

**ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ЕКОНОМІКИ ТА УПРАВЛІННЯ**

Кафедра обліку і оподаткування

**Юлія Грудзевич
Олена Скорук**

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Конспект лекцій

Луцьк – 2025

УДК 519.863(075.8)
Г 17

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки

(Протокол № 3 від 19 листопада 2025 р.)

Рецензент: Данилюк Т. І., декан факультету економіки та управління,
к. е. н., доцент кафедри економіки та торгівлі Волинського національного
університету імені Лесі Українки

Грудзевич Ю. І., Скорук О. В.

Г-17 Економіко-математичні методи і моделі: конспект лекцій. Луцьк :
Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2025. 120 с.

Конспект лекцій містить теоретичний матеріал, приклади розв'язування практичних завдань, короткий термінологічний словник та рекомендовану літературу.

Рекомендовано здобувачам освіти 2 курсу спеціальності 071 «Облік і оподаткування» освітньо-професійної програми «Облік і оподаткування» та освітньо-професійної програми «Цифровий облік та консалтинг»; спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» освітньо-професійної програми «Фінанси і кредит» та освітньо-професійної програми «Митна справа та фінанси зовнішньоекономічної діяльності», спеціальності 075 «Маркетинг» освітньо-професійної програми «Маркетинг» та освітньо-професійної програми «Логістика», спеціальності 051 «Економіка» освітньо-професійної програми «Аналітична економіка»

УДК 519.863(075.8)
Грудзевич Ю. І., Скорук О. В., 2025
Волинський національний
університет імені Лесі Українки, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
 ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: ОПТИМІЗАЦІЯ	
ТЕМА 1. СУТНІСТЬ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	
1.1. Сутність економіко-математичного моделювання як методу наукового пізнання.....	6
1.2. Етапи економіко-математичного моделювання.....	7
1.3. Принципи економіко-математичного моделювання.....	9
1.4. Класифікації економіко-математичних моделей.....	11
1.5. Роль прикладних економіко-математичних досліджень.....	12
 ТЕМА 2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ	
2.1. Історична довідка.....	13
2.2. Сутність оптимізаційних методів і моделей. Математичне програмування...	14
2.3. Математична постановка оптимізаційної задачі.....	15
2.4. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей.....	19
 ТЕМА 3. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ (ГРАФІЧНИЙ, СИМПЛЕКСНИЙ)	
3.1. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування...	34
3.2. Форми запису задач лінійного програмування.....	36
3.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.....	37
3.4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.....	40
3.5 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	41
3.6. Приклад розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом	45
3.7. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом.....	48
3.8. Приклад розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом.....	51
 ТЕМА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА: ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	
4.1. Економічна та математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі.....	61
4.2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі.....	63
4.2.1. Метод північно-західного кута.....	63
4.2.2. Метод мінімального елемента.....	64
4.2.3. Евристичний метод Фойгеля.....	65
4.3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі.....	65
4.4. Приклад розв'язування транспортної задачі	68

ТЕМА 5. ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

5.1. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор.....	75
5.2. Матричні ігри двох осіб.....	76
5.3. Гра зі змішаними стратегіями.....	78
5.4. Приклад розв'язування ігор.....	79
5.5. Ігри з природою. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності	81

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: ЕКОНОМЕТРИКА

ТЕМА 6. ЛІНІЙНА ОДНОФАКТОРНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

6.1. Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії	88
6.2. Економетрія як наука	88
6.3. Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами	90
6.4. Класифікація економетричних моделей та методів	93
6.5. Загальне поняття про лінійну регресію	94
6.6. Оцінювання параметрів лінійної регресії за методом найменших квадратів (МНК).....	94
6.7. Коефіцієнти кореляції та детермінації.....	97
6.8. Поняття про ступені вільності та середні квадрати.....	99
6.9. Перевірка простої регресійної моделі на адекватність. Поняття F–критерію Фішера.....	101

ТЕМА 7. ЛІНІЙНА БАГАТОФАКТОРНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

7.1. Загальне поняття багатофакторної регресії.....	105
7.2. Оцінювання параметрів лінійної багатофакторної регресії за методом найменших квадратів (МНК).....	106
7.3. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації.....	106
7.4. Перевірка моделі на адекватність за F–критерієм Фішера.....	106

ТЕМА 8. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ

8.1. Основні поняття і попередній аналіз рядів динаміки.....	108
8.1.1. Поняття часового ряду.....	108
8.1.2. Основні характеристики динаміки часового ряду.....	109
8.1.3. Систематичні та випадкові компоненти часового ряду.....	111
8.2. Перевірка гіпотези про існування тренду.....	112
8.3. Методи прогнозування часових рядів.....	113

КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК.....	114
--	------------

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	115
--------------------------------------	------------

ВСТУП

Освітній компонент «Економіко-математичні методи і моделі» спрямований на формування у здобувачів освіти системи знань, умінь і навичок з методології, методики та інструментарію побудови й розв'язання математичних моделей, які відповідають завданням дослідження економічних систем та процесів і допоможуть прийняти обґрунтовані управлінські рішення.

Мета викладання освітнього компонента – формування у здобувачів освіти теоретичних знань та компетенцій стосовно принципів і методики побудови економіко-математичних моделей економічних об'єктів і процесів, використання методів оптимізації для застосування в теоретичних та прикладних дослідженнях.

Основними **завданнями** освітнього компонента є засвоєння здобувачами освіти економіко-математичних методів і моделей, що використовуються для аналізу складних економічних процесів; опанування практичними навичками побудови економіко-математичних моделей та методів їх розв'язання; набуття навичок інтерпретування результатів економіко-математичного моделювання, їх застосування для прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

Спеціальні (фахові) компетентності та програмні результати навчання, які набувають здобувачі освіти у процесі вивчення ОК «Економіко-математичні методи і моделі».

