n)$;

в) $f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n)$.

Розв'язання

а) Складаємо характеристичне рівняння цього рекурентного співвідношення $r^2 - 4r + 3 = 0$ і знаходимо за теоремою Вієта його корені $r_1 = 1$, $r_2 = 3$.

Оскільки корені різні, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення буде $f(n) = C_1 + C_2 3^{n-1}$.

Відповідь: $f(n) = C_1 + C_2 3^{n-1}$.

б) Складаємо характеристичне рівняння рекурентного співвідношення $r^2 + 4r + 4 = 0$ і знаходимо за теоремою Вієта його корені $r_1 = r_2 = -2$.

Оскільки корені однакові, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення буде $f(n) = (-2)^{n-1}(C_1 + nC_2)$.

Відповідь: $f(n) = (-2)^{n-1}(C_1 + nC_2)$.

в) Складаємо характеристичне рівняння рекурентного співвідношення $r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0$ і знаходимо його корені. Використовуючи теорему про раціональні корені многочлена, можна помітити, що число 2 є коренем даного рівняння. Знайдемо його кратність за схемою Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 6 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline & 2 & 1 & 2 & \neq 0 & \end{array}$$

Отже, число 2 є коренем кратності 3. Тоді матимемо $r+1 = 0$. Звідси $r = -1$.

Корені рівняння $r_1 = r_2 = r_3 = 2, r_4 = -1$.

Загальний розв'язок рекурентного співвідношення:

$$f(n) = 2^{n-1}(C_1 + C_2n + C_3n^2) + C_4(-1)^{n-1}.$$

$$\text{Відповідь : } f(n) = 2^{n-1}(C_1 + C_2n + C_3n^2) + C_4(-1)^{n-1}.$$

Запитання і завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Сформулюйте комбінаторні правила добутку й суми.
2. Сформулюйте узагальнені комбінаторні правила добутку й суми.
3. Дайте означення перестановки.
4. За якою формулою обчислюються перестановки?
5. Дайте означення розміщення.
6. Як визначити кількість можливих розміщень із n елементів по k ?
7. Дайте означення комбінації.
8. За якою формулою обчислюються комбінації?
9. Що таке трикутник Паскаля?
10. Запишіть формулу бінома Ньютона. Сформулюйте основні властивості біноміальних коефіцієнтів.
11. Запишіть поліноміальну теорему.
12. Що таке поліноміальні коефіцієнти?
13. Дайте означення перестановки з повтореннями. За якою формулою обчислюються перестановки з повторенням?
14. Дайте означення розміщення з повторенням. За якою формулою обчислюються розміщення з повтореннями?
15. Дайте означення комбінації з повторенням. За якою формулою обчислюються комбінації з повтореннями?
16. Запишіть формулу включень та виключень.
17. У чому полягає метод рекурентних співвідношень?
18. Що таке розв'язок рекурентного співвідношення?
19. Що таке загальний розв'язок рекурентного співвідношення?
20. Що означає розв'язати рекурентне співвідношення?
21. Дайте означення рекурентного співвідношення k -го порядку.
22. Запишіть загальний вигляд лінійного рекурентного співвідношення другого порядку.
23. Як розв'язуються лінійні рекурентні співвідношення другого порядку?

24. Як розв'язуються лінійні рекурентні співвідношення k -го порядку?

Тести

Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Якщо об'єкт A можна вибрати n способами і при кожному з цих виборів об'єкт B можна вибрати m способами, то вибір пари (A, B) можна здійснити:
 - 1) $n+m$ способами;
 - 2) одним способом;
 - 3) $n \times m$ способами;
 - 4) двома способами;
 - 5) $n - m$ способами.
2. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати n способами, а об'єкт $B - m$ способами, причому ніякий вибір A не збігається з жодним із виборів B , то один з об'єктів A або B можна вибрати:
 - 1) $n+m$ способами;
 - 2) одним способом;
 - 3) $n \times m$ способами;
 - 4) двома способами;
 - 5) $n - m$ способами.
3. Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k позначається символом:
 - 1) C_n^k ;
 - 2) P_n ;
 - 3) $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$;
 - 4) A_n^k ;
 - 5) $\overline{C_n^k}$.
4. Кількість усіх можливих комбінацій із n елементів по k позначається символом:
 - 1) C_n^k ;
 - 2) P_n ;
 - 3) $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$;
 - 4) A_n^k ;
 - 5) $\overline{C_n^k}$.

5. Кількість усіх можливих перестановок із п'яти елементів обчислюється за формулою:

1) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3$;

2) $P_5 = 5!$;

3) $P_5(n_1, n_2, \dots, n_5) = \frac{5}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!}$;

4) $P_5 = 5$;

5) $P_5 = 5! \cdot 4!$.

6. Кількість можливих розміщень із n елементів по k дорівнює:

1) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

2) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

3) n^k ;

4) $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$;

5) $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

7. Кількість можливих комбінацій з n елементів по k дорівнює :

1) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

2) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

3) n^k ;

4) $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$;

5) $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

8. Кількість можливих комбінацій з n елементів по k із повтореннями дорівнює:

1) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

2) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

3) n^k ;

4) $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$;

5) $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

9. Кількість можливих розміщень із n елементів по k з повтореннями дорівнює:

1) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

2) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

3) n^k ;

4) $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$;

5) $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

10. Кожну k -елементну підмножину n -елементної множини називають:

1) комбінацією з n елементів по k ;

2) розміщенням з n елементів по k ;

3) комбінацією з k елементів по n ;

4) розміщенням з k елементів по n ;

5) перестановкою.

11. Розклад n -го степеня бінома $(a + b)^n$ містить:

1) n членів;

2) $n + 1$ членів;

3) $n - 1$ член;

4) $n + 2$ члени;

5) $2n$ членів.

12. Який із наведених записів є загальним виглядом лінійних рекурентних співвідношень другого порядку?

1) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$;

2) $f(n) = r_1^{n-1}(C_1 + C_2n)$;

3) $f(n) = C_1r_1^{n-1} + C_2r_2^{n-1}$;

4) $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$;

5) $f(n+2) = a_1f(n+1) + a_2f(n)$.

13. Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення k -го порядку має k різних коренів $r_1, r_2, \dots, r_k$, то загальний розв'язок рекурентного співвідношення матиме вигляд:

1) $f(n) = r_1^{n-1}(C_1 + C_2n + C_3n^2 + \dots + C_kn^{k-1})$;

2) $f(n) = r_1^{n-1} \sum_{i=1}^{k_1} C_{i1}n^{i-1} + r_2^{n-1} \sum_{i=1}^{k_2} C_{i2}n^{i-1} + \dots + r_p^{n-1} \sum_{i=1}^{k_p} C_{ip}n^{i-1}$;

- 3) $f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_k r_k^{n-1}$;
- 4) $f(n) = C_1 4^{n-1} + C_2 3^{n-1}$;
- 5) $f(n) = 2^{n-1}(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + C_4 (-1)^{n-1}$.

14. Якщо характеристичне рівняння лінійного рекурентного співвідношення k -го порядку має корінь r_1 кратності k_1 , корінь r_2 кратності k_2 , корінь r_p кратності k_p ($k_1 + k_2 + \dots + k_p = k$), то загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд:

- 1) $f(n) = r_1^{n-1}(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_k n^{k-1})$;
- 2) $f(n) = r_1^{n-1} \sum_{i=1}^{k_1} C_{i1} n^{i-1} + r_2^{n-1} \sum_{i=1}^{k_2} C_{i2} n^{i-1} + \dots + r_p^{n-1} \sum_{i=1}^{k_p} C_{ip} n^{i-1}$;
- 3) $f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_k r_k^{n-1}$;
- 4) $f(n) = C_1 4^{n-1} + C_2 3^{n-1}$;
- 5) $f(n) = 2^{n-1}(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + C_4 (-1)^{n-1}$.

Рівень 2

15. Нехай із пункту A до пункту B веде m доріг, з пункту A до C – n доріг, із C до D – l доріг, із B до D – k доріг. Пункти A і D між собою дорогами не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з пункту A до пункту D ?

- 1) mk ;
- 2) $l + k$;
- 3) $mk + nl$;
- 4) $m + n$;
- 5) $(m + k)(n + l)$.

16. Скільки існує способів розміщення на полиці 3 книжок?

- 1) 1;
- 2) 6;
- 3) 3;
- 4) 2;
- 5) 18.

17. Скількома способами можна виготовити чотириколірний прапорець із горизонтальних смуг однакової ширини, маючи чотири смужки різного кольору?

- 1) 24;
- 2) 4;
- 3) 8;
- 4) 48;
- 5) 12.

- 18.** Кожний із двадцяти присутніх на зборах повинен привітатися з іншим за руку. Скільки буде усіх рукостискань?
- 1) 190;
 - 2) 95;
 - 3) 20;
 - 4) 40;
 - 5) 20!.
- 19.** Скільки можна утворити різних трицифрових чисел за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб жодна цифра у числі не повторювалася?
- 1) 125;
 - 2) 5;
 - 3) 20;
 - 4) 60;
 - 5) 5!.
- 20.** Скільки різних слів можна побудувати перестановкою букв у слові «лаваш»?
- 1) 120;
 - 2) 12;
 - 3) 20;
 - 4) 40;
 - 5) 60.
- 21.** Скільки різних слів можна скласти в алфавіті $\{0, 1\}$ з восьми символів?
- 1) 256;
 - 2) 8;
 - 3) 16;
 - 4) 40;
 - 5) 20!.
- 22.** Скільки можна написати трицифрових чисел із різними цифрами, не використовуючи цифри 0?
- 1) 6;
 - 2) 8;
 - 3) 504;
 - 4) 40;
 - 5) 9!.

23. Кидають гральний кубик два рази. Скільки може бути випадків, при яких цифра, що випаде при першому киданні, відрізняється від цифри, що випаде при другому киданні?
- 1) 6 ;
 - 2) 8;
 - 3) 2;
 - 4) 12;
 - 5) 30.
24. Загальний розв'язок рекурентного співвідношення $f(n + 2) = 4f(n + 1) - 3f(n)$:
- 1) $f(n) = C_1 + C_2 3^{n-1}$;
 - 2) $f(n) = (C_1 + C_2) 3^{n-1}$;
 - 3) $f(n) = C_1 3^{n-1}$;
 - 4) $f(n) = C_1 4^{n-1} + C_2 3^{n-1}$;
 - 5) $f(n) = C_2 3^{n-1}$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Скільки існує варіантів триколірного прапора, на якому зображено три вертикальні смуги різних кольорів, якщо є вибір із тканин п'яти різних кольорів?
2. Скількома способами можна виготовити чотириколірний прапорець із горизонтальних смуг однакової ширини, маючи чотири смужки різного кольору?
3. Із колоди, яка має 52 карти, вийняли 10 карт. Скількома різними способами це можна зробити? У скількох випадках серед цих карт опиниться хоча б один туз? Лише один туз? Рівно чотири тузи?
4. Скільки можна написати трицифрових чисел з різними цифрами, не використовуючи цифру 0?
5. На п'ять співробітників виділено три путівки. Скількома способами можна розподілити ці путівки, якщо:
 - а) усі путівки різні;
 - б) усі путівки однакові?
6. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох студентів із групи для чергування, якщо:
 - а) один із них має бути старшим;
 - б) старшого не має бути?

7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3 так, щоб жодна з них в числі не повторювалася?
8. На зборах мають виступати чотири особи: А, В, С, Д. Скількома способами їх можна записати у списку ораторів, якщо В може виступати тільки перед А?
9. У розіграші першості країни з футболу у вищій лізі класу “А” бере участь 15 команд. Команди, які займуть перше, друге та третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною та бронзовою медалями. Скільки різних варіантів розподілу призових місць?
10. Скількома способами можуть розміститися в аудиторії 10 студентів на 25 стільцях?
11. В одного студента є 10 книг із математики, а в іншого — дев'ять. Скількома способами вони можуть обміняти дві книги одного на дві книги іншого?
12. Виготовлено 10 виробів. Для вибіркового контролю потрібно взяти два із цих 10 виробів. Скількома способами це можна зробити?
13. Кожний із 10 присутніх має привітатися з іншими за руку. Скільки буде всіх рукоштовань?
14. Наукове товариство складається з 35 членів. Треба обрати голову, заступника голови та секретаря товариства. Скількома способами це можна зробити, якщо кожний член товариства може займати лише одну з цих посад?
15. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепедів, довжини ребер яких є цілим числом від 1 до 10?
16. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?
17. У кімнаті гуртожитку проживає три студенти. Вони мають чотири чашки, п'ять блюдець, шість чайних ложок (усі предмети відрізняються один від одного). Скількома способами студенти можуть накрити стіл на три особи для чаювання?

18. В Англії прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен 300 і дитині не дають більше трьох імен?
19. Дресирувальник хоче вивести на арену п'ять левів та чотири тигри. При цьому не можна, щоб два тигри йшли один за одним. Скількома способами він може розмістити звірів?
20. Абонент забув шифр сейфа. Проте він пам'ятає, що шифр починається з букви А і містить три четвірки і дві п'ятірки. Скільки спроб повинен зробити абонент, щоб набрати потрібний номер?
21. У кондитерському кафе, до якого зайшли Сергій та Оксана, є тістечка чотирьох видів: "Наполеон", "Еклер", пісочні та листкові. Скільки існує варіантів такої покупки:
- а) Сергій і Оксана купують по одному тістечку;
 - б) Сергій і Оксана купують по одному тістечку й не хочуть, щоб вони були одного сорту;
 - в) Сергій купує два тістечка Оксані;
 - г) Сергій купує два тістечка Оксані, й вона не хоче, щоб вони були одного сорту?
22. У студентській групі, яка складається із 25 осіб, при виборі старости за висунуту кандидатуру проголосувало 12 осіб, проти – 10, утрималося – троє. Скількома способами могло бути проведене таке голосування?
23. У вазі стоять 10 червоних і чотири рожеві гвоздики. Скількома способами можна вибрати букет із трьох гвоздик?
24. У класі 25 учнів. Щодня призначається один черговий. Скількома способами можна скласти розклад чергувань на п'ять днів так, щоб ніхто не чергував більше одного разу?
25. Кожен учень ліцею вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчає 250 учнів, французьку – 270 учнів, обидві мови вивчає 180 учнів. Скільки учнів у ліцеї?
26. У групі студентів кожний студент або блондин, або брюнет. Серед студентів – 10 блондинів, решта – брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед 12-ти студентів, які люблять читати детективи, п'ять блондинів і сім брюнетів. Скільки

чоловік налічує група, якщо два брюнети не люблять читати детективи?

27. Скільки чисел серед перших 100 натуральних не ділиться ані на два, ані на три, ані на п'ять?
28. В одному канадському місті 85 % жителів розмовляє англійською мовою, 65 % – французькою, частина жителів розмовляє англійською і французькою мовами. Який відсоток жителів цього міста розмовляє англійською і французькою мовами?
29. На заміську прогулянку поїхало 92 студенти. Бутерброди з ковбасою взяло 47 студентів, із сиром – 38 студентів, із шинкою – 42 студенти, із сиром і ковбасою – 28 студентів, із ковбасою і шинкою – 31 студент, із сиром і шинкою – 26 студентів. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а декілька студентів замість бутербродів прихопили з собою пиріжки. Скільки студентів взяли з собою пиріжки?
30. Скільки шестицифрових чисел, які кратні числу 5, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 при умові, що в числі немає однакових цифр?
31. 20 карток для гри в лото роздають чотирьом гравцям по п'ять карток кожному. Скількома способами це можна зробити?
32. Скільки потрібно років, щоб, обідаючи щодня, одні й ті ж сім чоловік вичерпали всі варіанти їх розміщення за столом?
33. Скільки можна утворити різних трицифрових чисел за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5?
34. Скількома способами можна посадити за круглий стіл п'ятеро юнаків і п'ятеро дівчат так, щоб дві особи однієї статі не сиділи поруч?
35. У деякій державі не було двох жителів з однаковим набором зубів. Яка може бути найбільша кількість жителів країни (найбільша кількість зубів у людини – 32)?
36. Група з семи юнаків і десяти дівчат танцює.
 - а) Якщо у якомусь танці беруть участь усі юнаки, то скільки є варіантів участі дівчат у цьому танці?

- б) Скільки є варіантів, якщо враховувати лише те, які дівчата залишаться незапрошеними?
- в) Дайте відповіді на ті ж запитання, якщо стосовно двох дівчат можна впевнено сказати, що вони будуть запрошені на танець.
37. *У чоловіка є 12 знайомих – п'ять жінок і сім чоловіків, а у його дружини інших 12 знайомих – сім жінок і п'ять чоловіків. Скількома способами можна скласти компанію із шести чоловіків і шести жінок так, щоб шестеро гостей запросив чоловік, а шестеро його дружина?
38. Скількома способами можна вибрати 12 студентів із 17, якщо певні два студенти із цих 17 не можуть бути вибрані разом?
39. Хор складається з 10 учасників. Скількома способами можна протягом трьох днів вибирати по шість учасників так, щоб кожен день був різний склад хору?
40. Людина має шість друзів і протягом 20 днів запрошує до себе трьох із них так, щоб компанія жодного разу не повторилася. Скількома способами вона зможе це зробити?
41. Скількома способами можна переставляти букви слова “кавоварка”, так, щоб голосні і приголосні чергувалися?
42. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 30 три числа так, щоб їхня сума була парною?
43. *Кожна сторона квадрата розбита на n частин. Скільки можна побудувати трикутників, вершинами яких є точки поділу?
44. *У сейфі зберігаються документи, над якими працює комісія у складі п'яти чоловік. Яку найменшу кількість замків повинен мати сейф і скільки ключів потрібно видати кожному члену комісії, щоб доступ до документів був можливий лише тоді, коли збираються будь-які три члени комісії?
45. Обчислити: $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$.
46. Електронні документи передаються по семи каналах зв'язку з пункту A в пункт B . У пункті B документи редагують і передають назад у пункт A .
- а) Скількома способами можна передати документ із пункту A в пункт B і назад?

- б) Дати відповідь на те ж питання, якщо документ не може повернутися в пункт A по тому ж каналу, по якому він був переданий в пункт B .
47. У боротьбі за призові місця на студентській олімпіаді з інформаційних технологій бере участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені перше і друге місця?
48. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо :
- а) ні одна з цифр не повторюється більше одного разу;
 - б) цифри можуть повторюватись;
 - в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись)?
49. Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться на п'ять?
- 50.* На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на іншій – m точок. Кожна із вершин при основі трикутника з'єднана прямими з точками, взятими на протилежній стороні.
- а) Скільки точок перетину цих прямих утвориться всередині трикутника?
 - б) На скільки частин ділять трикутник ці прямі?
51. Скільки існує двоцифрових чисел, у яких обидві цифри парні?
52. Скільки існує п'ятицифрових чисел, у яких усі цифри непарні?
- 53.* У прямокутній таблиці з m рядків і n стовпців записано числа $+1$ і -1 так, що добуток чисел у кожному рядку й кожному стовпці дорівнює рівно 1. Скількома способами можна таким чином заповнити таблицю?
54. В електронній бібліотеці є 10 статей із заданої тематики. Скількома способами можна скопіювати три статті на диск на локальному комп'ютері?
55. В електронній папці міститься п'ять документів. Вибраний навмання документ копіюється в іншу папку, після чого ще один вибраний навмання документ копіюється на дискету. Скількома способами можна проробити ці операції?
56. Скількома способами можна розмістити на полиці п'ять книг?
57. Скількома способами можна розмістити елементи множини $\{1, 2, \dots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

58. Скільки можна скласти перестановок із n книг, у яких дані дві книги не стоять поряд?
59. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці вісім тур так, щоб вони не могли бити одна одну?
60. Скількома способами можна розмістити чотири документи на 25 місцях?
61. Студентові потрібно скласти чотири іспити протягом восьми днів. Скількома способами це можна зробити?
62. Є 10 електронних документів, три з яких потрібно помістити в чергу на друк на лазерному принтері. Скількома способами це можна зробити?
63. Є п'ять комп'ютерів і чотири користувачі. Скількома способами можна розподілити користувачів за комп'ютерами, якщо кожному користувачеві повинен дістатися комп'ютер і не дозволяється працювати двом користувачам за одним і тим же комп'ютером?
64. Є 10 символів, які можна використовувати для створення дволітерного коду електронного документа. Скільки кодів можна скласти з цих символів?
65. У бібліотеці є п'ять книг з інформаційних технологій. Скількома способами можна вибрати з них три книги?
66. Скількома способами з семи документів можна вибрати три?
67. У комп'ютерній сітці працюють n користувачів, при чому кожен із них зв'язувався з іншими по e-mail упродовж однієї години один раз. Скільки сеансів зв'язку користувачів один з одним відбулося впродовж цієї години?
- 68.* У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n -кутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?
69. Дано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести, з'єднавши точки попарно?
- 70.* На площині проведено n прямих так, що жодні дві з них не паралельні й жодні три не перетинаються в одній точці.
- а) Знайти кількість точок перетину цих прямих;
 - б) Скільки трикутників створюють ці прямі?
 - в) На скільки частин ділять площину ці прямі?

71. Скільки є чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра більша попередньої?
72. Скільки існує чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра менша попередньої?
- 73.* В опуклому n -кутнику проведені всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці всередині n -кутника. На скільки частин розділиться при цьому многокутник?
74. У комп'ютерному класі є шість комп'ютерів. Для наукового експерименту потрібно відібрати чотири комп'ютери. Скількома способами можна це зробити?
75. Знайти сьомий член розкладу бінома $(a^2\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}/a)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена дорівнює 36.
76. Знайти номер члена розкладу бінома $(\sqrt[3]{x} + 1/x)^{16}$, що не містить x .
77. Знайти суму біноміальних коефіцієнтів членів, що стоять на непарних місцях у розкладі бінома $(x + y)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена на дев'ять більший біноміального коефіцієнта другого члена.
78. Скільки членів розкладу бінома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ є цілими числами, указати їх номери.
79. Обчислити суму $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$.
80. Знайти алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлена відносно x , одержаного в розкладі бінома $(3x - 4)^{17}$.
81. Знайти член розкладу бінома $(x\sqrt{x} + 1/\sqrt[3]{x})^n$, який містить x^5 , якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 128.
82. У розкладі бінома $(x^2y + y^2x)^8$ знайти доданок, що містить:
а) $x^{11}y^{13}$, б) $x^{16}y^9$.
83. У розкладі $\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt[10]{\frac{x^7}{y^3}} \right)^n$ є доданок, який містить xy . Знайти його.
84. До якого натурального степеня потрібно піднести біном $\frac{1}{\sqrt{2}} + 3$, щоб відношення четвертого доданка розкладу до третього дорівнювало $3\sqrt{2}$?

85. Знайти показник степеня бінома $(a + b)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт четвертого члена розкладу дорівнює 120.
86. Знайти значення показника n в розкладі бінома $(x + y)^n$, якщо коефіцієнт п'ятого й дев'ятого членів рівні між собою.
- 87.* Знайти T_m – m -ний член розкладу $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^n$, якщо відомо, що $T_{m+2} : T_{m+1} : T_m = 28 : 8\sqrt{6} : 9$.
88. Знайти m і n , якщо в розкладі $(\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})^n$ відомо, що $T_{m+2} : T_{m+1} : T_m = 2 : 5 : 8$.
89. Знайти раціональні члени в розкладі $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.
90. Знайти раціональні члени в розкладі $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{8})^{15}$.
91. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів міститься в цьому розкладі? Знайти серед них член із найбільшим біноміальним коефіцієнтом.
92. Розв'язати рівняння: $A_x^4 - A_{x+1}^3 = \frac{5}{4} \times A_x^3$.
93. Спростити: $\frac{C_{m+1}^{k+1} - C_m^k}{C_{m-1}^k}$.
94. У розкладі бінома $(x\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x})^{10}$ знайти п'ятий член розкладу.
95. У розкладі $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$ коефіцієнт третього члена на 44 більший від коефіцієнта другого члена. Знайти вільний член, тобто член розкладу, що не залежить від x .
96. У розкладі бінома $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3})^{14}$ знайти член, який містить після спрощення x^2 .
97. Розв'язати рекурентні рівняння із заданими початковими умовами:
- а) $f(n + 2) - 5f(n + 1) + 6f(n) = 0$, якщо $f(1) = 1, f(2) = -7$;
 - б) $f(n + 2) - 4f(n + 1) + 4f(n) = 0$, якщо $f(1) = 2, f(2) = 4$;
 - в) $f(n + 2) + 2f(n + 1) + f(n) = 0$, якщо $f(1) = 3, f(2) = -5$;
 - г) $f(n + 2) - f(n + 1) - f(n) = 0$, якщо $f(1) = 1, f(2) = 1$;

д) $f(n + 4) - 5f(n + 2) + 4f(n) = 0$, якщо $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$.

98. Знайти загальний розв'язок рекурентного співвідношення:

а) $f(n + 3) + 3f(n + 2) + 3f(n + 1) + f(n) = 0$;

б) $f(n + 3) - 3f(n + 2) + f(n + 1) + f(n) = 0$;

в) $f(n + 3) - 2f(n + 2) - f(n + 1) - 6f(n) = 0$;

г) $f(n + 4) - 5f(n + 3) + 6f(n + 2) + 4f(n + 1) - 8f(n) = 0$;

д) $f(n + 3) - 9f(n + 2) + 26f(n + 1) - 24f(n) = 0$.

99. Скільки чисел серед перших 100 натуральних не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5 ?

100. На фірмі працює декілька осіб, причому кожна з них знає хоча б одну іноземну мову: шестеро – англійську, шестеро – німецьку, семеро – французьку, двоє – англійську і французьку, четверо – англійську і німецьку, троє – німецьку і французьку, одна особа знає всі три мови одночасно. Скільки осіб працює на фірмі?

101. У ящику знаходиться 20 деталей, із них 3 браковані. Витягують 5 деталей. Скільки існує способів витягнення 1 бракованої?

102. Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

103. Для підготовки до іспиту запропоновано 80 запитань. Студент знає відповідь лише на 15 з них. Екзаменаційний білет складається із 6 різних запитань із даного переліку. Скільки різних екзаменаційних білетів можна скласти так, щоб студент міг відповісти принаймні на одне запитання білета?

104. Скільки членів було в клубі, якщо при нумерації членських білетів використовувалися усі трицифрові номери, в яких не було жодної цифри 8?

**Зразки самостійних робіт
до теми “Елементи комбінаторного аналізу”**

Варіант 1

1. Довести теорему про кількість різних перестановок із повтореннями.
2. Абонент пам’ятає, що потрібний йому номер починається з цифри 9 і містить три четвірки і дві п’ятірки. Проте послідовність цифр він забув. Скільки спроб повинен зробити абонент, щоб набрати потрібний номер ?
3. Скількома способами можна з групи, яка складається з семи юнаків та чотирьох дівчат, вибрати шість представників так, щоб серед них було не менше двох дівчат?

Варіант 2

1. Довести теорему про кількість різних комбінацій із повтореннями.
2. Скільки можна утворити різних трицифрових додатних цілих чисел у десятковій системі числення?
3. Скількома способами можна вибрати три букви із фрази “Око за око, зуб за зуб”?

Варіант 3

1. Довести теорему про кількість різних розміщень із повтореннями.
2. Знайти член розкладу бінома $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, який не залежить від x .
3. У скількох випадках під час гри в лотерею (угадкування п’яти номерів із 36) буде правильно вибрано рівно два номери?

Варіант 4

1. Довести теорему про кількість різних перестановок без повторень.
2. Скількома способами можна переставляти букви слова “логісифм” так, щоб друге, четверте і шосте місце були зайняті приголосними буквами?
3. У розкладі $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$ коефіцієнт третього члена на 44 більший від коефіцієнта другого члена. Знайти вільний член.

РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Література [2] – розд. 4; [4] – розд. 4, 5; [6] – розд. 4.

4.1. Неорієнтовані графи: їх різновиди

Основні теоретичні відомості

Неорієнтований граф (граф) – це система, що складається з непорожньої множини V і множини U деяких невпорядкованих пар із V . Множина V містить елементи, які називаються вершинами, U – ребрами. Записують так: $G = (V, U)$.

Число вершин графа називається *порядком* графа. Позначається $|G| = n$.

Вершини A та B називаються *суміжними*, якщо існує ребро, кінцями якого є ці вершини. Говорять, вершини A та B *інцидентні* ребру AB . Ці вершини називають *кінцями* ребра AB . Цілком аналогічно, що два різні ребра – *суміжні*, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.

Степенем вершини називається кількість ребер інцидентних цій вершині. Позначається так: $\rho(A)$.

Вершина називається *непарною*, якщо її степінь непарний, *парною* – якщо степінь парний.

Лема. Сума степенів усіх вершин графа є парним числом.

Отже, у будь-якому графі число вершин непарного степеня – число парне.

Якщо граф має декілька однакових ребер, то вони називаються *кратними*. Граф, який має кратні ребра, називається *мультиграфом*.

Ребро, яке з'єднує вершину саму із собою, називається *петлею*. Граф, який містить кратні ребра й петлі, називається *псевдографом*.

Граф називається *повним*, якщо кожні дві його різні вершини сполучені одним і лише одним ребром. Такі графи позначаються K_n , де n – кількість вершин. Граф G , який є неповним, легко перетворити у повний. Досить доповнити граф ребрами, яких не вистачає. Вершини графа G та ребра, що додані, теж утворюють граф, який називають *доповненням* графа G і позначають $\overline{G}$.

Граф називається *регулярним* (однорідним), якщо всі його вершини мають один і той же степінь. Якщо степінь кожної вершини регулярного графа k , то граф називається *k -регулярним*.

Порожнім (нуль-графом) називається граф, який має вершини, але не має ребер. Позначається так: N_n , де n – кількість вершин графа.

Платоновими графами називаються графи, які утворені вершинами й ребрами п'яти правильних многогранників – платонових тіл (тетраедра, куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра).

Граф називають *двочастинним*, якщо існує таке розбиття множини його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах. Якщо ж у двочастинному графі довільні дві вершини з різних класів – суміжні, то граф називається *повним двочастинним*. Позначається так: $K_{n, m}$, де n, m – кількість вершин графа першого і другого класів відповідно.

Повний двочастинний граф $K_{1, 5}$ називають *зірковим*.

Приклади

1. Для графа G встановити степені вершин (рис. 4.1).

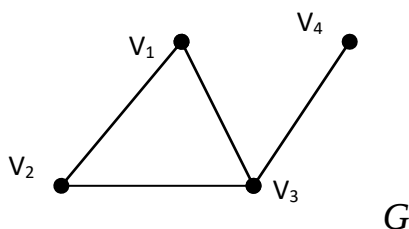


Рис. 4.1. Граф G

Розв'язання

Підрахуємо кількість ребер, які інцидентні кожній вершині графа. Маємо: $\rho(V_1) = 2$, $\rho(V_2) = 2$, $\rho(V_3) = 3$, $\rho(V_4) = 1$.

Відповідь: $\rho(V_1) = 2$, $\rho(V_2) = 2$, $\rho(V_3) = 3$, $\rho(V_4) = 1$.

2. Серед графів, зображених на рисунку 4.2, виділити повні графи, регулярні, порожні та платонові.

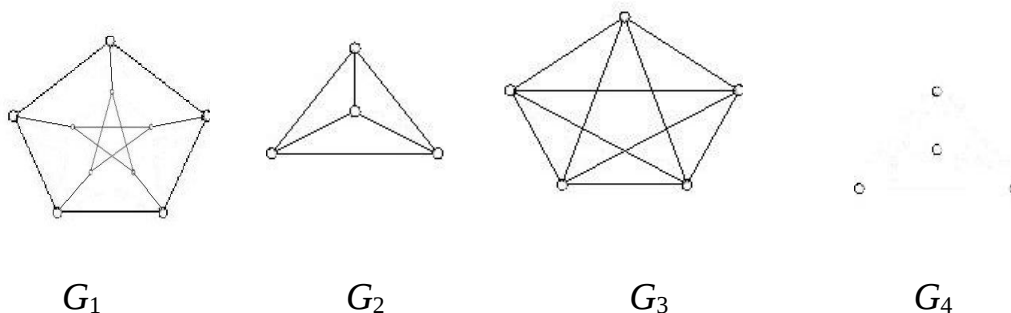


Рис. 4.2. Графи

Розв'язання

Повні графи – $G_2 = K_4$, $G_3 = K_5$, бо кожні дві їх різні вершини сполучені одним і лише одним ребром.

Регулярні графи – G_1 , G_2 , G_3 , бо всі їх вершини мають один і той же степінь. Граф G_4 має вершини, але не має ребер, тому він порожній.

Відповідь: повні граfi – G_2 , G_3 ; регулярні граfi – G_1 , G_2 , G_3 ; порожній граф – G_4 .

3. Зобразити граfi, які відповідають тетраедру, кубу, октаедру.

Розв'язання

Платонові граfi, які утворені вершинами й ребрами тетраедра, куба та октаедра, зображено на рисунку 4.3.

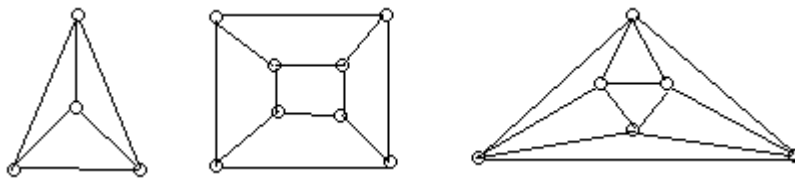


Рис. 4.3. Платонові граfi

4. Навести приклад мультиграфа та псевдографа.

Розв'язання

На рисунку 4.4 зображено граф G_1 , який має кратні ребра, тому G_1 – мультиграф. Граф G_2 має кратні ребра й петлі, тому G_2 – псевдограф.

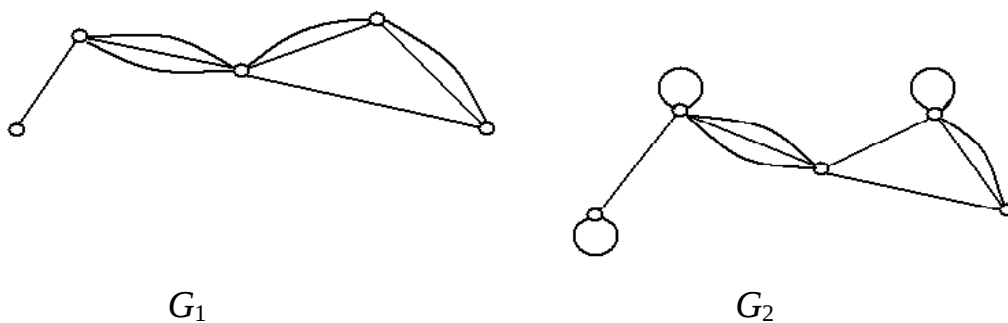


Рис. 4.4. Мультиграф та псевдограф

5. Побудувати доповнення графа G (рис. 4.5).

Розв'язання

Граф G , який є неповним, можна перетворити у повний. Для цього досить доповнити граф G ребрами, яких не вистачає (рис. 4.6). Вершини графа G та ребра, що додані, утворюють граф $\bar{G}$, який і є доповненням графа G (рис. 4.7).

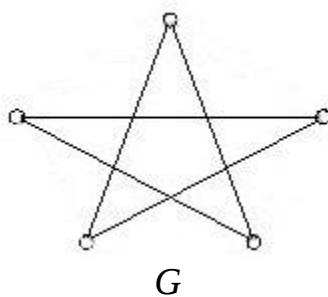


Рис. 4.5. Граф G

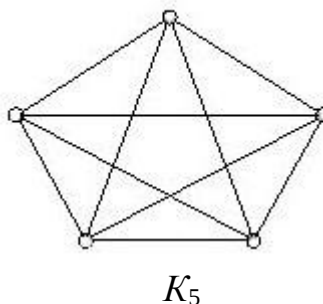


Рис. 4.6

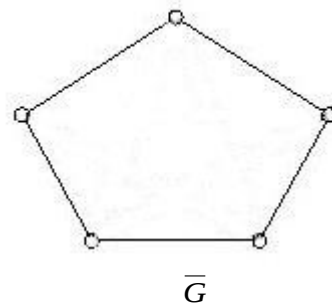


Рис. 4.7

6. Дев'ять шахістів проводять турнір в один круг (кожен із учасників має зіграти з кожним із них один раз). Довести, що в будь-який момент знайдуться принаймні два учасники, які зіграли однакову кількість партій.

