

**ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики**

Т.В. Волошина

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Практикум

Луцьк
Вежа-Друк
2025

УДК 512.64 (072)

В 68

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 9 від 21.05.2025 р.)

Рецензент:

Гембарська Світлана Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Волошина Т.В.

В 68 Лінійна алгебра: практикум. Луцьк: Вежа-Друк, 2025. 38 с.

У навчальному виданні подано плани практичних занять з обов'язкового курсу «Лінійна алгебра» відповідно до освітньої програми «Математика» першого (бакалаврського) рівня спеціальності Е7 Математика. Задачі до кожної теми розбито на дві групи: для аудиторної та самостійної роботи здобувачів. Завдання доповнені переліком питань для самоконтролю.

Практикум рекомендовано здобувачам вищої освіти за освітніми програмами спеціальності Е7 Математика першого (бакалаврського) рівня

УДК 512.64 (072)

© Волошина Т.В., 2025

© Волинський національний університет
імені Лесі Українки, 2025

Передмова

Джерелом виникнення лінійної алгебри як розділу математики стала теорія систем лінійних рівнянь, які розглядаються над числовими полями. Числові векторні простори скінченної розмірності, які виникають при цьому, є узагальненням геометричного поняття простору. Від самого початку лінійна алгебра була тісно пов'язана з аналітичною геометрією, що забезпечує геометричну інтерпретацію значній частині алгебраїчних понять та теорем. Подальший розвиток алгебри призвів до появи у математиці такої алгебраїчної структури як лінійний простір над полем. І в сучасній математиці лінійну алгебру можна охарактеризувати як науку про лінійні векторні простори та лінійні перетворення цих просторів.

Ідея лінійного простору виявилася дуже продуктивною, і саме це поняття лежить у основі глибоких зв'язків лінійної алгебри та інших математичних теорій. Крім геометрії поняття лінійного простору використовується в математичному та функціональному аналізі. У теорії груп потужним інструментом дослідження є вивчення лінійних зображень групи. Фактично таким чином групи вивчаються за допомогою матричного числення. Поняття лінійної алгебри виникають у теоретичній фізиці та механіці. Лінійні моделі часто використовуються при моделюванні природних явищ, економічних процесів. Тому предмет лінійної алгебри вивчається на перших курсах усіх математичних спеціальностей, а як розділ математики – усіх технічних, інженерних та природничих спеціальностей.

Вивчення лінійної алгебри передбачає опанування теоретичного матеріалу та його застосування до розв'язування досить широкого кола практичних задач. Зокрема, у курсі вивчаються методи розв'язування систем лінійних рівнянь, дослідження множини розв'язків таких систем; алгебраїчні операції з комплексними числами, многочленами, матрицями; досліджуються лінійні оператори та їх матриці; вивчаються методи зведення до канонічного вигляду квадратичних форм.

На даний час існує чимало навчальних видань, у яких розглядаються ті чи інші тематичні аспекти лінійної алгебри. Вони між собою різняться ступенем узагальнення і обґрунтування основних фактів, лаконічністю і детальністю викладу, наявністю розв'язаних задач.

Для проведення практичних занять з лінійної алгебри зі здобувачами необхідно мати базову підбірку типових задач з кожної теми курсу. Головною метою навчального видання є систематизація задач різного рівня складності відповідно з тематичним змістом навчальної дисципліни «Лінійна алгебра». Задачі кожної теми розбиті на дві групи: для розв'язування в аудиторії з викладачем та для самостійного розв'язування здобувачами в позааудиторний час. До кожного заняття пропонується перелік питань для самоконтролю.

Здобувачам також пропонується короткий перелік літературних джерел, що містять основні теоретичні положення, усі необхідні формули і теореми, та приклади розв'язання задач лінійної алгебри.

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
МЕТОДОМ ГАУСА**

Контрольні запитання

1. Запишіть загальний вигляд системи лінійних рівнянь. Випишіть її основну та розширену матриці.
2. Сформулюйте означення розв'язку системи лінійних рівнянь.
3. Що означає розв'язати систему лінійних рівнянь?
4. Сформулюйте означення сумісної, несумісної, визначеної та невизначеної систем лінійних рівнянь.
5. Які системи лінійних рівнянь називаються рівносильними? Які перетворення систем лінійних рівнянь називають рівносильними (еквівалентними)?
6. Перелічіть елементарні еквівалентні перетворення систем лінійних рівнянь. Як при таких перетвореннях змінюється розширена матриця відповідної системи?
7. У чому полягає метод послідовного виключення змінних (метод Гауса) розв'язання систем лінійних рівнянь?
8. Що називають загальним розв'язком системи лінійних рівнянь; частковим розв'язком системи лінійних рівнянь?
9. Які змінні у загальному розв'язку системи називають вільними, а які залежними?