Спеціальність 071 – Облік і оподаткування:

Спеціальні (фахові) компетентності:

СК02. Використовувати математичний інструментарій для дослідження соціально-економічних процесів, розв'язання прикладних завдань в сфері обліку, аналізу, контролю, аудиту, оподаткування.

Результати навчання:

ПР14. Вміти застосовувати економіко-математичні методи в обраній професії.

Спеціальність 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок:

Спеціальні (фахові, предметні) компетентності:

СК04. Здатність застосовувати економіко-математичні методи та моделі для вирішення фінансових задач.

Результати навчання:

ПР06. Застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення фінансових задач.

Спеціальність 075 – Маркетинг:

Фахові компетентності:

ФК3. Здатність використовувати теоретичні положення маркетингу для інтерпретації та прогнозування явищ і процесів у маркетинговому середовищі.

ФК8. Здатність розробляти маркетингове забезпечення розвитку бізнесу в умовах невизначеності

Програмні результати навчання:

ПРН3 Застосовувати набуті теоретичні знання для розв'язання практичних завдань у сфері маркетингу.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: ОПТИМІЗАЦІЯ

ТЕМА 1

СУТНІСТЬ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1. 1. Сутність економіко-математичного моделювання як методу наукового пізнання
- 1.2. Етапи економіко-математичного моделювання
- 1.3. Принципи економіко-математичного моделювання
- 1.4. Класифікація економіко-математичних моделей
- 1.5. Роль прикладних економіко-математичних досліджень

1.1. Сутність моделювання як методу наукового пізнання

Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра.) — це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Якщо йдеться про математичну модель, що описує механізм функціонування певної економічної чи соціально-економічної системи, то таку модель називають **економіко-математичною** чи просто **економічною**.

Економіко-математична модель — концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Процеси керування економічними системами дедалі ускладнюються, тому виникла необхідність використання більш складних та ефективних методів, серед яких особливе місце належить моделюванню.

Економіко-математичне моделювання — це процес побудови, реалізації та дослідження соціально-економічних систем математичними засобами, що включає в себе систему рівнянь і нерівностей математичного опису економічних процесів та явищ, які складаються з набору змінних і параметрів

Сутність методології математичного моделювання полягає в заміні досліджуваного об'єкта його «образом» — математичною моделлю — і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп'ютерних програм. Робота не із самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп'ютерні, симулятивні,

імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють ретельно та досить глибоко вивчати об'єкт, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту).

В процесі економіко-математичного моделювання беруть участь 3 системотвірні елементи: об'єкт, суб'єкт і модель (рис. 1.1).