Розв'язання

Поставимо у відповідність кожному шахісту вершину графа і з'єднаємо ребрами попарно вершини, що відповідають шахістам, які зіграли між собою. Отримаємо граф із дев'ятьма вершинами. Доведемо, що у довільного графа з дев'ятьма вершинами завжди знайдуться хоча б дві з однаковим степенем.

Припустимо від супротивного, нехай існує граф, який має вершини різного степеня: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Але якщо у графі є вершина степеня 0 (не з'єднана з жодною вершиною графа), то немає вершини степеня 8 (з'єднана з усіма вершинами графа). І навпаки, якщо у графі є вершина степеня 8, то немає вершини степеня 0. Отже, у графі не можуть бути одночасно вершини степеня 0 та 8. Звідси випливає, що у графі будуть принаймні дві вершини, степені яких рівні.

Отже, в будь-який момент знайдуться принаймні два учасники турніру, які зіграли однакову кількість партій.

7. Є 30 студентів, серед яких деякі знайомі між собою. Довести, що кількість студентів, які мають непарну кількість знайомих, парна.

Розв'язання

Поставимо у відповідність кожному студенту вершину графа і з'єднаємо ребрами попарно вершини, що відповідають студентам, які знайомі між собою.

Отримаємо граф із 30 вершинами. Сума всіх степенів вершин цього графа згідно леми – число парне. Звідси випливає, що непарних доданків у цій сумі мусить бути парна кількість.

Отже, кількість студентів, які мають непарну кількість знайомих, парна.

4.2. Маршрути, ланцюги та цикли у графах

Основні теоретичні відомості

Скінченна послідовність суміжних ребер (необов'язково різних) графа називається *маршрутом*. Кожне ребро графа є маршрутом. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні.

Число ребер у маршруті називається *довжиною* маршруту та позначається *l*. Ланцюг, у якого кінцеві вершини збігаються, називається *циклом*.

Ланцюг (цикл), у якого всі вершини різні, називається *простим* або *елементарним*.

Довжина найкоротшого простого ланцюга, який з'єднує вершини A та B , називається *відстанню* між A та B і позначається $S(AB)$.

Приклади

1. Встановити, чи є для графа G маршрут ланцюгом (простим ланцюгом), циклом (простим циклом) та знайти його довжину (рис. 4.8).

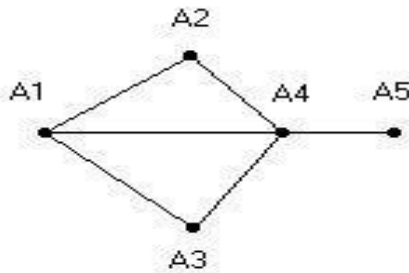


Рис. 4.8. Граф G

- а) $A_1 - A_4 - A_5$;
- б) $A_1 - A_2 - A_4 - A_5$;
- в) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_4$;
- г) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1$;
- д) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_2 - A_4 - A_5$.

Розв'язання

- а) $A_1 - A_4 - A_5$ – простий ланцюг, довжина $l = 2$;
- б) $A_1 - A_2 - A_4 - A_5$ – простий ланцюг, довжина $l = 3$;
- в) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_4$ – ланцюг, але непростий, довжина $l = 5$;
- г) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1$ – простий цикл, довжина $l = 4$;
- д) $A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_2 - A_4 - A_5$ – маршрут, який не є ні ланцюгом, ні циклом; довжина $l = 7$.

4.3. Орієнтовані графи. Орієнтовані графи та бінарні відношення

Основні теоретичні відомості

Орієнтованим графом (орграфом) називається система, яка складається з непорожньої множини V і непорожньої множини U упорядкованих пар елементів із V . Множина V містить елементи, які називаються *вершинами*, U містить елементи, які називаються *орієнтованими ребрами* (дугами).

Якщо дуга $AB \in U$, то вершину A називають *початковою*, а B – *кінцевою* вершиною дуги AB .

Орієнтованим маршрутом (ормаршрутом) називається скінченна послідовність суміжних дуг, у яких в кожну вершину, починаючи з другої, заходить дуга з попередньої вершини.

Якщо існує маршрут із вершини B до вершини A , то вершина A називається *досяжною* з вершини B .

Степенем входу вершини A називається кількість дуг, які входять у цю вершину; *степенем виходу* – кількість дуг, які виходять із вершини A .

Позначається: $\rho^+(A)$ – степінь виходу вершини A , $\rho^-(A)$ – степінь входу вершини A .

Якщо $\rho^+(A) = \rho^-(A) = 0$, то вершина A називається *ізолюваною*.

Якщо $\rho^+(A) > 0$, а $\rho^-(A) = 0$, то вершина A називається *джерелом*.

Якщо $\rho^+(A) = 0$, а $\rho^-(A) > 0$, то вершина A називається *стоком*.

Довільний орграф $G = (V, U)$ без кратних ребер задає деяке бінарне відношення α на множині V , і, навпаки, пара елементів $(A, B) \in \alpha \subset V \times V$ тоді й тільки тоді, коли у графа є дуга AB . Таким чином, між бінарними відношеннями, визначеними на деякій скінченній множині V , і орграфами, для яких множина V є множиною вершин, існує взаємно однозначна відповідність. Бінарні відношення є базовими поняттями для побудови багатьох математичних моделей, що використовуються під час розв'язування практичних задач. Графи дають можливість наглядно зображувати моделі у вигляді діаграм.

Приклади

1. Знайти джерело, стік, ізолювану вершину у графа G . Чи є вершина B досяжною з вершини A , і, навпаки, – вершина A досяжною з вершини B (рис. 4.9)?

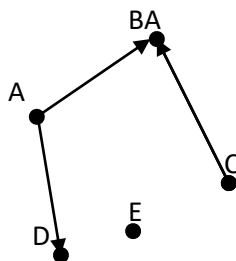


Рис. 4.9. Граф G

Розв'язання

$\rho^+(A) = 2$, $\rho^-(A) = 0$, тому вершина A – джерело;

$\rho^+(B) = 0$, $\rho^-(B) = 2$, тому вершина B – стік;

$\rho^+(C) = 1$, $\rho^-(C) = 0$, тому вершина C – джерело;

$\rho^+(D) = 0$, $\rho^-(D) = 1$, тому вершина D – стік;

$\rho^+(E) = \rho^-(E) = 0$, тому вершина E – ізолювана.

У графі G вершина B є досяжною з вершини A , проте вершина A не є досяжною з вершини B .

Відповідь: джерела – вершини A, C ; стоки – вершини B, D ; ізольована вершина – E . Вершина B є досяжною з A , а вершина A не є досяжною з B .

2. Які особливості графів:

- а) рефлексивного, антирефлексивного, нерефлексивного відношень;
- б) симетричного, антисиметричного, асиметричного відношень?

Розв'язання

а) У графа рефлексивного відношення кожна вершина має петлю, граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі, граф нерефлексивного відношення має петлі не у всіх вершинах.

б) У графа симетричного відношення всі стрілки подвійні, в антисиметричного усі стрілки напрямлені і є петлі, в асиметричного всі стрілки напрямлені й немає петель.

4.4. Матричне задання графів

Основні теоретичні відомості

За великої кількості вершин і ребер граф втрачає наочність. У такому разі для задання графів і роботи з ними використовуються таблиці, які називають матрицями.

Матрицею суміжності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро } A_i A_j \in U; \\ 0, \text{ якщо ребро } A_i A_j \notin U. \end{cases} \quad (1)$$

Матрицею суміжності орієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо дуга } A_i A_j \in U; \\ 0, \text{ якщо дуга } A_i A_j \notin U. \end{cases} \quad (2)$$

Матриці суміжності неорієнтованого графа й орграфа розрізняються тим, що перша завжди симетрична, а друга не обов'язково симетрична. Для псевдографів у матриці суміжності нулі й одиниці замінюють кратностями ребер. Це дає опис графа матрицею із цілими невід'єм-

ними елементами. І, навпаки, довільна матриця із цілими невід'ємними елементами може інтерпретуватися як граф.

Матрицею інцидентності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин і t ребер, називається матриця розмірності $n \times t$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \in e_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } A_i \notin e_j. \end{cases} \quad (3)$$

Матрицею інцидентності орієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин і t ребер, називається матриця розмірності $n \times t$, елементи якої обчислюються за правилом :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ початок дуги } e_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } A_i \text{ неінцидентна дузі } e_j; \\ -1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ кінець дуги } e_j. \end{cases} \quad (4)$$

Приклади

1. Побудувати матрицю суміжності для неорієнтованого графа G (рис. 4.10).

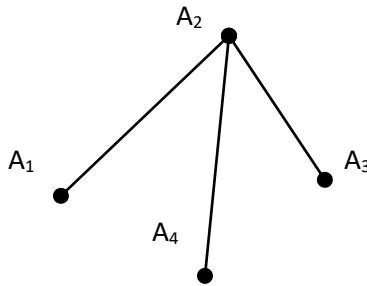


Рис. 4.10. Неорієнтований граф G

Розв'язання

Граф G має чотири вершини, тому матриця суміжності матиме розмірність 4×4 . Будуємо її, користуючись правилом (1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Побудувати матрицю суміжності для орієнтованого графа G (рис. 4.11).

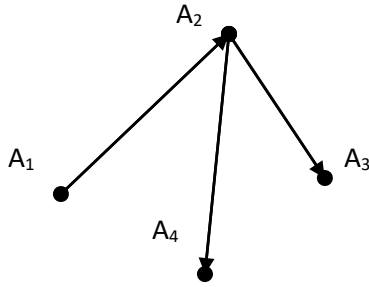


Рис. 4.11. Орієнтований граф G

Розв'язання

Граф G має чотири вершини, тому матриця суміжності матиме розмірність 4×4 . Будуємо її, користуючись правилом (2):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Побудувати граф, який заданий матрицею суміжності

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки матриця четвертого порядку, то граф матиме чотири вершини, які позначимо A_1, A_2, A_3, A_4 . Матриця несиметрична, тому будуємо оргграф. Оскільки елементи матриці цілі невід'ємні числа, то оргграф буде містити кратні дуги й петлі (рис. 4.12).

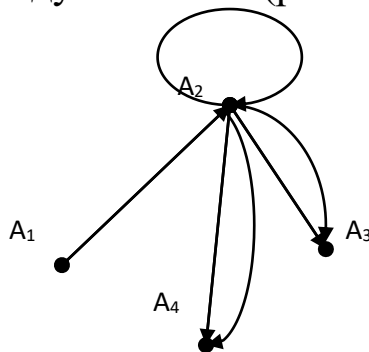


Рис. 4.12. Оргграф

4. Побудувати матрицю інцидентності графа G (рис. 4.13).

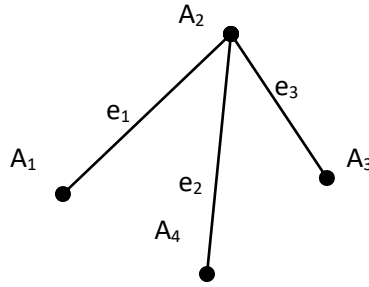


Рис. 4.13. Граф G

Розв'язання

Граф G має чотири вершини і три ребра, тому матриця інцидентності графа матиме розмірність 4×3 . Будуємо її, користуючись правилом (3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Побудувати матрицю інцидентності для орієнтованого графа G (рис. 4.14).

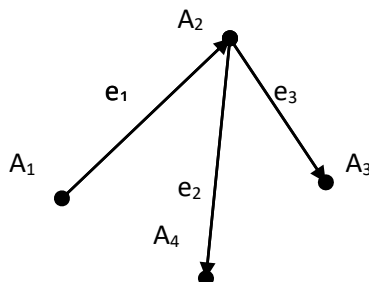


Рис. 4.14. Орієнтований граф

Розв'язання

Граф G орієнтований, він має чотири вершини і три ребра. Тому матриця інцидентності графа матиме розмірність 4×3 . Будуємо її, користуючись правилом (4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.5. Ізоморфізм графів

Основні теоретичні відомості

Два графи $G_1 = (V_1, U_1)$, $G_2 = (V_2, U_2)$ називаються *ізоморфними*, якщо між множинами V_1 та V_2 можна встановити взаємно однозначну відповідність $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, тобто таку, що довільній парі вершин A та B графа G_1 , які є суміжними, відповідає пара суміжних вершин $\varphi(A)$ та $\varphi(B)$ графа G_2 .

Теорема. Прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли їхні матриці суміжності отримують одну з одної однаковими переставленнями рядків та стовпців.

Властивості ізоморфних графів:

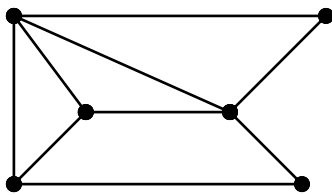
- 1) ізоморфні графи мають однакову кількість вершин;
- 2) ізоморфні графи мають однакову кількість ребер;
- 3) ізоморфні графи мають однакову кількість вершин певного степеня;
- 4) для неорієнтованих графів степені відповідних вершин збігаються; для орієнтованих – степені входу та виходу збігаються.

Ці властивості ізоморфних графів не є достатніми. Не існує набору інваріантів для визначення ізоморфізму графів.

Відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх графів розбивається на класи ізоморфних графів. Про графи, які належать до одного класу, говорять, що вони розрізняються з точністю до ізоморфізму, або вживають термін *абстрактний граф*.

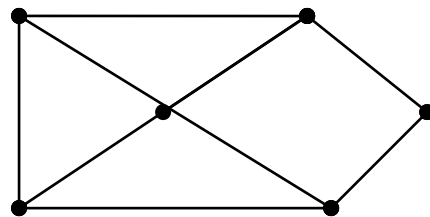
Приклади

1. Чи є ізоморфними графи G_1 й G_2 та G_3 й G_4 (рис. 4.15)?



a)

G_1



G_2

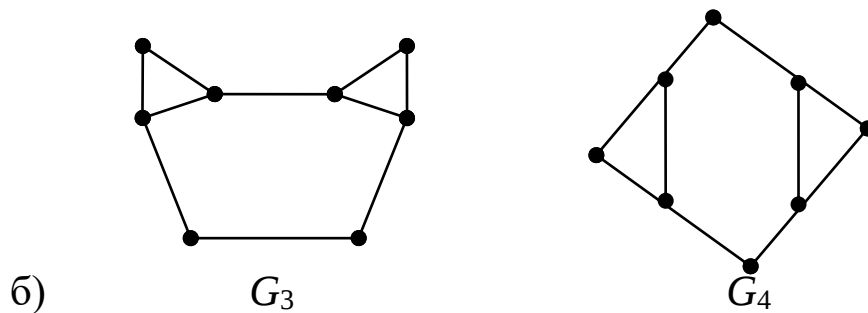


Рис. 4.15. Графи

Розв'язання

а) Графи G_1 та G_2 мають по шість вершин та дев'ять ребер. Однак граф G_1 має дві вершини степеня 4, а граф G_2 лише одну вершину цього степеня. Тому вони не ізоморфні.

б) Графи G_3 та G_4 мають по вісім вершин та 10 ребер. Вони також мають по чотири вершини степеня 2 і по чотири вершини степеня 3. Однак ці графи не ізоморфні.

Дійсно, у графа G_4 усі вершини степеня 2 суміжні лише вершинам степеня 3, а у графа G_3 є вершини степеня 2, які суміжні як вершині степеня 2, так і вершині степеня 3.

Відповідь: графи G_1 та G_2 не є ізоморфними; графи G_3 та G_4 не є ізоморфними.

4.6. Частини графа, суграфи та підграфи. Операції над графами

Основні теоретичні відомості

Граф H називається *частиною* графа G , якщо множина вершин графа H є підмножиною множини вершин графа G і всі ребра графа H є ребрами графа G .

Частина H_1 графа G , множина вершин якої збігається з множиною вершин графа G , називається *суграфом*.

Частина H_2 графа G називається *підграфом* графа G , якщо множина ребер графа H_2 є всі ребра графа G , обидва кінці якого належать частині H_2 .

Нехай дано граф $G = (V, U)$ і ребро $e \in U$.

Розглядають такі операції над графами:

1. Вилучення ребра.

Говорять, що граф G_1 одержали з графа G унаслідок операції вилучення ребра e , якщо $G_1 = (V, U \setminus \{e\})$.

2. Операція вилучення вершин.

Говорять, що граф G_2 одержали з графа G унаслідок операції вилучення вершини A , якщо вершина A вилучається з множини V , а з множини U вилучаються всі ребра, інцидентні цій вершині.

3. Операція введення ребра.

Нехай A та B – дві вершини графа G , причому ребро $AB \notin U$.

Говорять, що граф G_3 одержаний із графа G внаслідок введення ребра AB , якщо $G_3 = (V, U \cup \{AB\})$.

4. Операція введення вершини.

Нехай AB – деяке ребро графа G . Введенням вершини M у ребро AB називається операція, внаслідок якої отримуємо два ребра AM та MB , а ребро AB при цьому вилучається з графа G .

5. Об'єднання та переріз графів.

Нехай H_1 та H_2 – довільні графи, які можна розглядати як частини деякого складнішого графа.

Об'єднанням графів H_1 та H_2 називається граф, який складається з усіх ребер, що належать як H_1 , так і H_2 .

Перерізом графів H_1 та H_2 називається граф, множина вершин якого є перерізом множин вершин H_1 та H_2 , множина ребер – переріз множин ребер H_1 та H_2 .

Приклади

1. Встановити чи є графи H , H_1 , H_2 частинами (суграфами, підграфами) графа G (рис. 4.16).

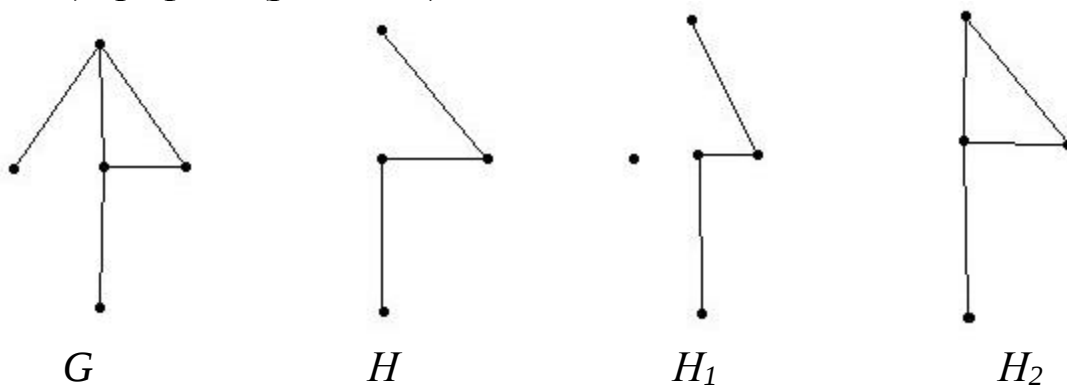


Рис. 4.16. Графи G , H , H_1 , H_2

Розв'язання

Графи H , H_1 , H_2 є частинами графа G , адже множини вершин та ребер цих графів є відповідно підмножинами множин вершин і ребер графа G .

Множина вершин графа H_1 збігається з множиною вершин графа G , тому H_1 є суграфом графа G .

Множиною ребер графа H_2 є всі ребра графа G , обидва кінці якого належать частині H_2 . Отже, H_2 – підграф графа G .

Відповідь: графи H , H_1 , H_2 є частинами графа G ; граф H_1 є суграфом графа G ; H_2 – підграф графа G .

2. Вилучити із графа G ребро e (рис. 4.17).

Розв'язання

Граф G_1 (рис.4.17) одержали з графа G внаслідок операції вилучення ребра e .

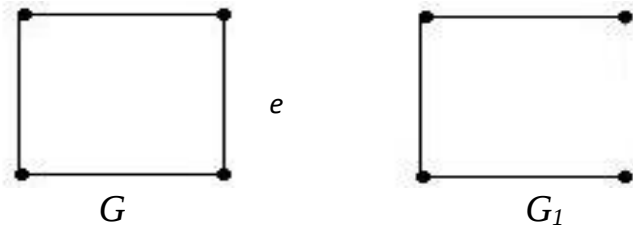


Рис. 4.17. Граф G

3. Вилучити із графа G вершину B (рис. 4.18).

Розв'язання

Граф G_2 (рис. 4.18) одержали з графа G внаслідок операції вилучення вершини B .

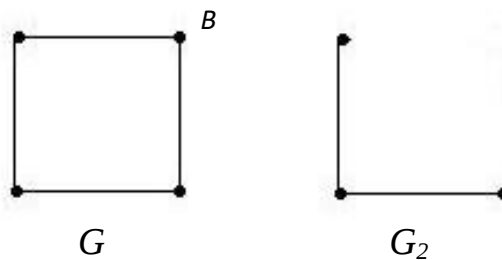


Рис. 4.18. Граф G

4. Ввести ребро AD у граф G (рис. 4.19).

Розв'язання

Граф G_3 (рис. 4.19) – одержаний із графа G внаслідок введення ребра AD .

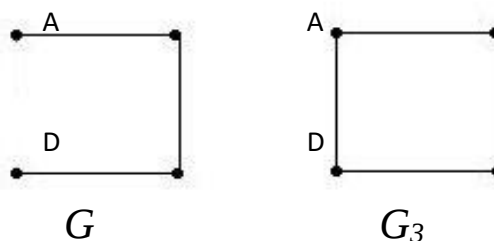


Рис. 4.19. Граф G

4. Ввести вершину M у ребро AB графа G (рис. 4.20).

Розв'язання

Граф G_4 (рис. 4.20) одержаний із графа G внаслідок введення вершини M у ребро AB .

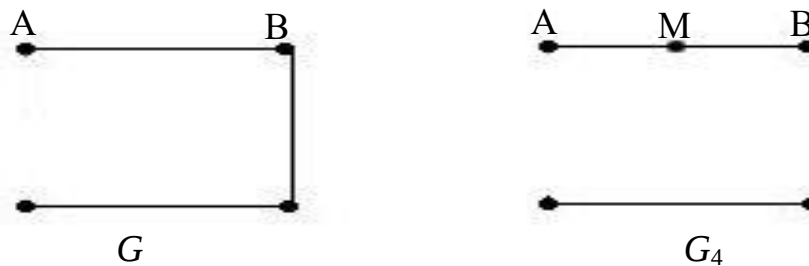


Рис. 4.20. Граф G

4.7. Зв'язність графів. Мости

Основні теоретичні відомості

Неорієнтований граф називається *зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Якщо в орграфі кожен дугу замінити ребром, то отримаємо неорієнтований граф, який називається асоційованим із даним графом.

Орграф називається *слабко зв'язним*, якщо асоційований із ним граф – зв'язний.

Компонентою зв'язності (сильної) графа G називається зв'язний (сильно зв'язний) підграф, який не є власним підграфом довільного іншого зв'язного (сильно зв'язного) підграфа графа G .

Числом вершин зв'язності $k(G)$ графа G (числом зв'язності) називається найменше число вершин, видалення яких приводить до незв'язного графа або графа, який складається з однієї вершини.

Числом реберної зв'язності $\lambda(G)$ графа G називається найменше число ребер, видалення яких приводить до незв'язного графа.

Ребро AB графа називається *мостом*, якщо у графі, який отримується після видалення ребра AB , вершини A та B стають незв'язними.

Ознаки мостів:

- 1) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли AB – єдиний ланцюг, який з'єднує ці вершини;
- 2) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли знайдуться дві вершини даного графа C_1 та C_2 такі, що кожний ланцюг, який їх з'єднує, містить A та B ;
- 3) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли воно не належить жодному циклу.

Нехай дано граф $G = (V, U)$. На множині його вершин означимо відношення досяжності d за правилом: дві довільні вершини V_j, V_i графа G перебувають у відношенні досяжності d тоді й тільки тоді, коли вони збігаються або існує маршрут, який їх з'єднує.

Матрицею зв'язності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ досяжна з } A_j; \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, що матриця зв'язності неорієнтованого графа є симетричною і має по головній діагоналі завжди одиниці.

Довільні вершини V_j та V_i орграфа G перебувають у відношенні односторонньої досяжності d_1 тоді й тільки тоді, коли вони збігаються або існує маршрут із вершини V_j у вершину V_i .

Довільні вершини V_j та V_i орграфа G перебувають у відношенні двосторонньої досяжності d_2 тоді й тільки тоді, коли вони збігаються чи існує маршрут із вершини V_j у вершину V_i та навпаки.

Для орграфів вводиться дві матриці – слабкої зв'язності та сильної зв'язності. Матриця слабкої зв'язності орграфа означається аналогічно матриці зв'язності неорієнтованого графа.

Матрицею сильної зв'язності орієнтованого графа $G(V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ досяжна з } A_j \text{ і, навпаки;} \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (2)$$

Така матриця не є симетричною.

Приклади

1. Побудувати матрицю зв'язності графа G (рис. 4.21).

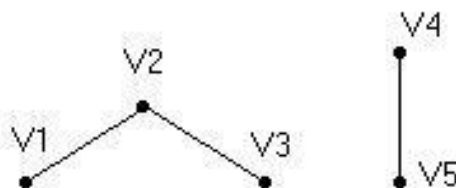


Рис. 4.21. Граф G

Розв'язання

Граф G має п'ять вершин, тому матриця зв'язності для даного неорієнтованого графа матиме розмірність 5×5 . Будуємо її, користуючись правилом (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Для графа G визначити число вершин зв'язності та число реберної зв'язності (рис. 4.22).

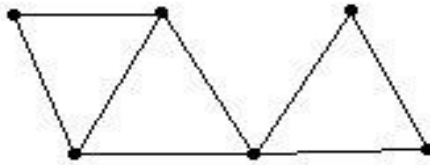


Рис. 4.22. Граф G

Розв'язання

Найменше число вершин, вилучення яких із графа G приводить до незв'язного графа, дорівнює 1, тому $k(G) = 1$.

Найменше число ребер, які потрібно вилучити, щоб граф G став незв'язним, дорівнює 2, тому $\lambda(G) = 2$.

Відповідь: $k(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$.

4.8. Задачі пошуку маршрутів у графі

Основні теоретичні відомості

У багатьох задачах, математичні моделі яких описуються графами, треба відшукати маршрут, який з'єднує задані вершини графа V_p (початкову) та V_k (кінцеву). Для зв'язного графа такий маршрут завжди існує. Його можна знайти, користуючись, наприклад алгоритмом Террі.

Алгоритм Террі

Для відшукування одного з маршрутів, який сполучає дві вершини графа V_p і V_k , користуються правилами:

1. Пошук маршруту починають із вершини V_p і йдуть по довільному ребру, інцидентному цій вершині, відмічаючи напрям руху;

2. Виходячи з вершини V_i , вибирають те ребро, яке не було пройдено жодного разу. Якщо таких ребер немає, то вибирають ребро, яке було пройдено у протилежному напрямку.

3. Для кожної вершини відмічають засічкою ребро, по якому в цю вершину прийшли перший раз. По ребру із засічкою рухаються у протилежному напрямку лише тоді, коли інших можливостей немає.

Алгоритм Террі результативний для довільного зв'язного графа. Якщо граф незв'язний, то цей алгоритм дає змогу виділити компоненту зв'язності.

Теорема (Террі). *Якщо граф зв'язний, то можна побудувати циклічний маршрут, який містить усі ребра графа рівно два рази, по одному в кожному напрямку.*

Приклади

1. Знайти циклічний маршрут у графі (рис. 4.23), який починається у вершині A та проходить по кожному ребру графа рівно по два рази (по одному у кожному напрямку).

Розв'язання

Оскільки цей граф зв'язний, то для відшукування циклічного маршруту, який задовольняє умову задачі, користуємося алгоритмом Террі.

Пошук маршруту починаємо з вершини A . Можемо рухатися по довільному ребру, інцидентному цій вершині, відмічаючи напрям руху стрілкою.

Вибираємо ребро AB . У вершину B зайшли перший раз, тому біля вершини ставимо засічку.

Із вершини B можна рухатися до вершини D або E . Вибираємо ребро BE . У вершину E прийшли перший раз, тому відмічаємо її засічкою.

Інших можливостей, крім руху назад у вершину B , немає. Рухаємося у протилежному напрямку по ребру EB . Оскільки біля вершини B уже стоїть засічка, то нової не ставимо.

Із вершини B рухаємося до вершини D і т. д. Один із можливих маршрутів $A - B - E - B - D - C - A - D - A - C - D - B - A$.

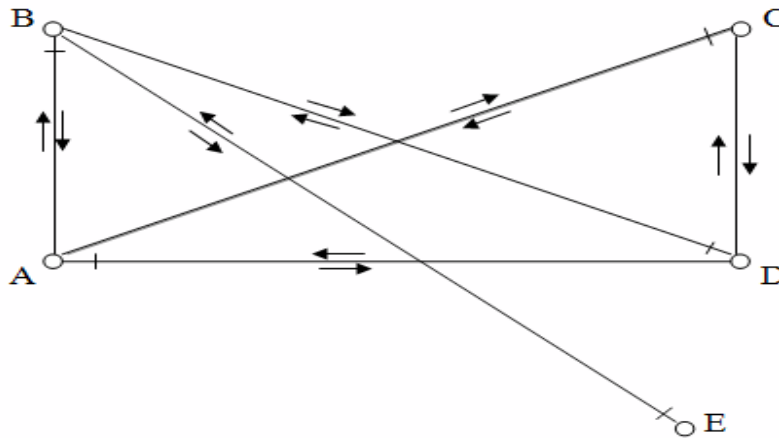


Рис. 4.23. Граф

Відповідь: один із можливих маршрутів: $A - B - E - B - D - C - A - D - A - C - D - B - A$.

4.9. Алгоритм пошуку мінімальних маршрутів

Основні теоретичні відомості

Нехай задано неорієнтований зв'язний граф $G = (V, U)$, V_p, V_k – дві довільні його вершини.

Маршрут із вершини V_p у вершину V_k називається *мінімальним*, якщо він з'єднує ці вершини й має найменшу довжину з усіх маршрутів, які з'єднують ці вершини.

Будемо вважати, що всі ребра графа мають однакову довжину, рівну одиниці, тобто ребра рівноправні. Такий граф називається *ненавантаженим*.

За допомогою ненавантажених графів описуються системи, які можуть переходити з одного стану в інший, і всі стани однаково ймовірні.

Мінімальний маршрут у ненавантаженому графі можна знайти за допомогою алгоритму Беллмана.

Алгоритм Беллмана

Кожній вершині графа приписують індекс так, щоб він дорівнював довжині найкоротшого маршруту, який з'єднує цю вершину з кінцевою.

При цьому користуються правилами:

1. Індексуювання вершин графа починають із кінцевої вершини V_k . Їй приписують індекс 0, усім суміжним із нею вершинам приписують індекс 1.

2. Якщо вершині V_i приписано індекс λ_i , то суміжним із нею вершинам, яким ще не приписано індекси, приписують індекс $\lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$. Якщо вершині можна приписати декілька індексів, то вибирають найменший.

3. Процес приписування індексів продовжують доти, поки всі вершини не будуть проіндексовані.

Пошук мінімального маршруту починають із початкової вершини, рухаються по ребру до вершини, індекс якої найменший.

Нехай задано граф $G = (V, U)$ і кожному його ребру $V_i V_j$ приписана довжина $l(V_i V_j)$ – вага ребра.

Потрібно знайти маршрут, який з'єднує вершини V_p і V_k , такий, щоб сума довжин усіх його ребер була мінімальною. Алгоритм Беллмана для розв'язання цієї задачі не підходить, оскільки може існувати маршрут, який має більшу кількість ребер, але сумарно вони мають меншу довжину.

Алгоритм пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі

1. Кінцевій вершині V_k приписують індекс 0. Усім іншим вершинам – нескінченність.

2. Для вершини V_j шукають ребро (V_i, V_j) , для якого виконується умова: $\lambda_j - \lambda_i > l(V_i, V_j)$ (різниця індексів більша довжини ребра). Вершині V_j приписують індекс $\lambda_j = \lambda_i + l(V_i, V_j)$. Якщо вершині можна приписати декілька індексів, то вибирають найменший.

3. Процес приписування індексів продовжують доти, поки не будуть проіндексовані всі вершини графа.

4. Пошук мінімального маршруту починають із початкової вершини. Рухаються по ребру, для якого довжина ребра дорівнює різниці індексів.

Приклади

1. Знайти мінімальний маршрут у графі G із вершини V_p у вершину V_k (рис. 4.24).

Розв'язання

Мінімальний маршрут із вершини V_p у вершину V_k знаходимо, користуючись алгоритмом Беллмана (індекси вершин записані у кружечках біля вершин). Довжина маршруту $l = 3$.

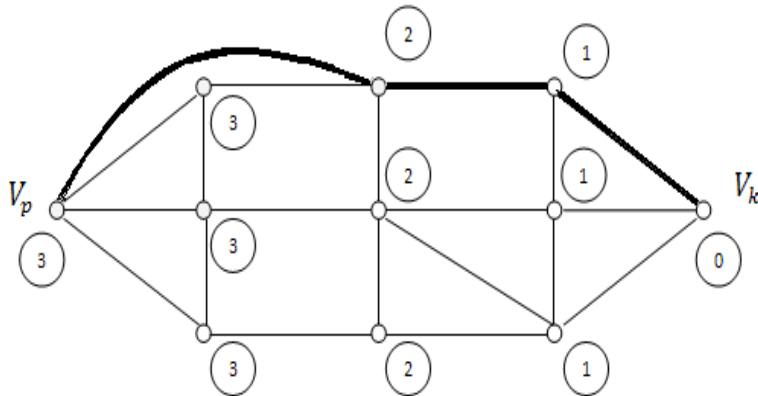


Рис. 4.24. Граф G

Відповідь: один із мінімальних маршрутів виділено потовщеною лінією, довжина маршруту $l = 3$.

2. Знайти мінімальний маршрут у навантаженому графі G із вершини V_p у вершину V_k (рис. 4.25).

Розв'язання

Мінімальний маршрут із вершини V_p у вершину V_k на графі G знаходимо, користуючись алгоритмом відшукування мінімального маршруту в навантаженому графі (індекси вершин записані у кружечках біля вершин).

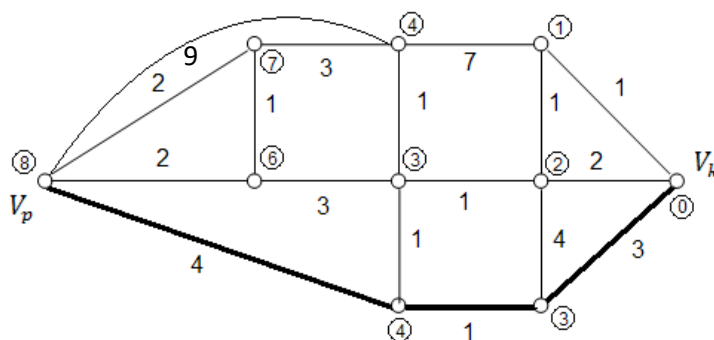


Рис. 4.25. Навантажений граф G

Довжина мінімального маршруту $l = 3 + 1 + 4 = 8$.

Відповідь: один із мінімальних маршрутів виділено потовщеною лінією, довжина найкоротшого маршруту $l = 8$.

4.10. Ейлерові цикли та ланцюги

Основні теоретичні відомості

Цикл, який містить усі ребра графа рівно один раз, називається *ейлеровим*. Граф, який має ейлеровий цикл, також називається *ейлеровим*.

Теорема (Л. Ейлер, 1736 р.). Для того, щоб скінченний зв'язний граф мав ейлеровий цикл, необхідно й достатньо, щоб усі його вершини мали парний степінь.

Теорема. Для того, щоб скінченний орграф мав ейлеровий цикл, необхідно й достатньо, щоб степені входу та виходу кожної вершини були рівні.