Задачі для аудиторної роботи

Розв'яжіть систему методом Гауса:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 0x_2 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$

Задачі для домашньої роботи

Розв'яжіть систему методом Гауса:

$$а) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$$

Теоретичний матеріал: Дії з матрицями, їх властивості.

Практична робота № 3

ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

Контрольні запитання

1. Запишіть матрицю, у якій m рядків та n стовпців. Що називають типом матриці? Які матриці називаються рівними, однотипними?
2. Яка матриця називається квадратною? Що називають її порядком?
3. Що називається сумою двох матриць? Які матриці можна додавати?
4. Перелічіть властивості додавання матриць.
5. Що називається добутком матриці на число?
6. Перелічіть властивості множення матриці на число.
7. Які повинні бути типи матриць-множників, щоб існував їх добуток?
8. Що називається добутком двох матриць, які можна помножити? Як пов'язаний тип матриці-добутку з типами матриць множників?

9. Запишіть формулу для обчислення елементів добутку двох матриць.
10. Перелічіть властивості множення матриць.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть $2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайдіть добутки матриць AB та BA , якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Обчисліть степені матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^4$; в) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n$, де $n \in \mathbf{N}$.

5. Знайдіть значення $f(A)$, якщо:

а) $f(x) = x^2 - x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$\text{б)} \quad f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Обчисліть:

$$\text{а)} \quad 3A - 4B, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \quad 2 \cos \alpha \cdot A - B + \sin \alpha \cdot C, \quad \text{якщо} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \alpha & \sec \alpha \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть добуток матриць:

$$\text{а)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдіть добутки матриць AB та BA , якщо це можливо:

$$\text{а)} \quad A = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 5), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Обчисліть степені матриць:

$$\text{а)} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n, \text{ де } n \in \mathbf{N}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n, \text{ де } n \in \mathbf{N}.$$

$$5. \quad \text{Знайдіть значення } f(A), \text{ якщо } f(x) = x^3 - 4x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теоретичний матеріал: Визначники матриць. Означення, властивості визначників. Методи обчислення визначників: за означенням (для матриць порядку 2 та 3), метод елементарних перетворень, розклад визначника за рядком (стовпцем), теорема Лапласа, визначник трикутної та квазітрикутної матриць.

Практична робота № 4-5

ВИЗНАЧНИКИ

Контрольні запитання

1. Запишіть формули для обчислення визначників другого та третього порядків.
2. Сформулюйте основні властивості визначників.
3. Сформулюйте означення доповнювального мінору та алгебраїчного доповнення до елемента a_{ij} матриці.
4. Запишіть розклад визначника за елементами рядка (стовпця).
5. Запишіть розклад визначника матриці за елементами «чужого» рядка (стовпця).
6. Сформулюйте означення доповнювального мінору та алгебраїчного доповнення до мінору другого порядку матриці.
7. Запишіть розклад визначника за двома рядками (стовпцями) (теорема Лапласа).

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть визначники матриць:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; & \text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}; & \text{в)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \\ \\ \text{г)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}. \end{array}$$

2. Обчисліть визначники матриць, виконавши розклад за елементами стовпця чи рядка, що містять змінні:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Обчисліть визначник матриці:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}.$$

4. Обчисліть визначник матриці, використовуючи розклад за мінорами другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Обчисліть визначники матриць:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

6. Обчисліть визначник матриці n -ого порядку:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Обчисліть визначники матриць:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ 2 & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Обчисліть визначник матриці, виконавши розклад за елементами стовпця, що містить змінні:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

3. Обчисліть визначник матриці:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

4. Обчисліть визначники матриць:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

Теоретичний матеріал: Формули Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Ранг матриці.

Практична робота № 6

ФОРМУЛИ КРАМЕРА. РАНГ МАТРИЦІ.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення рангу матриці.
2. У чому полягають основні методи обчислення рангу матриці?
3. Сформулюйте критерій сумісності та критерій визначеності системи лінійних рівнянь.
4. Сформулюйте теорему Крамера і запишіть формули Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь з невідродженою квадратною матрицею.
5. Сформулюйте означення базису числового векторного простору.
6. Сформулюйте теорему про розклад вектора за базисом.