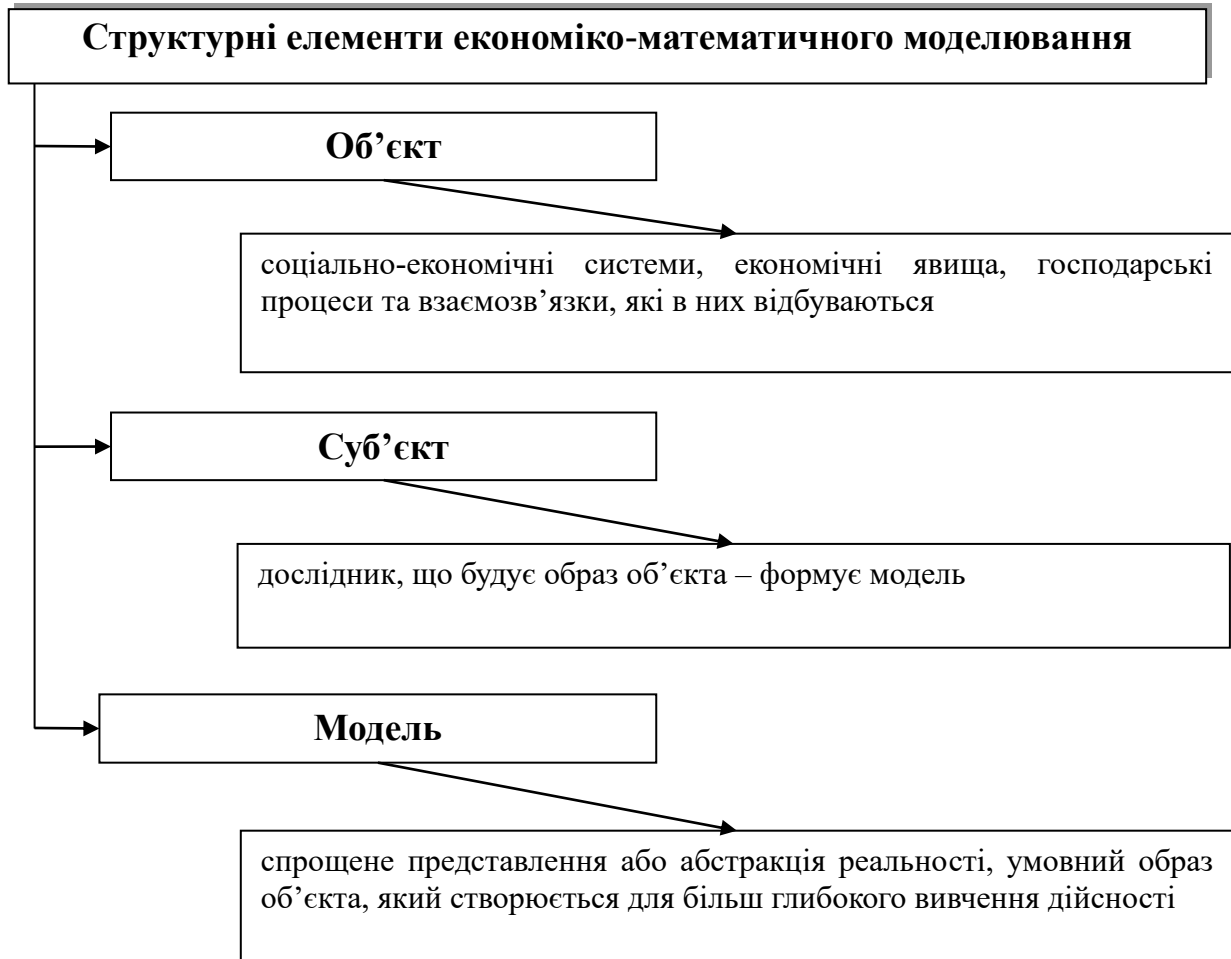


Рис. 1. 1. Системотвірні елементи економіко-математичного моделювання

1.2. Етапи економіко-математичного моделювання

Послідовність процесу економіко-математичного моделювання наведено на рис. 1.2)

Етап 1. Формулювання мети та цілей дослідження, розроблення концептуальної моделі

Головне на цьому етапі – чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, що приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді.

З урахуванням цілей дослідження проводиться якісний аналіз об'єкта; виокремлюються, абстрагуючись від другорядних, найважливіші риси і властивості об'єкта, що моделюється.

З позиції системного підходу вивчаються структура об'єкта й головні взаємозв'язки між його елементами (підсистемами). Обираються та обґрунтовуються основні показники й система гіпотез, що пояснюють

поведінку та розвиток об'єкта і на основі яких буде відбуватись подальша формалізація.

На цьому етапі моделювання широко застосовуються якісні методи описання систем, знакові та мовні моделі. Таке попереднє, наближене зображення системи називають концептуальною моделлю.



Рис. 1.2. Послідовність процесу економіко-математичного моделювання

Етап 2. Побудова економіко-математичної моделі

Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і співвідношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). На цьому етапі проводиться теоретичне (аналітичне) дослідження моделі, обираються методи дослідження й розв'язку.

Етап 3. Реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків

Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ (можливе використання існуючих ППП з відповідною адаптацією) і безпосереднє проведення розрахунків.

Етап 4. Перевірка адекватності моделі

Початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами: чи всі суттєві параметри включені в модель; чи містить модель несуттєві параметри; чи правильно відображені функціональні зв'язки між параметрами; чи правильно визначені обмеження на значення параметрів тощо.

Для встановлення відповідності створюваної моделі оригіналу використовують такі методи:

- порівняння результатів моделювання з окремими експериментальними результатами, одержаними за однакових (подібних) умов;
- використання інших схожих моделей;
- порівняння структури і функціонування моделі з прототипом.

Головним шляхом перевірки адекватності моделі досліджуваного об'єкта виступає практика. Але вона потребує накопичення статистики, котра не завжди буває достатньою для отримання надійних даних. Для багатьох моделей перші два методи виявляються менш прийнятними. Тоді залишається лише один шлях: висновок про подібність моделі та прототипу робити на підставі порівняння їхніх структур і виконуваних функцій. Такі висновки не мають формального характеру, оскільки ґрунтуються на досвіді та інтуїції дослідника.

Згідно з результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання чи проведення коригування.

Етап 5. Аналіз числових результатів і прийняття рішень

Результати досліджень подаються у вигляді, зручному для огляду, і на основі обробки отриманих результатів проводиться аналіз матеріалів дослідження моделі. На цьому, завершальному, етапі виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про можливість практичного застосування останніх, і, найголовніше, про досягнення цілей дослідження.

Головна особливість моделювання полягає у тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів-заміслювачів. Саме ця особливість моделювання визначає специфічні форми використання абстракцій, аналогій, гіпотез, інших категорій і методів пізнання.

1.3. Принципи економіко-математичного моделювання

Принцип 1. Полярність діалектичної пари «модель – об'єкт». Ця діалектична пара завжди полярна, має два полюси – «модель» і «об'єкт».

Принцип 2. Первинність об'єкта. З двох взаємно пов'язаних полюсів діалектичної пари «модель – об'єкт» один із них (об'єкт) є первинним, інший (модель) – похідним від нього.

Принцип 3. Зумовленість моделі об'єктом. Наявність полюсу «модель» зумовлює необхідність наявності полюсу «об'єкт».

Принцип 4. Множинність моделей щодо об'єкта дослідження. Як «модель» для об'єкта, так і «об'єкт» для даної «моделі» семантично та інтерпретаційно багатозначні: «об'єкт» описується не однією, а багатьма

«моделями», «модель» віддзеркалює властивості не одного, а багатьох «об'єктів».

Принцип 5. Адекватність. Цей принцип передбачає відповідність моделі меті дослідження, прийнятій системі гіпотез за рівнем складності й організації, а також відповідність реальній системі (об'єкту). Доки не вирішено питання, чи правильно відображає модель досліджувану систему (об'єкт), цінність моделі незначна.

Принцип 6. Спрощення за умови збереження суттєвих (ключових) властивостей об'єкта (системи). Модель повинна бути в деяких аспектах суттєво простішою від прототипу – в цьому власне й полягає сенс моделювання, тобто модель ігнорує несуттєві властивості об'єкта. Цей принцип може бути названий принципом абстрагування від другорядних деталей.