Ланцюг називається *ейлеровим*, якщо він має різний початок і кінець та включає усі ребра графа рівно один раз.

Теорема (про ейлерові ланцюги). Для того, щоб скінченний ланцюг зв'язного графа був ейлеровим з кінцями A та B ($A \neq B$), необхідно й достатньо, щоб вершини A та B були єдиними непарними його вершинами.

Існує простий та зручний алгоритм побудови ейлерового циклу – алгоритм Флері.

Алгоритм Флері

1. Вибираємо довільну вершину V_0 . Ідемо по ребру, інцидентному цій вершині. Прийшли у вершину V_1 і викреслили пройдене ребро.

2. Якщо на k -му кроці прийшли у вершину V_k , то для наступного ходу вибирають будь-яке ребро, інцидентне цій вершині. При цьому ребро-міст вибирають лише тоді, коли інших можливостей немає.

Приклади

1. *Задача про Кенігсберзькі мости.* Місто Кенігсберг (нині – Калінінград у Росії) розміщене на обох берегах річки і двох островах. Сім мостів сполучають береги та острови між собою (рис. 4.26). Чи можна, вийшовши з довільної частини міста, пройти по кожному мосту рівно один раз і повернутися у початкове місце?

Розв'язання

Схему сполучення частин міста мостами можна зобразити за допомогою графа G (рис. 4.27). У графа G є непарні вершини, тому за теоремою Ейлера у такого графа не існує циклу, який містить усі ребра графа рівно один раз.

Отже, не можна, вийшовши з довільної частини міста Кенігсберга, пройти по кожному мосту рівно один раз і повернутися у початкове місце.

Відповідь: не можна.

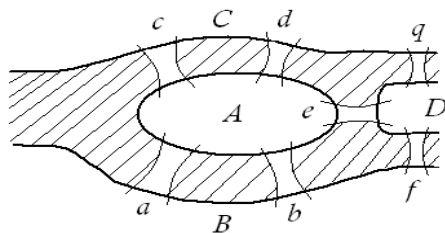


Рис. 4.26. Мости Кенігсберга

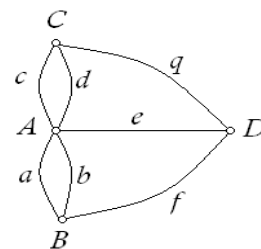


Рис. 4.27. Граф G

2. Знайти ейлеровий цикл у графі G (рис 4.28).

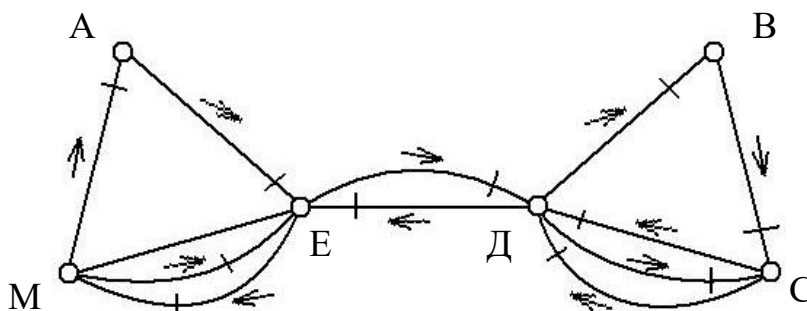


Рис. 4.28. Граф G

Розв'язання

Оскільки усі вершини даного графа парні, то граф має ейлерів цикл. Застосовуючи алгоритм Флері, отримуємо один із можливих ейлеревих циклів: $A - E - D - C - D - B - C - D - E - M - E - M - A$.

Відповідь: $A - E - D - C - D - B - C - D - E - M - E - M - A$.

3. На рисунку 4.29 зображено план підземелля. В одній із кімнат цього підземелля є скарб, який заховав купець. Нащадки купця знайшли заповіт, у якому було повідомлено, щоб знайти скарб, досить увійти в одну з крайніх кімнат підземелля та пройти через усі двері рівно один раз, скарб захований за дверима, які будуть пройдені останніми. У якій кімнаті заховано скарб?

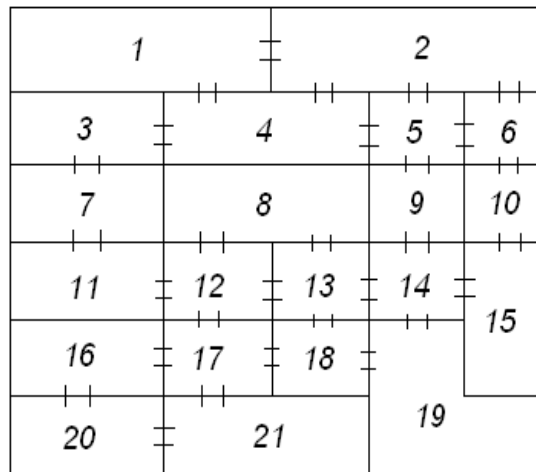


Рис. 4.29. План підземелля

Розв'язання

Побудуємо згідно з умовою задачі граф G (рис. 4.30), у якому: вершини – кімнати, ребра з'єднують ті вершини, які відповідають кімнатам, що зв'язані дверима.

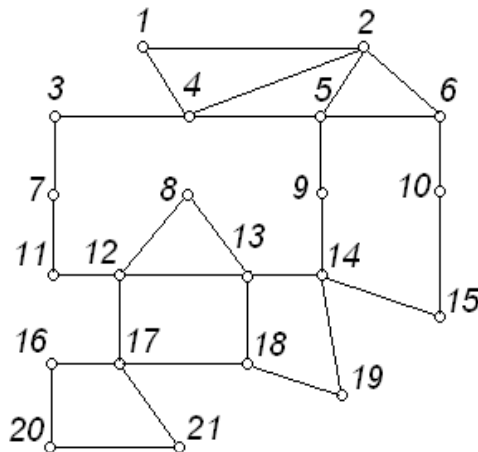


Рис. 4.30. Граф G

Оскільки тільки дві вершини графа 6 і 18 непарні, то існує ейлерів ланцюг, який сполучає ці вершини.

Вершина 6 – крайня. За умовою задачі пошук скарбу потрібно почати, увійшовши в крайню кімнату підземелля, тому скарб лежить у кімнаті, якій відповідає вершина 18.

Відповідь: у кімнаті 18.

4.11. Гамільтонові графи

Основні теоретичні відомості

Цикл, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз, називається *гамільтоновим*. Граф, який має гамільтоновий цикл, також називається *гамільтоновим*.

Гамільтонові та ейлерові цикли подібні за способом задання. Проте за складністю відшукування ці задачі дуже різняться. Пошук критерію існування гамільтонового графа – одна з невирішених проблем теорії графів. Відомі лише достатні умови існування гамільтонових графів.

Теорема (О. Оре, 1960 р.). *Якщо для довільної пари несуміжних вершин V_i та V_j графа G , який має не менше трьох вершин, виконується умова $\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n$, де n – кількість вершин графа, то граф гамільтоновий.*

Теорема (Г. Дірака, 1957 р.). *Якщо число вершин графа не менше трьох і для кожної вершини графа $\rho(v_i) \geq \frac{n}{2}$, то граф гамільтоновий.*

Задача комівояжера. Нехай є n міст, відстані між якими відомі. Комівояжер (роз'їзний агент по збуту товарів) повинен відвідати всі ці n міст по одному разу і повернутися до пункту початку подорожі. Знайти маршрут його руху, щоб пройдений шлях був мінімальним.

Очевидно, що задача комівояжера – це задача пошуку гамільтонового циклу. Один із методів пошуку – метод перебору. Для цього нумерують вершини графа, розглядають усі можливі перестановки, перевіряють, чи утворюють вони гамільтоновий цикл, і вибирають гамільтоновий цикл мінімальної довжини. Досі немає алгоритму для швидкісного вирішення цієї задачі.

Приклади

1. Визначити, чи є у графів G_1, G_2, G_3, G_4 гамільтонові та ейлерові цикли (рис. 4.31)?

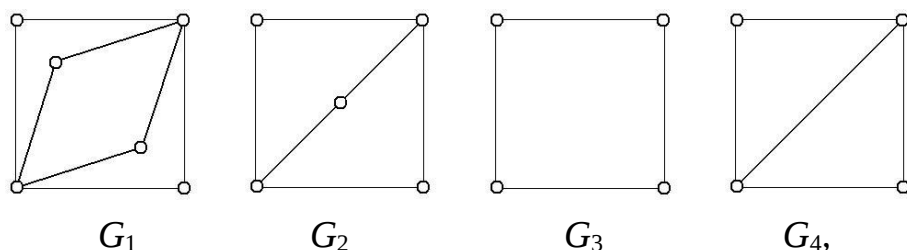


Рис. 4.31. Графи G_1, G_2, G_3, G_4

Розв'язання

Граф G_1 має усі вершини парні, тому він ейлеровий, але граф не є гамільтоновим.

Граф G_2 має непарні вершини, тому він не є ейлеровим. Цей граф також не є гамільтоновим.

Граф G_3 має усі вершини парні, тому він є ейлеровим. Цей граф також є гамільтоновим.

Граф G_4 має непарні вершини, тому він не є ейлеровим, але він є гамільтоновим.

Відповідь: гамільтонові цикли мають граfi G_3 та G_4 , ейлерові цикли – граfi G_1 та G_3 .

2. Навести контрприклад, який показує, що умови теореми Дірака не є необхідними для гамільтоновості графів.

Розв'язання

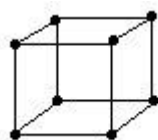


Рис. 4.32. Граф

Граф, зображений на рисунку 4.32, має вісім вершин, степінь кожної вершини 3. Умови теореми Дірака не виконуються, бо $3 < \frac{8}{2}$. Проте граф гамільтоновий.

4.12. Древа. Ліс. Каркасні дерева. Орієнтовані дерева

Основні теоретичні відомості

Дерево – це зв'язний граф, який не містить циклів. Граф із однієї вершини також є деревом.

Якщо граф незв'язний, не містить циклів, то кожна його зв'язна компонента – дерево. Такий граф називається *лісом* (ациклічним).

Теорема. Для графа $G = (V, U)$, $|V| = n$, $|U| = t$ такі твердження рівносильні:

1) G – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) G – зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) G – ациклічний граф і $m = n - 1$;

4) для будь-яких вершин A та B графа G існує лише один простий ланцюг, який з'єднує вершини A та B ;

5) G – ациклічний граф, але, додаючи до нього будь-яке нове ребро, дістаємо рівно один і при тому простий цикл.

Вершина дерева, для якої максимальна з відстаней до інших вершин є мінімальною, називається *кореневою*. Можна показати, що дерево має одну чи дві кореневі вершини. Кореневі вершини завжди суміжні.

Якщо $G = (V, U)$ – граф, то граф $G_1 = (V, U_1)$, де $U_1 \subset U$ називають *каркасом* графа G .

Каркасом деревом (*остовним деревом*, *кістяком*) зв'язного графа G називається довільна його частина, яка містить усі вершини графа і є деревом.

Говорять, що вершина й ребро *покривають* одне одного, якщо вони інцидентні.

Для довільного зв'язного графа існує каркасне дерево, яке можна побудувати за таким *алгоритмом*:

1. Беремо довільну вершину V_1 графа G . Оскільки граф G зв'язний, то існує вершина, яка не збігається з V_1 і суміжна з нею. Позначимо її V_2 . Вершини V_1 і V_2 та ребро V_1V_2 утворюють граф. Цей граф – дерево.

2. Якщо побудоване дерево не покриває всіх вершин графа G , то існує вершина, яка не належить побудованому дереву й суміжна з деякою іншою його вершиною. Вибирають ребро суміжності так, щоб воно не утворювало циклу з ребрами вже побудованого дерева й т. д.

Через скінченне число кроків отримаємо дерево, яке покриває всі вершини графа.

Відшукування в навантаженому графі каркасного дерева з найменшою вагою (*мінімального каркасного дерева*) є змістом багатьох практичних задач. Один із алгоритмів розв'язання цієї задачі – алгоритм Краскала.

Алгоритм Краскала

1. У графі G вибирають ребро мінімальної довжини з інцидентними йому вершинами. Побудували дерево.

2. До побудованого дерева приєднують нове ребро мінімальної довжини. Це ребро вибирають із множини ребер графа G так, щоб:

а) один з кінців ребра належав уже побудованій частині дерева;
б) вибране ребро суміжності не утворювало б циклу з ребрами вже побудованого дерева.

3. Продовжуючи цей процес через скінченне число кроків, отримаємо дерево, яке покриває всі вершини графа.

Орієнтованим деревом (ордеревом) називається ациклічний оргграф, який має такі властивості:

- 1) існує єдина вершина V_0 графа зі степенем входу $\rho^-(V_0) = 0$, яку називають коренем дерева;
- 2) кожна інша вершина графа має степінь входу $\rho^-(V_i) = 1, i \neq 0$;
- 3) кожна вершина V_i досягається з кореня, тобто існує орієнтований маршрут від кореня V_0 до всіх інших вершин графа.

Якщо існує в ордереві дуга AB , то вершина A називається *батьком вершини B* , а B – *сином вершини A* . *Упорядкованим ордеревом* називається дерево, в якого множина синів кожної вершини упорядкована.

У програмуванні інтенсивно використовують ордерева для запису алгебраїчних виразів, побудови алгоритмів, а структура вкладень каталогів та файлів у сучасних операційних системах є впорядкованим деревом. Це відображається навіть у терміні “кореневий каталог дисків”.

Приклади

1. Побудувати каркасне дерево графа (рис. 4.33):

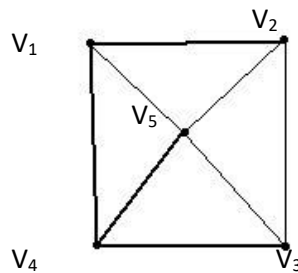


Рис. 4.33. Граф G

Розв’язання

Вибираємо вершину V_1 графа G . Граф G зв’язний, тому існують вершини, що не збігаються з V_1 і суміжні з нею. Вибираємо серед цих вершин одну, наприклад V_2 . Вершини V_1 та V_2 і ребро V_1V_2 утворюють граф, який є деревом. Позначимо його G_1 .

Дерево G_1 не покриває усіх вершин графа G . Існує вершина, що не належить графові G_1 і суміжна з деякою іншою його вершиною, наприклад вершиною V_4 .

Вибираємо ребро суміжності V_1V_4 , яке не утворює циклу з ребрами уже побудованого дерева. Отримали дерево G_2 з вершинами V_1, V_2, V_4 і двома ребрами V_1V_2 та V_1V_4 .

Дерево G_2 не покриває всіх вершин графа G . До дерева G_2 додаємо вершину V_5 і ребро суміжності V_4V_5 . Отримаємо дерево G_3 .

Оскільки дерево G_3 не покриває вершину V_3 , то додаємо до графа G_3 дану вершину і ребро суміжності V_4V_3 . Отримали дерево G_4 , яке містить усі вершини графа G .

Отже, G_4 – каркасне дерево графа G .

Відповідь: каркасне дерево графа виділено потовщеними лініями (рис. 4.33).

2. Знайти мінімальне каркасне дерево графа G (рис. 4.34).

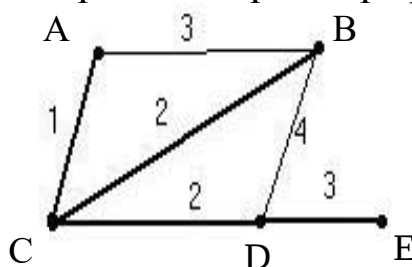


Рис. 4.34. Граф G

Розв'язання

Вибираємо у графа G ребро мінімальної ваги – це ребро AC . Разом з інцидентними йому вершинами воно утворює підграф G_1 графа G .

Оскільки дерево G_1 не покриває усіх вершин графа, то до побудованого дерева приєднуємо нове ребро мінімальної довжини – ребро CB . Отримали дерево G_2 з вершинами A, C, B і двома ребрами AC та CB .

Дерево G_2 не покриває всіх вершин графа G . До дерева G_2 приєднуємо нове ребро мінімальної довжини – ребро CD . Отримали дерево G_3 .

Оскільки дерево G_3 не покриває вершину E , то додаємо до графа G_3 дану вершину і ребро суміжності DE . Отримали дерево G_4 , яке містить усі вершини графа G .

Дерево G_4 є мінімальним каркасним деревом графа G . Вага мінімального каркасного дерева: $l = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$.

Відповідь: мінімальне каркасне дерево графа виділено потовщеними лініями (рис. 4.34), $l = 8$.

3. Зобразити алгебраїчні вирази $x + yz$ та $(x + y)z$ за допомогою орієнтованих дерев.

Розв'язання

На практиці для зображення орієнтованих дерев прийнята домовленість про те, що корінь дерева міститься зверху, а всі стрілки

дуг направлені вниз, тому стрілки можна не зображати. Алгебраїчний вираз $x + yz$ за допомогою орієнтованого дерева зображено на рисунку 4.35, вираз $(x + y)z$ – на рисунку 4.36.

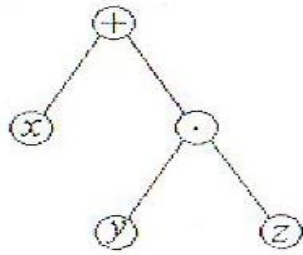


Рис. 4.35. Орієнтоване дерево виразу $x + yz$

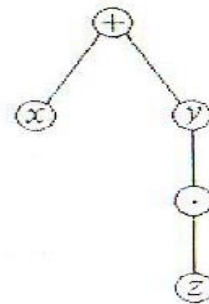


Рис. 4.36. Орієнтоване дерево виразу $(x + y)z$

4.13. Плоскі та планарні графи

Основні теоретичні відомості

Існують ситуації, які потребують, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю деякої електронної схеми (вершини такого графа – окремі елементи схеми, ребра – електричні провідники), то бажано розмістити ці ребра на площині так, щоб уникнути перетинів.

Граф називається *плоским*, якщо його вершини можна розмістити на площині так, що ніякі два його ребра не мають спільних точок, крім інцидентних їм вершин. Довільний граф, ізоморфний плоскому? називається *планарним*.

Про планарні графи кажуть, що вони *укладаються на площині* або мають *плоске укладання*.

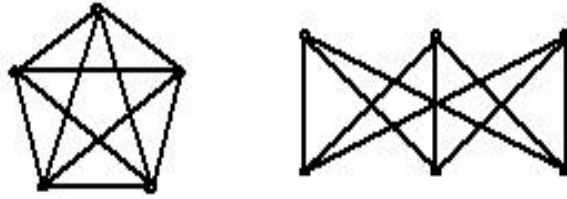
Жордановою кривою називають неперервну лінію, яка не перетинає сама себе. *Гранню* плоского графа називають множину точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, яка не перетинає ребер графа. *Межею* грані вважається замкнений маршрут, який обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані.

Теорема (Ейлера). Для будь-якого зв'язного плоского графа $G = (V, U)$ виконується рівність $n + p = m + 2$, (1)

де n – кількість вершин, m – кількість ребер, p – кількість граней графа.

Під час дослідження плоских графів особливе місце займають графи K_5 і $K_{3,3}$, зображені на рисунку 4.37.



K_5 $K_{3,3}$
Рис. 4.37. Графи K_5 і $K_{3,3}$

Граф K_5 є повним графом із п'ятьма вершинами. Граф $K_{3,3}$ – повний двочастинний. Можна показати, що графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Два графи називаються *гомеоморфними*, якщо після вилучення в них вершин другого степеня з подальшим об'єднанням інцидентних цим вершинам ребер вони стають ізоморфними. Очевидно, що граф, гомеоморфний планарному графу, також є планарним, і, навпаки, граф, гомеоморфний непланарному графу, також є непланарним.

Теорема (Понтрягіна-Куратовського). Граф G є планарним тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.

Приклади

1. Чи є граф G плоским (рис. 4.38)?

Розв'язання

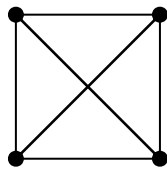


Рис. 4.38. Граф G

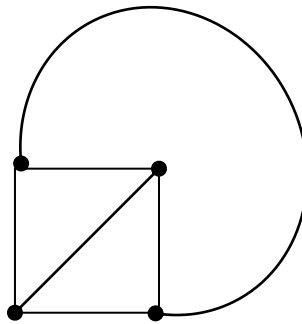


Рис. 4.39. Граф G

Вершини і ребра графа G можна розмістити на площині так, щоб ніякі два його ребра не будуть мати спільних точок, крім інцидентних їм вершин (рис. 4.39). Отже, граф G плоский.

Відповідь: граф G плоский.

2. *Задача-головоломка про три криниці.* Є три будинки: A , B , C і три криниці: 1, 2, 3 (рис. 4.40). Кожний мешканець може користуватися будь-якою із трьох криниць. Одного дня мешканці будинків вирішили прокласти доріжки до криниць. Чи можна це зробити так, щоб виключити можливість зустрічі, тобто? щоб доріжки не перетиналися.

Розв'язання

Граф, який відповідає умові задачі, зображено на рисунку 4.41.

A B C
• • •

• • •
1 2 3

Рис. 4.40. Будинки і криниці

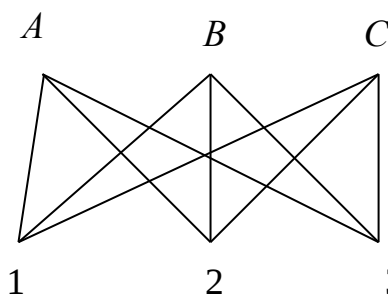


Рис. 4.41. Граф, що відповідає умові задачі

Це граф – $K_{3,3}$. Він не є планарним. Отже, прокласти доріжки, як цього вимагає умова задачі, не можна.

Відповідь: не можна.

4.14. Розфарбування графів

Основні теоретичні відомості

Нехай $G = (V, U)$ – граф, k – деяке натуральне число. Довільна функція $f: V \rightarrow N_k$, де $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$, називається *вершинним k -розфарбуванням* або просто *k -розфарбуванням* графа G .

Розфарбування називається *правильним*, якщо для довільних суміжних його вершин A та B виконується: $f(A) \neq f(B)$.

Розфарбованим графом називається граф, для якого існує правильне k -розфарбування. Правильне розфарбування графа можна трактувати як розфарбування кожної його вершини в один із k кольорів таким чином, щоб суміжні вершини були розфарбовані в різні кольори. Оскільки функція f не обов'язково взаємно однозначна, то при k -розфарбуванні може бути використано менше ніж k кольорів. Отже, правильне розфарбування можна розглядати як розбиття множини вершинами графа V на класи $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l = V$, де $l \leq k$

$$V_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, l.$$

Мінімальне число k , для якого існує правильне k -розфарбування графа G , називається *хроматичним числом графа G* і позначається $X_p(G)$.

Граф G називається *k -хроматичним*, якщо $X_p(G) = k$.

Правильне k -розфарбування графа G при $k = X_p(G)$ називається *мінімальним*.

Для певних різновидів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичним є порожні графи й тільки вони. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n , хроматичне число довільного двочастинного графа – 2.

Теорема. Для всякого планарного графа G справедлива нерівність $X_p(G) \leq 5$.

Практичні задачі, що зводяться до задачі розфарбування

1. Задача складання розкладу занять.

Нехай потрібно прочитати кілька лекцій за найкоротший проміжок часу. Протягом години читається одна лекція, але деякі лекції не можуть читатися одночасно (можливо, їх читає один і той же лектор). Побудуємо граф $G = (V, U)$, де V – множина, яка відповідає множині лекцій, при чому дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли відповідні лекції не можуть читатися одночасно. Очевидно, що кожне правильне розфарбовування цього графа визначає допустимий розклад: лекції, які відповідають вершинам графа, що утворюють клас одного кольору, читаються одночасно. Навпаки, кожен допустимий розклад визначає правильне розфарбування графа G . Отже, оптимальний розклад відповідає мінімальному розфарбуванню, а число годин, яке потрібне для читання всіх лекцій, дорівнює $X_p(G)$.

2. Задача розподілу устаткування.

Нехай дано множини $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ та $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – види робіт і механізмів відповідно. Щоб виконати кожну роботу, потрібен певний час, однаковий для всіх робіт, і деякі механізми. При цьому жодний із механізмів не може бути використаний одночасно у кількох роботах. Слід розподілити механізми так, щоб загальний час виконання всіх робіт був мінімальний.

Побудуємо граф $G = (V, U)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, а $(v_i, v_j) \in U$ тоді й тільки тоді, коли для виконання робіт v_i та v_j потрібен хоча б один спільний механізм. При правильному розфарбовуванні графа роботи, які відповідають вершинам одного кольору, можна виконувати одночасно. При мінімальному розфарбуванні досягається найменший час виконання всіх робіт.

3. Задача проектування коробки швидкостей.

Коробка швидкостей – це механізм для зміни частоти оборотів валу, який регулює швидкість автомобіля. Ця зміна виконується за рахунок того, що шестерні, які містяться в коробці, зчіплюються спеціальним способом.

Одна із задач, яка стоїть перед конструктором коробки, полягає в мінімізації її розмірів, а це часто зводиться до мінімізації числа валів, на яких розміщені шестерні.

Побудуємо граф $G = (V, U)$, де V – множина шестерень і $(v_i, v_j) \in U$, якщо шестерні v_i та v_j не можуть бути розміщені на одному валу. Вершини, які входять до одного колірнього класу, при правильному розфарбуванні цього графа, відповідають шестерням, які можуть бути розміщені на одному валу, а хроматичне число $X_p(G)$ дорівнює мінімальній кількості валів, які є необхідними для коробки, що проектується.

Одна з найвідоміших нерозв’язаних проблем теорії графів – *гіпотеза чотирьох фарб* формулюється так: *всякий планарний граф розфарбовується чотирма фарбами*. Понад століття всі дослідження цієї проблеми не давали позитивних результатів. Пізніше стало зрозуміло, що за допомогою традиційних підходів цю проблему не розв’язати. 1976 року два американські математики В. Хакен (W. Haken) та К. Аппель (K. Appel) запропонували новий метод. Вони змогли звести проблему до 1482 конфігурацій, які можна було використати для складання довільної карти. Для аналізу цих всіх конфігурацій був використаний комп’ютер, який дав відповідь: у кожному випадку чотирьох фарб вистачить. Звідси вчені зробили висновок, що проблема розв’язана в загальному вигляді. Деякі математики не сприйняли комп’ютерне доведення проблеми, але більшість учених все ж таки визнала право на існування таких методів доведення.

Приклади

1. Побудувати правильне розфарбування графа G (рис. 4.42).

Розв’язання

Одне із можливих правильних розфарбувань цього графа таке: вершини V_1, V_3, V_7 розфарбуємо кольором № 1, вершини V_2, V_4, V_8 – № 2, вершину V_5 – № 3, вершину V_6 – № 4. На рисунку 4.42 натуральні числа 1, 2, 3, 4 позначають фарби відповідних вершин.

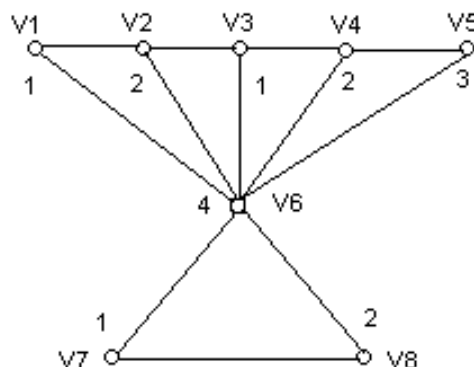


Рис. 4.42. Граф G

Запитання та завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Що називається графом, мультиграфом і псевдографом?
2. Яка різниця між графом і оргграфом?
3. Що таке ребро, дуга, порядок графа?
4. Яка різниця між графом і псевдографом?
5. Які бувають різновиди графів?
6. Який граф називається повним?
7. Який граф називається однорідним?
8. Чи є: а) повний граф однорідним; б) однорідний граф повним?
9. Що таке степінь вершини графа, степінь входу й виходу вершин оргграфа?
10. Дайте визначення джерела, стоку та ізольованої вершини оргграфа.
11. Що таке маршрут, ланцюг і цикл графа?
12. Що таке частина графа, суграф та підграф?
13. Які графи називаються ізоморфними?
14. Які операції можна виконувати над графами?
15. Дайте означення матриці суміжності та матриці інцидентності графа (орграфа).
16. Дайте визначення зв'язного графа.
17. Що таке компонента зв'язності графа?
18. Дайте визначення мосту. Сформулюйте ознаки мостів.
19. Дайте визначення матриці зв'язності графа.
20. Як формулюється задача пошуку маршруту в графі?
21. Як формулюється задача пошуку мінімального маршруту в графі?
22. Сформулюйте алгоритм пошуку мінімального маршруту в графі?
23. Як формулюється задача пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі?
24. Сформулюйте алгоритм пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі?
25. Що таке каркасне дерево графа?
26. Сформулюйте алгоритми пошуку каркасного дерева для ненавантаженого й навантаженого графів.
27. Дайте визначення ейлерового графа.

28. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування у графа ейлерового циклу.
29. Дайте визначення ейлерового ланцюга.
30. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування у графа ейлерового ланцюга.
31. Сформулюйте алгоритм пошуку ейлерового циклу у графі?
32. Дайте означення гамільтонового графа.
33. Сформулюйте достатні умови існування у графа гамільтонового циклу.
34. Що таке планарний граф?
35. Сформулюйте критерій планарності графа.
36. Як формулюється проблема чотирьох фарб?

Тести

Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Систему, що складається з непорожньої множини V і множини U деяких неупорядкованих пар із V називають:
 - 1) орієнтованим графом;
 - 2) ейлеровим графом;
 - 3) неорієнтованим графом;
 - 4) гамільтоновим графом;
 - 5) мультиграфом.
2. Число вершин графа називають:
 - 1) кратністю графа;
 - 2) локальним степенем графа;
 - 3) парністю графа;
 - 4) суграфом;
 - 5) порядком графа.
3. Якщо дві вершини графа інцидентні одному ребру, то їх називають:
 - 1) інцидентними одна одній;
 - 2) несуміжними;
 - 3) суміжними;
 - 4) парними;
 - 5) кратними.
4. Граф, який містить кратні ребра, називається:
 - 1) псевдографом;

- 2) неорієнтованим графом;
 - 3) мультиграфом;
 - 4) суграфом;
 - 5) нуль-графом.
5. Граф, який містить кратні ребра та петлі, називається:
- 1) псевдографом;
 - 2) неорієнтованим графом;
 - 3) мультиграфом;
 - 4) суграфом;
 - 5) нуль-графом.
6. Граф, у якого кожні дві його різні вершини сполучені одним і лише одним ребром, називається:
- 1) псевдографом;
 - 2) повним;
 - 3) мультиграфом;
 - 4) суграфом;
 - 5) нуль-графом.
7. Граф називається повним, якщо:
- 1) степені всіх його вершин однакові;
 - 2) кожні дві його різні вершини сполучені одним і лише одним ребром;
 - 3) він не має ребер;
 - 4) існує розбиття множини його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах.
 - 5) кожні дві його вершини сполучені одним ребром.
8. Граф, у якого всі його вершини мають один і той же степінь, називається:
- 1) псевдографом;
 - 2) повним;
 - 3) мультиграфом;
 - 4) суграфом;
 - 5) регулярним.
9. Граф, для якого існує розбиття множини його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах, називається:
- 1) псевдографом;
 - 2) двочастинним;

- 3) мультиграфом;
 - 4) суграфом;
 - 5) порожнім.
- 10.** Якщо $\rho^+(A) = \rho^-(A) = 0$, то вершина A у графі називається:
- 1) стоком;
 - 2) ізольованою;
 - 3) висячою;
 - 4) джерелом;
 - 5) кореневою.
- 11.** Якщо $\rho^+(A) = 0$, а $\rho^-(A) > 0$, то вершина A у графі називається:
- 1) стоком;
 - 2) ізольованою;
 - 3) висячою;
 - 4) джерелом;
 - 5) кореневою.
- 12.** Якщо $\rho^+(A) > 0$, а $\rho^-(A) = 0$, то вершина A називається у графі:
- 1) стоком;
 - 2) ізольованою;
 - 3) висячою;
 - 4) джерелом;
 - 5) кореневою.
- 13.** Ланцюгом у графі називається:
- 1) будь-який маршрут;
 - 2) маршрут, який проходить через деякі ребра графа;
 - 3) маршрут, який сполучає вершину саму із собою;
 - 4) маршрут, у якого всі ребра різні;
 - 5) маршрут, у якого всі вершини різні
- 14.** Кількість ребер маршруту називається його:
- 1) порядком;
 - 2) щільністю;
 - 3) розмірністю;
 - 4) довжиною;
 - 5) відстанню.
- 15.** Матриця інцидентності неорієнтованого графа, який має p вершин і s ребер, має розмірність:
- 1) 7×5 ;
 - 2) 7×7 ;

- 3) 5×7 ;
- 4) 5×5 ;
- 5) 2×2 .

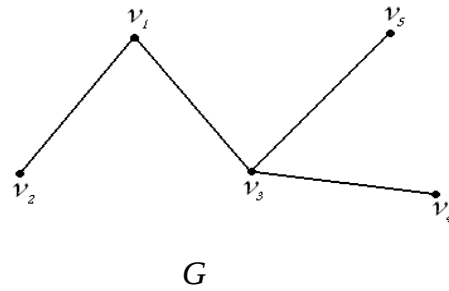
- 16.** Мінімальний маршрут у ненавантаженому графі з вершини V_p у вершину V_k можна визначити за алгоритмом:
- 1) Террі;
 - 2) Ейлера;
 - 3) Гамільтона;
 - 4) Беллмана;
 - 5) Флері.
- 17.** Для того, щоб скінченний зв'язний граф мав ейлеровий цикл, необхідно і достатньо, щоб:
- 1) усі його вершини мали парний степінь;
 - 2) усі його вершини мали непарний степінь;
 - 3) лише дві його вершини мали непарний степінь;
 - 4) принаймні дві його вершини мали непарний степінь;
 - 5) парна кількість його вершин мала непарний степінь.
- 18.** Гамільтонові цикли – це:
- 1) цикли, що містять усі вершини графа;
 - 2) цикли, що містять деякі вершини графа;
 - 3) цикли, що містять усі ребра графа;
 - 4) прості цикли;
 - 5) цикли, що містять деякі ребра графа.

Рівень 2

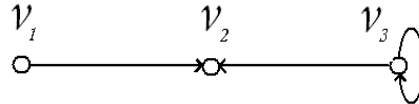
- 19.** Якою є матриця суміжності неорієнтованого графа:
- 1) несиметричною;
 - 2) симетричною;
 - 3) невизначеною;
 - 4) складається лише з одиниць;
 - 5) по головній діагоналі має всі одиниці.
- 20.** Якою є матриця суміжності орієнтованого графа:
- 1) несиметричною;
 - 2) симетричною;
 - 3) невизначеною;
 - 4) складається лише з одиниць;
 - 5) по головній діагоналі має всі одиниці.

21. Порядок графа G :

- 1) 4;
- 2) 0;
- 3) 5;
- 4) 5×4 ;
- 5) 4×5 .

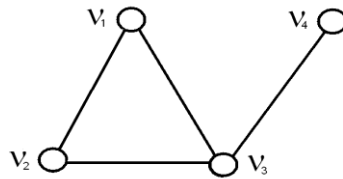


22. Яка із заданих матриць суміжності відповідає зображеному нижче графу?



- 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

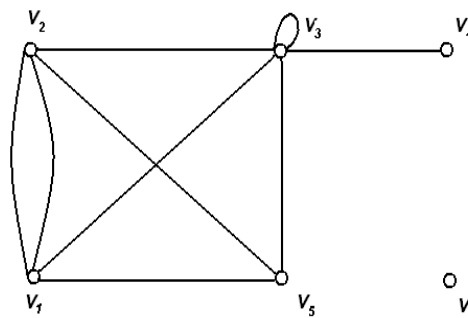
23. Яка із заданих матриць суміжності відповідає зображеному нижче графу?