Задачі для аудиторної роботи

1. Розв'яжіть за формулами Крамера:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} 29x + 31y = 2, \\ -3x - 2y = 6. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases} \\ \\ \text{в)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases} & (\text{Ф.-С. №400 е}) \end{array}$$

2. Перевірте, чи утворюють базис вектори $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 0; -2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$. Розкладіть вектор $\vec{x} = (10; -6; 5)$ за цим базисом.
3. Обчисліть ранг матриць:

$$\text{а)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Розв'яжіть за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Перевірте, чи утворюють базис вектори $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; -3; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$. Розкладіть вектор $\vec{x} = (-6; -5; 8)$ за цим базисом.

3. Обчисліть ранг матриці: $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Теоретичний матеріал: Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Практична робота № 7

ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення однорідної системи лінійних рівнянь.
2. Сформулюйте означення розв'язку системи лінійних рівнянь.
3. Що називають загальним розв'язком, частковим розв'язком системи лінійних рівнянь?
4. Які змінні у загальному розв'язку системи називають вільними, а які залежними?
5. Сформулюйте теорему про множину розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.
6. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Задачі для аудиторної роботи

Знайдіть фундаментальні системи розв'язків:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Задачі для домашньої роботи

Знайдіть фундаментальні системи розв'язків:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Теоретичний матеріал: Обернена матриця, методи її обчислення.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ, МЕТОДИ ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення оберненої матриці до заданої.
2. Сформулюйте критерій існування оберненої матриці.
3. Які методи обчислення оберненої матриці вам відомі. У чому вони полягають?
4. Яке рівняння називається матричним? Які методи розв'язання такого рівняння вам відомі? У чому вони полягають?
5. У чому полягає матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь? Для яких систем його можна застосовувати?

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайдіть обернену до матриці:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Задачі для домашньої роботи

1. Знайдіть обернену до матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Теоретичний матеріал: Комплексні числа.

Практична робота № 10-11

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Контрольні запитання

1. Запишіть комплексне число у алгебраїчній формі. Як виконуються дії з комплексними числами у алгебраїчній формі?
2. Які геометричні інтерпретації мають комплексні числа? Як при цьому проінтерпретувати дії додавання та віднімання комплексних чисел у алгебраїчній формі?
3. Які комплексні числа називаються спряженими? Сформулюйте властивості комплексно спряжених чисел.
4. Запишіть тригонометричну форму комплексного числа.
5. Як перейти від алгебраїчної до тригонометричної форми запису комплексного числа?

6. Запишіть формули множення, ділення, піднесення до натурального степеня комплексних чисел у тригонометричній формі.
7. Запишіть формули добування коренів n -ого степеня з комплексного числа.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть, результат подайте в алгебраїчній формі:

а) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$;

б) $\frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$;

б) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$.

3. Подайте у тригонометричній формі комплексні числа:

$$1, -1, i, 1+i, 1-i, -1-i\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}+i.$$

4. Виконайте дії:

а) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; б) $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$.

5. Обчисліть, використовуючи формулу Муавра:

а) $(1+i)^{25}$; б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; в) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

6. Виконайте добування коренів :

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-4}$; в) $\sqrt[6]{-27}$.

7. Виконайте добування коренів:

$$\text{а) } \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}; \quad \text{б) } \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Обчисліть, результат подайте в алгебраїчній формі:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}; \\ \text{б) } & \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(2i+1)^2}{i+2}. \end{aligned}$$

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$.

3. Подайте у тригонометричній формі комплексні числа:

$$-i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad \sqrt{3}-i.$$

4. Виконайте дії $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1-i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$.

5. Обчисліть, використовуючи формулу Муавра:

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

6. Виконайте добування коренів:

$$\text{а) } \sqrt[3]{2-2i}; \quad \text{б) } \sqrt[6]{1}; \quad \text{в) } \sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}.$$

Теоретичний матеріал: Подільність многочленів.