Практичні рекомендації щодо зменшення складності моделі:

- зменшення кількості змінних за допомогою виключення несуттєвих змінних або їх об'єднання. Процес перетворення (редукції) моделі в модель з меншою кількістю змінних і обмежень називають *агрегуванням*;
- зміна природи змінних величин й параметрів. Змінні величини й параметри наближено розглядаються як постійні, дискретні — як неперервні тощо;
- зміна функціональної залежності між змінними. Нелінійна залежність замінюється зазвичай лінійною, дискретна функція розподілу ймовірностей — неперервною тощо;
- зміна обмежень (збільшення, виключення чи модифікація). Після зняття обмежень одержуємо оптимістичне рішення, після введення — песимістичне. Варіюючи обмеженнями, можна знайти можливі граничні значення ефекту чи ефективності. Такий спосіб часто застосовують для знаходження попередніх оцінок ефективності рішень на етапі постановки задач;
- обмеження точності моделі. Точність результатів моделі не може бути вищою за точність вхідних даних.

Принцип 7. Блочна побудова. За дотримання цього принципу блочної побудови полегшується розроблення складних моделей і з'являється можливість використання накопиченого досвіду та адаптації готових блоків із мінімально необхідними зв'язками між ними. Виокремлення блоків відбувається з урахуванням розподілення моделі за етапами й режимами функціонування об'єкта (системи).

Основні принципи економіко-математичного моделювання:

- цілеспрямованості – модель завжди відображає деяку систему, тобто має ціль;
- спрощеності – модель відображає лише істотні сторони об'єкту і, крім того, повинна бути проста для дослідження або відтворення;
- повноти – в моделі повинні бути враховані всі основні зв'язки і відношення, необхідні для забезпечення цілі моделювання;
- адаптивності – модель може бути пристосована до різних вхідних параметрів, дій оточуючого середовища;
- еволюційності – можливість розвитку моделей (попереднього рівня);

– стійкість – модель повинна описувати і забезпечувати стійку поведінку системи, якщо навіть вона спочатку є нестійкою.

1.4. Класифікація економіко-математичних моделей

1. За цільовим призначенням:

– Теоретико-аналітичні – використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів

– Прикладні – застосовуються застосовуються у розв’язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

2. За характером часу:

– Статичні – описують систему в певний момент (рівноважний стан).

Приклад: модель оптимального розподілу ресурсів на підприємстві.

– Динамічні – враховують зміну показників у часі. Приклад: модель економічного зростання Солоу.

3. За ступенем визначеності:

– Детерміновані – усі параметри відомі наперед і не змінюються випадково. Приклад: класична задача лінійного програмування.

– Стохастичні (ймовірнісні) – враховують вплив випадкових факторів. Приклад: моделі масового обслуговування (черги).

4. За типом математичних залежностей:

– Лінійні – зв’язки між змінними описуються лінійними функціями.

Приклад: транспортна задача.

– Нелінійні – зв’язки описуються нелінійними функціями. Приклад: модель Кобба–Дугласа (виробнича функція).

5. За способом представлення:

– Аналітичні (формульні) – у вигляді рівнянь, нерівностей.

– Імітаційні – відтворюють процес за допомогою алгоритму або комп’ютерної програми. Приклад: імітація роботи банківської черги в AnyLogic.

– Графові / мережеві – відображають систему у вигляді графів (мереж). Приклад: задача найкоротшого шляху, мережеве планування PERT/CPM.

6. За призначенням:

– Описові (аналітичні) – пояснюють закономірності (регресійні, кореляційні).

– Прогнозні – дозволяють передбачати майбутні стани (економетричні моделі).

– Оптимізаційні – допомагають обрати найкраще рішення (лінійне програмування, транспортні задачі).

– Нормативні – формують нормативи, стандарти (балансові моделі).

7. За рівнем охоплення:

– Мікроекономічні – моделі підприємств, фірм, домогосподарств.

– Мезоекономічні – моделі галузей, регіонів.

– Макроекономічні – моделі національної економіки.

– Міжнародні – моделі світових ринків, інтеграційних процесів.

1.5. Роль прикладних економіко-математичних досліджень

Можна виокремити щонайменше чотири аспекти застосування математичних методів і моделей у вирішенні практичних проблем.

1. *Удосконалення системи економічної інформації.* Математичні методи й моделі дають змогу упорядковувати економічну інформацію, виявляти недоліки в наявній інформації та розробляти вимоги до підготовки нової інформації чи її коригування. Розроблення і застосування економіко-математичних моделей вказують шляхи вдосконалення системи економічної інформації, орієнтованої на вирішення певних завдань планування та управління.

2. *Інтенсифікація і підвищення точності економічних розрахунків.* Формалізація економічних задач і застосування комп'ютерів значно прискорюють типові, масові розрахунки, підвищують точність і скорочують трудомісткість, дають змогу проводити багатоваріантні економічні дослідження та обґрунтування складних заходів, недосяжні за панування «ручної» технології.

3. *Поглиблення кількісного аналізу економічних проблем.* Завдяки застосуванню економіко-математичного моделювання створюються нові можливості економічного аналізу; вивчення чинників, які впливають на економічні процеси; кількісного оцінювання наслідків змін умов розвитку економічних об'єктів тощо.

4. *Розв'язання принципово нових економічних задач.* За допомогою математичного моделювання вдається розв'язувати економічні задачі, які в інший спосіб розв'язати практично неможливо, наприклад, відшукування оптимального варіанта народногосподарського плану, імітація народногосподарських заходів, автоматизація контролю за функціонуванням складних економічних об'єктів.

Сфера практичного застосування економіко-математичного моделювання обмежується можливостями та ефективністю формалізації економічних проблем і ситуацій, а також станом інформаційного, математичного, технічного забезпечення використовуваних моделей. Намагання будь-якою ціною застосувати математичну модель може не дати очікуваних результатів через відсутність необхідних умов.