- 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

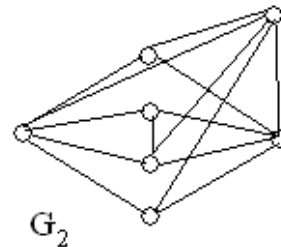
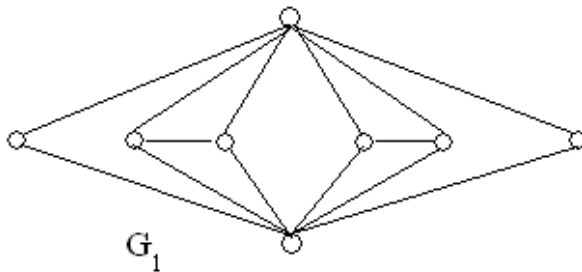
24. Вершина V_1 , зображеного нижче графа, має степінь:

- 1) 4;
- 2) 3;
- 3) 2;
- 4) 0;
- 5) 1.

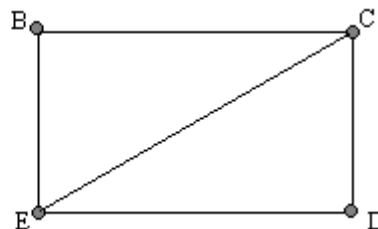
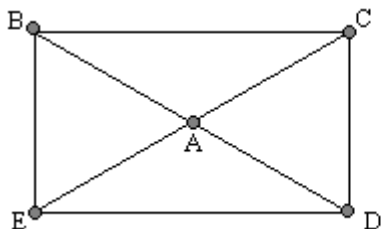


Вправи для самостійного розв'язування

1. Обґрунтувати, що такі об'єкти можна розглядати як графи:
 - а) вершини та ребра многогранника;
 - б) план лабіринту;
 - в) футбольний турнір;
 - г) країни на карті.
2. Навести приклад життєвої ситуації, яку описує орієнтований граф із п'ятьма вершинами.
3. Нехай $V = \{1, 2, 3\}$. Побудувати всі графи з множиною вершин V .
4. Вивести формулу, яка виражає кількість ребер графа через степені його вершин.
5. Показати, що в будь-якому графі кількість вершин непарних степенів – парна.
6. Знайти степені вершин графів, які утворені ребрами й вершинами тетраедра та куба.
7. Яке найменше число ребер містить простий цикл?
8. Знайти степені вершин графів G_1 та G_2 :

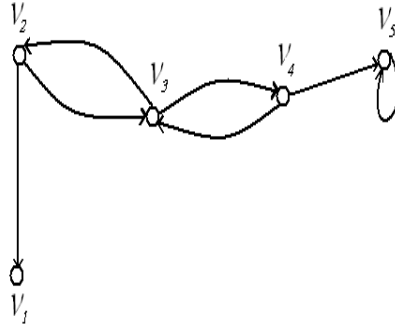


9. Знайти кількість вершин, ребер та степені кожної вершини неорієнтованих графів.



10. Зобразити граф із 15 вершинами, кожна з яких має степінь 5.
11. Знайти кількість вершин, дуг та степені входу і виходу для кожної вершини орграфа. Визначити стік, джерело,

ізолювану вершину. Підрахувати кількість ланцюгів від вершини v_1 до вершини v_4 .

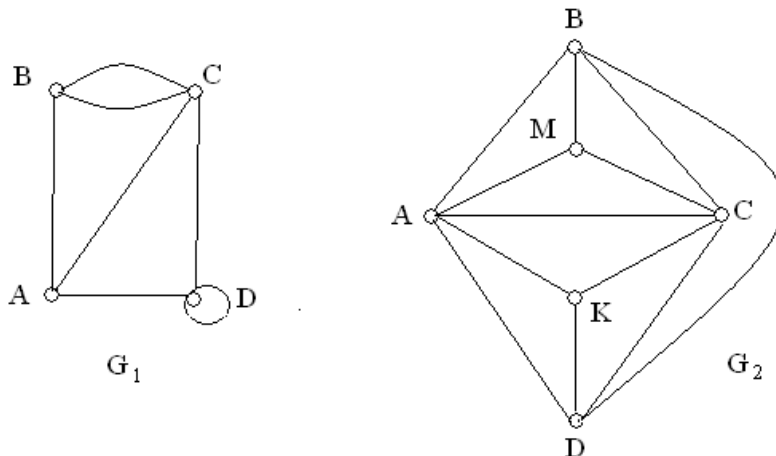


12. Побудувати довільний незв'язний граф і доповнити цей граф ребрами так, щоб він став зв'язним. Назвати у цьому графі всі ребра, які є мостами.
13. Побудувати граф, який має п'ять вершин:
 - а) одна з вершин ізолювана, а одна має степінь 4;
 - б) степені всіх вершин різні;
 - в) рівно дві вершини мають однаковий степінь.
14. * Довести. Якщо в орієнтованому графі вершина B досяжна з вершини A , а вершина C досяжна з вершини B , то виконується умова $S(AC) \leq S(AB) + S(BC)$.
15. Десять шахістів проводять турнір в один круг (кожен з учасників повинен зіграти з кожним із інших один раз). Довести, що в будь-який момент знайдуться принаймні двоє учасників, які зіграли однакову кількість партій.
16. Довести. У довільному графі з n вершинами ($n \geq 2$) знайдуться принаймні дві вершини однакового степеня.
17. Дев'ять шахістів проводять турнір в один круг. У певний момент часу виявилось, що тільки двоє учасників зіграли однакову кількість партій. Довести, що в цьому випадку або рівно один учасник ще не зіграв жодної партії, або рівно один зіграв уже всі партії.
18. * Довести. Якщо у довільному графі з n вершинами ($n \geq 2$) рівно дві вершини мають однаковий степінь, то в цьому графі знайдеться одна ізолювана вершина або одна степеня $n-1$.
19. Семеро студентів вирішили на канікулах написати листи трьом із них. Чи може статися так, що кожний із студентів отримає лист саме від того товариша, якому він написав сам?

20. У графі Петерсена знайти маршрут довжини 4, цикли довжини 5, 6, 8 і 9.

21. Для графів, які зображено нижче, виконати такі операції:

- видалити вершину A ;
- видалити ребра AM та KC ;
- ввести вершину N у ребро AM ;
- ввести ребро MK .



22. Доповнити граф так, щоб він став повним.

23. Побудувати графи K_7 , K_{14} , N_5 .

24. Чи існує простий граф із вершинами таких степенів (випадки а–д)? Якщо так, то зобразити його:

- 3, 3, 3, 3, 2;
- 3, 4, 3, 4, 3;
- 1, 2, 3, 4, 5;
- 1, 2, 3, 4, 4;
- 1, 1, 1, 1, 1.

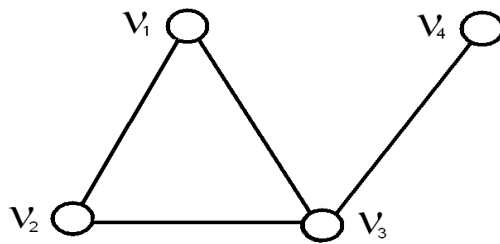
25. Побудувати платонові графи для ікосаедра й додекаедра.

26. Побудувати оргграф, що відповідає відношенню еквівалентності, яке задане на трьохелементній множині з єдиним класом еквівалентності.

27. Побудувати повний граф із:

- однією вершиною;
- двома вершинами;
- трьома вершинами;
- чотирма вершинами;
- п'ятьма вершинами.

28. Зобразити всі підграфи графа, заданого на рисунку:



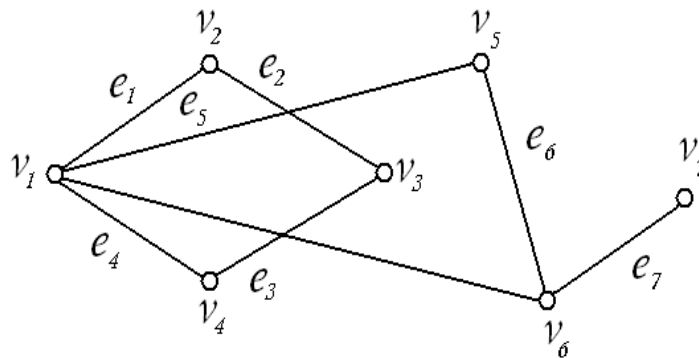
29. Побудувати об'єднання двох довільних графів, які мають одне спільне ребро.

30. Граф задано матрицею суміжності. Як за допомогою цієї матриці визначити:

- а) число вершин графа;
- б) число дуг, які виходять із вершини A_i ;
- в) число дуг, які входять у вершину A_i ;
- г) число дуг в орграфі;
- д) число ребер у графі.

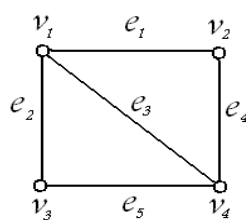
31. Побудувати матриці суміжності та інцидентності для платонових графів.

32. Задати неорієнтований граф G матрицями інцидентності та суміжності.

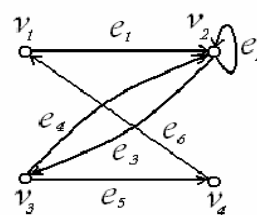


G

33. Задати графи G_1 та G_2 матрицями інцидентності та суміжності



G_1



G_2

34. Описати матрицю суміжності порожнього, повного і дводольного графів.

35. Зобразити графи за матрицями суміжності.

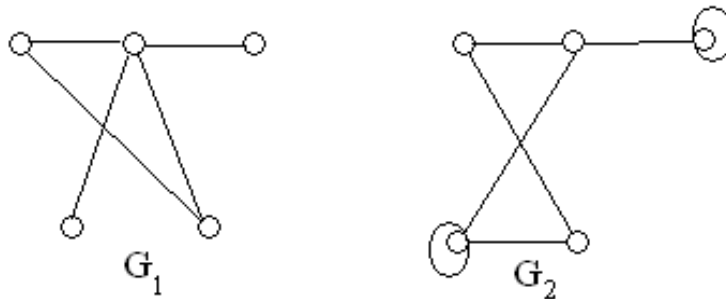
$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

36. Чому дорівнює сума елементів j -го стовпця матриці суміжності для неорієнтованого графа і для орієнтованого графа ?

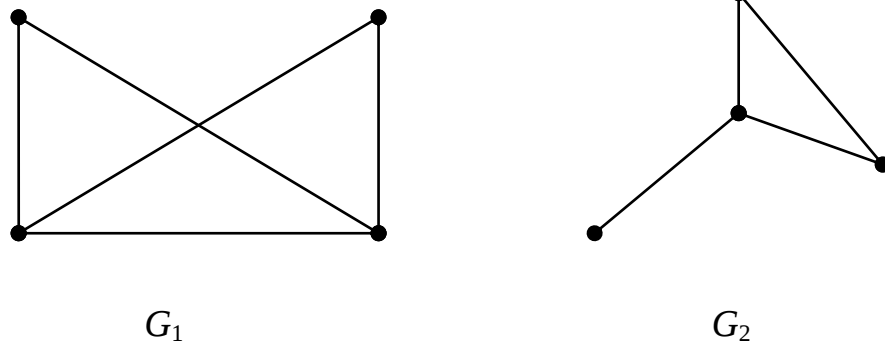
37. Чому дорівнює сума елементів i -го рядка матриці суміжності для неорієнтованого графа і для орієнтованого графа ?

38. Чи ізоморфні графи G_1 та G_2 ?

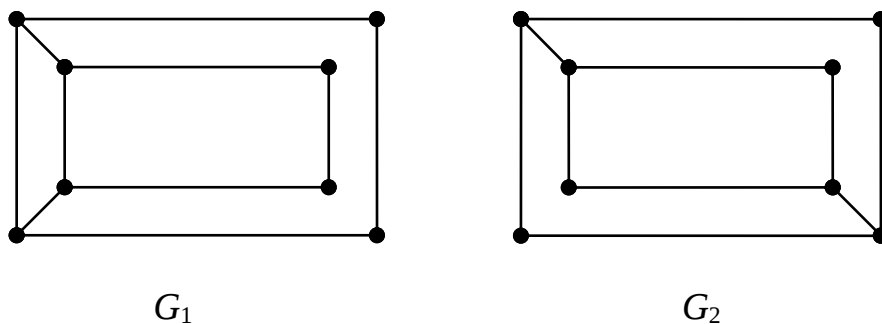
а)



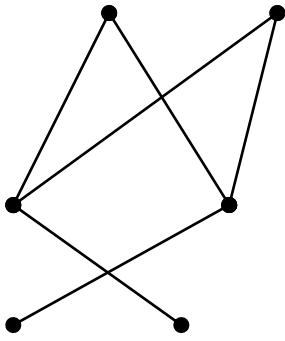
б)



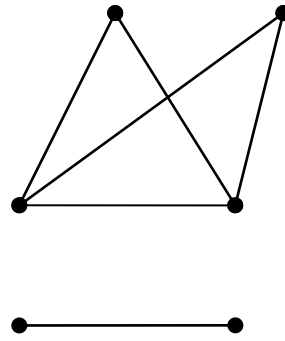
в)



39. Визначити, який із графів G_1 , G_2 зв'язний.

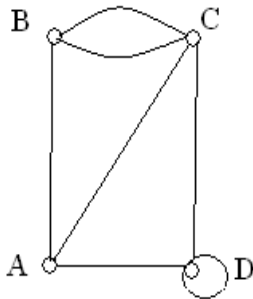


G_1

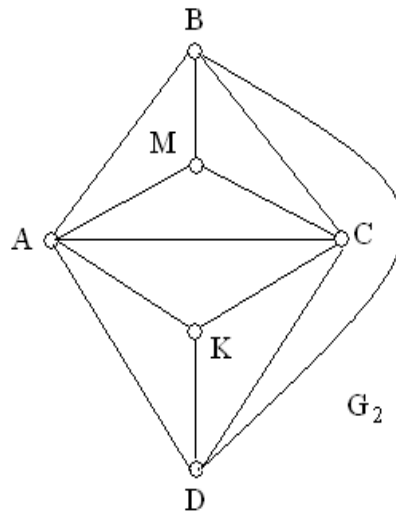


G_2

40. Знайти всі мости у графах G_1 та G_2 .

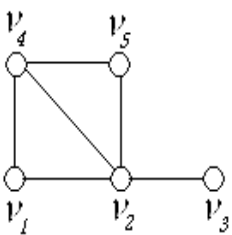


G_1

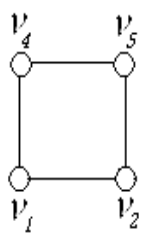


G_2

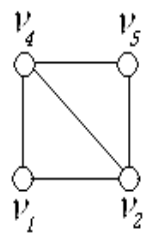
41. Визначити, які з графів мають ейлеровий цикл. Зобразити його.



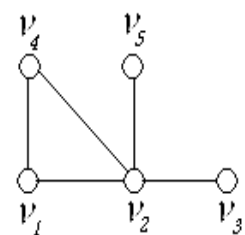
G



H_1

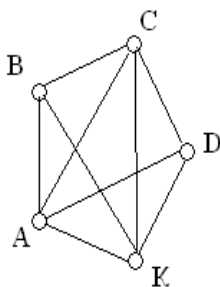


H_2

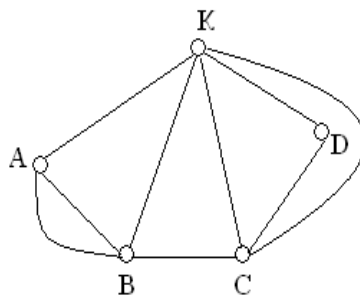


H_3

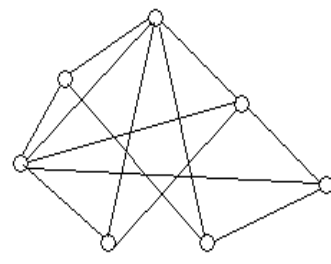
42. Які з графів мають гамільтоновий цикл?



а)

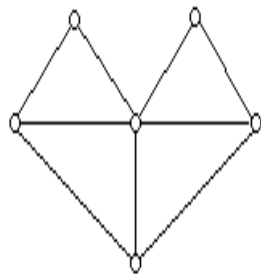


б)

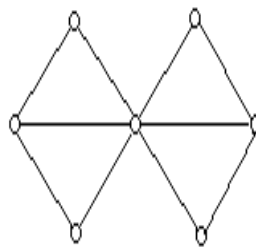


в)

43. Довести, що граф, який відповідає ходам коня на шаховій дошці, не є ейлеровим.
44. Навести приклад графа, який має ейлеровий цикл, але не має гамільтонового циклу, а також графа, який має гамільтоновий цикл, але не має ейлерового циклу. Як можна охарактеризувати графи, які одночасно мають і ейлеровий, і гамільтоновий цикли?
45. Довести, що кожне дерево є двочастинним графом.
46. Використовуючи алгоритм Террі, визначити замкнений маршрут у графах G_1 та G_2 , який проходить рівно два рази (по одному в кожному напрямку) через кожне ребро графа:



G_1



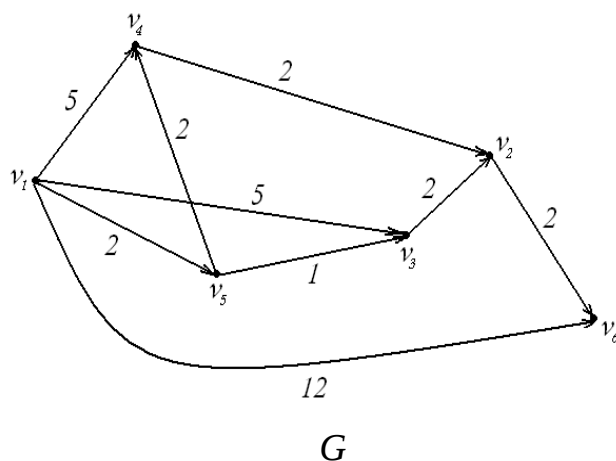
G_2

47. Довести. Не для будь-якого зв'язного графа знайдеться циклічний маршрут, який містить усі ребра графа рівно по три рази.
48. Знайти мінімальний маршрут із вершини A_1 до вершини A_7 у

графі, який заданий матрицею суміжності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

49. Для яких чисел m і n графи $K_{m,n}$, K_n є ейлеровими?
50. Знайти мінімальний маршрут у навантаженому графі G із вершини V_1 у вершину V_6 :



51. Побудувати каркасні дерева для графів K_5 , $K_{2,3}$, графа Петерсена.
- 52.* Зустрілися три друга – Михайло, Леонід та Іван. Один із них шатен, другий – брюнет, а третій – рудоволосий. За фахом один архітектор, другий – художник, третій – скрипаль. Знаємо, що: 1) Михайло не шатен, а Леонід не брюнет; 2) шатен – не скрипаль; 3) брюнет – архітектор; 4) Леонід не художник. Установіть колір волосся і професію кожного з друзів. Розв’язати задачу за допомогою графа.
53. Відомо, що Роман і водій старші від Олега; Микола й слюсар захоплюються плаванням; бібліотекар – наймолодший із цих юнаків. Увечері Антон і перукар грають у теніс проти Олега і бібліотекаря. Визначити професію кожного з цих юнаків. Розв’язати задачу за допомогою графа.
- 54.* Троє друзів Іван, Дмитро і Степан викладають різні предмети: хімію, біологію та фізику в школах Луцька, Львова і Києва. Відомо, що:
- 1) Іван працює не в Луцьку, а Дмитро не у Львові;
 - 2) лучанин викладає не фізику;
 - 3) той, хто працює у Львові, викладає хімію;
 - 4) Дмитро викладає не біологію.
- Який предмет і в якому місті викладає кожний із друзів?
55. У деякому казино гра проходить за такими правилами: у разі виграшу гравець отримує виграш у розмірі ставки (поставивши k гривень, гравець у разі виграшу забере $2k$ гривень), програвши, гравець втрачає всю ставку.

Нехай гравець прийшов у казино з однією гривнею і вирішив грати доти, доки в нього є гроші, але не більше трьох ігор, ставлячи на кожну одну гривню. Побудувати дерево можливих варіантів розвитку подій, позначивши ребро, що відповідає виграшу в конкретній грі “+”, програшу – “–”. Кожну вершину позначати сумою (у гривнях), які залишилися у гравця.

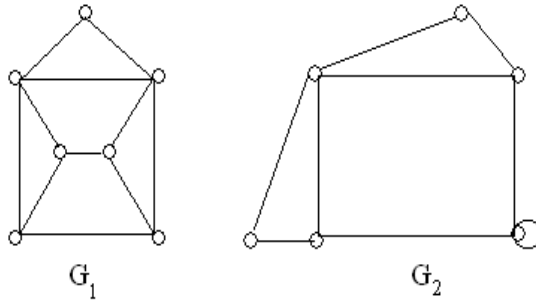
56. Заповнити таблицю, у якій наведено приклади типових задач, що можуть вирішуватися за допомогою графів:

Предмет дослідження	Типова задача	Вершини	Ребра	Ваги
Карта доріг	Знайти найкоротший шлях			
Гра в шахи	Обрати найкращий хід			
Гра-головоломка “15”	Обрати послідовність кроків			
Суспільство	Розділити на суспільні групи			
Креслення, що складається з прямих ліній	Порівняти два зображення			
Електричний ланцюг	Обчислити силу струму та падіння напруги на кожній ділянці			
Хімічна молекула	Пошук підструктури			

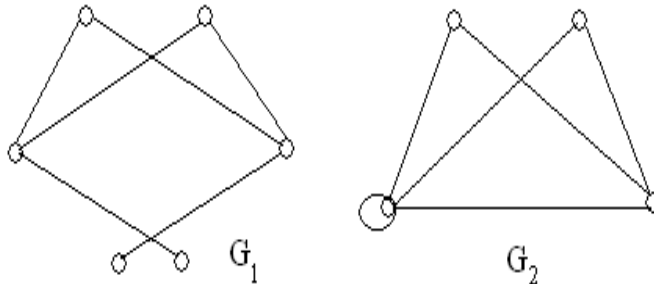
Зразки самостійних робіт до теми “Теорія графів”

Варіант 1

1. Побудувати орграф, який має п'ять вершин: два джерела, один стік і дві ізолювані вершини.
2. Знайти степені вершин графів G_1 та G_2 :



3. Який граф називається однорідним?
4. Чи ізоморфні графи G_1 та G_2 ?



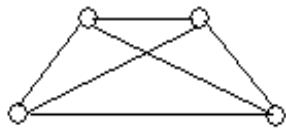
5. У кімнаті п'ять студентів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакове число знайомих серед даних п'яти.

Варіант 2

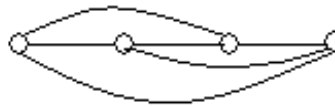
1. Побудувати повний двочастинний граф $K_{1,5}$.
2. Знайти степені вершин графів G_1 та G_2 :



3. Дати визначення двочастинного графа.
4. Чи ізоморфні графи G_1 та G_2 ?



G_1

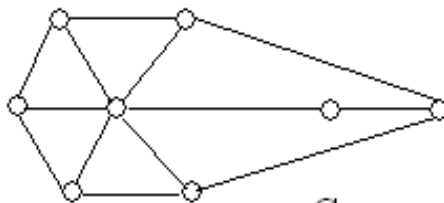


G_2

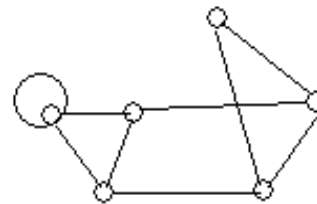
5. Довести, що в довільному графі число вершин із непарними степенями парне.

Варіант 3

1. Побудувати псевдограф, який має чотири вершини й задати його множиною вершин та ребер.
2. Знайти степені вершин графів G_1 та G_2 :

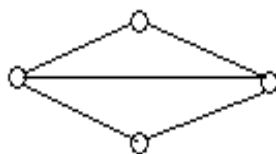


G_1

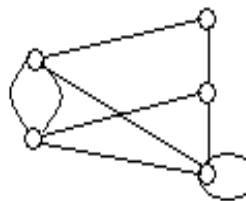


G_2

3. Які графи називаються платоновими?
4. Чи ізоморфні графи G_1 та G_2 ?



G_1



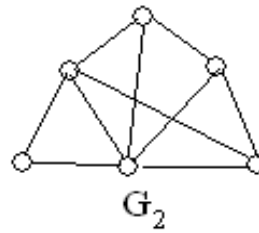
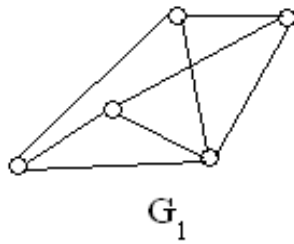
G_2

5. Довести, що кількість ребер однорідного графа степеня r , який має n вершин, дорівнює $\frac{nr}{2}$.

Варіант 4

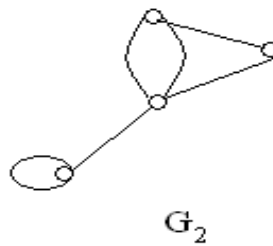
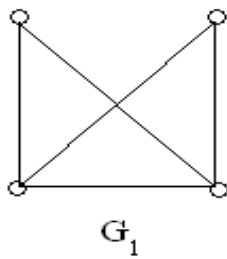
1. Побудувати мультиграф із чотирма вершинами та задати його множину ребер парами вершин.

2. Знайти степені вершин графів G_1 та G_2 :



3. Що таке орієнтований граф?

4. Чи ізоморфні графи G_1 та G_2 ?



5. Довести, що не існує графа, степені всіх вершин якого різні.

РОЗДІЛ 5. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Література: [2] – розд. 2, §9; [4] – розд. 8.

5.1. Булеві функції. Табличний спосіб задання функцій.

Реалізація булевих функцій формулами

Основні теоретичні відомості

Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, усі аргументи якої, як і сама функція, можуть набирати лише двох значень 0 та 1, називається *булевою* (двозначною).

Булева функція від n змінних називається n -місною. Областю її визначення є множина всіх можливих n -місних упорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, які називаються *двійковими*.

Кількість різних n -місних наборів аргументів n -місної булевої функції дорівнює 2^n . Кількість різних n -місних булевих функцій – 2^{2^n} .

Скінченність області визначення довільної булевої функції дає змогу задавати функцію таблицею.

Таблиця 5.1

Булеві функції однієї змінної

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$ – константа 0;

$f_1 = x$ – тотожна функція;

$f_2 = \bar{x}$ – інверсія x або заперечення x ;

$f_3 = 1$ – константа 1.

Таблиця 5.2

Булеві функції двох змінних

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функції пронумеровані так, що номер функції, записаний у двійковій системі, дає послідовність значень відповідної функції. Більшість записаних функцій мають назви і спеціальні позначення.

I. $f_0(x_1, x_2)$ – константа 0;

$f_{15}(x_1, x_2)$ – константа 1.

II. $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$ – кон'юнкція;

$f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} | x_2$ – заперечення кон'юнкції або штрих Шеффера.

III. $f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз'юнкція;

$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$ – заперечення диз'юнкції або стрілка Пірса.

IV. $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація;

$f_2(x_1, x_2) = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$ – заперечення імплікації.

V. $f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1$ – антиімплікація;

$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_2 \rightarrow x_1}$ – заперечення антиімплікації;

VI. $f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ – еквіваленція;

$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} = x_1 \oplus x_2$ – додавання за модулем два або сума Жегалкіна.

VII. $f_3(x_1, x_2) = x_1$;

$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ – інверсія x_1 .

VIII. $f_5(x_1, x_2) = x_2$;

$f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ – інверсія x_2 .

За допомогою елементарних функцій, визначених у таблицях 5.1 та 5.2, можна зобразити будь-яку булеву функцію в аналітичній формі, використовуючи операцію суперпозиції. Операція суперпозиції полягає в тому, що одні булеві функції підставляються замість змінних у інші булеві функції. Замість змінних можуть підставлятися інші змінні (перейменування змінних), при цьому деякі змінні можуть ототожнюватися. Операція суперпозиції можлива завдяки збігу області значень булевої функції з областю визначення кожної змінної.

Вираз, який описує суперпозицію та містить функціональні символи, круглі дужки й символи змінних, називають *формулою*. Про формулу, яка задає функцію, говорять, що вона *реалізує* цю функцію.

Усі формули, які містять лише символи змінних, дужки й знаки функцій із множини Q , називаються *формулами над Q* .

Змінна x_i функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для якої виконується умова:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

при всіх довільних значеннях інших змінних, називається *неістотною або фіктивною*.

Це означає, що зміна значення x_i в довільному наборі $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не змінює значення функції. У цьому разі функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по

суті залежить від $(n - 1)$ змінної, тобто є функцією $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
Говорять, що функція g отримана з функції f вилученням фіктивної змінної, а f отримана з g введенням фіктивної змінної.

Функції f та g називаються *рівними*, якщо функцію g можна отримати з f шляхом введення або вилучення фіктивних змінних.

Приклади

1. Побудувати таблицю істинності функції, яка реалізується формулою:

а) $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus x \wedge z))$;

б) $((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$.

Розв'язання

Таблиця 5.3

Табличне задання функції $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus x \wedge z))$

x	y	z	$x \wedge z$	$y \oplus xz$	$\bar{z}$	$\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus x \wedge z)$	$\bar{x}$	$\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus x \wedge z))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Таблиця 5.4

Табличне задання функції $((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$

x	y	z	$x y$	$(x y) \downarrow z$	$(x y \downarrow z) y$	$((x y) \downarrow z) y) \downarrow z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

2. Функція $\varphi(x, y, z)$ задана таблицею. Чи є змінна x фіктивною? Якщо так, то утворити нову функцію $\psi(y, z)$ шляхом вилучення змінної x з функції $\varphi(x, y, z)$ (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Табличне задання функції $\varphi(x, y, z)$

x	y	z	$\varphi(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Змінна x – фіктивна, бо її зміна при зафіксованих значеннях y та z не впливає на значення функції $\varphi(x, y, z)$. Тому функція $\varphi(x, y, z)$ може бути визначена заданням лише половини таблиці на наборах аргументів, у яких $x = 0$, інакше кажучи, таблицю можна скоротити.

Таблиця 5.6

Табличне задання функції $\psi(y, z)$

$y z$	$\psi(y, z)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Відповідь: змінна x – фіктивна.

5.3. Алгебри булевих функцій

Основні теоретичні відомості

Множина P_2 булевих функцій разом із уведеною на ній системою операцій називається *алгеброю булевих функцій*.

Алгебра $(P_2, -, \wedge, \vee)$, операціями якої є заперечення, кон'юнкція та диз'юнкція, називається алгеброю Буля.

Алгебра $(P_2, \wedge, \oplus)$, операціями якої є кон'юнкція й додавання за *mod 2*, називається алгеброю Жегалкіна.

Порядок виконання операцій у разі відсутності дужок у булевій алгебрі: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція. В алгебрі Жегалкіна спочатку виконують кон'юнкцію, а потім – додавання за mod 2.

Закони алгебри Буля

1. Закони асоціативності $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
 $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.
2. Закони комутативності $x \wedge y = y \wedge x$
 $x \vee y = y \vee x$.
3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції і дистрибутивний закон для диз'юнкції відносно кон'юнкції
 $(x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z$
 $x \wedge y \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.
4. Закон подвійного заперечення $\overline{\overline{x}} = x$.
5. Закони де Моргана $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
 $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.
6. Закони ідемпотентності $x \wedge x = x$
 $x \vee x = x$.
7. Закони поглинання $x \vee x \wedge y = x$
 $x \wedge (x \vee y) = x$.
8. Співвідношення для констант $\overline{1} = 0 \quad 1 \wedge x = x \quad 1 \vee x = 1$
 $\overline{0} = 1 \quad 0 \wedge x = 0 \quad 0 \vee x = x$.
9. Закон виключення третього $x \vee \overline{x} = 1$.
10. Закон протиріччя $x \wedge \overline{x} = 0$.

Закони алгебри Жегалкіна

1. Закони асоціативності $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
2. Закони комутативності $x \wedge y = y \wedge x$
 $x \oplus y = y \oplus x$.
3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно додавання за mod 2 $(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z$.
4. Співвідношення для констант $1 \wedge x = x$
 $0 \wedge x = 0$
 $0 \oplus x = x$
5. Закон ідемпотентності для кон'юнкції $x \wedge x = x$.
6. Закон зведення подібних членів при додаванні за mod 2 $x \oplus x = 0$.

Справедливість цих законів встановлюється за допомогою таблиць. Наведені закони залишаються справедливими при підстановці замість змінних довільних булевих функцій.

Будь-яку формулу алгебри Буля можна перетворити у рівносильну їй формулу алгебри Жегалкіна та навпаки за допомогою еквівалентностей:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \oplus 1 \\ x \vee y &= x \oplus y \oplus xy, \\ x \oplus y &= \bar{x}y \vee x\bar{y}.\end{aligned}$$

Функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо виконується умова

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}}. \quad (1)$$

Функція двоїста сама собі називається *самодвоїстою*.

Таблиця двоїстої функції $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при обраному порядку наборів отримується з таблиці для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ інвертуванням стовпчика функції (змінюю нулів на одиниці, одиниць – на нулі) та перевертанням його.

Теорема (принцип двоїстості). Якщо у формулі F , яка реалізує функцію f , усі символи функцій замінити на символи двоїстих функцій відповідно, то отримана формула F^* буде реалізувати функцію f^* , двоїсту до f .

В алгебрі Буля принцип двоїстості має більш простий і конкретний вигляд.

Принцип двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі F , яка реалізує функцію f , усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції, усі 0 замінити на 1, 1 – на 0, то отримана формула F^* реалізує функцію f^* , двоїсту до f .

При використанні принципу двоїстості потрібно враховувати старшинство операцій і при потребі поставити дужки.

Якщо функції рівні, то двоїсті до них функції також рівні.

Приклади

1. Перетворити $\overline{x \vee y}$ у рівносильну формулу алгебри Жегалкіна. Отриману формулу спростити.

Розв'язання

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) = xy \oplus y.$$

Відповідь: $xy \oplus y$.

2. Перетворити $(x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (xy \oplus 1)$ у рівносильну формулу алгебри Буля. Отриману формулу спростити.

Розв'язання

$$(x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (xy \oplus 1) = \overline{\overline{xy}} \oplus \overline{xy} = \overline{\overline{xy}} \overline{xy} \vee \overline{xy} \overline{\overline{xy}} = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y}) \vee \overline{xy} \overline{xy} = \\ = x\overline{x} \vee x\overline{y} \vee y\overline{x} \vee y\overline{y} = x\overline{y} \vee \overline{x}y.$$

Відповідь: $x\overline{y} \vee \overline{x}y$.

3. Знайти функцію двоїсту до функції $f(x, y, z) = xy \vee \overline{z}(x \vee \overline{xy})$.

Розв'язання

Формула задана в алгебрі Буля. Для побудови двоїстої функції $f^*(x, y, z)$ у формулі $f(x, y, z) = xy \vee \overline{z}(x \vee \overline{xy})$ усі кон'юнкції замінимо на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції та поставимо дужки, враховуючи старшинство операцій. Отримаємо:

$$f^*(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (\overline{z} \vee (x \wedge (\overline{x} \vee y))).$$

Відповідь: $f^*(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (\overline{z} \vee (x \wedge (\overline{x} \vee y)))$.

5.3. Спеціальні форми зображення булевих функцій в алгебрі Буля

Основні теоретичні відомості

Спеціальними формами зображення булевих функцій в алгебрі Буля є *диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ)* та *кон'юнктивні нормальні форми (КНФ)*.

Введемо позначення $x^\Omega = x\Omega \vee \overline{x} \overline{\Omega}$, де Ω – параметр, який дорівнює 0 або 1. Матимемо: $x^\Omega = \begin{cases} \overline{x}, & \text{якщо } \Omega = 0; \\ x, & \text{якщо } \Omega = 1. \end{cases}$

Зафіксуємо множину змінних $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Елементарною кон'юнкцією називається логічний добуток $k = x_{i1}^{\Omega_1} x_{i2}^{\Omega_2} \dots x_{ir}^{\Omega_r}$, де x_{ij} змінні з множини X , причому всі різні.