Практична робота № 12-13
ПОДІЛЬНІСТЬ МНОГОЧЛЕНІВ

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення многочлена n -ого степеня з коефіцієнтами з поля P ; старшого коефіцієнта; рівності двох многочленів; многочлена нульового степеня; нормованого многочлена.
2. Сформулюйте означення дій додавання та множення многочленів. Перелічіть основні властивості цих дій.
3. Сформулюйте теорему про ділення з остачею для многочленів.
4. Що означає фраза «многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$ »? Сформулюйте означення дільника многочлена. Перелічіть основні властивості відношення подільності многочленів.
5. Опишіть алгоритм ділення многочленів у стовпчик.
6. Опишіть алгоритм ділення многочленів за схемою Горнера.
7. Сформулюйте означення найбільшого спільного дільника многочленів і теорему про його існування та єдиність.
8. У чому полягає алгоритм Евкліда відшукування найбільшого спільного дільника многочленів?
9. Сформулюйте означення взаємно простих многочленів і критерій взаємної простоти двох многочленів. Перелічіть основні властивості взаємно простих многочленів.
10. Сформулюйте означення незвідного над полем многочлена.
11. Сформулюйте теорему про розклад многочлена на незвідні множники над деяким полем.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$:
а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $g(x) = 4x^3 + x^2 - 7$;

- б) $f(x) = 2x^5 + x^3 + x - 7$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 5$.
2. Виконайте ділення з остачею многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$:
- а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;
- б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
- в) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $g(x) = x - 1$.
3. Знайдіть такі A, B , щоб многочлен $Ax^4 + Bx^3 + 1$ ділився на $(x - 1)^2$.
4. За якої умови многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на $x^2 + mx - 1$?
5. Користуючись схемою Горнера, поділіть з остачею многочлен $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ на многочлен $g(x) = x + 3$.
6. Користуючись схемою Горнера, обчисліть значення многочлена $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ при $x_0 = 4$.
7. Розкладіть многочлен $f(x)$ за степенями $x - x_0$:
- а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = 1$;
- б) $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$.
8. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$:
- а) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;
- б) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
- в) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$.

Задачі для домашньої роботи

1. Виконайте ділення з остачею многочлена $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 2x + 12$ на многочлен $g(x) = x^2 - 5x + 6$.
2. За якої умови многочлен $x^4 + px^2 + q$ ділиться на $x^2 + mx + 1$?
3. За допомогою схеми Горнера знайдіть такі A, B , щоб многочлен $Ax^4 + Bx^3 + 1$ ділився на $(x - 1)^2$.

4. Користуючись схемою Горнера, поділіть з остачею многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на многочлен $g(x) = x - 1$.
5. Користуючись схемою Горнера, обчисліть значення многочлена $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ при $x_0 = 2$.
6. Розкладіть многочлен $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ за степенями $x - 2$.
7. Знайдіть найбільший спільний дільник многочленів $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ та $g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Теоретичний матеріал: Корені многочлена.

Практична робота № 14-15

КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНА

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення кореня многочлена.
2. Сформулюйте теорему Безу та наслідок з неї.
3. Сформулюйте означення кореня кратності k ; простого кореня многочлена.
4. Сформулюйте теорему про кратність кореня многочлена та його похідної і наслідок із цієї теореми (критерій того, що у многочлена усі корені – прості).
5. У чому полягає метод відокремлення кратних коренів многочлена?
6. Сформулюйте теорему Вієта для многочлена n -ого степеня.
7. Сформулюйте необхідні умови того, що раціональне число є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами.

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть кратність кореня $c = -2$ многочлена $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ за схемою Горнера:
2. Відокремте кратні корені многочлена:
 - а) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$;

б) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

3. Знайдіть таке λ , щоб :

а) один із коренів многочлена $x^3 - 7x - \lambda$ був удвічі більшим за інший;

б) сума двох коренів многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ дорівнювала 1.

4. Знайдіть раціональні корені многочлена:

а) $f(x) = 4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$;

б) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$.

Задачі для домашньої роботи

1. Обчисліть кратність кореня $c = 2$ многочлена $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 64x + 76$ за схемою Горнера.

2. Відокремте кратні корені многочлена

$$f(x) = x^5 - x^4 - 14x^3 - 26x^2 - 19x - 5.$$

3. Знайдіть таке λ , щоб сума двох коренів многочлена $x^3 + 8x^2 + \lambda x - 4$ дорівнювала третьому.

4. Знайдіть раціональні корені многочлена:

а) $f(x) = 5x^3 + 18x^2 - 68x + 24$;

б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

Теоретичний матеріал: Лінійний векторний простір.

**ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ.
БАЗИС, РОЗМІРНІСТЬ. ПІДПРОСТОРИ.**

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення лінійного простору, базису, розмірності.
2. Сформулюйте означення підпростору та критерій підпростору.
3. Запишіть формулу, що пов'язує розмірність суми двох підпросторів та розмірність їх перетину.

Задачі для аудиторної роботи

1. У числовому векторному просторі P_n дано систему векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m$. Виберіть у ній максимальну лінійно незалежну підсистему і виразіть решту векторів у вигляді лінійних комбінацій векторів вибраної підсистеми:

а) $\vec{f}_1 = (2; 1), \vec{f}_2 = (3; 2), \vec{f}_3 = (1; 1), \vec{f}_4 = (2; 3);$

б) $\vec{f}_1 = (2; 1; -3), \vec{f}_2 = (3; 1; -5), \vec{f}_3 = (4; 2; -1), \vec{f}_4 = (1; 0; -7).$

2. У числовому векторному просторі P_4 дано систему векторів:

$$\vec{f}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{f}_2 = (1; 1; -1; -1), \vec{f}_3 = (1; -1; 1; -1), \vec{f}_4 = (1; -1; -1; 1).$$

Чи утворює ця система векторів базис у P_4 ? Знайдіть координати вектора $\vec{x} = (1; 2; 1; 1)$ у цьому базисі.

3. Знайдіть базис та розмірність лінійної оболонки заданої системи числових векторів:

$$\vec{f}_1 = (2; 1; 3; -1), \vec{f}_2 = (-1; 1; -3; 1), \vec{f}_3 = (4; 5; 3; -1), \vec{f}_4 = (1; 5; -3; 1).$$

4. Знайдіть базиси та розмірності суми і перетину підпросторів, які є лінійними оболонками систем векторів $\{\vec{f}_i\}$ і $\{\vec{g}_j\}$:

а) $\vec{f}_1 = (1; 1; 1; 1; 1), \vec{f}_2 = (1; -1; 1; -1; 1), \vec{f}_3 = (2; 1; -1; 1; 2),$

$$\vec{g}_1 = (-1; 2; 1; 1; 0), \vec{g}_2 = (1; 0; 4; 0; 1);$$

$$b) \quad \vec{f}_1 = (1; 2; 1; 0), \vec{f}_2 = (-1; 1; 1; 1), \vec{g}_1 = (2; -1; 0; 1), \vec{g}_2 = (1; -1; 3; 7).$$

Задачі для домашньої роботи

1. У числовому векторному просторі P_4 дано систему векторів:
 $\vec{f}_1 = (2; 2; 7; -1), \vec{f}_2 = (3; -1; 2; 4), \vec{f}_3 = (1; 1; 3; 1)$. Виберіть у ній
 максимальну лінійно незалежну підсистему і виразіть решту векторів у
 вигляді лінійних комбінацій векторів вибраної підсистеми.
2. Знайдіть базис та розмірність лінійної оболонки заданої системи
 числових векторів: $\vec{f}_1 = (2; 1; 3; 1), \vec{f}_2 = (1; 2; 0; 1), \vec{f}_3 = (-1; 1; -3; 0)$.
3. Знайдіть базиси та розмірності суми і перетину підпросторів, які є
 лінійними оболонками систем векторів $\{\vec{f}_i\}$ і $\{\vec{g}_j\}$:
 $\vec{f}_1 = (1; 1; 1; 0), \vec{f}_2 = (1; 1; 0; 1), \vec{f}_3 = (1; 0; 1; 1),$
 $\vec{g}_1 = (1; 1; -1; -1), \vec{g}_2 = (1; -1; 1; -1), \vec{g}_3 = (1; -1; -1; 1).$

Теоретичний матеріал: Лінійні оператори, матриці лінійних операторів.
 Матриця переходу від одного базису до іншого. Перетворення координат
 вектора при зміні базису. Координати образу вектора під дією лінійного
 оператора. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ.

МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення лінійного оператора. Як задати лінійний оператор матрицею?
2. Що називають матрицею переходу від одного базису до іншого? Як змінюються координати вектора при переході до іншого базису?
3. Запишіть формулу, що пов'язує координати вектора та координати його образу під дією лінійного оператора.
4. Запишіть формулу, що пов'язує матриці лінійного оператора в різних базисах.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ у базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, якщо відомо: $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.
2. Лінійний оператор φ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ задається матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть координати образу вектора $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ під дією лінійного оператора φ у цьому ж базисі.