ТЕМА 2

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МОДЕЛІ

- 2.1. Історична довідка
- 2.2. Сутність оптимізаційних методів і моделей. Математичне програмування
- 2.3. Математична постановка оптимізаційної задачі
- 2.4. Класифікація оптимізаційних задач
- 2.5. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей

2.1. Історична довідка

Оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці.

1939 р. – Леонід Віталійович Канторович монографія «Математичні методи організації і планування виробництва». Він заклав основи **теорії оптимального виробничого планування й лінійного програмування**;

1947 р. – Дж. Данцигом (США) розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування – **симплексний метод**, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні;

1947 р. – Дж. Нейман / розвиток **концепції двоїстості**, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування;

1951 р. – Дж. Данцигом та Т. Купмансом введений **термін «лінійне програмування»**. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливорює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами;

1951 р. – Г. Кун і А. Таккер / розроблено методи **нелінійного програмування**;

1953 р. – Р. Белман / розвиток **динамічного програмування**;

1954 р. – Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з **сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями**;

1955 р. – роботи, присвячених **квадратичному програмуванню**.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних сферах економіки.

2.2. Сутність оптимізаційних методів і моделей. Математичне програмування

Математичне програмування (mathematical programming) – розроблення за допомогою математичних розрахунків програми дій для досягнення певної мети; вибір найкращого (найефективнішого), з усіх можливих, варіанту розвитку деякого економічного процесу.

Сутність задачі економічного вибору та пов'язаною з цим необхідністю використання моделей та методів математичного програмування проілюструємо на прикладі.

Приклад 2.1. Підприємство спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці й основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у визначенні такого плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в табл. 2.1.

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Виробництво тільки морозильних камер.

$520 / 9,2 = 56$ морозильних камер (використаний ресурс – роб. час);

$240 / 3 = 80$ морозильних камер (використаний ресурс – листове залізо).

Висновок: повністю використовуючи людські ресурси і частково листове залізо у місяць можна виготовляти 56 морозильних камер.

Виручка від реалізації продукції: $56 * 300 = 16\,800$ ум. од.

Таблиця 2.1

Інформація, необхідна для складання виробничої програми

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, м ²	скла, м ²	
Морозильна камера, шт.	9,2	3	–	300
Електрична плита, шт.	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	–

Друга виробнича програма. Виробництво тільки електроплит.

$520 / 4 = 130$ електроплит (використаний ресурс – роб. час);

$240 / 6 = 40$ електроплит (використаний ресурс – листове залізо);

$40 / 2 = 20$ електроплит (використаний ресурс – скло).

Висновок: повністю використовуючи скло та частково листове залізо і людські ресурси у місяць можна виготовляти 20 електроплит.

Виручка від реалізації продукції: $20 * 200 = 4\,000$ ум. од.

Третя виробнича програма. Виробництво морозильних камер та електроплит.

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів (табл. 2.2).

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

робочий час: $440 / 9,2 = 47$ морозильних камер

листова залізо: $120 / 3 = 40$ морозильних камер

Таблиця 2.2

Інформація про використання ресурсів на виробництво 20 електроплит

Ресурси	використано	залишок
робочий час:	$20 * 4 = 80$ (люд.-год.)	$520 - 80 = 440$ (люд.-год.)
листова залізо:	$20 * 6 = 120$ (м ²)	$240 - 120 = 120$ (м ²)
скло:	$20 * 2 = 40$ (м ²)	

Третя виробнича програма передбачає виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер.

Виручка від реалізації продукції: $20 * 200 + 40 * 300 = 16\,000$ ум. од.

Отже, перша виробнича програма для підприємства краща, ніж друга та третя.

2.3. Математична постановка оптимізаційної задачі

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 2.1).

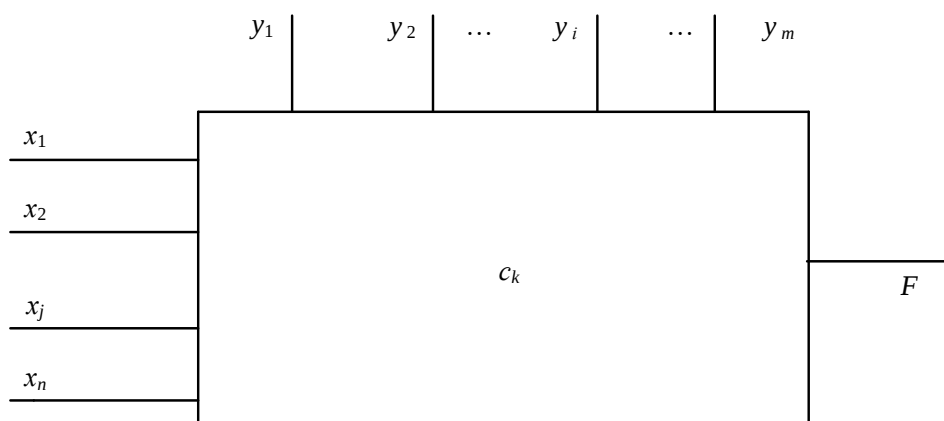


Рис. 2.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2, \dots, l$) є **кількісними характеристиками системи**. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як виробниче підприємство, то значення c_k характеризують наявність ресурсів (основні засоби, трудові ресурси, матеріальні ресурси, складські та виробничі приміщення тощо), рівень фондівіддачі та продуктивності праці, норми витрат

ресурсів, ціну та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на придбані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути **сталими величинами**, наприклад, заробітна плата управлінського персоналу, амортизаційні відрахування, орендна плата, виплата відсотків за кредитом тощо, а частина – **змінними**, тобто залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є чистий прибуток, собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною – кількість основного виробничого персоналу, неперервною – гарантійний запас матеріальних ресурсів на складі для безперебійної діяльності, детермінованою – норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою – кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів:

– керовані x_j ($j=1,2,...,n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі;

– некеровані змінні y_i ($i=1,2, ..., m$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального – керована, а температура повітря – некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу – некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F – вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_m; c_1, c_2, ..., c_l). \quad (2.1)$$

Функцію F називають **цільовою функцією**, або **функцією мети**. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j} (\min) F^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l). \quad (2.2)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0; \quad (2.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, S).$$

Тут набір символів ($\leq$, $=$, $\geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\leq$, для інших – рівності ($=$), а для решти – нерівності типу $\geq$.