Число r називається рангом кон'юнкції. Якщо $r = 0$, кон'юнкція називається порожньою і вважається рівною 1.

Елементарна кон'юнкція, яка включає всі змінні з множини X , називається *конституентною одиницею*.

Різних конституент одиниці для фіксованої множини з n змінних буде стільки, скільки є двійкових наборів із n компонентами, тобто 2^n .

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називається диз'юнкція $D = k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_n$ попарно різних елементарних кон'юнкцій.

Число s називається довжиною ДНФ.

Якщо $s = 0$, то $D = 0$.

Якщо $s = 1$, то ДНФ збігається з деякою елементарною кон'юнкцією.

Будь-яку формулу булевої алгебри можна перетворити в еквівалентну їй ДНФ.

Алгоритм побудови ДНФ для формули булевої алгебри

1. За допомогою законів де Моргана та подвійного заперечення формулу перетворюють у рівносильну, побудовану зі змінних та їх заперечень за допомогою символів $\wedge, \vee$ (заперечення можуть стояти лише над змінними).

2. Досягають того, щоб усі кон'юнкції виконувалися раніше диз'юнкції. Для цього розкривають дужки на основі першого дистрибутивного закону.

3. На основі співвідношень для констант і закону протиріччя виключають нулі й на основі законів ідемпотентності об'єднують рівні члени. Це і є шукана ДНФ.

ДНФ булевої функції не єдина.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називається ДНФ, у якій кожна елементарна кон'юнкція є конститuentoю одиниці.

Теорема. Довільна булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ може бути єдиним способом зображена в ДДНФ.

Алгоритм побудови ДДНФ для функції, яка задана таблично

1. Для кожного набору, на якому дана функція приймає значення 1, будують відповідну цьому набору конститuentoю одиниці.

2. Знаходять диз'юнкцію всіх цих конститuent. Це і є ДДНФ заданої функції.

Довільну ДНФ можна звести до ДДНФ розщепленням кон'юнкцій, які містять не всі змінні. Якщо кон'юнкція k не містить змінної x_i , то записують:

$$k = k(x_i \vee \overline{x_i}) = kx_i \vee k\overline{x_i}.$$

Двоїстим способом, замінюючи у попередніх означеннях нулі на одиниці, кон'юнкцію на диз'юнкцію і навпаки, вводиться означення елементарної диз'юнкції, конститuentи нуля, КНФ та ДКНФ.

Елементарною диз'юнкцією називається вираз:

$$\alpha = x_{i1}^{\Omega_1} \vee x_{i2}^{\Omega_2} \vee \dots \vee x_{ir}^{\Omega_r}, \text{ у якому всі } x_{ij} \text{ різні.}$$

Число r називається рангом диз'юнкції. При $r = 0$ диз'юнкція називається порожньою і вважається рівною нулю.

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називається кон'юнкція $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s$ елементарних диз'юнкцій, у якій всі α_i різні.

Алгоритм побудови КНФ для формули булевої алгебри:

1. Перший етап цього алгоритму такий же, як і для ДНФ.

2. Досягають того, щоб усі диз'юнкції виконувалися раніше кон'юнкцій. Для цього використовують другий дистрибутивний закон або його наслідок $xy \vee zk = (x \vee z)(x \vee k)(y \vee z)(y \vee k)$.

3. На основі співвідношень для констант і законів виключення третього позбуваються одиниць та за законами ідемпотентності об'єднують рівні члени.

Елементарна диз'юнкція, яка включає всі змінні з множини X , називається *конституентою нуля*.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називається *КНФ*, у якій кожна елементарна диз'юнкція є конституентою нуля.

Теорема. Довільна булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$ може бути зображена в ДКНФ єдиним способом.

Алгоритм побудови ДКНФ для функції, яка задана таблично

1. Для кожного набору, на якому функція приймає значення 0, будують відповідну цьому набору конституенту нуля.

2. Знаходять кон'юнкцію всіх цих конституент. Це і є ДКНФ заданої функції.

На основі тотожних перетворень довільну КНФ можна перетворити у ДКНФ. Якщо у деяку елементарну диз'юнкцію α не входить змінна x_i , то використовується *розщеплення диз'юнкції* $\alpha = \alpha \vee x_i \bar{x}_i = (\alpha \vee x_i)(\alpha \vee \bar{x}_i)$ і другий дистрибутивний закон. Після тривіальних перетворень отримується ДКНФ.

Приклади

1. Побудувати ДНФ для функції $f = \overline{x \vee z}(x \rightarrow y)$.

Розв'язання

Використавши алгоритм побудови ДНФ, матимемо:

$$f = \overline{x \vee z}(x \rightarrow y) = \bar{x} \bar{z} (x \vee y) = \bar{x} \bar{z} \bar{x} \vee \bar{x} \bar{z} y = \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z}.$$

Відповідь: $\bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z}$.

2. Побудувати ДНФ для функції f , яка задана таблицею 5.7.

Таблиця 5.7

x_1	x_2	$f = x_1 \leftrightarrow x_2$	
0	0	1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x_1 x_2$

Розв'язання

Функція f приймає значення 1 на наборах 00 та 11. Тому відповідні цим наборам конституенти одиниці — $\overline{x_1} \overline{x_2}$ та $x_1 x_2$. Диз'юнкція цих конститuent і є ДДНФ заданої функції $f = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 x_2$.

Відповідь: $f = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 x_2$.

3. Перетворити диз'юнктивну нормальну форму $\overline{xz} \vee \overline{xy} \overline{z}$ у досконалу диз'юнктивну нормальну форму.

Розв'язання

Перший диз'юнктивний член не містить змінної y . Використовуючи розщеплення кон'юнкції, можна записати: $\overline{xz} \vee \overline{xy} \overline{z} = \overline{x} (y \vee \overline{y}) \overline{z} \vee \overline{x} y \overline{z} = \overline{x} y \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y \overline{z} = \overline{x} y \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z}$.

Відповідь: $\overline{x} y \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z}$.

4. Побудувати КНФ для функції $f = \overline{x \vee z} (x \rightarrow y)$.

Розв'язання

Використавши алгоритм побудови КНФ, матимемо:

$$f = \overline{x \vee z} (x \rightarrow y) = \overline{x} \overline{z} (\overline{x} \vee y).$$

Відповідь: $\overline{x} \overline{z} (\overline{x} \vee y)$.

5. Побудувати КНФ для функції f , яка задана таблицею 5.8.

Таблиця 5.8

x_1	x_2	$f = x_1 \leftrightarrow x_2$	
0	0	1	
0	1	0	$x_1 \vee \overline{x_2}$
1	0	0	$\overline{x_1} \vee x_2$
1	1	1	

Розв'язання

Функція f приймає значення 0 на наборах 01 та 10. Тому відповідні цим наборам конституенти нуля — $x_1 \vee \overline{x_2}$ та $\overline{x_1} \vee x_2$.

Кон'юнкція цих конститuent нуля і є ДКНФ заданої функції $f = (x_1 \vee \overline{x_2}) (\overline{x_1} \vee x_2)$.

Відповідь: $f = (x_1 \vee \overline{x_2}) (\overline{x_1} \vee x_2)$.

6. Перетворити КНФ $(\overline{x} \vee y)(y \vee \overline{z})$ у ДКНФ.

Розв'язання

В елементарну диз'юнкцію $\overline{x} \vee y$ не входить змінна z , в елементарну диз'юнкцію $y \vee \overline{z}$ — змінна x . Використовуючи розщеплення диз'юнкції, можна записати:

$$\begin{aligned} (\overline{x} \vee y)(y \vee \overline{z}) &= (\overline{x} \vee y \vee z \overline{z})(x \overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = (\overline{x} \vee y \vee z) (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) (x \vee y \vee \overline{z}) (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = \\ &= (\overline{x} \vee y \vee z) (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) (x \vee y \vee \overline{z}). \end{aligned}$$

Відповідь: $(\bar{x} \vee y \vee z) (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) (x \vee y \vee \bar{z})$.

5.4. Поліном Жегалкіна

Основні теоретичні відомості

Елементарна кон'юнкція називається *монотонною*, якщо вона не містить заперечень змінних.

Формула $P(\tilde{x}^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_s$, де $k_1, k_2, \dots, k_s$ – попарно різні монотонні кон'юнкції змінних із множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, називається поліномом Жегалкіна. Найбільший із рангів елементарних кон'юнкцій, які входять у поліном, називається степенем полінома.

Теорема. Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом зобразити у формі полінома Жегалкіна.

Методи побудови полінома Жегалкіна

1. Метод невизначених коефіцієнтів.

Для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ записують найбільш загальний вигляд полінома Жегалкіна $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для кожного двійкового набору $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ складають рівняння $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Отримують систему з 2^n рівнянь. Розв'язками цієї системи є коефіцієнти полінома $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Побудова полінома Жегалкіна на основі тотожних перетворень.

Будують рівносильну формулу, в якій є лише операції кон'юнкції та заперечення, а потім всюди замінюють $\bar{x}$ на $x \oplus 1$. Отриману формулу спрощують.

Теорема. Булева функція має істотними всі змінні, які входять у її поліном Жегалкіна.

Приклади

1. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f = x \vee y$ двома методами (методом невизначених коефіцієнтів та на основі тотожних перетворень).

Розв'язання

Перший метод

Використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Загальний вигляд полінома від двох змінних із невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$$

Прирівнюємо значення функції та полінома на всіх чотирьох наборах значень змінних, і одержимо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0,0) = 0 = c_0, \\ f(0,1) = 1 = c_0 \oplus c_2, \\ f(1,0) = 1 = c_0 \oplus c_1, \\ f(1,1) = 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3, \end{array} \right. \quad \text{звідси} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0, \\ c_2 = 1, \\ c_1 = 1, \\ c_3 = 1. \end{array} \right.$$

Отже, $f = x \vee y = x \oplus y \oplus xy$.

Другий метод

Побудуємо поліном Жегалкіна для даної функції на основі тотожних перетворень:

$$f = x \vee y = \overline{\overline{x \wedge y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y.$$

Відповідь: $f = x \vee y = x \oplus y \oplus xy$.

5.5. Повнота системи булевих функцій. Замкнені класи. Критерій функціональної повноти системи булевих функцій

Система булевих функцій Q називається *функціонально повною*, якщо довільну булеву функцію можна записати у вигляді формули через функції системи Q .

Дослідження повноти одних систем можна звести до дослідження повноти інших. Якщо всі функції функціонально повної системи Q_1 можуть бути зображені формулами над системою Q_2 , то Q_2 – функціонально повна. Говорять, що система Q_2 зводиться до системи Q_1 .

Множина G булевих функцій називається *замкненим класом*, якщо довільна суперпозиція функцій із G знову належить G .

Існує п'ять найважливіших замкнутих класів:

1. Клас T_0 функцій, що зберігають нуль.

Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається функцією, що зберігає нуль, якщо $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

2. Клас T_1 функцій, що зберігають одиницю.

Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається функцією, що зберігає одиницю, якщо $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

3. Клас S самодвоїстих функцій.

Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається самодвоїстою, якщо вона двоїста сама до себе $f = f^*$.

4. Клас M монотонних функцій.

Для двох двійкових наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ виконується відношення передування $\alpha \leq \beta$, якщо $\alpha_1 \leq \beta_1 \wedge \alpha_2 \leq \beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \leq \beta_n$.

Булева функція називається монотонною, якщо для довільних двох наборів α та β з того, що $\alpha \leq \beta$, випливає, що $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

5. Клас L лінійних функцій.

Булева функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$, де $a_i \in \{0, 1\}$, тобто є поліномом першого степеня.

Теорема Поста (критерій функціональної повноти системи булевих функцій). Для того, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно й достатньо, щоб вона містила:

- 1) функцію, що не зберігає нуль;
- 2) функцію, що не зберігає одиницю;
- 3) несамоодвоїсту функцію;
- 4) немонотонну функцію;
- 5) нелінійну функцію.

Для перевірки виконання умов теореми Поста для деякої скінченної системи функцій $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ складають таблицю, яку називають *таблицею Поста* (табл. 5.9).

Таблиця 5.9

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	-	-	+	+
f_2	-	+	+	+	+
...					
f_n					

У цій таблиці ставлять знак “-” або “+” залежно від того, належить чи не належить функція до відповідного класу. Для повноти системи необхідно й достатньо, щоб у кожному стовпчику таблиці Поста був принаймні один мінус (“-”).

Мінімальна повна система функцій, тобто така повна система функцій, вилучення з якої довільної функції робить систему неповною, називається *базисом*.

Приклади

1. З’ясувати, яким із множин $T_0 \cup T_1$, $T_0 \setminus T_1$, належить функція $f = ((x \vee y) \rightarrow (x \mid yz)) \downarrow ((y \leftrightarrow z) \rightarrow x)$.

Розв’язання

Знайдемо значення функції f на наборах $(0,0,0)$ та $(1,1,1)$. Для цього побудуємо відповідну частину таблиці істинності:

Таблиця 5.10

x	y	z	$x \vee y$	yz	$x \mid yz$	$(x \vee y) \rightarrow (x \mid yz)$	$y \leftrightarrow z$	$(y \leftrightarrow z) \rightarrow x$	f
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

Отже, $f \in T_0$ і $f \notin T_1$. Звідси випливає, що $f \in T_0 \cup T_1$.

Відповідь: $f \in T_0 \cup T_1$.

2. Чи є самодвоїстою функція $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$?

Розв'язання

Для побудови двоїстої функції $f^*(x, y, z)$ у формулі $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ усі кон'юнкції замінимо на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції, та поставимо дужки, враховуючи старшинство операцій. Отримаємо

$$f^*(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \vee xz \vee yx \vee yz) \wedge (y \vee z) =$$

$$= xy \vee xz \vee xyz \vee xz \vee xy \vee xyz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz = f(x, y, z).$$

Отже, функція $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ самодвоїста.

Відповідь: функція $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ самодвоїста.

3. Чи є монотонною функція $f = xy(x \oplus y)$?

Розв'язання

Побудуємо таблицю істинності функції $f = xy(x \oplus y)$.

Таблиця 5.11

x	y	xy	$x \oplus y$	$xy(x \oplus y)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Оскільки для будь-яких двійкових наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ із того, що $\alpha \leq \beta$, випливає, що $f(\alpha) \leq f(\beta)$, то функція $f = xy(x \oplus y)$ монотонна.

Відповідь: функція $f = xy(x \oplus y)$ монотонна.

4. Чи є лінійною функція $f = (xy \vee \bar{x} \bar{y}) \oplus z$?

Розв'язання

Побудуємо поліном Жегалкіна для функції $f = (xy \vee \bar{x} \bar{y}) \oplus z$.

$$f = (xy \vee \bar{x} \bar{y}) \oplus z = \overline{\overline{xy \vee \bar{x} \bar{y}}} \oplus z = \overline{\overline{xy} \bar{x} \bar{y}} \oplus z = (xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1) \oplus z =$$

$$= (xy \oplus 1)(xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1) \oplus z = (xy \oplus 1)(xy \oplus x \oplus y) \oplus z =$$

$$= xy \oplus xy \oplus xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus z = x \oplus y \oplus z \oplus 1.$$

Отримали поліном першого степеня, тому функція $f = (xy \vee \bar{x} \bar{y}) \oplus z$ є лінійною.

Відповідь: функція $f = (xy \vee \bar{x} \bar{y}) \oplus z$ лінійна.

5. Зведенням до повних систем показати, що система $Q_1 = \{\bar{x}, xy\}$ є функціонально повна.

Розв'язання

Система $Q_2 = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ є функціонально повна. Це випливає із можливості зображення довільної булевої функції у ДНФ. Оскільки $x \vee y = \overline{\bar{x} \bar{y}}$, то всі функції функціонально повної системи Q_2 можуть бути зображені формулами над Q_1 . Тому система Q_1 зводиться до системи Q_2 , а отже вона функціонально повна.

6. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати чи є функціонально повною система функцій $Q = \{\bar{x}, x \rightarrow y\}$.

Розв'язання

Побудуємо таблицю Поста для системи функцій $Q = \{\bar{x}, x \rightarrow y\}$.

Таблиця 5.12

	T_0	T_1	S	M	L
$\bar{x}$	-	-	+	-	+
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-

У кожному стовпчику таблиці 5.12 стоїть знак “—”. Отже, за критерієм функціональної повноти, система $Q = \{\bar{x}, x \rightarrow y\}$ є функціонально повною.

Відповідь: система функцій $Q = \{\bar{x}, x \rightarrow y\}$ функціонально повна.

5.6. Мінімізація булевих функцій

Мінімізацією булевої функції називають знаходження найпростішого її зображення у вигляді суперпозиції функцій деякої функціонально повної системи.

Канонічна (найпростіша) задача мінімізації булевих функцій.

Серед усіх ДНФ, рівносильних даній формулі g , знайти ту, яка містить найменшу кількість букв.

Зауваження: при підрахунку кількості букв кожна буква враховується стільки разів, скільки вона трапляється в ДНФ.

Елементарна кон'юнкція $k = x_{i1}^{\Omega_1} x_{i2}^{\Omega_2} \dots x_{ir}^{\Omega_r}$ називається *імплікантою* булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо на довільному наборі значень змінних, на якому k перетворюється в 1, значення булевої функції f також дорівнює 1.

Елементарна кон'юнкція k називається *простою імплікантою* булевої функції f , якщо k є імплікантою функції f , а елементарна кон'юнкція, що отримується з k вилученням довільної букви, вже не буде імплікантою функції f .

Диз'юнкція всіх простих імплікант булевої функції f називається *скороченою ДНФ* цієї функції і позначається СДНФ.

Теорема 1. СДНФ булевої функції f задає цю функцію.

Теорема 2. Мінімальна ДНФ булевої функції f отримується із СДНФ цієї функції шляхом вилучення деяких елементарних кон'юнкцій.

Диз'юнктивна нормальна форма D функції f називається її *тупиковою ДНФ* якщо:

- 1) кожна елементарна кон'юнкція з D є простою імплікантою f ;
- 2) вилучення з D довільного диз'юнктивного члена приводить до ДНФ, яка не задає функцію f .

Теорема 3. Мінімальна ДНФ булевої функції є її тупиковою ДНФ.

Із теорем 2 та 3 випливає, що знайти мінімальну ДНФ можна у три етапи:

- 1) побудова скороченої ДНФ;
- 2) побудова всіх тупикових ДНФ;
- 3) вибір із знайдених тупикових ДНФ мінімальних ДНФ.

Перший етап мінімізації можна виконати декількома методами.

Метод Блейка (A. Blake)

Цей метод ґрунтується на використанні рівносильності узагальненого склеювання: $AC \vee B\bar{C} = AC \vee B\bar{C} \vee AB$, де A, B, C — довільні формули.

Якщо у цій рівносильності $AB \neq 0$, то говорять, що до членів AC та $B\bar{C}$ можна застосувати *нетривіальне узагальнене склеювання*.

Метод Блейка полягає в тому, що в довільній ДНФ заданої булевої функції спочатку здійснюють усі допустимі узагальнені склеювання (причому, члени отримані в результаті узагальнених склеювань, знову беруть участь у нових узагальнених склеюваннях).

Після цього здійснюють поглинання, тобто вилучають диз'юнктивні члени виду AB у разі наявності диз'юнктивних членів A або B . У результаті отримують скорочену ДНФ.

Метод Нельсона (R. Nelson)

Метод полягає в тому, що в довільній КНФ булевої функції розкривають усі дужки відповідно до дистрибутивного закону, а потім виконують усі поглинання.

На *другому етапі мінімізації* знаходять всі тупикові ДНФ, із яких на *третьому етапі* вибирають мінімальні.

Якщо відома ДДНФ, то тупикові ДНФ можна відшукати за *імплікантною таблицею Куайна (W. Quine)*.

Імплікантна таблиця Куайна – це прямокутна таблиця, рядки якої позначено різними простими імплікантами функції f , а стовпці – конституентами одиниці, що входять у ДДНФ функції f . На перетині p -го рядка і k -го стовпця імплікантної таблиці тоді й лише тоді ставиться значок “*”, коли імпліканта p становить деяку частину конституенти k (можливо, збігається з усією конституентою). У цьому разі говорять, що *імпліканта p накриває конституенту k* .

Побудову тупикових ДНФ можна здійснити безпосередньо за імплікантною таблицею: якщо у стовпчику є лише один символ “*”, то проста імпліканта, яка позначає рядок із цією зірочкою, повина бути вибрана обов’язково. Множина таких простих імплікант називається *ядром булевої функції*. Імпліканти ядра входять у будь-яку тупикову ДНФ, але вони можуть накривати лише частину конституент одиниці імплікантної таблиці. Виключають з імплікантної таблиці стовпчики, що мають символ “*” на перетині з рядками позначеними, імплікантами рядка. Після цього методом перебору можна знайти мінімальні системи простих імплікант, які накривають решту конституент одиниці. Таким способом знаходять всі тупикові ДНФ, із яких вибирають мінімальні.

Якщо для побудови скороченої ДНФ використовувався метод Блейка або Нельсона, то для побудови тупикових ДНФ користуються *диз’юнктивним критерієм поглинання (ДКП)*:

якщо $A \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m = 1$, то $A \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$.

Булеві функції використовують для спрощення релейно-контактних і вентильних схем. У випадку релейно-контактних схем кожній змінній x булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставлять у відповідність перемикач, який пропускає струм тоді й лише тоді, коли змінна x набуває значення 1. Операція кон’юнкція інтерпретується як послідовне з’єднання перемикачів, диз’юнкція – як паралельне з’єднання.

Два електричні ланцюги вважаються еквівалентними, якщо вони одночасно пропускають або не пропускають струм при однакових станах відповідних перемикачів. Із двох еквівалентних ланцюгів простішим вважається той, який складається з меншої кількості перемикачів.

Вентильні схеми складаються з елементарних об'єктів – вентилів трьох типів:

- вентиль з двома входами й одним виходом, на виході отримуємо 1 (наявність напруги), якщо хоч на один із двох входів подається 1;
- вентиль з двома входами й одним виходом, на виході отримуємо 1 (наявність напруги), якщо обидва входи подається 1;
- вентиль з одним входом і одним виходом, на виході отримуємо 1, якщо на вхід подається 0, і на виході отримуємо 0, якщо на вхід подається 1.

Приклади

1. Побудувати за методом Блейка скорочену ДНФ булевої функції

$$f = x\bar{y} \vee \bar{x}yz \vee yz.$$

Розв'язання

Перший та другий член формули $f = x\bar{y} \vee \bar{x}yz \vee yz$ допускають узагальнені склеювання як по x , так і по y . Проте члени, які виникають у результаті цих склеювань, дорівнюють нулю. Нетривіальне узагальнене склеювання можливе лише для першого і третього членів формули. Застосуємо це склеювання й одержимо ДНФ $f_1 = x\bar{y} \vee \bar{x}yz \vee yz \vee xz$.

Для f_1 нетривіальне узагальнене склеювання можна застосувати до першого і третього та другого і четвертого членів. Проте обидва ці склеювання дають члени, які вже є у f_1 . Тому всі узагальнені склеювання, які можливі для f_1 , вже виконано.

Виконуємо поглинання. Член $\bar{x}yz$ поглинається членом yz . Отримаємо скорочену ДНФ $f_2 = x\bar{y} \vee yz \vee xz$.

Відповідь: $f_2 = x\bar{y} \vee yz \vee xz$.

2. Побудувати за методом Нельсона скорочену ДНФ булевої функції

$$f = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z).$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} \text{Розкриваючи дужки, отримаємо } f &= (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) = \\ &= (xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee y \vee yz \vee \bar{x}z \vee yz \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) = \\ &= (xy \vee xz \vee \bar{x}y \vee y \vee yz \vee \bar{x}z \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) = \\ &= (y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) = xy \vee yz \vee xz \vee \bar{y}z \vee z. \end{aligned}$$

Виконуємо поглинання. Члени yz , xz та $\bar{y}z$ поглинаються членом z . Отримаємо скорочену ДНФ $f_1 = xy \vee z$.

Відповідь: $f_1 = xy \vee z$.

3. Побудувати тупикові ДНФ функції, яка задана скороченою ДНФ $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$.

Розв'язання

Застосуємо диз'юнктивний критерій поглинання до члена xz . Маємо $xz \rightarrow \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz = 1$.

Отже, проста імпліканта xz може бути вилучена зі скороченої ДНФ. Отримаємо ДНФ: $f_1 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz$.

До жодного із диз'юнктивних членів форми f_1 диз'юнктивний критерій поглинання застосувати не можна. Тому f_1 – тупикова ДНФ.

Для відшукування наступних тупикових ДНФ повертаємося до скороченої ДНФ $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$.

Застосуємо диз'юнктивний критерій поглинання тепер до члена yz . Маємо $yz \rightarrow \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz = 1$. Проста імпліканта yz може бути вилучена зі скороченої ДНФ: $f_2 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$.

До жодного із диз'юнктивних членів форми f_2 диз'юнктивний критерій поглинання застосувати не можна, тому f_2 – тупикова ДНФ.

До членів $\bar{x}y$ та $x\bar{y}$ скороченої ДНФ $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$ диз'юнктивний критерій поглинання застосувати не можна: $\bar{x}y \rightarrow x\bar{y} \vee xz \vee yz \neq 1$ та $x\bar{y} \rightarrow \bar{x}y \vee xz \vee yz \neq 1$. Тому інших тупикових ДНФ, крім f_1 та f_2 , функція f не має.

Відповідь: $f_1 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz$, $f_2 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$.

4. Мінімізувати булеву функцію $f = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

Розв'язання

1 етап. Знаходимо скорочену ДНФ.

Використаємо метод Блейка:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee yz \vee x\bar{y} \vee xz = \\ &= \bar{x}y \vee yz \vee x\bar{y} \vee xz = \text{Дскор}. \end{aligned}$$

2 етап. Будуємо всі тупикові ДНФ.

Імплікантна таблиця Куайна:

Таблиця 5.13

	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz
$\bar{x}y$	*	*			
$x\bar{y}$			*	*	
xz				*	*
yz		*			*

Побудову тупикових ДНФ здійснюємо за імплікантною таблицею. У цьому прикладі ядро утворюють прості імпліканти $\bar{x}y$ та $x\bar{y}$. Імпліканти ядра $\bar{x}y$ та $x\bar{y}$ входять у будь-яку тупикову ДНФ, але вони накривають лише частину конститuant одиниці. Лишається не накритою імплікантами ядра конститuant xzy . Вона може бути накритою як імплікантою xz , так і імплікантою yz .

Отже, тупикових ДНФ є дві:

$$f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \text{ та } f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz$$

3 етап. Обираємо зі знайдених тупикових ДНФ мінімальні ДНФ.

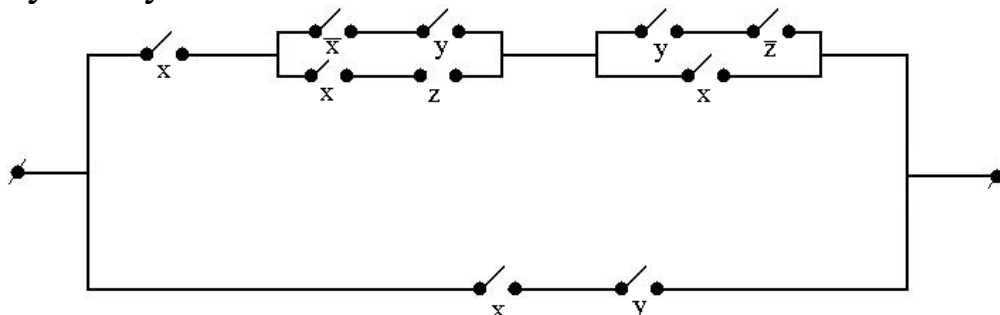
Знайдені тупикові ДНФ містять по шість букв, тому вони обидві є мінімальними.

Відповідь: $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$, $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz$.

5. Побудувати контактну схему, робота якої описується функцією $f = x(\bar{x}y \vee xz)(y\bar{z} \vee x) \vee xy$. Спростити формулу й накреслити спрощену схему.

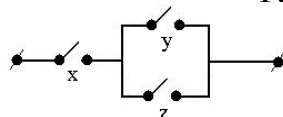
Розв'язання

Будемо інтерпретувати операцію кон'юнкції як послідовне з'єднання перемикачів, диз'юнкції – як паралельне з'єднання. Отримаємо контактну схему:



Спростимо функцію f , використавши перший дистрибутивний закон: $f = xz(y\bar{z} \vee x) \vee xy = xz \vee xy = x(z \vee y)$.

Тоді контактна схема, яка відповідає функції f , така:



Запитання і завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади

1. Що таке булева функція?
2. Скільки існує булевих функцій від n змінних?
3. Які є способи подання булевих функцій?
4. Які змінні називаються фіктивними?

5. Як будують таблицю істинності булевої функції?
6. Перелічіть булеві функції однієї змінної.
7. Дайте визначення суперпозиції булевих функцій.
8. Перелічіть булеві функції двох змінних.
9. Що таке алгебра булевих функцій?
10. Які операції визначені в алгебрі Буля?
11. Сформулюйте закони алгебри Буля.
12. Які операції визначені в алгебрі Жегалкіна?
13. Сформулюйте закони алгебри Жегалкіна.
14. Як перейти від алгебри Буля до алгебри Жегалкіна?
15. Як перейти від алгебри Жегалкіна до алгебри Буля?
16. Яка функція називається двоїстою до функції f ?
17. Що таке самодвоїста функція?
18. Сформулюйте принцип двоїстості.
19. Дайте визначення елементарної кон'юнкції та елементарної диз'юнкції.
20. Що таке конститuenta одиниці та конститuenta нуля?
21. Дайте визначення ДНФ та КНФ.
22. Опишіть алгоритми побудови ДНФ та КНФ для формули булевої алгебри.
23. Що таке ДДНФ та ДКНФ?
24. Дайте означення полінома Жегалкіна.
25. Які є способи побудови поліномів Жегалкіна?
26. Що таке функціонально повна система?
27. Дайте визначення замкнутого класу?
28. Перерахуйте основні замкнуті класи?
29. Сформулюйте критерій функціональної повноти системи булевих функцій.
30. Наведіть приклади повних систем функцій.
31. Сформулюйте канонічну задачу мінімізації булевих функцій.
32. Що таке імпліканта та проста імпліканта булевої функції?
33. Що таке скорочена диз'юнктивна нормальна форма булевих функцій?
34. Дайте означення тупикової ДНФ.
35. Що таке мінімальна ДНФ.
36. Які етапи знаходження мінімальної ДНФ?
37. У чому суть методу Блейка?

38. У чому суть методу Нельсона?

39. Як будується імплікантна таблиця Куайна?

Тести

Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Функція називається булевою, якщо:
 - 1) усі її аргументи можуть набирати лише два значення 0 та 1;
 - 2) функція може набирати лише два значення 0 та 1;
 - 3) вона від двох змінних;
 - 4) її аргументи набирають лише значення 0;
 - 5) усі її аргументи, як і сама функція, можуть набирати лише двох значень 0 та 1.
2. Скільки є різних n -місних булевих функцій?
 - 1) 2^{2^n} ;
 - 2) 2 ;
 - 3) n ;
 - 4) 2^n ;
 - 5) 1.
3. Як називають функцію $f = x \wedge y = xy$?
 - 1) диз'юнкцією;
 - 2) імплікацією;
 - 3) кон'юнкцією;
 - 4) еквіваленцією;
 - 5) додаванням за модулем 2.
4. Як називають функцію $f = x \vee y$?
 - 1) диз'юнкцією;
 - 2) імплікацією;
 - 3) кон'юнкцією;
 - 4) еквіваленцією;
 - 5) додаванням за модулем 2.
5. Як називають функцію $f = x \oplus y$?
 - 1) диз'юнкцією;
 - 2) імплікацією;
 - 3) кон'юнкцією;
 - 4) еквіваленцією;
 - 5) додаванням за модулем 2.

6. Які з наведених виразів є елементарними кон'юнкціями?

- 1) $\overline{xyz}$;
- 2) $x\overline{yz}$;
- 3) $x\overline{y}x$;
- 4) $x\overline{y}z$;
- 5) $\overline{x}y \vee x\overline{y}$.

7. Які з наведених виразів є елементарними диз'юнкціями?

- 1) $\overline{x \vee y \vee z}$;
- 2) $x \vee \overline{yz}$;
- 3) $x \vee y \vee x$;
- 4) $x \vee y \vee \overline{z}$;
- 5) $\overline{x}y \vee x\overline{y}$.

8. Нехай $X = \{x, y, z\}$. Які з наведених виразів є конститuentами одиниці?

- 1) $\overline{x \vee y \vee z}$;
- 2) $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$;
- 3) $x\overline{y}$;
- 4) $x\overline{y}z$;
- 5) $\overline{x}y \vee x\overline{y}$.

9. Нехай $X = \{x, y, z\}$. Які з наведених виразів є конститuentами нуля?

- 1) $\overline{x \vee y \vee z}$;
- 2) $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$;
- 3) $x\overline{y}$;
- 4) $x\overline{y}z$;
- 5) $\overline{x}y \vee x\overline{y}$.

10. Які з наведених виразів є ДНФ?

- 1) $\overline{x \vee y \vee z}$;
- 2) $x\overline{y} \vee \overline{x}z$;
- 3) $x \vee y \vee x$;
- 4) $(x \vee y)(\overline{x} \vee x\overline{y})$;
- 5) $\overline{x}y \vee x\overline{y} \vee x\overline{y}$.

11. Які з наведених виразів є КНФ?

- 1) $\overline{x \vee y \vee z}$;

- 2) $xy \vee \bar{x}z$;
- 3) $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{xy})$;
- 4) $(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{xy})$;
- 5) $\bar{xy} \vee x\bar{y} \vee x\bar{y}$.

12. Які з наведених елементарних кон'юнкцій не є монотонними?

- 1) xyz ;
- 2) x ;
- 3) y ;
- 4) xy ;
- 5) $\bar{xy}$.

13. Поліном Жегалкіна для булевої функції $f = x \vee y$ такий:

- 1) $x \oplus y \oplus xy$;
- 2) x ;
- 3) y ;
- 4) $x \oplus y$;
- 5) $\bar{xy} \oplus x\bar{y}$.

14. Які з наведених формул не є поліномами Жегалкіна?

- 1) xyz ;
- 2) $x \oplus z$;
- 3) 1 ;
- 4) $x \oplus \bar{y}$;
- 5) $xy \oplus xz \oplus z$.

15. Загальний вигляд полінома Жегалкіна для функції від двох змінних такий:

- 1) $P(x, y) = c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy$;
- 2) $P(x, y) = c_0 \oplus c_1x$;
- 3) $P(x, y) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy$;
- 4) $P(x, y) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y$;
- 5) $P(x, y) = 1 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy$.

16. Які з наведених функцій зберігають 0?

- 1) 1 ;
- 2) $\bar{x}$;
- 3) $x \vee y$;
- 4) $x \rightarrow y$;

5) $x \leftrightarrow y$.

17. Які з наведених функцій зберігають 1?

1) 0;

2) $\bar{x}$;

3) $x \oplus y$;

4) $\overline{x \rightarrow y}$;

5) $x \leftrightarrow y$.

18. Які з наведених функцій монотонні?

1) x ;

2) $\bar{x}$;

3) $x \oplus y$;

4) $x \rightarrow y$;

5) $x \leftrightarrow y$.

19. Які з наведених функцій немонотонні?

1) 0;

2) $\bar{x}$;

3) $x \vee y$;

4) x ;

5) xy .

Рівень 2

20. ДДНФ для функції $f(x, y)$, яка задана таблицею 5.14:

Таблиця 5.14

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1) $f(x, y) = \bar{x} \bar{y} \vee xy$;

2) $f(x, y) = \bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y}$;

3) $f(x, y) = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

4) $f(x, y) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$;

5) $f(x, y) = x(\bar{x} \vee \bar{y})$.