3. Лінійний оператор φ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ векторного простору V_4 задається матрицею:

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведіть, що вектори $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4$, $\vec{f}_4 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ утворюють базис у V_4 , і знайдіть матрицю лінійного оператора φ у цьому базисі.

Задачі для домашньої роботи

1. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ у базисі $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, якщо відомо:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2. Лінійний оператор φ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ задається матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть координати образу вектора $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_4$ під дією лінійного оператора φ у цьому ж базисі.

3. Лінійний оператор φ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторного простору V_3 задається матрицею:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Доведіть, що вектори $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1$ утворюють базис у V_3 , і знайдіть матрицю лінійного оператора φ у цьому базисі.

Теоретичний матеріал: Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Обчислення власних векторів та власних значень лінійного оператора.

**ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ
ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА.
ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ МНОГОЧЛЕН.**

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення власного вектора і власного значення лінійного оператора.
2. Перелічіть основні властивості власних векторів лінійного оператора.
3. Сформулюйте означення характеристичного многочлена лінійного оператора.
4. Сформулюйте теорему про характеристичні многочлени подібних матриць.
5. Як практично відшукати власні вектори і власні значення лінійного оператора, знаючи його матрицю?
6. Сформулюйте достатню умову діагоналізації матриці лінійного оператора.

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайдіть власні значення і власні вектори лінійного оператора φ , заданого матрицею A_φ :

а)
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

в)
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix};$$

г)
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Зведіть до діагонального вигляду матрицю A_φ лінійного оператора φ . Знайдіть базис, в якому його матриця D_φ – діагональна.

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Знайдіть власні значення і власні вектори лінійного оператора φ , заданого матрицею A_{φ} :

а) $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

б) $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

г) $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Теоретичний матеріал: Жорданова нормальна форма лінійного оператора. Алгоритм зведення до жорданової нормальної форми матриці лінійного оператора. Кількість та асортимент жорданових клітин у жордановій матриці. Методи відшукування жорданового базису. Мінімальний многочлен лінійного оператора.

Практична робота № 21-23

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНА ФОРМА ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА. ЖОРДАНІВ БАЗИС.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення жорданової клітини, що відповідає числу λ .
2. Яка матриця називається жордановою?
3. Сформулюйте теорему про існування жорданового базису для лінійного оператора у векторному просторі над полем комплексних чисел. Чи кожен лінійний оператор у векторному просторі над полем дійсних чисел має жорданову нормальну форму? Чому?

4. Опишіть алгоритм зведення до жорданової нормальної форми матриці лінійного оператора.
5. Запишіть формулу, за допомогою якої можна визначити кількість та асортимент жорданових клітин, що відповідають числу λ , у жордановій матриці лінійного оператора.
6. Опишіть методи відшукування жорданового базису лінійного оператора.
7. Сформулюйте означення мінімального многочлена лінійного оператора. Який зв'язок існує між мінімальним та характеристичним многочленами лінійного оператора?

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайдіть жорданову форму матриці лінійного оператора, відповідний жорданів базис та мінімальний многочлен, якщо в деякому початковому базисі лінійний оператор задається матрицею A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -14 \\ 3 & 6 & -10 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Знайдіть жорданову форму матриці лінійного оператора, відповідний жорданів базис та мінімальний многочлен, якщо в деякому початковому базисі лінійний оператор задається матрицею A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$в) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & -8 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теоретичний матеріал: Евклідів простір, скалярне множення. Довжина вектора, кут між векторами у евклідовому просторі. Нерівність Коші – Буняковського, нерівність трикутника. Ортогональні системи векторів. Теорема про ортогоналізацію. Ортогональні та самоспряжені лінійні оператори, їх матриці у ортонормованому базисі.

Практична робота № 24-26

ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте аксіоматичне означення скалярного множення векторів у векторному просторі над полем дійсних чисел; означення евклідового простору.
2. Запишіть формулу для скалярного добутку векторів, заданих координатами у деякому базисі евклідового простору.
3. Сформулюйте означення довжини вектора і кута між векторами у евклідовому просторі.
4. Запишіть нерівність трикутника та нерівність Коші-Буняковського.
5. Сформулюйте означення ортогональної системи векторів у евклідовому просторі; означення нормованого вектора.
6. Сформулюйте теорему про ортогоналізацію системи векторів. Опишіть процедуру ортогоналізації.
7. Сформулюйте означення ортогонального лінійного оператора; самоспряженого лінійного оператора. Якими властивостями характеризуються матриці таких лінійних операторів у ортонормованому базисі евклідового простору?