Система (2.3) називається **системою обмежень**, або **системою умов** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Залежності (2.2) – (2.4) утворюють **економіко-математичну модель** економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу « $=$ », а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система

(2.3), (2.4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняє умови (2.3) і (2.4), називають **допустимим планом**, або **планом**. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною **стратегією економічної системи, програмою дій**. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.2).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (2.3) і (2.4), тобто множина всіх допустимих планів утворює **область існування планів**.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається **оптимальним**. Оптимальний план є **розв'язком задачі економіко-математичного моделювання** (2.2) – (2.4).

Повертаючись до вищенаведеного прикладу побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 – електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл.2.1, запишемо сумарні витрати робочого часу:

$$9,2x_1 + 4x_2$$

За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9,2x_1 + 4x_2 \leq 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 240;$$

$$2x_2 \leq 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x_1 та x_2 знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Отже, умови задачі, описані в прикладі 2.1, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2,$$

за умов:

$$9,2x_1 + 4x_2 \leq 520;$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 240;$$

$$2x_2 \leq 40;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від'ємною. Розв'язавши задачу відповідним методом математичного програмування, отримуємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер – 50 штук, електроплит – 15 ($x_1 = 50$, $x_2 = 15$).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9,2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка становитиме: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18\,000$ ум. од.

Отриманий оптимальний план у порівнянні з першим варіантом виробничої програми уможливило збільшення виручки на $18\,000 - 16\,800 = 1200$ ум.од., тобто на $\frac{1200}{16\,800} 100\% = 7,1\%$.

2.4. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливило формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л.В.Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися далі).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої – вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Наведемо кілька розглянутих вище типових задач математичного програмування, сформульованих у термінах лінійного програмування.

2.4.1 Задача визначення оптимального плану виробництва

Для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i (i = \overline{1, m})$, норми витрат i -го ресурсу на виробництво одиниці j -ої продукції $a_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ та прибуток з одиниці j -ої реалізованої продукції $c_j (j = \overline{1, n})$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

3a уMOV:

[illegible]

Приклад 2.2. Підприємство повинне випустити 2 види продукції P_1 та P_2 , для виготовлення якої використовують 3 види сировини S_1, S_2, S_3 . Норми витрат сировини, прибуток від реалізації одиниці продукції, а також запаси сировини всіх видів вказані у табл. 2.3. Скласти план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток від реалізації.

Таблиця 2.3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		Запаси сировини (кг)
	P ₁	P ₂	
S ₁	5	2	120
S ₂	8	7	250
S ₃	1	4	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн..	48	70	

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Позначимо x_1, x_2 – число одиниць (кг) продукції відповідно P_1 та P_2 запланованих для виробництва. Для їх виготовлення необхідно:

$5x_1 + 2x_2$ одиниць ресурсу S_1 ,

$8x_1 + 7x_2$ одиниць ресурсу S_2 ,

$x_1 + 4x_2$ одиниць ресурсу S_3 .

Цільова функція (критерій оптимальності):

Загальний прибуток від реалізації x_1 одиниць продукції P_1 та x_2 одиниць продукції виду P_2 :

$$\max F = 48x_1 + 70x_2$$

Так як споживання ресурсів S_1, S_2 та S_3 не повинно перевищувати їх запасів, відповідно 120, 250 і 80 одиниць, зв'язок між використанням ресурсів та їх запасами виражається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 8x_1 + 7x_2 \leq 250 \\ x_1 + 4x_2 \leq 80 \end{cases}$$

За змістом задачі змінні $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Отже, задача формулюється так: знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, який задовольняє систему (2.6) і при якому функція (2.5) приймає максимальне значення.

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max F = 48x_1 + 70x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 8x_1 + 7x_2 \leq 250 \\ x_1 + 4x_2 \leq 80 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Приклад 2.3. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в господарствах відповідно витрачається по 1, 6 та 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалось не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо: x_1 — кількість картоплі, що буде закуплена у першому господарстві (т); x_2, x_3 — кількість картоплі, закупленої відповідно у другого та третього фермерів (т).

Поставка потрібної кількості картоплі описується рівністю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

наступне обмеження описує витрати часу на завантаження продукції:

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40,$$

обмеження щодо можливостей поставок продукції з кожного господарства:

$$x_1 \leq 10;$$

$$x_2 \leq 8;$$

$$x_3 \leq 6.$$

Вартість продукції, що закуповується, визначається як сума добутків ціни на відповідні її обсяги. Ціни 1 т картоплі відповідно дорівнюють 800, 750 та 650 грн в даних трьох фермерських господарствах. Отже, цільову функцію можна записати так:

$$F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3.$$

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40; \\ x_1 \leq 10; \\ x_2 \leq 8; \\ x_3 \leq 6. \\ x_i \geq 0, (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

2.4.2 Задача про «дієту»

Деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту – c_j ($j = \overline{1, n}$), кількість необхідних організму поживних речовин m та потреба в кожній i -ій речовині – b_i ($i = \overline{1, m}$). В одиниці j -го продукту міститься a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) поживної речовини i . Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності: мінімальна вартість раціону.