21. ДКНФ для функції $f(x, y)$, яка задана таблицею 5.14:

1) $f(x, y) = \bar{x} \bar{y} \vee xy$;

- 2) $f(x, y) = \bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y}$;
- 3) $f(x, y) = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;
- 4) $f(x, y) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$;
- 5) $f(x, y) = x(\bar{x} \vee \bar{y})$.

22. Які з наведених функцій не є лінійними?

- 1) x ;
- 2) $\bar{x}$;
- 3) $x \oplus y$;
- 4) 0 ;
- 5) $x \vee y$.

23. Які з наведених функцій самодвоїсті?

- 1) 0 ;
- 2) 1 ;
- 3) $x \oplus y$;
- 4) $x \vee y$;
- 5) x .

24. Які з наведених функцій належать множині $T_0 \setminus T_1$

- 1) xy ;
- 2) $\bar{x}$;
- 3) $x \oplus y$;
- 4) $x \rightarrow y$;
- 5) $x \vee y$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Побудувати таблицю істинності функції, яка реалізується формулою:

- | | |
|---|--|
| а) $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$; | г) $((\overline{x \vee y} \wedge z) \downarrow y)$; |
| б) $\overline{(x \vee y) \vee xz} \downarrow (x \leftrightarrow y)$; | д) $xy \oplus zy \vee \bar{x}y$; |
| в) $(x \downarrow y) \vee (\bar{z} \leftrightarrow xy)$; | е) $((x \downarrow y) \downarrow z) \downarrow y$. |

2. Знайти фіктивні змінні функції:

- а) $f(x, y, z) = (11110000)$;
- б) $f(x, y, z) = (00110011)$;
- в) $f(x, y, z) = (11000011)$.

3. Довести, що формули A та B еквівалентні. Знайти фіктивну змінну:

- а) $A = x \rightarrow y, B = (\bar{x} \vee y) \vee z \bar{z}$;

- б) $A = (xy \oplus x) \oplus x, B = x \wedge y$.
4. Булева функція $f(x, y, z)$ задана так: $f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 1$. На всіх інших наборах $f(x, y, z) = 0$. Довести, що жодна із змінних x, y, z не є фіктивною.
5. Встановити чи є фіктивні змінні у формулі. Якщо є, то вилучити їх:
- а) $f = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \wedge x$;
 б) $f = \bar{x}yz \vee x \vee y\bar{z}$.
6. За принципом двоїстості побудувати формулу, яка реалізує функцію, двоїсту до f :
- а) $f = xy \vee yz \vee xt \vee zt$;
 б) $f = (x \vee y)(zt \vee \bar{x})$;
 в) $f = (x \leftrightarrow \bar{y})z$;
 г) $f = x1 \vee y(zt \vee 0) \vee \bar{x}yt$.
7. Функції задані векторами. Побудувати вектори для двоїстих функцій:
- а) $f(x, y, z) = (11110000)$;
 б) $f(x, y, z) = (10110010)$;
 в) $f(x, y, z) = (10010011)$.
8. Чи є функція f двоїстою до функції g ?
- а) $f = x \oplus y, g = x \leftrightarrow y$;
 б) $f = x \rightarrow y, g = y \rightarrow x$;
 в) $f = \bar{x} \bar{y} z \vee x(y \leftrightarrow z), g(x, y, z) = (01101101)$.
9. Булева функція $f(x, y, z)$ задана так: $f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = 1$. На всіх інших наборах $f(x, y, z) = 0$. Побудувати функцію двоїсту до $f(x, y, z)$.
10. Булева функція $f(x, y, z)$ набуває значення 0 тоді і тільки тоді, коли непарна кількість її аргументів має одночасно значення 0. Побудувати $f^*(x, y, z)$. Чи є функція $f(x, y, z)$ самодвоїстою?
11. Булева функція $f(x, y, z, t)$ набуває значення 0 тоді і тільки тоді, коли непарна кількість її аргументів має одночасно значення 0. Побудувати $f^*(x, y, z, t)$. Чи є функція $f(x, y, z, t)$ самодвоїстою?
12. Перевірити за допомогою таблиці істинності чи є самодвоїстою функція:
- а) $f = xy \vee xz \vee yz$;
 б) $f = x \oplus y \oplus z$;
 в) $f = (x \rightarrow y) \oplus xz$;
 г) $f = (x \oplus y) \rightarrow xz$.

13. Булева функція $f(x, y, z)$ задана таблицею. Побудувати двоїсту функцію $f^*(x, y, z)$ до $f(x, y, z)$.

а)

б)

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

14. Задано формулу в алгебрі Жегалкіна. Побудувати рівносильну формулу в алгебрі Буля.

а) $x \oplus xy \oplus xyz$;

б) $(x \oplus y)(x \oplus z)$;

в) $xy \oplus xz \oplus yz$;

г) $(x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (xy \oplus 1)$.

15. Задано формулу в алгебрі Буля. Побудувати рівносильну формулу в алгебрі Жегалкіна:

а) $\overline{xy \vee z}$;

б) $\overline{x \vee y \wedge z}$;

в) $xy \vee \overline{xz}$.

16. Використовуючи тотожні перетворення, довести рівносильність формул A та B :

а) $A = (x \rightarrow y) \rightarrow (x\bar{y} \oplus (x \leftrightarrow \bar{y}))$, $B = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

б) $A = xy \oplus xz \oplus yz$, $B = xyz \vee xz \vee yz$;

в) $A = \overline{xz} \vee xy \vee \overline{xz}$, $B = xyz \vee \bar{z}$.

17. Побудувати ДНФ функції f :

а) $f = \bar{x} \leftrightarrow xy$;

г) $f = \overline{x \vee y \vee \overline{x \vee y \vee z \vee x} (y \vee z \vee x)}$;

б) $f = \overline{x \vee (y \rightarrow \bar{z})y \vee \bar{x}}$;

д) $f = (x \vee y \rightarrow z) \wedge \overline{x \vee z \rightarrow y}$;

в) $f = \overline{x \leftrightarrow y \wedge (z \vee \bar{y} \rightarrow xy)}$;

е) $f = x \rightarrow \bar{z} \leftrightarrow \bar{x}y \vee z$.

18. Побудувати КНФ функції f :

а) $f = xy \vee \bar{z}$;

в) $f = (\bar{x}y \rightarrow y\bar{z})(\bar{x} \rightarrow \bar{z})$;

б) $f = \overline{x \vee (y \rightarrow \bar{z})y \vee \bar{x}}$;

г) $f = x\bar{y} \vee \bar{x}z$.

19. Зобразити функцію f досконалою диз'юнктивною нормальною формою, використовуючи таблицю функції:

а) $f(x, y, z) = (00110110)$;

г) $f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz$;

б) $f(x, y, z) = (10010001)$;

д) $f(x, y, z) = (x \vee y \rightarrow z) \wedge \bar{x}$;

в) $f(x, y, z) = (00110001)$;

е) $f(x, y, z) = \overline{x \vee y} \oplus z$.

20. Перейти від диз'юнктивної нормальної форми до досконалої диз'юнктивної нормальної форми:

а) $f(x, y, z) = x \vee \bar{y}z$;

в) $f(x, y, z) = x \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z$;

б) $f(x, y, z) = x\bar{y} \vee \bar{x}z$;

г) $f(x, y, z) = \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}$.

21. За допомогою тотожних перетворень побудувати досконалу диз'юнктивну нормальну форму функції f :

а) $f(x, y, z) = (x \vee y\bar{z})(x \vee z)$;

б) $f(x, y, z) = (x \vee yz)(xy \vee \bar{x}z)$.

22. Зобразити функцію f досконалою кон'юнктивною нормальною формою, використовуючи таблицю функції:

а) $f(x, y, z) = (01111110)$;

г) $f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz$;

б) $f(x, y, z) = (10110110)$;

д) $f(x, y, z) = (x \vee y \rightarrow z) \wedge \bar{x}$;

в) $f(x, y, z) = (10110001)$;

е) $f(x, y, z) = \overline{x \vee y} \Leftrightarrow (x \oplus z)$.

23. За допомогою тотожних перетворень побудувати досконалу кон'юнктивну нормальну форму функції f :

а) $f(x, y, z) = x \vee yz$;

б) $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y)$;

в) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z})$.

24. Роботу трьох верстатів координують так, що при виході з ладу двох верстатів автоматично включається четвертий, аварійний. Записати формулу булевої функції, яка керує роботою четвертого верстата.

25. Роботу трьох верстатів координують так, що, коли виходить з ладу принаймні один верстат, автоматично включається четвертий, аварійний. Записати формулу булевої функції, яка керує роботою четвертого верстата.
26. Зобразити ДДНФ або ДКНФ булеву функцію:
- $f(x, y, z)$, яка набуває значення 1 на всіх тих і тільки тих наборах, у які входить не менше ніж два нулі;
 - $f(x, y, z, t)$, яка набуває значення 1 на всіх тих і тільки тих наборах, у які входить не менше ніж дві одиниці.
27. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна для функції f :
- $f(x, y) = x \vee y$;
 - $f(x, y) = x \oplus y$;
 - $f(x, y, z) = (11111000)$;
 - $f(x, y, z) = (10000001)$;
 - $f(x, y, z) = (10100110)$.
28. На основі тотожних перетворень побудувати поліном Жегалкіна для функції f :
- $f(x, y, z) = (x \leftrightarrow y)(yz \rightarrow x)$;
 - $f(x, y, z) = (x \mid y) \downarrow z$;
 - $f(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \downarrow z)$;
 - $f(x, y, z) = ((x \rightarrow y) \vee \bar{z}) \mid x$.
29. Знайти істотні змінні функції f , використовуючи властивість полінома Жегалкіна:
- $f(x, y) = (x \oplus y)(x \downarrow y)$;
 - $f(x, y, z) = (((z \rightarrow y) \vee x)(y \rightarrow x) \wedge \bar{x}z) \oplus z$;
 - $f(x, y, z) = ((x \vee y)(x \vee \bar{z}) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y\bar{z}))y$.
30. Зобразити функцію f ДДНФ та перейти від ДДНФ до полінома Жегалкіна:
- $f(x, y, z) = (01100000)$;
 - $f(x, y, z) = (10000001)$.
31. Довести функціональну повноту системи Q способом зведення до функціонально повної системи:
- $Q = \{\downarrow\}$;
 - $Q = \{\downarrow, \oplus\}$;
32. Довести, що система не є функціонально повною:
- $Q = \{\oplus, -\}$;

б) $Q = \{\oplus, \wedge\}$.

33. З'ясувати, яким із множин $T_0 \cup T_1$, $T_0 \setminus T_1$, $T_1 \setminus T_0$ належать функції:

а) $f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow (x \downarrow z)$;

б) $f(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \downarrow z) \vee (z \rightarrow y)$.

34. З'ясувати, для яких значень n функція $f(x, y, z)$ належить множині $T_1 \setminus T_0$, якщо $f(x, y, z) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$.

35. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати, чи є повною система булевих функцій:

а) $Q = \{x \vee y, x \wedge y, x \rightarrow y\}$;

г) $Q = \{x \rightarrow y, 0\}, ;$

б) $Q = \{x \oplus y, x \wedge y, \bar{x}\}$;

д) $Q = \{x \rightarrow y, x \rightarrow \bar{y}z\}, ;$

в) $Q = \{x \oplus y, x \rightarrow y\}$;

е) $Q = \{x\bar{y}, \bar{x} \leftrightarrow xz\}$.

36. Довести, що монотонна функція, яка не зберігає 0, тотожно рівна одиниці.

37. З'ясувати, чи є монотонною функція f :

а) $f(x, y) = x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

в) $f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow (x \downarrow z)$;

б) $f(x, y) = xy(x \oplus y)$;

г) $f(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus xz \oplus z$.

38. З'ясувати, чи є лінійною функція f :

а) $f(x, y) = x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

в) $f(x, y, z) = (x \vee y)z$;

б) $f(x, y) = xy(x \oplus y)$;

г) $f(x, y, z) = (xy \vee \bar{x}\bar{y}) \oplus z$.

39. З'ясувати, чи є самодвоїстою функція f :

а) $f(x, y, z) = \overline{(x \rightarrow y)} \rightarrow xz \rightarrow (y \rightarrow z)$;

б) $f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})t \vee \bar{x}y\bar{z}$.

40. Побудувати *Дскор* методом Блейка, якщо:

а) $f = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z$;

б) $f = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z}t \vee y\bar{z}t$.

41. Побудувати *Дскор* методом Нельсона.

а) $f = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

б) $f = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)$;

в) $f = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$;

г) $f = (x \vee t)(y \vee \bar{z} \vee \bar{t})(x \vee y \vee z)$;

д) $f = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

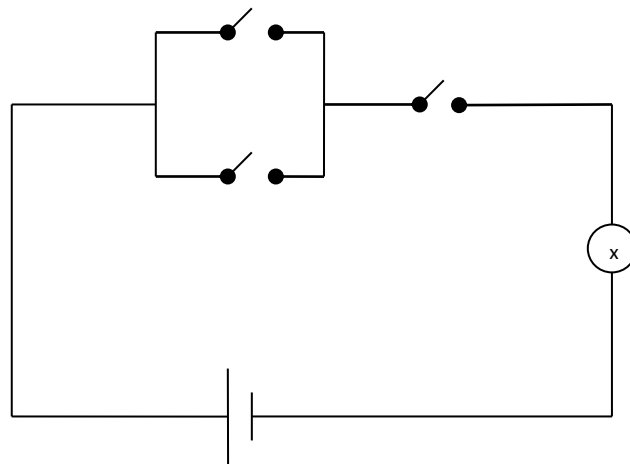
42. Мінімізувати булеву функцію:

а) $f = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$;

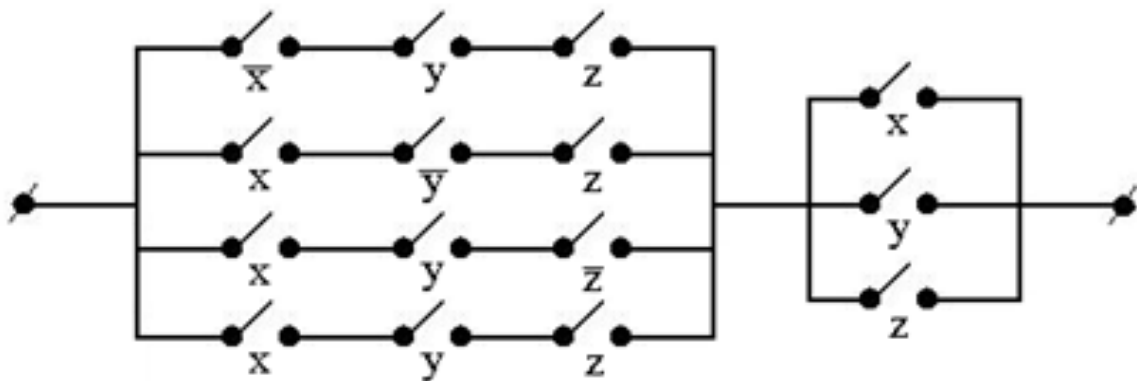
б) $f = \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

43. Три цехи А, В, С забезпечує електроенергією електрична станція, на якій встановлено два генератори Х та У. Якщо електричної енергії потребує один із цехів, то достатньо включити генератор У; якщо два цехи одночасно – Х; три – Х і У разом. Побудувати функціональну схему автомата, який, отримуючи заявки від цехів А, В, С на поставку електроенергії, може правильно перерозподіляти напругу між генераторами.

44. Дано схему, входами якої є перемикачі, а виходом – лампа розжарювання. Знайти функцію f , що описує її стани, вважаючи, що $f = 0$, якщо лампа не горить і $f = 1$, у протилежному випадку. Побудувати функціональну схему.



45. За схемою побудувати формулу, спростити її та побудувати спрощену схему.



**Зразки самостійних робіт
до теми «Булеві функції»**

Варіант 1

1. Що таке булева функція?
2. З'ясувати, чи є функція f :
 - а) самодвоїстою, якщо $f = xy \vee xz \vee yz$;
 - б) монотонною, якщо $f = x \rightarrow (x \rightarrow y)$;
 - в) лінійною, якщо $f = xy(x \oplus y)$.
3. Зобразити функцію f досконалою диз'юнктивною нормальною формою, якщо $f(x, y, z) = (10010011)$.

Варіант 2

1. Сформулювати критерій функціональної повноти системи булевих функцій.
2. З'ясувати, чи є функція f :
 - а) самодвоїстою, якщо $f = (x \rightarrow y) \rightarrow xz \rightarrow (y \rightarrow z)$;
 - б) монотонною, якщо $f = xy(x \oplus y)$;
 - в) лінійною, якщо $f = (xy \vee \bar{x}\bar{y}) \oplus z$.
3. Зобразіть функцію f досконалою диз'юнктивною нормальною формою, якщо $f(x, y, z) = (11001001)$.

Варіант 3

1. Дайте означення елементарної кон'юнкції.
2. З'ясуйте, чи є функція f :
 - а) самодвоїстою, якщо $f = \overline{x \oplus y \oplus z}$;
 - б) монотонною, якщо $f = x(x \oplus y)$;
 - в) лінійною, якщо $f = \bar{x} \rightarrow yz$.
3. Зобразити функцію f досконалою кон'юнктивною нормальною формою, якщо $f(x, y, z) = (10101001)$.

РОЗДІЛ 6. ТЕОРІЯ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ

Література: [2] – розд.; 6. [4] – розд. 9.

6.1. Дискретний перетворювач інформації.

Детерміновані функції

Основні теоретичні відомості

На рисунку 6.1 зображено дискретний перетворювач інформації

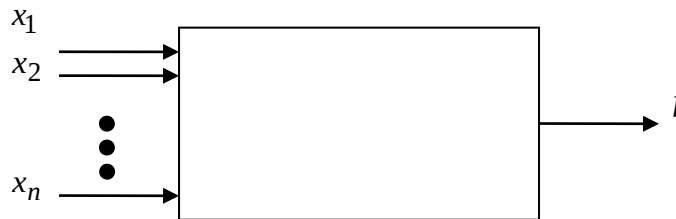


Рис. 6.1. Дискретний перетворювач інформації: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – входи, f – вихід

На входи подаються входні сигнали 0 або 1, на виході знімається вихідний сигнал 0 або 1.

Дискретний перетворювач працює синхронно. Це означає, що у кожний із дискретних моментів часу 1, 2, ..., t по кожному входу надходить, а на виході знімається рівно по одному символу з множини $\{0,1\}$.

На проміжку часу від 0 до T дискретний перетворювач переробляє систему входних скінчених послідовностей із 0 та 1:

$$\begin{array}{c} \alpha_1(1) \alpha_1(2) \alpha_1(3) \dots \alpha_1(T) \\ \alpha_2(1) \alpha_2(2) \alpha_2(3) \dots \alpha_2(T) \\ \vdots \\ \alpha_n(1) \alpha_n(2) \alpha_n(3) \dots \alpha_n(T) \end{array}$$

у вихідну скінчену послідовність із 0 та 1: $\gamma(1) \gamma(2) \gamma(3) \dots \gamma(T)$.

Проміжок часу роботи дискретного перетворювача може бути як завгодно великим. У зв'язку з цим зручно розглядати нескінченні послідовності 0 і 1. Множину всіх нескінченних послідовностей із 0 і 1 позначають $\{0,1\}^\omega$.

Кожний дискретний перетворювач синхронної дії фізично реалізує деяку функцію від n змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функція, що визначена на наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, де $\alpha_i \in \{0,1\}^\omega$, $i = \overline{1,n}$, та набуває значення з множини $\{0,1\}^\omega$, називається *детермінованою (функцією без випередження)*, якщо при довільному t член вихідної послідовності $\gamma(t)$ однозначно визначається першими t членами входних послідовностей:

$$\begin{array}{c} \alpha_1(1) \alpha_1(2) \alpha_1(3) \dots \alpha_1(t) \\ \alpha_2(1) \alpha_2(2) \alpha_2(3) \dots \alpha_2(t) \\ \dots \\ \alpha_n(1) \alpha_n(2) \alpha_n(3) \dots \alpha_n(t). \end{array}$$

Множина усіх детермінованих функцій позначається P_∂ .

Приклад

1. Чи є детермінованою функція $y = x_1 + x_2$, яка реалізує додавання двох нескінченних послідовностей із 0 та 1.

Розв'язання

Значення функції $y = x_1 + x_2$ визначається шляхом використання звичайного алгоритму додавання двійкових чисел, але з нескінченною кількістю розрядів.

$$\begin{array}{r} \dots \alpha_1(t) \dots \alpha_1(3) \alpha_1(2) \alpha_1(1) \\ + \\ \dots \alpha_2(t) \dots \alpha_2(3) \alpha_2(2) \alpha_2(1) \\ \hline \dots \gamma(t) \dots \gamma(3) \gamma(2) \gamma(1). \end{array}$$

Очевидно, що $\gamma(t)$ однозначно визначається першими t членами доданків, тому ця функція детермінована.

Відповідь: функція $y = x_1 + x_2$ детермінована.

6.2. Задання детермінованих функцій за допомогою дерев та діаграм Мура

Табличне задання детермінованих функцій майже неможливе. Використовуючи властивості детермінованих функцій, їх можна задавати за допомогою певним чином занумерованих дерев.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_\partial$. Із кореня дерева ξ_0 виходить в'язка з 2^n орієнтованих ребер. Ці ребра утворюють перший ярус. Кожне ребро першого яруса веде у вершину, з якої виходить в свою чергу в'язка з 2^n ребер, які утворюють другий ярус і т. д. Вершини, які є кінцями k -го яруса, відносяться до k -го яруса. Вершина ξ_0 вважається вершиною 0-го яруса.

Ребра кожної в'язки нумеруються зліва направо числами 0, 1, 2, ..., $2^n - 1$ у десятковій системі числення. Ці номери біля ребер не записуються.

Ребро k -го яруса зображає k -ті члени відразу всіх вхідних послідовностей. Потрібно номер ребра записати у двійковій системі числення, тоді перша цифра номера дає значення k -го члена першої

послідовності, друга цифра – значення k -го члена другої послідовності і т. д.

Отже, будь-який маршрут у дереві зображає цілком визначені вхідні послідовності. І навпаки, кожному набору з n вхідних послідовностей у дереві відповідає маршрут, який іде від кореня ξ_0 по ребру першого яруса до відповідної вершини першого яруса, далі по ребру другого яруса до відповідної вершини другого яруса і т. д.

Із дерева вхідних послідовностей будується *навантажене дерево* – *дерево із занумерованими ребрами*.

Для цього кожному ребру дерева певним чином приписується символ 0 або 1 і тим самим задається функція, яка відображає послідовності із 0 і 1 у послідовність із 0 і 1. Можна показати, що ця функція детермінована. І навпаки, будь-яка детермінована функція може бути задана за допомогою дерева з занумерованими ребрами. Для цього біля кожного ребра k -го яруса ставиться член $\gamma(k)$ вихідної послідовності, який однозначно визначається першими k -членами вхідних послідовностей. Ці члени вхідних послідовностей зображаються маршрутом, який починається у корені ξ_0 і закінчується в кінці обраного ребра k -го яруса.

Сукупність усіх маршрутів, які виходять із ξ та йдуть у вищі яруси, породжує дерево з коренем ξ , яке називається *піддеревом* даного дерева.

Два піддерева з коренями ξ_1 та ξ_2 називаються *еквівалентними*, якщо $f_{\xi_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Еквівалентні піддерева при накладанні одне на одне збігаються разом із нумерацією ребер. Введення відношення еквівалентності піддерев дозволяє множині всіх піддерев даного дерева розбити на класи еквівалентності.

Число класів еквівалентності, на яке розбивається множина всіх піддерев даного навантаженого дерева, називається *вагою дерева* і, відповідно, *вагою детермінованої функції*.

Детермінована функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *обмежено-детермінованою* або *функцією із скінченною пам'яттю*, якщо вона має скінченну вагу.

Для навантажених дерев вводиться *нумерація вершин*. Для цього класи еквівалентності нумерують числами 0, 1, ..., p так, щоб клас, у який потрапляє усе дерево, мав номер 0. Далі розглядають вершину ξ і визначають клас, в який потрапляє дерево із коренем ξ . Нехай k номер цього класу, тоді вершині ξ присвоюють номер k .

Щоб побудувати *зрізане дерево*, йдуть довільним маршрутом від кореня ξ_0 до вершини, у якій деякий номер перший раз повторюється і у цій вершині відсікається маршрут. Лишається лише його початковий відрізок від кореня ξ_0 до цієї вершини. Така операція здійснюється для кожного маршруту.

Якщо у зрізаному дереві для обмежено-детермінованої функції ото-тожнити вершини з однаковими номерами, то отримуємо *діаграму Мура*.

У діаграмі Мура ребрам приписуються пари чисел (A, γ) . Перше число – номер ребра у десятковій системі числення, тобто член вхідної послідовності; друге число – це число, приписане цьому ребру, тобто член вихідної послідовності.

Вершини діаграми Мура називаються *станами обмежено-детермінованої функції*.

Приклад

Побудувати навантажене дерево, зрізане дерево та діаграму Мура для детермінованої функції:

$$f(x): \begin{cases} \gamma(2t-1) = \alpha(2t-1), t \geq 1 \\ \gamma(2t) = \alpha(2t) \oplus \gamma(2t-1), t \geq 1 \end{cases}$$

Розв'язання

Побудуємо дерево для функції від однієї змінної. З кожної вершини дерева буде виходити в'язка з $2^1 = 2$ ребер.

Процес приписування ребрам чисел починаємо з першого яруса. Після цього переходимо до другого яруса і т. д. (рис. 6.2).

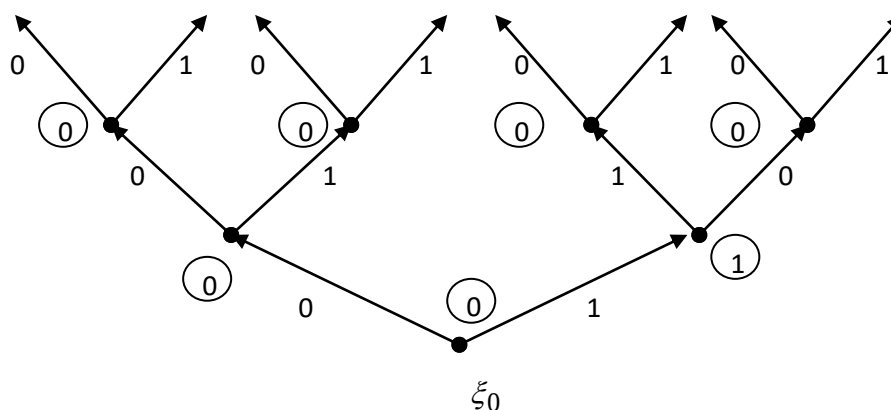


Рис. 6.2. Приписування ребрам чисел

На основі навантаженого дерева будуємо зрізане дерево (рис. 6.3).

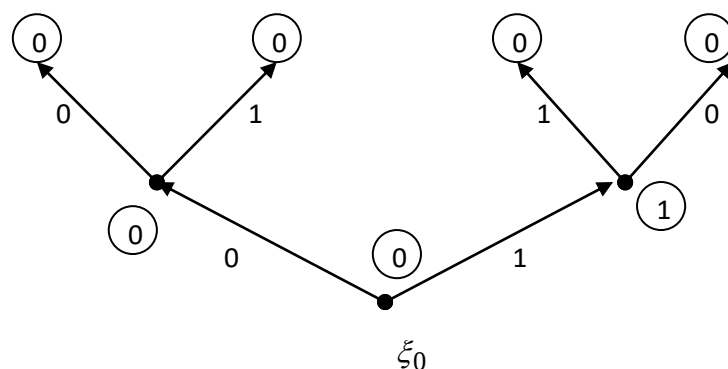


Рис. 6.3. Зрізане дерево

У зрізаному дереві ототожнюємо вершини з однаковими номерами. Отримуємо діаграму Мура (рис. 6.4), яка задає обмежено-детерміновану функцію $f(x)$.

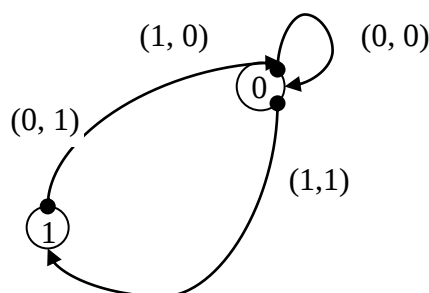


Рис. 6.4. Діаграма Мура

6.3. Задання обмежено-детермінованих функцій канонічними рівняннями

Основні теоретичні відомості

На рисунку 6.5 подано фрагмент діаграми Мура для обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, стани якої позначено $s(0), s(1), \dots$

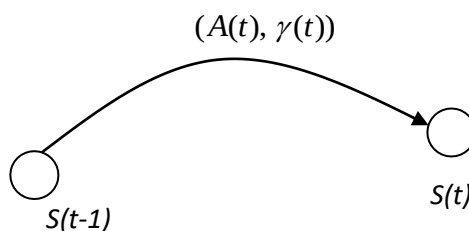


Рис. 6.5. Фрагмент діаграми Мура

Нехай у момент часу t на входи $x_1, x_2, \dots, x_n$ дискретного перетворювача надійшов сигнал:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \dots \\ \alpha_{n(t)} \end{pmatrix} - \text{вектор вхідної послідовності у момент } t. \quad (1)$$

При надходженні сигналу $A(t)$ переміщаємося у діаграмі Мура по ребру, яке виходить із вершини $s(t-1)$ у вершину $s(t)$, і при цьому отримуємо вихідний сигнал $\gamma(t)$.

Отже, величини $(A(t), s(t-1))$ однозначно визначають величини $(\gamma(t), s(t))$.

Нехай у момент часу t :

- 1) векторна змінна $X(t)$ описує значення вхідної величини $A(t)$;
- 2) змінна $Q(t)$ описує значення стану $s(t)$;
- 3) змінна $Y(t)$ описує значення вихідного сигналу $\gamma(t)$.

Тоді існують функції F та G такі, що:

$$\begin{cases} Y(t) = F(X(t), Q(t-1)); \\ Q(t) = G(X(t), Q(t-1)); \\ Q(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Рівняння (2) називають *канонічними рівняннями* у векторній формі. Таблиця, яка задає функції F та G , називається *канонічною таблицею*.

Систему (2) можна записати у скалярній формі, якщо стани закодувати.

Вибирають найменше число l , яке задовольняє нерівність $2^l > r$, де r вага обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тоді r станів $0, 1, \dots, r-1$ можна закодувати двійковими наборами довжини l : $(q_1, q_2, \dots, q_l)$.

Наприклад, якщо $r = 3$, тобто маємо три стани $0, 1, 2$, то $l = 2$ і можна вибрати таке кодування :

	q_1	q_2
0	0	0
1	0	1
2	1	0

Система канонічних рівнянь (2) у скалярній формі матиме вигляд:

$$\begin{cases} y(t) = F^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_1(t) = G_1^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_2(t) = G_2^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ \dots \\ g_l(t) = G_l^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_1(0) = g_2(0) = \dots = g_l(0), \end{cases}$$

де $F^*, G_1^*, \dots, G_l^*$ – булеві функції, які, кажучи загалом, визначені не для всіх наборів значень змінних. Це пояснюється тим, що при кодуванні станів двійковими наборами не всі набори можуть бути використані. Доозначимо деяким способом функції $F^*, G_1^*, \dots, G_l^*$ на всій області визначення. Тоді отримаємо канонічні рівняння:

$$\begin{cases} y(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_1(t) = G_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_2(t) = G_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ \dots \\ g_l(t) = G_l(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), g_1(t-1), g_2(t-1), \dots, g_l(t-1)); \\ g_1(0) = g_2(0) = \dots = g_l(0), \end{cases}$$

де $F, G_1, \dots, G_l$ – всюди визначені булеві функції від $n + l$ змінних $x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_l$.

Отже, кожен обмежено-детермінований функцію можна зіставити з канонічним рівнянням.

Вибір канонічних рівнянь не однозначний. Ця неоднозначність пов'язана з різними способами кодування станів та з різними способами доозначення функцій $F^*, G_1^*, \dots, G_l^*$.

Приклад

Побудувати канонічні рівняння для функції, яка задана діаграмою Мура (рис. 6.4).

Розв'язання

1. Із діаграми Мура будемо канонічну таблицю, яка задає функції F та G .

X	Q	F	G
0	0	0	1
0	1	0	0
0	2	1	0
1	0	1	2
1	1	1	0
1	2	0	0

2. Закодуємо стани 0, 1, 2.

	q_1	q_2
0	0	0
1	0	1
2	1	0

3. Будуємо таблицю для функцій F^* , G_1^* , G_2^* .

x	q_1	q_2	F	G_1	G_2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	Не визначено	Не визначено	Не визначено
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	Не визначено	Не визначено	Не визначено

4. Доозначимо функції F^* , G_1^* , G_2^* :

x	q_1	q_2	F	G_1	G_2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0

5. Задамо всюди визначені булеві функції F , G_1 , G_2 з попередньої таблиці.

Для задання функції F зручно використати ДКНФ:

$$y(t) = (x(t) \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1)) \wedge (x(t) \vee q_1(t-1) \vee \overline{q_2}(t-1)) \wedge (\overline{x}(t) \vee \overline{q_1}(t-1) \vee \overline{q_2}(t-1)).$$

Для задання функцій G_1 та G_2 зручно використати ДДНФ:

$$q_1(t) = x(t) \wedge \overline{q_1}(t-1) \wedge \overline{q_2}(t-1),$$

$$q_2(t) = \overline{x}(t) \wedge \overline{q_1}(t-1) \wedge \overline{q_2}(t-1),$$

$$q_1(0) = q_2(0) = 0.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} y(t) = (x(t) \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1)) \wedge (x(t) \vee q_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1)) \wedge (\bar{x}(t) \vee \bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1)); \\ q_1(t) = x(t) \wedge \bar{q}_1(t-1) \wedge \bar{q}_2(t-1); \\ q_2(t) = \bar{x}(t) \wedge \bar{q}_1(t-1) \wedge \bar{q}_2(t-1); \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

6.4. Операція суперпозиції над обмежено-детермінованими функціями

Основні теоретичні відомості

Операція суперпозиції над обмежено-детермінованими функціями – це підстановка одних детермінованих функцій замість аргументів у інші детерміновані функції. Замість одних аргументів можуть підставлятися інші аргументи, при цьому деякі аргументи можуть ототожнюватися.

Операція суперпозиції можлива, оскільки значенням детермінованої функції, як і значенням кожного її аргумента, є нескінченна послідовність із нулів і одиниць.

Клас детермінованих (обмежено-детермінованих) функцій замкнутий відносно операції суперпозиції, тобто при застосуванні операції суперпозиції до детермінованих (обмежено-детермінованих) функцій отримуються детерміновані (обмежено-детерміновані) функції.

Приклад

Для суперпозиції $f = f_1(f_2)$ обмежено-детермінованих функцій f_1 та f_2 побудувати канонічні рівняння та діаграму Мура, якщо:

$$f_1 : \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \wedge q_1(t-1); \\ q_1(t) = q_1(t-1) \rightarrow x_1(t); \\ q_1(0) = 0; \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1); \\ q_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1); \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки $q_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1)$, $q_2(0) = 1$, то $q_2(t) = x_2(t) \vee 1 = 1, t \geq 0$, тобто функція f_2 має один стан, її канонічні рівняння можна записати так: $y_2(t) = x_2(t) \oplus 1 = \bar{x}_2$.

Отже, канонічні рівняння для суперпозиції $f = f_1(f_2)$:

$$f : \begin{cases} y(t) = \bar{x}_2(t) \wedge q_1(t-1); \\ q_1(t) = q_1(t-1) \rightarrow \bar{x}_2(t); \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає канонічна таблиця:

x_2	q_1	F	G_1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

На основі канонічної таблиці будемо діаграму Мура (рис. 6.6).