Задачі для аудиторної роботи

1. Обчисліть скалярний добуток векторів та кут між ними (розглядається числовий векторний простір $\mathbf{R}_n$ із природним скалярним множенням):

а) $\vec{x} = (2 \ 1 \ 3 \ 2), \vec{y} = (1 \ 2 \ -2 \ 1);$

б) $\vec{x} = (1 \ 1 \ 1 \ 2), \vec{y} = (3 \ 1 \ -1 \ 0);$

в) $\vec{x} = (1 \ 2 \ 1 \ -1), \vec{y} = (-2 \ 3 \ -5 \ -1).$

2. Знайдіть нормований вектор, ортогональний до векторів

$$\vec{x} = (1 \ 1 \ 1 \ 1), \vec{y} = (1 \ -1 \ -1 \ 1), \vec{z} = (2 \ 1 \ 1 \ 3).$$

(Розглядається числовий векторний простір $\mathbf{R}_n$ із природним скалярним множенням).

3. Побудуйте ортонормований базис простору, взявши в якості базисних вектори:

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \right), \vec{y} = \left(\frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{2} \ -\frac{5}{6} \right).$$

(Розглядається числовий векторний простір $\mathbf{R}_n$ із природним скалярним множенням).

4. Знайдіть ортогональну і нормовану фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Розкладіть вектор $\vec{x}$ на суму двох векторів, один із яких лежить у лінійній оболонці векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, а другий – ортогональний до цього підпростору (розглядається числовий векторний простір $\mathbf{R}_n$ із природним скалярним множенням):

а) $\vec{x} = (5 \ 2 \ -2 \ 2), \vec{a}_1 = (2 \ 1 \ 1 \ -1), \vec{a}_2 = (1 \ 1 \ 3 \ 0);$

б) $\vec{x} = (-3 \ 5 \ 9 \ 3), \vec{a}_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), \vec{a}_2 = (2 \ -1 \ 1 \ 1),$
 $\vec{a}_3 = (2 \ -7 \ -1 \ -1).$

6. Нехай лінійний оператор φ у ортонормованому базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ має матрицю A_e . Побудуйте власний ортонормований базис для цього лінійного оператора і знайдіть його матрицю в цьому базисі:

$$\text{а) } A_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A_e = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Обчисліть кут між векторами (розглядається числовий векторний простір $\mathbf{R}_n$ із природним скалярним множенням)

$$\vec{x} = (1 \ 2 \ 2 \ 3), \ \vec{y} = (3 \ 1 \ 5 \ 1).$$

2. Нормуйте вектор $\vec{x} = (3 \ 1 \ 2 \ 1)$.

3. Доповніть до ортонормованого базису систему векторів

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \ \vec{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right).$$

5. Знайдіть ортонормований базис лінійної оболонки векторів:

$$\vec{x} = (1 \ 2 \ 1 \ 0), \ \vec{y} = (-1 \ 1 \ 1 \ 1), \ \vec{z} = (2 \ -1 \ 0 \ 1).$$

5. Нехай лінійний оператор φ у ортонормованому базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ має матрицю A_e . Побудуйте власний ортонормований базис для цього лінійного оператора і знайдіть його матрицю в цьому базисі:

$$\text{а) } A_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Теоретичний матеріал: Квадратичні форми, методи зведення до канонічного вигляду. Закон інерції дійсних квадратичних форм. Додатна визначеність, критерій додатної визначеності.

ЗВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення білінійної форми та квадратичної форми.
2. Як задати за допомогою матриці білінійну форму; квадратичну форму? Як змінюється матриця білінійної та квадратичної форм при зміні базису?
3. У чому полягають основні методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду (метод Лагранжа, метод ортогональних перетворень, метод Якобі)?
4. Сформулюйте закон інерції дійсних квадратичних форм.
5. Яка квадратична форма називається додатно визначеною? Сформулюйте критерій додатної визначеності.

Задачі для аудиторної роботи

1. Зведіть квадратичну форму до канонічного вигляду методами Лагранжа та ортогональних перетворень:

а) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_3x_4$;

в) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$;

г) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

Чи виконується закон інерції? Чи є серед цих квадратичних форм додатно визначені?