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

За умов:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Приклад 2.4. Денний раціон студента складається з сала, хліба та цукерок. Відомі вартості одиниці кожного продукту, потреба у поживних речовинах та кількість поживних речовин в одиниці продукту. Визначити, які продукти і в якій кількості потрібно купувати студенту, щоб витратити якомога менше грошей з урахуванням потреб дієтологів.

Вихідні дані для розв'язання задачі

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо x_1 – кількість (кг) сала, x_2 – кількість (кг) хліба, x_3 – кількість (кг) цукерок. Денний раціон буде містити:

$50x_1 + 85x_2 + 10x_3$ потреби організму у білках,
 $750x_1 + 50x_2 + 25x_3$ потреби організму у жирах,
 $780x_2 + 670x_3$ потреби організму у вуглеводах.

Цільова функція (критерій оптимальності):

Загальна вартість продуктів:

$$\min F = 55x_1 + 10x_2 + 60x_3$$

Вміст поживних речовин (білка, жиру та вуглеводів) в раціоні повинен бути не менше 100, 60 та 500 одиниць.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$F = 55x_1 + 10x_2 + 60x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 85x_2 + 10x_3 \geq 100 \\ 750x_1 + 50x_2 + 25x_3 \geq 60 \\ 780x_2 + 670x_3 \geq 500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Приклад 2.5. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки — не більшим, ніж 0,3%. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в таблиці 2.5:

Таблиця 2.5

Техніко-економічні показники компонент бензину

Показник	Компонента бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо через x_j кількість j -го компонента в суміші (т), $j=1,2,3,4$.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000.$$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3 %:

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 \cdot 1000,$$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000 т:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$$x_1 \leq 700;$$

$$x_2 \leq 600;$$

$$x_3 \leq 500;$$

$$x_4 \leq 300.$$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4.$$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76\,000; \\ 0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \geq 300; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000; \\ x_1 \leq 700; \\ x_2 \leq 600; \\ x_3 \leq 500; \\ x_4 \leq 300. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

Приклад 2.6. Учасник експедиції складає рюкзак, і йому необхідно розв'язати питання про те, які взяти продукти. У розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм³ об'єму, до того ж необхідно, щоб загальна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (за масою) було більше, ніж борошна принаймні удвічі, борошна не менше, ніж молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведені в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Характеристики продуктів

Показники	Продукт			
	м'ясо	борошно	молоко	цукор
Об'єм (дм ³ /кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 масу (в кг) м'яса, борошна, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35,$$

а об'єм, який вони мають займати, – не більше 45 дм³:

$$x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45.$$

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій за масою продуктів:

а) м'яса принаймні удвічі більше, ніж борошна, отже:

$$x_1 \geq 2x_2;$$

б) борошна не менше, ніж молока: $x_2 \geq x_3$;

в) молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру: $x_3 \geq 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів можна визначити так:

$$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4.$$

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35; \\ x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45; \\ x_1 \geq 2x_2; \\ x_2 \geq x_3; \\ x_3 \geq 8x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

2.4.3 Транспортна задача

Розглядається m пунктів виробництва та n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відомі обсяги виробництва продукції у кожному i -му пункті – a_i ($i = \overline{1, m}$) та потреби кожного j -го пункту споживання – b_j ($j = \overline{1, n}$). Також задана матриця розмірністю $m \times n$, елементи якої c_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) є вартостями транспортування одиниці продукції з i -го пункту виробництва до j -го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) з урахуванням наявності продукції у виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень.

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від i -го виробника до j -го споживача.

Можна вивести від кожного виробника продукцію, що є в наявності. Тому для кожного i ($i = \overline{1, m}$) має виконуватись умова: $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$. Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова: $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$ для кожного j ($j = \overline{1, n}$). Загальна вартість перевезень є сумою добутків $c_{ij}x_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Необхідно, щоб виконувалась умова

$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Отже, економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \min F = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

за умов:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &\leq a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &\leq a_2; \\ &\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &\leq a_m. \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &= b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &= b_2; \\ &\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &= b_n. \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Як і в двох попередніх задачах математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про перевезення продукції тощо.

Приклад 2.7. Фермерське господарство спеціалізується на вирощуванні озимої пшениці і має три ділянки землі площею $S_1 = 40$ га, $S_2 = 90$ га, $S_3 = 55$ га. Враховуючи наявну кількість посівного матеріалу, є можливість засіяти всю площу озимою пшеницею трьох сортів. Кількість пшениці сорту «Миронівська-808» забезпечить посів на 80 га, «Безоста-1» – 60 га та «Одеська-51» – 45 га. Урожайність сорту «Миронівська-808» на даних ділянках становить відповідно 41 ц/га, 40 ц/га, 46 ц/га. Аналогічно для сорту «Безоста-1» маємо: 38 ц/га, 41 ц/га, 45 ц/га, а для «Одеської-51» — 30 ц/га, 28 ц/га, 40 ц/га.

Необхідно розподілити посівний матеріал за земельними ділянками так, щоб отримати максимальний урожай (валовий збір) озимої пшениці.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_{ij} площу (га) i -ої земельної ділянки, що буде засіяна j -м сортом озимої пшениці (домовимося, що сорти «Миронівська-808», «Безоста-1», «Одеська-51» відповідатимуть номерам 1, 2, 3), ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2, 3$).