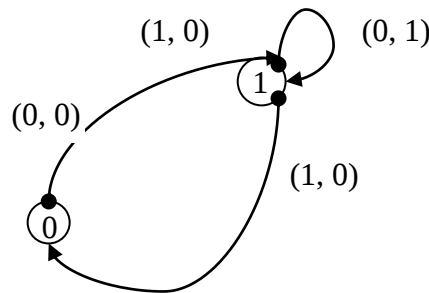


Рис. 6.6. Діаграма Мура

6.5. Абстрактні автомати. Автомати Мілі та Мура

Основні теоретичні відомості

Абстрактний автомат задається

1. Шестіркою об'єктів :

- скінченною множиною входних символів X (вхідний алфавіт);
- скінченною множиною вихідних символів Y (вихідний алфавіт);
- множиною станів автомата Q (внутрішній алфавіт);
- виділеним елементом $q_0 \in Q$ (початковий стан автомата);
- функцією переходів $G: X \times Q \rightarrow Q$;
- функцією виходів $F: X \times Q \rightarrow Y$.

2. Законом функціонування автомата, який може бути в одній із двох форм:

$$q(t) = G(x(t), q(t-1))$$

$$y(t) = F(x(t), q(t-1)) \quad (1)$$

$$q(0) = q_0$$

де $t = 1, 2, \dots, x(t) \in X, y(t) \in Y, q \in Q$.

$$q(t) = G(x(t), q(t-1))$$

$$y(t) = F(x(t), q(t)) \quad (2)$$

$$q(0) = q_0,$$

Автомат із законом (1) називається *автоматом першого роду*, із законом (2) – *другого роду*.

Кожен автомат першого роду зі скінченною кількістю станів визначає деяку детерміновану функцію. Функція f реалізується таким чином: кожне слово $p = x_{i1} x_{i2} \dots x_{ik}$ вхідного алфавіту X таке, що $x(1) = x_{i1}, \dots, x(k) = x_{ik}$ на основі закону функціонування автомата викликає

появу однозначно визначеної скінченної послідовності $y = y(1) \dots y(k)$, яку називають вихідним словом, що відповідає слову p .

Отже, автомат реалізує алфавітну функцію $f: y = f(p)$. Говорять, що функція f *генерована абстрактним автоматом*.

Два абстрактні автомати зі спільним вхідним і вихідним алфавітом називаються *еквівалентними*, якщо вони генерують одне й те ж алфавітне відображення f .

Абстрактні автомати $A_1 = \{X_1, Y_1, Q_1, q_0^1, F_1, G_1\}$ та $A_2 = \{X_2, Y_2, Q_2, q_0^2, F_2, G_2\}$ називаються *ізоморфними*, якщо існують бієкції:

$$\alpha : X_1 \rightarrow X_2$$

$$\beta : Y_1 \rightarrow Y_2$$

$$\gamma : Q_1 \rightarrow Q_2 \text{ такі, що виконуються умови:}$$

$$1) \gamma(q_0^1) = q_0^2 ;$$

$$2) \gamma(G_1(x, q)) = G_2(\alpha(x), \gamma(q)),$$

$$\beta(F_1(x, q)) = F_2(\alpha(x), \gamma(q)).$$

Ізоморфні між собою автомати відрізняються один від одного лише позначенням елементів вхідних, вихідних послідовностей і станів. Тому абстрактні автомати вивчають із точністю до ізоморфізму.

Теорема. Для кожного автомата $A = \{X, Y, Q, q_0, F, G\}$ другого роду існує еквівалентний йому автомат $B = \{X, Y, Q, q_0, F_1, G\}$ першого роду, функція виходів якого отримується у результаті підстановки функції переходу автомата A в його функцію виходів.

Конструктивний спосіб зведення автоматів другого роду до автоматів першого роду називається *інтерпретацією автомата* другого роду як автомата першого роду. Обернена інтерпретація автоматів першого роду як автоматів другого роду при збереженні тієї ж множини станів неможлива.

Автомати першого роду називаються *автоматами Мілі*.

Функція виходів автомата другого роду $y(t) = F(x(t), q(t))$ називається *зсунutoю*. Частковий випадок автоматів другого роду, для яких функція виходів визначається співвідношенням $y(t) = F(x(t))$ або $y(t) = F(q(t))$, називається *автоматами Мура*.

Теорема. Довільний автомат Мілі можна звести до еквівалентного йому автомата Мура.

Оскільки скінченні множини можуть бути задані переліком їх елементів, то скінченні автомати можна задавати за допомогою спеціальних *таблиць (переходів і виходів)*. Ці таблиці – дві матриці однакової розмірності, рядки яких відмічено символами вхідного алфавіту, а стовпчики – символами станів автомата.

Для функцій переходів з першої матриці на перетині i -рядка та j -стовпця міститься значення $G(x, q)$, для виходів з другої матриці – значення $F(x, q)$.

Задання таблиць переходів та виходів повністю визначає скінченний автомат, оскільки задаються всі його елементи: функції переходів і виходів, алфавіти, початковий стан.

Приклад

Автомат заданий діаграмою Мура (рис. 6.7). Побудувати для нього таблицю переходів і виходів.

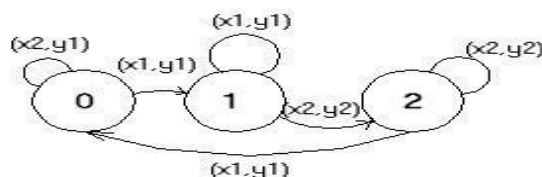


Рис. 6.7. Діаграма Мура

Розв'язання

Вхідний алфавіт $X = \{x1, x2\}$, вихідний алфавіт $Y = \{y1, y2\}$, алфавіт внутрішніх станів $Q = \{1, 2, 3\}$, початковий стан $q_0 = 0$.

Матимемо такі таблиці переходів (табл. 6.1) та виходів (табл. 6.2).

Таблиця 6.1

	0	1	2
x1	1	1	0
x2	0	2	2

Таблиця 6.2

	0	1	2
x1	y1	y1	y1
x2	y1	y2	y2

6.6. Мінімізація абстрактних автоматів

Основні теоретичні відомості

Еквівалентним перетворенням автомата називається перехід від деякого початкового автомата до еквівалентного йому.

Задача мінімізації автомата: серед автоматів, які еквівалентні автомату A , знайти автомат із найменшою кількістю станів – *мінімальний автомат*.

Теорема. Для довільного скінченного автомата A існує єдиний із точністю до ізоморфізму мінімальний автомат A_m .

Вчені Ауфемкамп і Хон запропонували алгоритм мінімізації, основна ідея якого полягає у розбитті всіх станів вихідного абстрактного автомата на класи еквівалентних станів, які не перетинаються, та заміні кожного класу еквівалентності одним станом. Автомат, який отримується в результаті застосування цього методу, має кількість станів, яка дорівнює вазі генерованої ним обмежено-детермінованої функції.

Нехай A – абстрактний автомат, q – його довільний стан.

Слово p в алфавіті A називається *застосовним до стану q* , якщо при подачі цього слова на вхід автомата A , який встановлений у стан q , на виході автомата отримується цілком визначене слово β у вихідному алфавіті, причому β має ту ж довжину, що й p . Слово β – результат застосувань слова p до стану q .

Два стани автомата q_m та q_s називаються *еквівалентними*, якщо результати застосувань довільного вхідного слова p до цих станів будуть однакові. Якщо стани q_m та q не є еквівалентними, то вони називаються *різними*.

Два стани q_m та q_s – *k -еквівалентні*, якщо результати застосувань довільного вхідного слова довжини k до цих станів будуть однакові.

Очевидно, що відношення еквівалентності та k -еквівалентності станів є рефлексивними, симетричними та транзитивними, тобто є відношеннями еквівалентності. Ці відношення використовуються для розбиття множини станів автомата Q на класи еквівалентності. Відповідні розбиття на класи еквівалентних та k -еквівалентних станів будемо позначати Π та Π_k .

Кроки алгоритму мінімізації абстрактного автомата

$A = \{X, Y, Q, q_0, F, G\}$:

1. Знаходимо послідовні розбиття $\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_k \Pi_{k+1}$ множини Q на класи 1, 2, ..., $k+1$ еквівалентних станів доти, поки на деякому $k + 1$ кроці не виявиться, що $\Pi_k = \Pi_{k+1}$. Можна довести, що при виконанні цієї умови $\Pi_k = \Pi$, тобто, що k -еквівалентні стани у цьому випадку є еквівалентними.
2. У кожному класі еквівалентності розбиття Π вибирають по одному елементу. Ці елементи утворюють множину Q' мінімізованого автомата: $A' = \{X, Y, Q', q_0', F', G'\}$, який еквівалентний автомату A .
3. Функції переходів G' і виходів F' автомата A_m визначаються на множині $X \times Q'$ шляхом викреслення у таблиці переходів та виходів стовпчиків, які не увійшли у множину Q' . У стовпцях, які лишилися, всі стани змінюють на еквівалентні з множини Q' .

4. Як початковий стан q_0' мінімізованого автомата A_m вибирають один зі станів, який еквівалентний q_0 .

Приклад

1. Мінімізувати абстрактний автомат, який заданий таблицями переходів та виходів.

Таблиця переходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
x_1	q_2	q_1	q_2	q_3	q_6	q_8	q_6	q_4	q_7
x_2	q_2	q_4	q_2	q_2	q_4	q_8	q_2	q_4	q_9
x_3	q_5	q_4	q_5	q_2	q_3	q_6	q_8	q_7	q_7

Таблиця виходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
x_1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
x_2	0	1	0	1	0	1	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	0	1
	✓		✓		✓		✓	✓	

У таблиці виходів знаходимо однакові стовпці, відмічаючи їх засічкою. Є дві множини однакових стовпців, які відповідають станам $\{q_1, q_3, q_5, q_7, q_8\}$ та $\{q_2, q_4, q_6, q_9\}$. Побудовано розбиття Π_1 на два класи.

$$\Pi_1: B_1 = \{q_1, q_3, q_5, q_7, q_8\}, B_2 = \{q_2, q_4, q_6, q_9\}.$$

Запишемо таблицю переходів у другій формі, замінюючи вихідні стани автомата позначеннями класів еквівалентності B_1 та B_2 .

	B_1					B_2			
	q_1	q_3	q_5	q_7	q_8	q_2	q_4	q_6	q_9
x_1	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_1	B_1	B_1	B_1
x_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2
x_3	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_2	B_2	B_2	B_1
	✓	✓	✓	✓	✓	~	~	~	○

Знаходимо у побудованій таблиці підмножини однакових стовпців, будуємо розбиття Π_2 на класи C_1, C_2, C_3 .

$\Pi_2: C_1 = \{q_1, q_3, q_5, q_7, q_8\}, C_2 = \{q_2, q_4, q_6\}, C_3 = \{q_9\}$.

Запишемо таблицю переходів у новій формі, замінюючи вихідні стани автомата позначеннями класів еквівалентності C_1, C_2, C_3 .

	C_1					C_2			C_3
	q_1	q_3	q_5	q_7	q_8	q_2	q_4	q_6	q_9
x_1	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_1	C_1
x_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_1	C_3
x_3	C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_2	C_2	C_2	C_1
	✓	✓	✓	✓	✓	○	○	×	●

Знаходячи у побудованій таблиці підмножини однакових стовпців, будуємо розбиття Π_3 на чотири класи D_1, D_2, D_3, D_4 .

$\Pi_3: D_1 = \{q_1, q_3, q_5, q_7, q_8\}, D_2 = \{q_2, q_4\}, D_3 = \{q_6\}, D_4 = \{q_9\}$.

Запишемо таблицю переходів у новій формі, замінюючи вихідні стани автомата позначеннями класів еквівалентності D_1, D_2, D_3 .

	D_1					D_2		D_3	D_4
	q_1	q_3	q_5	q_7	q_8	q_2	q_4	q_6	q_9
x_1	D_2	D_2	D_3	D_3	D_2	D_1	D_1	D_1	D_1
x_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_2	D_4	D_4
x_3	D_1	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2	D_2	D_3	D_1
	✓	✓	∧	∧	✓	●	●	×	/

Знаходячи у побудованій таблиці підмножини однакових стовпців, будуємо розбиття Π_4 на п'ять класів E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 .

$\Pi_4: E_1 = \{q_1, q_3, q_8\}, E_2 = \{q_5, q_7\}, E_3 = \{q_2, q_4\}, E_4 = \{q_6\}, E_5 = \{q_9\}$.

Запишемо таблицю переходів у новій формі, замінюючи вихідні стани автомата позначеннями класів еквівалентності E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 .

	E_1			E_2		E_3		E_4	E_5
	q_1	q_3	q_8	q_5	q_7	q_2	q_4	q_6	q_9
x_1	E_2	E_2	E_2	E_3	E_2	E_1	E_1	E_1	E_1
x_2	E_2	E_2	E_2	E_2	E_2	E_2	E_2	E_4	E_4
x_3	E_1	E_1	E_1	E_1	E_1	E_2	E_2	E_3	E_1

$\vee \quad \vee \quad \wedge \quad \wedge \quad \vee \quad \bullet \quad \bullet \quad \times \quad /$

Будуємо розбиття Π_5 на п'ять класів R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 .

$\Pi_5: R_1 = \{q_1, q_3, q_8\}, R_2 = \{q_5, q_7\}, R_3 = \{q_2, q_4\}, R_4 = \{q_6\}, R_5 = \{q_9\}. \Pi_4 = \Pi_5.$

Тому розбиття $\Pi_4 = \Pi$ – розбиття станів автомата на класи еквівалентності.

Виберемо з кожного класу E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 по одному стану, отримаємо $Q' = \{q_1, q_2, q_5, q_6, q_9\}$. Із вихідних таблиць переходу і виходу викреслимо стовпці, які відповідають станам, що не увійшли в множину Q' . Отримуємо таблиці переходів і виходів еквівалентного мінімального автомата з п'ятьма станами, що генерує обмежено-детерміновану функцію ваги 5.

Таблиця переходів

	q_1	q_2	q_5	q_6	q_9
x_1	q_2	q_1	q_6	q_1	q_5
x_2	q_2	q_2	q_2	q_9	q_9
x_3	q_5	q_2	q_1	q_6	q_5

Таблиця виходів

	q_1	q_2	q_5	q_6	q_9
x_1	1	0	1	0	0
x_2	0	1	0	1	1
x_3	0	1	0	1	1

Запитання і завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Намалюйте дискретний перетворювач інформації.
2. Запишіть символічно, що функція перетворює нескінченні послідовності з нулів і одиниць у нескінченні послідовності з нулів і одиниць.
3. Що таке детермінована функція?
4. Як позначається множина детермінованих функцій?
5. Поясніть, як задається детермінована функція за допомогою дерев.
6. До якого ярусу відноситься корінь дерева?
7. Що таке дерево із занумерованими вершинами?
8. Що таке піддерево даного дерева?
9. Які два піддерева даного дерева називаються еквівалентними?
10. Який геометричний зміст еквівалентності піддерев?
11. Що таке вага дерева?
12. Дайте означення обмежено-детермінованої функції.
13. Як нумеруються вершини дерева?
14. Поясніть, як будується зрізане дерево.
15. Що таке діаграма Мура?
16. Які пари чисел приписуються ребрам у діаграмі Мура?
17. Що таке стани обмежено-детермінованої функції?
18. Запишіть канонічні рівняння, якими задається обмежено-детермінована функція, у векторній формі.
19. Запишіть канонічні рівняння, якими задається обмежено-детермінована функція, у скалярній формі.
20. Від чого залежить вибір канонічних рівнянь, якими задається обмежено детермінована функція.
21. У чому полягає операція суперпозиції над детермінованими функціями?
22. Дайте означення абстрактного автомата.
23. Автомати якого роду визначають обмежено-детерміновану функцію?
24. Які автомати називаються еквівалентними?
25. Сформулюйте теорему про еквівалентність автоматів першого і другого роду.
26. Що таке інтерпретація автомата другого роду?
27. Як називаються автомати другого роду?

28. Що таке автомат Мура?
29. Як задаються автомати за допомогою таблиць переходів та виходів?
30. Що таке еквівалентні перетворення автомата?
31. Сформулюйте задачу мінімізації.
32. Сформулюйте теорему про єдиність мінімального автомата.
33. У чому полягає основна ідея алгоритму Ауфемкампа-Хона?
34. Які два стани автомата називаються еквівалентними?
35. Що таке k -еквівалентні стани?
36. Сформулюйте кроки алгоритму мінімізації абстрактного автомата.

Тести

Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

Рівень 1

1. Синхронність роботи дискретного перетворювача інформації означає, що:
 - 1) у кожний із дискретних моментів часу по кожному входу надходить рівно один символ із множини $\{0, 1\}$;
 - 2) у кожний із дискретних моментів часу на кожному виході знімається рівно один символ із множини $\{0, 1\}$;
 - 3) у кожний із дискретних моментів часу по кожному входу надходить, а на кожному виході знімається рівно по одному символу з множини $\{0, 1\}$;
 - 4) у кожний із дискретних моментів часу по кожному входу надходить, а на кожному виході знімається рівно два символи з множини $\{0, 1\}$;
 - 5) у кожний із дискретних моментів часу по кожному входу надходить, а на кожному виході знімається однакова кількість символів із множини $\{0, 1\}$.
2. Із кореня дерева, яким задається детермінована функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, виходить в'язка з:
 - 1) 2^n орієнтованих ребер;
 - 2) 2^n неорієнтованих ребер;
 - 3) 2^{n+1} орієнтованих ребер;
 - 4) 2^{n+1} неорієнтованих ребер;
 - 5) 4 орієнтованих ребер.

3. Ребра кожної в'язки дерева, яке задає детерміновану функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, нумеруються:
 - 1) справа наліво числами $0, 1, \dots, 2^n$ у десятковій системі;
 - 2) зліва направо числами $0, 1, \dots, 2^n$ у десятковій системі;
 - 3) справа на ліво числами $0, 1, \dots, (2^n - 1)$ у десятковій системі;
 - 4) зліва направо числами $0, 1, \dots, (2^n - 1)$ у десятковій системі;
 - 5) зліва направо числами $0, 1, \dots, (2^n - 1)$ у двійковій системі.
4. Піддеревом даного дерева з коренем ξ називається:
 - 1) сукупність усіх маршрутів, які виходять із вершини ξ та йдуть у вищі яруси;
 - 2) сукупність деяких маршрутів, які виходять із вершини ξ та йдуть у вищі яруси;
 - 3) сукупність усіх маршрутів, які виходять із кореня та йдуть у вищі яруси;
 - 4) сукупність усіх маршрутів, які виходять із вершини ξ та йдуть у нижчі яруси;
 - 5) будь-яка частина навантаженого дерева.
5. Число класів еквівалентності, на яке розбивається множина всіх піддерев даного навантаженого дерева, називається:
 - 1) вагою дерева;
 - 2) станом дерева;
 - 3) коренем дерева;
 - 4) сумою;
 - 5) розбиттям.
6. Детермінована функція називається обмежено-детермінованою, якщо:
 - 1) вона має нескінченну вагу;
 - 2) член вихідної послідовності однозначно визначається усіма членами вхідних послідовностей;
 - 3) член вихідної послідовності однозначно визначається деякими членами вхідних послідовностей;
 - 4) вона обмежена;
 - 5) вона має скінченну вагу.
7. Вибір канонічних рівнянь для задання обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:
 - 1) єдиний;
 - 2) неоднозначний, бо залежить від способу кодування станів;

- 3) неоднозначний, бо залежить від способу довизначення функції;
 - 4) неоднозначний, бо залежить як від способу кодування станів, так і від способу довизначення функції;
 - 5) неоднозначний, бо залежить від ваги обмежено-детермінованої функції.
- 8.** Два абстрактні автомати зі спільним входним і вихідним алфавітом, які генерують одне і теж алфавітне відображення, називаються:
- 1) ізоморфними;
 - 2) першого роду;
 - 3) другого роду;
 - 4) скінченними;
 - 5) еквівалентними.
- 9.** Автомати Мілі – це:
- 1) ізоморфні автомати;
 - 2) автомати першого роду;
 - 3) автомати другого роду;
 - 4) скінченні автомати;
 - 5) еквівалентні автомати.
- 10.** Частковий випадок автоматів другого роду, для яких функція виходів визначається співвідношенням $y(t) = F(x(t))$ або $y(t) = F(q(t))$, називається:
- 1) автоматами Мура;
 - 2) автоматами Мілі;
 - 3) абстрактними автоматами;
 - 4) скінченними автоматами;
 - 5) еквівалентними автоматами.
- 11.** Для будь-якого скінченного автомата A мінімальний автомат A_m :
- 1) існує не завжди;
 - 2) єдиний;
 - 3) єдиний із точністю до ізоморфізму;
 - 4) існує, якщо A має два стани;
 - 5) не існує.
- 12.** Ізоморфні між собою автомати можуть відрізнятися один від одного лише:
- 1) позначенням елементів входних послідовностей;

- 2) позначенням елементів вихідних послідовностей;
- 3) позначенням елементів вхідних і вихідних послідовностей;
- 4) позначенням станів;
- 5) позначенням елементів вхідних і вихідних послідовностей та станів.

Рівень 2

13. На рисунку 6.8 зображено:

- 1) навантажене дерево, за допомогою якого задана функція двох змінних;
- 2) навантажене дерево, за допомогою якого задана функція однієї змінної;
- 3) зрізане дерево, за допомогою якого задана функція однієї змінної;
- 4) діаграма Мура, за допомогою якої задана функція двох змінних;
- 5) діаграма Мура, за допомогою якої задана функція однієї змінної.

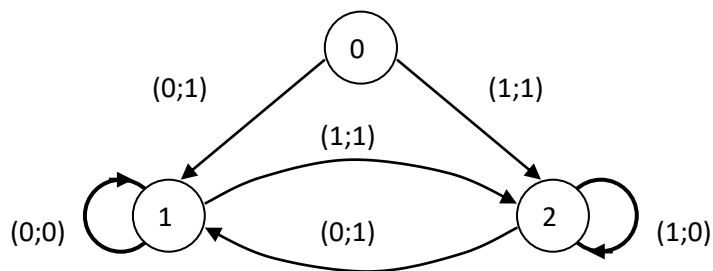


Рис. 6.8.

14. На рисунку 6.9 зображено:

- 1) навантажене дерево, за допомогою якого задана функція двох змінних;
- 2) навантажене дерево, за допомогою якого задана функція однієї змінної;
- 3) діаграма Мура, за допомогою якої задана функція трьох змінних;
- 4) діаграма Мура, за допомогою якої задана функція двох змінних;
- 5) діаграма Мура, за допомогою якої задана функція однієї змінної.

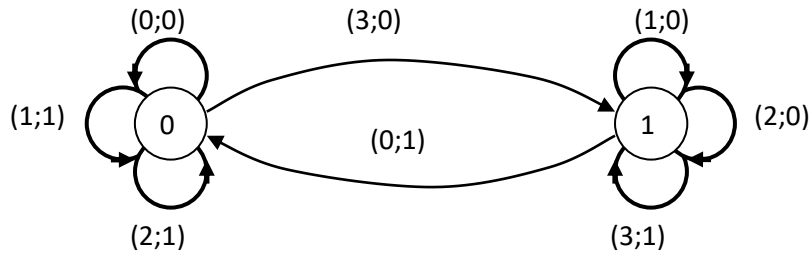


Рис. 6.9.

15. Обмежено-детермінована функція, яка задана діаграмою Мура (рис. 6.9), має вагу:
- 1) 3;
 - 2) 2;
 - 3) 4;
 - 4) 6;
 - 5) 8.
16. На рисунку 6.10 подано фрагмент діаграми Мура для обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Перше число у дужках $A(t)$ позначає:
- 1) член вхідної послідовності;
 - 2) член вихідної послідовності;
 - 3) стан діаграми Мура;
 - 4) вагу обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 - 5) номер ребра у двійковій системі числення.

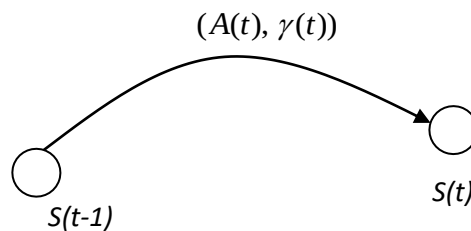


Рис. 6.10.

17. На рисунку 6.10 подано фрагмент діаграми Мура для обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Друге число у дужках $\gamma(t)$ позначає:
- 1) член вхідної послідовності;
 - 2) член вихідної послідовності;
 - 3) стан діаграми Мура;
 - 4) вагу обмежено-детермінованої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 - 5) номер ребра у двійковій системі числення.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Чи є обмежено-детермінованою функцією відображення $f: \{0,1\}^\omega \rightarrow \{0,1\}^\omega$, якщо:
 - а) $\gamma(t) = \alpha(t+1)$;
 - б) $\gamma(t) = \alpha(t-2)$ при $t \geq 3$.
2. Побудувати фрагмент дерева (три яруси), за допомогою якого задається детермінована функція від двох змінних. Виділити на побудованому дереві маршрут, який відповідає вхідним послідовностям:
 - а) $x_1 = \alpha_1 = (001\dots)$; $x_2 = \alpha_2 = (100\dots)$;
 - б) $x_1 = \alpha_1 = (111\dots)$; $x_2 = \alpha_2 = (010\dots)$.
3. Побудувати навантажене дерево та діаграму Мура для функції:
 - а) $f(x): \gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) \oplus \alpha_2(t) & \text{їдє } \hat{a}^3 \hat{a} \hat{n} \hat{o} \hat{o} \hat{i} \hat{n} \hat{n} \hat{o}^3 \text{ ї} \hat{a} \hat{d} \hat{a} \hat{i} \hat{n} \hat{n} \hat{o} ; \\ \alpha_1(t) \oplus \alpha_2(t) \oplus 1 & \text{їдє } \hat{i} \hat{a} \hat{y} \hat{a} \hat{i} \hat{n} \hat{n} \hat{o}^3 \text{ ї} \hat{a} \hat{d} \hat{a} \hat{i} \hat{n} \hat{n} \hat{o} . \end{cases}$
 - б) $f(x): \gamma(t) = \alpha(1) \oplus \alpha(2) \oplus \dots \oplus \alpha(t)$, тобто кожне значення елемента вихідної послідовності з номером t є сумою за $\text{mod } 2$ елементів вхідних послідовностей з номерами $1, 2, \dots, t$;
 - в) $f(x): \begin{cases} \gamma(2t-1) = \alpha(2t-1), t \geq 1; \\ \gamma(2t) = \alpha(2t) \oplus \gamma(2t-1), t \geq 1. \end{cases}$
 - г) $f(x): \begin{cases} \gamma(1) = 1; \\ \gamma(t) = \alpha(t-1) \oplus \alpha(t), t \geq 2. \end{cases}$
 - д) $f(x): \begin{cases} \gamma(3t-2) = \bar{\alpha}(3t-2), t \geq 1; \\ \gamma(3t-1) = \alpha(3t-1), t \geq 1; \\ \gamma(3t) = \alpha(3t) \wedge \gamma(3t-1), t \geq 1. \end{cases}$
 - е) $f(x): \begin{cases} \gamma(2t) = \alpha(t+1), t \geq 1; \\ \gamma(2t-1) = \bar{\alpha}(t), t \geq 1. \end{cases}$
4. Побудувати канонічні таблиці та канонічні рівняння для детермінованих функцій попередньої вправи.
5. Побудувати канонічні рівняння для функції, яка задана діаграмою Мура (рис. 6.11).

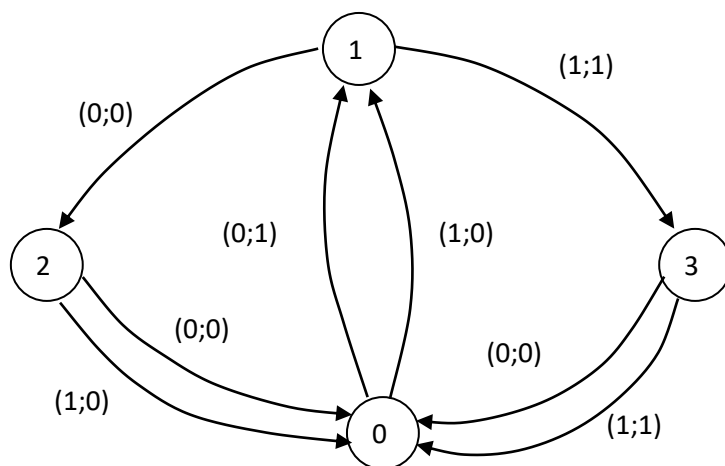


Рис. 6.11.

6. а) Таблиця переходів

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
x_1	q_9	q_{11}	q_4	q_6	q_2	q_6	q_2	q_9	q_6	q_0	q_4	q_1
x_2	q_4	q_4	q_5	q_{10}	q_8	q_{10}	q_5	q_3	q_5	q_7	q_8	q_7

Таблиця виходів

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
x_1	y_1	y_1	y_2	y_2	y_1	y_2	y_1	y_1	y_2	y_2	y_2	y_2
x_2	y_2	y_2	y_1	y_1	y_2	y_1	y_2	y_2	y_1	y_1	y_1	y_1

б) Таблиця переходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
a	q_3	q_4	q_1	q_7	q_9	q_3	q_4	q_4	q_5
b	q_6	q_8	q_4	q_9	q_1	q_5	q_3	q_2	q_7

Таблиця виходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
a	1	0	1	0	1	1	0	1	1
b	0	1	0	1	0	0	1	0	0

в) Таблиця переходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
a	q_2	q_1	q_2	q_3	q_6	q_8	q_6	q_4	q_7
b	q_2	q_4	q_2	q_2	q_4	q_9	q_2	q_4	q_9
c	q_5	q_4	q_5	q_2	q_3	q_6	q_8	q_7	q_7

Таблиця виходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
a	1	0	1	0	1	0	1	1	0
b	0	1	0	1	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	1	0	0	1

г) Таблиця переходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
0	q_1	q_2	q_3	q_2	q_2	q_6	q_8	q_1
1	q_2	q_3	q_4	q_4	q_5	q_7	q_7	q_8

Таблиця виходів

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0

7. За діаграмою Мура побудувати таблицю переходів і виходів автомата та мінімізувати цей автомат (рис. 6.12).

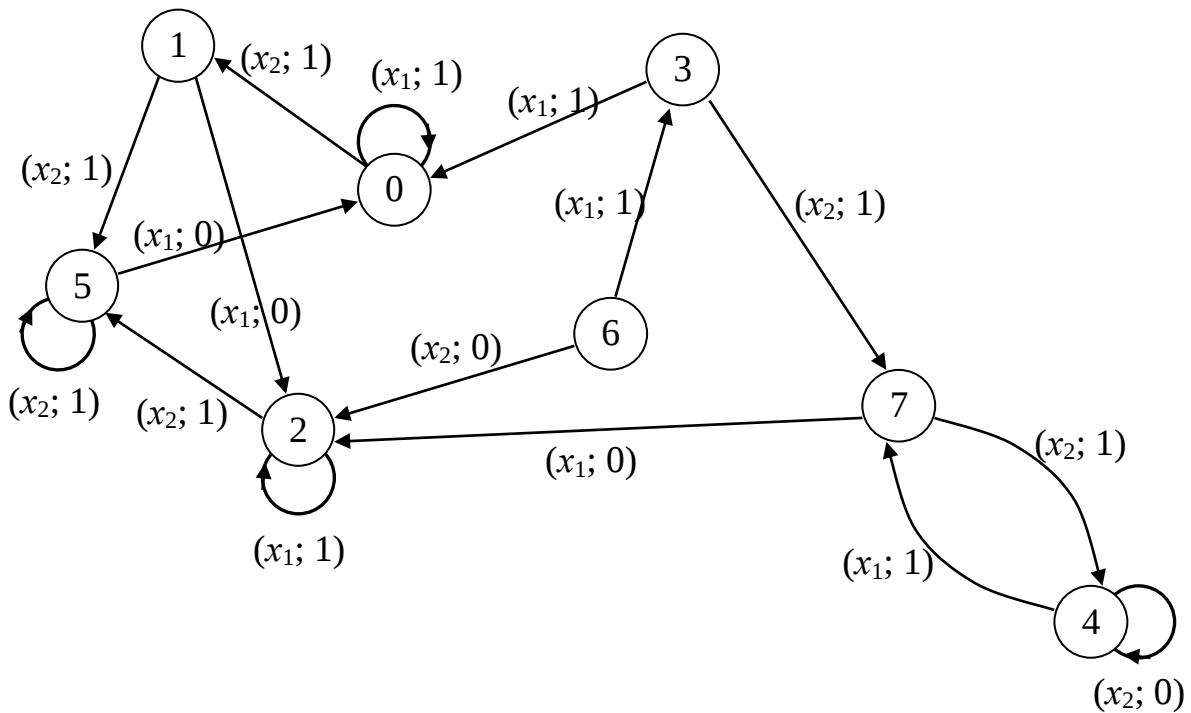


Рис. 6.12.

**Зразки самостійних робіт
до теми “Теорія абстрактних автоматів”**

Самостійна робота 1

Варіант 1

1. Записати канонічні рівняння, якими задається обмежено-детермінована функція, у скалярній формі.
2. Побудувати фрагмент дерева (три яруси), за допомогою якого задається детермінована функція від двох змінних. Виділити на побудованому дереві маршрут, який відповідає вхідним послідовностям:

$$x_1 = \alpha_1 = (0\ 0\ 0\ \dots); \quad x_2 = \alpha_2 = (1\ 0\ 0\ \dots).$$

3. Побудувати навантажене дерево та діаграму Мура для функції:

$$f(x) : \begin{cases} \gamma(1) = 1; \\ \gamma(t) = \alpha(t-1), t \geq 2 \end{cases}.$$

Варіант 2

1. Намалювати дискретний перетворювач інформації. Що означає, що він працює синхронно?
2. Побудувати фрагмент дерева (три яруси), за допомогою якого задається детермінована функція від двох змінних. Виділити на побудованому дереві маршрут, який відповідає вхідним послідовностям:

$$x_1 = \alpha_1 = (0\ 1\ 1\ \dots); \quad x_2 = \alpha_2 = (1\ 0\ 0\ \dots).$$

3. Побудувати навантажене дерево та діаграму Мура для функції:

$$f(x) : \begin{cases} \gamma(1) = 0; \\ \gamma(t) = \alpha(t-1), t \geq 2 \end{cases}$$

Варіант 3

1. Записати канонічні рівняння, якими задається обмежено-детермінована функція, у векторній формі.
2. Побудувати фрагмент дерева (три яруси), за допомогою якого задається детермінована функція від двох змінних. Виділити на побудованому дереві маршрут, який відповідає вхідним послідовностям:

$$x_1 = \alpha_1 = (0\ 0\ 0\ \dots); \quad x_2 = \alpha_2 = (0\ 1\ 0\ \dots).$$

3. Побудувати навантажене дерево та діаграму Мура для функції:

$$f : \begin{cases} \gamma(1) = 0; \\ \gamma(t) = \alpha(t-1) \oplus 1, t \geq 2 \end{cases}$$

Варіант 4

1. Дати означення детермінованої функції.
2. Побудувати фрагмент дерева (три яруси), за допомогою якого задається детермінована функція від двох змінних. Виділити на побудованому дереві маршрут, який відповідає вхідним послідовностям:

$$x_1 = \alpha_1 = (010\dots); x_2 = \alpha_2 = (001\dots).$$

3. Побудувати навантажене дерево та діаграму Мура для функції:

$$f : \begin{cases} \gamma(1) = \alpha(1) \oplus 1; \\ \gamma(t) = \alpha(t-1), t \geq 2. \end{cases}$$

Самостійна робота 2

Варіант 1

1. Що називається абстрактним автоматом ?
2. Мінімізувати абстрактний автомат, заданий таблицями переходів та виходів.

Таблиця переходів

	1	2	3	4	5	6	7
0	2	4	5	7	7	7	7
1	3	5	6	5	4	5	7

Таблиця виходів

	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Варіант 2

1. Які автомати називаються еквівалентними?
2. Мінімізувати абстрактний автомат, заданий таблицями переходів та виходів.