2. Чи можна звести квадратичну форму, задану матрицею A , до канонічного вигляду методом Якобі? Зведіть її цим методом до канонічного вигляду, якщо це можливо. Застосуйте критерій Сильвестра до з'ясування, чи будуть ці квадратичні форми додатно визначені.

$$\text{а)} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Зведіть симетричну білінійну форму до канонічного вигляду, вказавши відповідний канонічний базис:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

Задачі для домашньої роботи

1. Зведіть квадратичну форму до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень:

$$\text{а)} \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3;$$

$$\text{б)} \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

2. Зведіть квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа:

$$\text{а)} \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3;$$

$$\text{б)} \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4;$$

$$\text{в)} \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

Теоретичний матеріал: Застосування квадратичних форм до зведення загальних рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.

**ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ
ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ
КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ**

Контрольні запитання

1. Запишіть загальне рівняння кривої другого порядку; поверхні другого порядку.
2. Як застосувати метод ортогональних перетворень та метод Лагранжа для зведення до канонічного вигляду загальних рівнянь кривих та поверхонь другого порядку?
3. Запишіть канонічні рівняння кривих та поверхонь другого порядку.

Задачі для аудиторної роботи

1. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку і випишіть відповідні перетворення координат:
 - а) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
 - б) $5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{5}{4} = 0$;
 - в) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0$.
2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння поверхонь другого порядку і випишіть відповідні перетворення координат:
 - а) $4xy + y^2 + 4yz + 2z^2 - 4x - 2y - 5 = 0$;
 - б) $4xz - y^2 = 0$.

Задачі для домашньої роботи

1. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку і випишіть відповідні перетворення координат:
 - а) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8\sqrt{13}x + \sqrt{13}y + 13 = 0$;
 - б) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 42 = 0$.

Індивідуальне домашнє завдання

Зведіть рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду за допомогою квадратичних форм. Запишіть відповідні перетворення координат. Встановіть, який геометричний образ задає рівняння. Зобразіть початкову, проміжну та кінцеву системи координат та геометричний образ, заданий рівнянням (якщо це можливо).

1. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
2. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
3. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
4. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$
5. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$
6. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$
7. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$
8. $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$
9. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$
10. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$

Зразок варіанту модульної контрольної роботи

1. Знайдіть жорданову матрицю лінійного оператора, заданого матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть розмірності суми і перетину підпросторів $W = L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ та $U = L(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$, що є лінійними оболонками систем векторів $\vec{f}_1 = (2; 1; 0; -1)$, $\vec{f}_2 = (1; -1; -2; 1)$, $\vec{g}_1 = (1; -1; 0; 1)$, $\vec{g}_2 = (0; 2; 1; 1)$.
3. Зведіть квадратичну форму $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ до канонічного вигляду методом Якобі, якщо це можливо.
4. Зведіть квадратичну форму $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень, випишіть матрицю відповідного ортогонального перетворення.

Рекомендована література

1. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Лінійна алгебра : навч. посіб. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2008. 226 с.
2. Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховничий О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. Конспект лекцій. К.: НТУУ «КПІ», 2014. 302 с.
3. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г., Кочубінська Є.А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. 224 с.
4. Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. К. : Києво-Могилянська академія, 2010. 176 с.
5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. 1976. (різні видання, англomовні)
6. Волошина Т.В. Лінійна алгебра : навч. посіб. Луцьк: Вежа-Друк, 2021. 312 с.
7. Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. для студ. спец. «Інформатика». Луцьк: РВВ ВНУ імені Лесі Українки, 2010. 116 с.
8. Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О. Лінійні простори : підручник. К. : ВПЦ «Київський університет», 2010. 384 с.
9. Мазорчук В.С. Жорданова нормальна форма. К.: Видавництво Київського університету, 1998. 123 с.
10. Панасенко О.Б. Лекції з лінійної алгебри: електрон. навч. посіб. Вінниця, 2015. 273 с.
11. Романів О.М. Лінійна алгебра : навч. посіб. Львів: І.Е. Чижиков, 2014. 279 с.
12. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Львів: Бескид Біт, 2002. 256 с.
13. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підр. Львів: Бескид Біт, 2002. 262 с.
14. Чарін В.С. Лінійна алгебра : навч. посіб. К. : Техніка, 2004. 416 с.

Навчально-методичне видання

Волошина Тетяна Володимирівна

Лінійна алгебра

Практикум

Друкується в авторській редакції