Таблиця переходів

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	3	4	1	7	9	3	4	4	5
b	6	8	4	9	1	5	3	2	7

Таблиця виходів

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	0	1	0	1	1	0	1	1
b	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Список літератури

1. Балога С.І Дискретна математика. Навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОРШАРК», 2021. 124 с
2. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. 567 с.
3. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Київ: Ліра-К, 2019. 324 с.
4. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Львів: Магнолія, 2011. 432 с.
5. Темнікова О.Л., Тавров Д.Ю. Дискретна математика. Частина 1. Практикум. Київ: Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 121с.
6. Швай О. Л. Дискретна математика. Луцьк: РВВ «Вежа» Волин. нац. ун-ту імені Лесі Українки, 2008. 188с.
7. Шевченко Г.В., Шкапа В.В. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник. К.: ДУТ, 2018. 158 с.

ДОДАТКИ

1. Відповіді до тестів

Розділ 1. Елементи математичної логіки

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	1	14	2
2	2	15	2
3	3	16	1
4	1	17	4
5	3	18	1
6	1	19	4
7	1	20	5
8	4	21	1
9	1	22	2
10	2	23	3
11	5	24	1
12	5	25	2
13	2		

Розділ 2. Множини та відношення

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	2	25	2
2	3	26	4
3	2	27	5
4	1	28	5
5	2	29	1
6	4	30	1
7	3	31	5
8	3	32	2

Закінчення таблиці

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
9	2	33	2
10	1	34	5
11	2	35	2
12	5	36	3
13	3	37	4
14	5	38	3
15	4	39	4
16	3	40	3
17	1	41	2
18	5	42	1
19	3	43	4
20	1	44	4
21	1	45	3
22	3	46	1
23	4	47	1
24	1	48	3

Розділ 3 . Елементи комбінаторного аналізу

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	3	13	3
2	1	14	2
3	4	15	3
4	1	16	2
5	2	17	1
6	2	18	1
7	1	19	4
8	5	20	5
9	3	21	1

Закінчення таблиці

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
10	1	22	3
11	2	23	5
12	5	24	1

Розділ 4. Теорія графів

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	3	13	4
2	5	14	4
3	3	15	3
4	3	16	4
5	1	17	1
6	2	18	1
7	2	19	2
8	5	20	1
9	2	21	3
10	2	22	1
11	1	23	2
12	4	24	1

Розділ 5. Булеві функції

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	5	13	1
2	1	14	4
3	3	15	3
4	1	16	3
5	5	17	5
6	4	18	1
7	4	19	2

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
8	4	20	1
9	2	21	4
10	2	22	5
11	4	23	5
12	5	24	3

Розділ 6. Теорія скінченних автоматів

Завдання	Відповідь	Завдання	Відповідь
1	3	10	1
2	1	11	3
3	4	12	5
4	1	13	5
5	1	14	4
6	5	15	2
7	4	16	1
8	5	17	2
9	2		

2. Відповіді та вказівки до вправ для самостійного розв’язування

Розділ 1. Елементи математичної логіки

1. Хибні висловлення – а, е; істинне – в.
2. Хибне – г; істинні – а, б, д, е, є.
3. а) $A = "7 > 6"$, $B = "7 = 6"$. Тоді логічна структура складного висловлення – $A \rightarrow B$. Оскільки $p(A) = 1$, $p(B) = 0$, то $p(A \rightarrow B) = 0$.
5. б) Нехай $A = "Фігура ABCD - квадрат"$, $B = "Фігура ABCD - прямокутник"$. Тоді твердження запишеться $A \rightarrow B$. Маємо $p(A \rightarrow B) = 1$.
6. а) 1, б) 0.

7. а)

$p(A)$	$p(B)$	$p(C)$	$p(B \vee C)$	$p(A \wedge (B \vee C))$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

8. б)

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$	$p(\overline{A \vee B})$	$p(\overline{A})$	$p(\overline{B})$	$p(\overline{A \wedge B})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Значення істинності формул $\overline{A \vee B}$ та $\overline{A \wedge B}$ збігаються у всіх інтерпретаціях, тому $\overline{A \vee B} = \overline{A \wedge B}$.

10. 16; у 15 рядках.

13. а) A ; б) $A \vee B$; в) A ; г) I ; д) I ; е) $\overline{A} \overline{B} \vee AB$.

14*. е) $\forall x((x \neq 0) \rightarrow \exists y(xy = 1))$.

15. а) хибне, б) істинне, в) хибне.

17. Кожен студент першого курсу має комп'ютер або має друга, який має комп'ютер.

19*. Вказівка: ввести позначення елементарних висловлень і записати кожне з трьох наведених у задачі висловлень у вигляді істинної диз'юнкції та розглянути їх логічний добуток. Ольга – перше, Марія – друге, Алла – третє, Ніна – четверте.

Розділ 2. Множини та відношення

1. а) $X = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$; б) $X = \{\text{м, а, т, е, к, и}\}$;
в) $X = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; г) $X = (-1; 3)$.
3. Хибне б.
6. б) $A \subseteq B$; г) $A = B$.
12. $12n, n \in N$.
14. а) $A = \{1, 3, 5\}$.
19. $A \times B \times C = \{(a, x, 0), (a, x, 1), (a, y, 0), (a, y, 1), (b, x, 0), (b, x, 1), (b, y, 0), (b, y, 1), (c, x, 0), (c, x, 1), (c, y, 0), (c, y, 1)\}$.
20. а) $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$;
б) $A \times B = \{(a, b) : (1 \leq a \leq 3) \wedge (2 \leq b < 4)\}$;
в) $A \times B = \{(-1, b) : (3 < b < 4)\}$.
23. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
25. $\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$.
33. “Бути суміжним” на множині кутів.
34. “ $x > y$ ” на множині дійсних чисел.
35. “Мати посилання на одну і ту ж літературу” на множині книг.
36. “Бути підмножиною” на множині всіх множин.
40. а, б.
49. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}$.
51. Не є відношенням еквівалентності.
54. а) $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.
53. б, г.
55. Вказівка: усіх розбиттів 15.
57. Вказівка: перевірити виконання рефлексивності, антисиметричності та транзитивності.
60. Функція $y = \lg x$ неперервна і монотонна. Значенню $x = 1$ відповідає $y = \lg 1 = 0$, значенню $x = 10$ відповідає $y = \lg 10 = 1$. Тому образом відрізка $[1; 10]$ при даному відображенні є відрізок $[0; 1]$.

61. Уся числова вісь.
62. Не є ін'єктивною, бо, наприклад, $f(-1) = f(1)$.
63. Є, бо кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B .
64. Бієктивне.
66. $\forall x \in [0; 1] : f(x) = 2x$.
69. Вказівка: $N^2 = \{1\} \times N \cup \{2\} \times N \cup \{3\} \times N \cup \dots$

Розділ 3. Елементи комбінаторного аналізу

- | | |
|---|---|
| 1. 60. | 26. 19. |
| 2. 24. | 27. 26. |
| 3. $C_{52}^{10}, C_{52}^{10} - C_{48}^{10}, 4 \cdot C_{48}^9, C_{48}^9$. | 28. 50 %. |
| 4. 504. | 29. 25. |
| 5. а) 60, б) 20. | 30. 216. |
| 6. а) 870, б) 435. | 31. $\frac{20!}{(5!)^4}$. |
| 7. 18. | 32. Приблизно сім років. |
| 8. 12. | 33. 125. |
| 9. 2730. | 34. 28 800. |
| 10. $A_{25}^{10} = \frac{25!}{15!}$. | 35. 2^{32} . |
| 11. 756. | 36. а) 604 800, б) 120, в) 282 240, 56. |
| 12. 45. | 37. 267 148. |
| 13. 45. | 38. $\frac{17!}{5! \cdot 12!} - \frac{15!}{5! \cdot 10!}$. |
| 14. 39 270. | 39. 9 129 120. |
| 15. 220. | 40. 20!. |
| 16. $\frac{21!}{12! \cdot 9!}$. | 41. 120, 72. |
| 17. 172 ; 800. | 42. 2 030. |
| 18. 26 820 600. | 43. $2(n-1)^2 \cdot (5n-8)$. |
| 19. 43 200. | 44. 10 замків, шість ключів. |
| 20. 10. | 45. 256. |
| 21. а) 16, б) 12, в) 10, г) 6. | 46. а) 49, б) 42. |
| 22. $\frac{25!}{10! \cdot 12! \cdot 3!} = 1\,487\,285\,800$. | 47. 240. |
| 23. 364. | 48. а) 300, б) 1080, в) 540. |
| 24. 6 375 600. | 49. 18 000. |
| 25. 340. | 50. а) mn ; б) $(m+1)(n+1)$. |
| | 51. 20. |

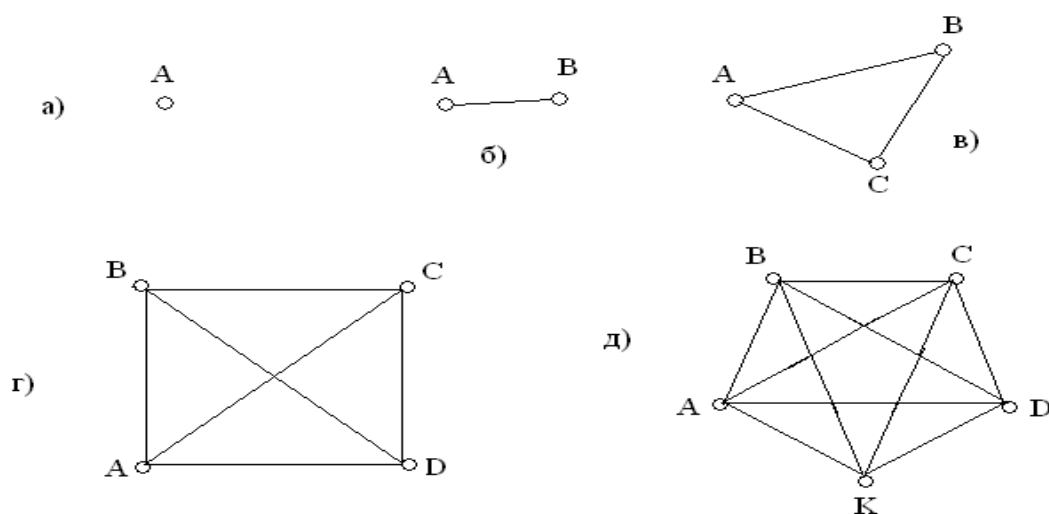
52. 5^5 .
53. $2^{(m-1)(n-1)}$.
54. 1000.
55. 25.
56. 120.
57. $(n!)^2$.
58. $(n-1)!(n-2)$.
59. 40 320.
60. 303 600.
61. 1 680.
62. 720.
63. 120.
64. 100.
65. 10.
66. 35.
67. C_n^2 .
68. Кожній точці перетину двох діагоналей відповідають 4 вершини n -кутника. Тому число усіх точок дорівнює $C_n^4 = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.
69. C_n^2 .
70. а) C_n^2 , б) C_n^3 , в) $\frac{n^2 + n + 2}{2}$.
71. $C_9^4 = 126$
72. $\frac{n \cdot (n-3)(n^2 - 3n + 14)}{24} + 1$.
73. 15.
74. $84a^3\sqrt{a}$.
75. 5.
76. 32.
77. три члени, 7-й, 22-й, 37-й.
78. 243.
79. -1.
80. $35x^5$.
81. а) $T_6 = 56x^{11}y^{13}$,
б) такого доданка не існує.
82. $T_6 = 252xy$.
83. 5.
84. 10.

85. 12.
 86. 7 290.
 87. $n = 8, m = 4$.
 88. $T_{15} = 70\,605\,216$.
 89. $T_1 = 32, T_{13} = 465\,920$.
 90. 9, $T_{49} = C_{100}^{48} 4^{16} \cdot 3^{13}$.
 91. 6.
 92. $\frac{m}{k+1}$.
 93. $210x^6$.
 94. 165.
 95. $T_9 = 3\,003x^2$.
 96. а) $f(n) = 10 \cdot 2^{n-1} - 9 \cdot 3^{n-1}$.
 б) $f(n) = 2^n$;
 в) $f(n) = (1+2n) \cdot (-1)^{n-1}$.
 98. а) $f(n) = (-1)^{n-1} \cdot (C_1 + nC_2 + n^2C_3)$;
 б) $f(n) = C_1 + C_2(1-\sqrt{2})^{n-1} + C_3(1+\sqrt{2})^{n-1}$;
 в) $f(n) = C_1 \cdot 3^{n-1} + C_2\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-1} + C_3\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^{n-1}$.

Розділ 4. Теорія графів

1. б) вхід, вихід, перехрестя лабіринту – вершини графа, коридори, які їх сполучають – ребра графа.
3. Вказівка: таких графів $2^{C_3^2} = 2^3 = 8$.
4. Вказівка: якщо граф має n вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$, степені яких відповідно $\rho(A_1), \rho(A_2), \dots, \rho(A_n)$, то число ребер N даного графа можна визначити за формулою: $N = \frac{\rho(A_1) + \rho(A_2) + \dots + \rho(A_n)}{2}$.
7. Три ребра.
10. Такого графа не існує.
14. З умови випливає, що існує маршрут із вершини A до B та маршрут із B до C . Ідучи цим маршрутом із A до C , потрібно пройти $l(AB) + l(BC)$ ребер. За означенням $l(AC)$ – найменше число ребер, по яким можна потрапити з вершини A в C , тому $l(AC) \leq l(AB) + l(BC)$.

19. Ситуація неможлива.
27.



38. в) графи не є ізоморфними. Вказівка: порівняйте прості цикли максимальної довжини.

41. Ейлерів цикл має лише граф H_1 .

53. Роман – перукар, Олег – слюсар, Микола – бібліотекар, Антон – водій.

54. Вказівка: виділити три множини: множину імен юнаків, множину навчальних предметів і множину міст.

Відповідь: Іван викладає хімію у Львові, Дмитро викладає фізику в Києві, Степан викладає біологію у Луцьку.

55. Вказівка: є п'ять різних варіантів розвитку подій.

56. Заповніть таблицю, у якій наведено приклади типових задач, що можуть вирішуватися за допомогою графів:

Предмет дослідження	Типова задача	Вершини	Ребра	Ваги
Карта доріг	Знайти найкоротший шлях	Назви міст	Дороги	Відстань

Закінчення таблиці

Предмет дослідження	Типова задача	Вершини	Ребра	Ваги
Гра в шахи	Обрати найкращий хід	Позиції на дошці	Допустимі ходи	Час на обдумування
Гра-	Обрати	Позиції	Допустимі	-----

Головоломка "15"	послідовність кроків		ходи	
Суспільство	Розділити на суспільні групи	Імена людей	Знають один одного	-----
Креслення, що складається з прямих ліній	Порівняти два зображення	Перетини ліній та кінці	Лінії	Довжини
Електричний ланцюг	Обчислити силу струму та падіння напруги на кожній ділянці	З'єднання, напруги	Компоненти, типи компонентів	Опори
Хімічна молекула	Пошук підструктури	Атоми	Зв'язок, типи зв'язків	Сили

Розділ 5. Булеві функції

1. а) $f = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$; б) $f = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$.
2. Вказівка: побудуйте відповідні таблиці істинності.
3. а) змінна z – фіктивна.
4. Вказівка: щоб довести, що змінна x не є фіктивною, достатньо розглянути значення функції f , наприклад, на наборах $(0,1,1)$ та $(1,1,1)$.
5. а) немає; б) z – фіктивна змінна.
6. а) $f^* = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee t)(z \vee t)$.
7. а) $f^* = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$.
8. а) є двоїстою.
9. $f^*(1,0,0) = f^*(0,1,0) = f^*(0,0,1) = 0$. На всіх інших наборах $f^*(x,y,z) = 1$.
10. Є самодвоїстою.
11. Не є самодвоїстою.
12. а) самодвоїста

x	y	z	xy	xz	yz	f
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

13. a)

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0

14. a) $xyz \vee x\bar{y}$; б) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$; в) $x\bar{y} \vee \bar{x}y$.

15. a) $xyz \oplus z$.

16. a) $A = B = x\bar{y} \vee \bar{x}y$.

17. a) $x\bar{y}$; б) $xz \vee x\bar{y} \vee \bar{x}$; в) $x\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{z}$; г) $x \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$; д) $\bar{y}z$; е) $\bar{x}z \vee \bar{x}y$.

18. a) $(x \vee \bar{z})(y \vee \bar{z})$; б) $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$.

19. a) $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

20. a) $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}} \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$; б) $x\bar{y}z \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$.

21. a) $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$; б) $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$.

22. a) $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

23. a) $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$; в) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

24. $f = \bar{x}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$.

25. $f = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

26. а) $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$.

27. а) $f = x \oplus y \oplus xy$; б) $f = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$.

28. а) $f = x \oplus y \oplus 1$; б) $f = xy \oplus xyz$.

29. а) істотних змінних немає; б) z ; в) y .

30. а) $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$; $f = xy \oplus xz \oplus y \oplus z$.

31. Вказівка: а) звести операції функціонально повної системи $\{\neg, \wedge\}$ до операції штрих Шеффера.

32. а) у цій системі зображаються лише булеві функції, стовпчик значень яких містить рівну кількість нулів і одиниць.

33. б) $T_0 \cup T_1, T_1 \setminus T_0$.

35. а) не є функціонально повною; б) функціонально повна; д) функціонально повна.

37. Вказівка: побудувати таблицю істинності а) не є монотонною; б) монотонна.

38. Вказівка: побудувати поліном Жегалкіна а) не є лінійною; б) лінійна.

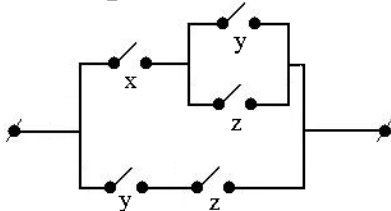
39. а) не є самодвоїстою.

40. а) $xy \vee z$; б) $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}t$.

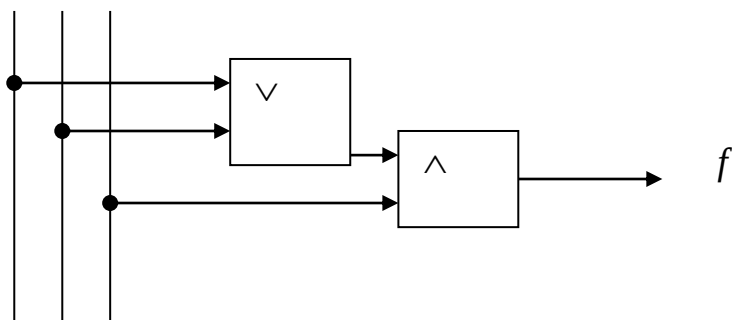
41. а) $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z$; б) $xy \vee z$; в) $xz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$; г) $xy \vee x\bar{z} \vee x\bar{t} \vee yt$.

42. а) $f_{\min} = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$ та $f_{\min} = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yz$; б) $f_{\min} = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\bar{z}$ та $f_{\min} = yz \vee \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z}$.

43. Спрощена схема:



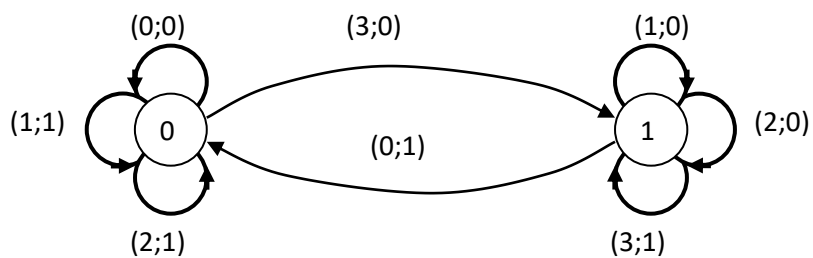
44. $f = (x_1 \vee x_2)x_3$



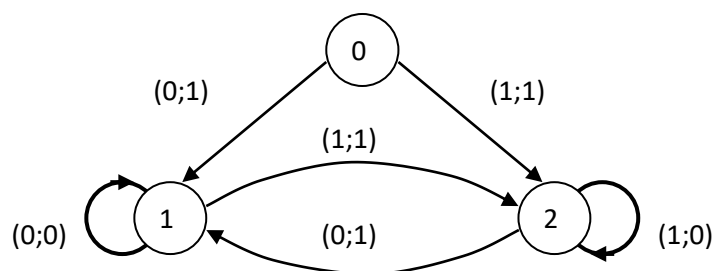
45. $f_x = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC = BC \vee AC \vee AB$
 $f_y = \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC.$

Розділ 6. Теорія скінченних автоматів

3. а) діаграма Мура:



г) діаграма Мура



4. a)

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}_1(t)\bar{x}_2(t)q(t-1) \vee \bar{x}_1(t)x_2(t)\bar{q}(t-1) \vee x_1(t)\bar{x}_2(t)\bar{q}(t-1) \vee x_1(t)x_2(t)q(t-1) \\ q(t) = \bar{x}_1(t)x_2(t)q(t-1) \vee x_1(t)\bar{x}_2(t)q(t-1) \vee x_1(t)x_2(t)\bar{q}(t-1) \vee x_1(t)x_2(t)q(t-1) \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}(t)q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee \\ \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \\ q_1(t) = x(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \\ q_2(t) = (\bar{x}(t)q_1(t-1)q_2(t-1))(\bar{x}(t) \vee q_1(t-1)\bar{q}_2(t-1))(\bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1)) \\ q_1(0) = q_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1) \\ q_1(t) = \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)\bar{q}_2(t-1) \vee x(t)\bar{q}_1(t-1)q_2(t-1) \\ q_1(0) = q_2(0) = 0 \end{cases}$$

7. Таблиці переходів і виходів автомата:

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
x_1	q_0	q_2	q_2	q_0	q_7	q_0	q_3	q_2
x_2	q_1	q_5	q_5	q_7	q_4	q_5	q_2	q_4

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
x_1	1	0	1	1	1	0	1	0
x_2	1	1	1	1	0	1	0	1

Таблиці переходів і виходів мінімального автомата:

	q_0	q_1	q_3	q_4	q_6	q_7
x_1	q_0	q_0	q_0	q_7	q_3	q_0
x_2	q_1	q_1	q_7	q_4	q_0	q_4

	q_0	q_4	q_6	q_7	q_1	q_3
x_1	1	0	1	1	1	0
x_2	1	1	1	0	0	1

3. Завдання для індивідуальних робіт

- Виконати над множинами A, B, C, D (табл. 1) такі операції:
 - $(A \setminus B) \cap C$;
 - $A \setminus (B \cap C)$;
 - $A \cup (B \setminus C)$;
 - $A \cap (B \setminus C)$;
 - $(A \cap B) \setminus (C \cup D)$;
 - $(A \setminus B) \cap (D \setminus C)$.
- Перевірити за допомогою кругів Ейлера рівності (табл. 2).
- Зобразити на координатній площині декартові добутки $A \times B$ та $B \times A$ множин A та B (табл. 3).
- Задати два неорієнтовані графи G_1 та G_2 , які мають п'ять спільних ребер (табл. 4). Графи повинні містити декілька ізольованих вершин та декілька петель.
Виконати над графами такі операції:
 - визначити степінь кожної вершини графів G_1 та G_2 ;
 - побудувати матрицю суміжності для графа G_1 ;
 - побудувати матрицю інцидентності для графа G_2 ;
 - навести п'ять підграфів графа G_2 ;
 - навести два кістяки графа G_1 ;
 - побудувати переріз та об'єднання графів G_1 та G_2 .
- Виконати тотожні перетворення булевої функції f (табл. 5). Отримати для неї ДДНФ та ДКНФ. Знайти мінімальну ДНФ.
- Задати булеву функцію f (табл. 5) таблицею, скласти її ДДНФ та ДКНФ і порівняти з результатом, отриманим у попередньому пункті.
- Побудувати поліном Жегалкіна для функції f (табл. 6) методом невизначених коефіцієнтів.
- Використовуючи критерій повноти системи булевих функцій, з'ясувати, чи є система Q (табл. 7) функціонально повною.

Таблиця 1

Варіант	Множини			
	A	B	C	D
1	{1, 2, 3, 4, 5}	{2, 4}	{4, 6}	{3, 4, 5, 7}
2	{5, 6, 7}	{5, 6}	{4, 5, 6, 10}	{1, 2, 3, 4, 10}

Закінчення таблиці 1

3	{3, 5, 7, 9}	{5, 7, 9}	{1, 2, 3, 5}	{1, 2, 3, 4, 10}
4	{7, 8, 9, 10, 11}	{10, 11, 17}	{8, 9}	{10, 11, 18 }
5	{1, 5, 9, 10}	{4, 5, 9}	{7, 8, 9, 10}	{10, 11, 121, 13, 14}
6	{0, 1, 3, 4}	{1, 3, 4, 5}	{3, 4, 6, 7}	{1, 3, 5, 9, 10}
7	{1, 2}	{3, 4, 5}	{4, 6}	{1, 9, 10}
8	{0, 1, 5}	{1, 5, 6, 7}	{5, 6}	{6, 7, 10, 11}
9	{11, 12, 13, 14}	{12, 13}	{13, 14, 15}	{10, 11, 12, 15}
10	{1, 9, 10, 11, 12}	{9, 10}	{11, 12, 15}	{1, 9, 11, 12, 15}
11	{8, 9, 10, 13}	{7, 9}	{8, 9, 13, 15}	{10, 11, 13, 15}
12	{1, 3, 9, 10}	{1, 11}	{3, 9, 11}	{1, 3, 9, 15}
13	{8, 9}	{9, 10, 15}	{15, 17, 18}	{8, 10, 15, 18, 19}
14	{1, 3, 7, 8}	{7, 8}	{1, 3, 9}	{1, 3, 9, 10, 11}
15	{11, 12, 15, 19}	{12, 15, 17}	{11, 17}	{11, 15, 19, 20, 21}
16	{0, 1 }	{2, 4}	{1, 2, 4}	{0, 3, 9, 10, 12}
17	{5, 6, 9, 10}	{10, 11}	{11, 14, 15}	{0, 1, 2}
18	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	{1, 2, 3, 4}	{4, 5, 6}	{4, 5}
19	{0, 1, 2, 8}	{2, 4, 6, 8}	{4, 6, 8}	{0, 1, 2, 9, 10}
20	{a, b, c, d}	{a, k, i, n}	{m, n}	{a, b, m, c}
21	{a, b}	{k, i}	{m, n}	{a, m, c}
22	{c, d}	{a, i}	{k, m, n, i}	{a, b, c, i}
23	{a, b, d}	{a, n}	{a, m, n}	{a, b, m, c}
24	{h, s}	{d, n, h}	{a, h}	{a, h, s}
25	{d, h, s}	{d, h}	{a, d, h}	{h, s}

Таблиця 2

Варіант	Рівності
1	$(A \cap B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$
2	$(A \cap B) \setminus (C \cap A) = A \setminus (B \cap C)$
3	$(A \cup B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$

Закінчення таблиці 2

4	$(A \cap B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$
5	$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = (C \setminus B) \setminus (A \cup B)$
6	$\overline{A \cup C} = \overline{A} \cap \overline{C}$
7	$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
8	$\overline{A \cap B \cup C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C}$
9	$(A \Delta B) \cup C = (C \Delta A) \cup B$
10	$A \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup A)$
11	$(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = (C \setminus B) \setminus (A \cup B)$
12	$(A \cap B) \cap (C \setminus B) = (C \setminus B) \cup (A \cup B)$
13	$(A \cap B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
14	$A \cap (B \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
15	$A \cap (B \setminus C) \cap A = A \setminus (B \cap C)$
16	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C$
17	$(A \cap B) \cup C = (A \setminus B) \setminus C$
18	$(A \cap B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
19	$(A \cap B) \setminus (C \cap A) = A \setminus (B \cap C)$
20	$(A \cup B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$
21	$(A \cap B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$
22	$(A \cap B) \setminus (C \cap A) = A \setminus (B \cap C)$
23	$(A \cup B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$
24	$(A \cap B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$
25	$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = (C \setminus B) \setminus (A \cup B)$

Таблиця 3

Варіант	Множини	
	A	B
1	$[2; 4)$	$(3; 5)$
2	$[-2; 3]$	$[6; 8)$
3	$(2; 3]$	$[-2; 0]$
4	$(2; 5)$	$[-1; 3]$
5	$\{x : x \in R\}$	$\{x : -3 < x < 2\}$
6	$\{x : -1 \leq x < 2\}$	$\{x : 3 \leq x \leq 6\}$

Закінчення таблиці 3

7	$[-2; 2]$	$[2; 4)$
8	$\{x : x \in R\}$	$\{x : (x = 5) \vee (x = 7)\}$
9	$\{x : 3 \leq x \leq 6\}$	$\{x : x \in R\}$
10	$\{x : (x = 5) \vee (x = 7)\}$	$\{x : -3 < x < 2\}$
11	$(2; 4)$	$[-1; 0]$
12	$\{x : x = 2\}$	$\{x : 0 < x < 2\}$
13	$[2; 5)$	$(-3; 5)$
14	$[-2; 0]$	$[6; 7)$
15	$(-2; 3]$	$[2; 6]$
16	$(-3; 5)$	$(-2; 3]$
17	$\{x : x \in R\}$	$\{x : (x = 3) \vee (x = 5)\}$
18	$\{x : -3 < x < 2\}$	$\{x : 3 \leq x < 5\}$
19	$[2; 3]$	$(-2; 3]$
20	$(-2; 3]$	$[3; 7]$
21	$\{x : -2 < x < 2\}$	$\{x : x \in R\}$
22	$[1; 4)$	$(0; 5)$
23	$[-4; -3]$	$[0; 2)$
24	$(0; 3]$	$[-2; 2]$
25	$(2; 3)$	$[-1; 4]$

Таблиця 4

Варіант	Графи	
	G_1	G_2
1	11 вершин та 10 ребер	15 вершин та 12 ребер
2	12 вершин та 9 ребер	10 вершин та 12 ребер
3	11 вершин та 7 ребер	11 вершин та 9 ребер
4	13 вершин та 12 ребер	9 вершин та 9 ребер
5	9 вершин та 12 ребер	8 вершин та 10 ребер
6	12 вершин та 10 ребер	10 вершин та 12 ребер
7	11 вершин та 11 ребер	11 вершин та 12 ребер
8	9 вершин та 5 ребер	12 вершин та 9 ребер
9	8 вершин та 9 ребер	9 вершин та 8 ребер

Закінчення таблиці 4

10	7 вершин та 11 ребер	8 вершин та 7 ребер
11	7 вершин та 10 ребер	14 вершин та 12 ребер
12	8 вершин та 9 ребер	14 вершин та 12 ребер
13	9 вершин та 7 ребер	13 вершин та 9 ребер
14	10 вершин та 12 ребер	9 вершин та 10 ребер
15	9 вершин та 12 ребер	13 вершин та 10 ребер
16	11 вершин та 10 ребер	11 вершин та 13 ребер
17	9 вершин та 7 ребер	11 вершин та 11 ребер
18	8 вершин та 8 ребер	12 вершин та 9 ребер
19	10 вершин та 9 ребер	9 вершин та 7 ребер
20	7 вершин та 9 ребер	8 вершин та 9 ребер
21	7 вершин та 11 ребер	12 вершин та 10 ребер
22	8 вершин та 10 ребер	12 вершин та 12 ребер
23	9 вершин та 7 ребер	11 вершин та 9 ребер
24	10 вершин та 13 ребер	10 вершин та 10 ребер
25	9 вершин та 11 ребер	11 вершин та 11 ребер

Таблиця 5

Варіант	Функція
1	$f(x, y, z) = x \leftrightarrow \overline{z y}$
2	$f(x, y, z) = (x \oplus y) \rightarrow yz$
3	$f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow \overline{z y}$
4	$f(x, y, z) = (z \vee \overline{x} \rightarrow y) \leftrightarrow z$
5	$f(x, y, z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (\overline{x} \rightarrow z)$
6	$f(x, y, z) = (x \rightarrow y)(\overline{z} \rightarrow y)$
7	$f(x, y, z) = (y \vee \overline{z})xy \vee \overline{yz}$
8	$f(x, y, z) = \overline{x} \leftrightarrow \overline{z y}$
9	$f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow zy$
10	$f(x, y, z) = (\overline{x} \leftrightarrow y)z \rightarrow \overline{y}$
11	$f(x, y, z) = (y \rightarrow x)(\overline{z} \rightarrow y)$
12	$f(x, y, z) = (xy \vee \overline{z})(\overline{yz} \vee x)$

Закінчення таблиці 5

13	$f(x, y, z) = xy \rightarrow (\overline{yz} \vee \overline{x})$
14	$f(x, y, z) = (x \rightarrow y)(\overline{z} \vee \overline{y})$
15	$f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \vee \overline{xyz}$
16	$f(x, y, z) = (\overline{xy} \vee \overline{z}) \vee \overline{xyz}$
17	$f(x, y, z) = (\overline{x} \rightarrow y)(\overline{z} \rightarrow y)$
18	$f(x, y, z) = (x \leftrightarrow \overline{y})z \rightarrow y$
19	$f(x, y, z) = \overline{x \rightarrow y} \wedge \overline{yz}$
20	$f(x, y, z) = \overline{x} \leftrightarrow \overline{z \vee y}$
21	$f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{xyz}$
22	$f(x, y, z) = \overline{x \rightarrow y} \wedge \overline{z}$
23	$f(x, y, z) = (\overline{x} \leftrightarrow y)z \vee \overline{y}$
24	$f(x, y, z) = y \leftrightarrow \overline{xz}$
25	$f(x, y, z) = (\overline{z} \rightarrow y)(y \rightarrow \overline{x})$

Таблиця 6

Варіант	Функція
1	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$
2	$f(x, y, z) = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$
3	$f(x, y, z) = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$
4	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)$
5	$f(x, y, z) = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)$
6	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$
7	$f(x, y, z) = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$
8	$f(x, y, z) = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)$
9	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$
10	$f(x, y, z) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$
11	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$
12	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$
13	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$

Закінчення таблиці 6

14	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$
15	$f(x, y, z) = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$
16	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$
17	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$
18	$f(x, y, z) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$
19	$f(x, y, z) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)$
20	$f(x, y, z) = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$
21	$f(x, y, z) = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$
22	$f(x, y, z) = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$
23	$f(x, y, z) = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$
24	$f(x, y, z) = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$
25	$f(x, y, z) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$

Таблиця 7

Варіант	Система булевих функцій
1	$Q = \{x \vee y, x \oplus y\}$
2	$Q = \{x \downarrow y, x \leftrightarrow y\}$
3	$Q = \{\bar{x}, x \wedge y, x \oplus y\}$
4	$Q = \{x \vee y, x \oplus y, 0\}$
5	$Q = \{x \vee y, x \leftrightarrow y, 0\}$
6	$Q = \{x \downarrow y, \bar{x}, 0\}$
7	$Q = \{x \vee y, x \rightarrow y, 0\}$
8	$Q = \{x \wedge y, x \oplus y \oplus z\}$
9	$Q = \{x \wedge y, x \rightarrow y, 0\}$
10	$Q = \{\bar{x}, x \wedge y\}$
11	$Q = \{x \wedge y, x \oplus y, 1\}$
12	$Q = \{x \rightarrow y, x \oplus y \oplus z, 0\}$
13	$Q = \{x \vee y, x \rightarrow y, 1\}$
14	$Q = \{x \downarrow y, x \leftrightarrow y, 0\}$
15	$Q = \{\bar{x}, x \oplus y \oplus z\}$

16	$Q = \{x \wedge y, x \oplus y, 0\}$
17	$Q = \{\bar{x}, x \leftrightarrow y\}$
18	$Q = \{x \leftrightarrow y, x \oplus y \oplus z\}$
19	$Q = \{x \vee y, x \leftrightarrow y\}$
20	$Q = \{\bar{x}, x \wedge y, x \leftrightarrow y\}$
21	$Q = \{x \vee y, x \oplus y, 1\}$
22	$Q = \{\bar{x}, x \oplus y\}$
23	$Q = \{x \vee y, x \leftrightarrow y, 1\}$
24	$Q = \{\bar{x}, x \leftrightarrow y, x \vee y\}$
25	$Q = \{x \downarrow y, x \leftrightarrow y, 1\}$

Навчальний посібник

Швай Ольга Леонідівна

ПРАКТИКУМ

ІЗ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Видання друкується в авторській редакції