Тоді використання земельних угідь описуватиме така система обмежень:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55.$$

Використання посівного матеріалу формально можна описати так:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80;$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60;$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45.$$

Валовий збір зерна розраховується як сума добутоків урожайностей відповідних сортів пшениці на їх посівні площі, тобто:

$$\begin{aligned} F = & 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ & + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ & + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}. \end{aligned}$$

Отже, економіко-математична модель задачі загалом буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \max F = & 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ & + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ & + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33} \end{aligned}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60; \\ x_{13} + x_{22} + x_{33} = 45. \end{cases} \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (j = 1, 2, 3).$$

Приклад 2.8. У кожного із постачальників накопичено відповідно 300, 250, 110 одиниць товару. Потреби споживачів складають відповідно 100, 200, 150, 210 одиниць товару. Вартості перевезення товару від i -го постачальника до j -го споживача подано у вигляді матриці, яку називають матрицею тарифів:

$$C = \begin{pmatrix} 70 & 50 & 15 & 80 \\ 80 & 90 & 40 & 60 \\ 50 & 10 & 90 & 11 \end{pmatrix}$$

Маємо транспортну задачу з правильним балансом, тобто обсяги потреб та запасів рівні:

$$100 + 200 + 150 + 210 = 300 + 250 + 100 = 660$$

Побудова економіко-математичної моделі

Організувати перевезення однорідного вантажу від трьох постачальників A_1, A_2, A_3 до чотирьох споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 так, щоб забезпечити мінімальну вартість перевезень.

Позначимо x_{ij} – кількість товару, перевезеного від i -го постачальника до j -го споживача. Для зручності побудови математичної моделі, сформуємо умову задачі у вигляді табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70 x_{11}	50 x_{12}	15 x_{13}	80 x_{14}	300
A_2	80 x_{21}	90 x_{22}	40 x_{23}	60 x_{24}	250
A_3	50 x_{31}	10 x_{32}	90 x_{33}	11 x_{34}	110
Потреби	100	200	150	210	660

За табл. бачимо, що кількість товару, перевезеного від постачальників задовольняє умову (а), а кількість товару, доставленого споживачам, задовольняє умову (б):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110 \end{array} \right. \quad (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210 \end{array} \right. \quad (b)$$

Загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною, тобто

$$F = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{14}x_{14} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24} + C_{31}x_{31} + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34} \rightarrow \min$$

за умов

$$(a), (b), x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 4}).$$

2.4.4. Задача про банк: визначають оптимальний розподіл коштів, розміщених у кредитах та цінних паперах для одержання максимального прибутку.

Критерій оптимальності - максимальний прибуток.

Приклад 2.9. Власні кошти банку складають 100 млн \$. Доходність від кредитів та цінних паперів відповідно складає 50 млн. \$ та 80 млн. \$. Частина їх, але не менше 35 млн. \$ – кредити (неліквідні активи банку). Ліквідні активи – цінні папери – мають складати не менше 30% коштів, розміщених у кредитах та цінних паперах. Визначити скільки коштів потрібно вкласти у кредити а скільки у цінні папери для одержання максимального прибутку.

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо: x – капітал (млн. \$), виражений у кредитах;

y – капітал (млн. \$), вкладений у цінні папери.

Цільова функція:

загальний прибуток від x кредитів та y цінних паперів:

$$\max F = 50x + 80y$$

Обмеження:

– обмеження власного капіталу: $x + y \leq 100$

– обмеження по кредитах: $x \geq 35$

– обмеження по цінним паперам: $y = 0,3 (x + y)$

Умови невід'ємності змінних:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Математична модель задачі:

$$\max F = 50x + 80y$$

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 35 \\ y \geq 0,3(x + y) \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ (ГРАФІЧНИЙ, СИМПЛЕКСНИЙ)

- 3.1. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування
- 3.2. Форми запису задач лінійного програмування
- 3.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування
- 3.4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування
- 3.5. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування
- 3.6. Приклад розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом
- 3.6. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування
- 3.7. Алгоритм методу штучного базису
- 3.6. Розв'язування М-задач

3.1. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Під задачею лінійного програмування (ЗЛП) розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математична модель загальної задачі лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max (\min) F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad . \quad (3.1)$$

за умов:

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3.3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють умови (3.2) і (3.3), і цільова функція (3.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (3.2) та умови невід'ємності змінних (3.3), називається **допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування**.

Допустимий план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **опорним планом** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (3.2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3.3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, називається **невиродженим**, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він **вироджений**.

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, за якого цільова функція (3.1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається **оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування**.

Оптимальний план є розв'язком ЗЛП.

Під час розв'язання задачі ЛП можливі три випадки:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).

2. Оптимальний план не існує, хоча плани цієї задачі існують, але на непорожній множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).

3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Існують такі форми задач лінійного програмування:

Загальна форма ЗЛП

Можна використати і більш стислий запис:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, \geq, = \} b_i \\ i = \overline{1, m}, x_j \in R, j = \overline{1, n}$$

В загальній формі ЗЛП умови невід'ємності можуть накладатися або на деякі змінні або не накладатися зовсім.

Стандартна (симетрична) форма ЗЛП

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

або

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Канонічна (основна) форма ЗЛП

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

За канонічної форми ЗЛП в системі обмежень всі b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Будь-яка ЗЛП може бути зведена до канонічної, стандартної чи загальної форми. Вказані вище три форми ЗЛП еквівалентні в тому розумінні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути представлена у формі іншої задачі.

Правила переходу від однієї форми ЗЛП до іншої:

1. Заміна нерівності виду « $\geq$ » на нерівність виду « $\leq$ ».

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_i$$

2. Зведення задачі мінімізації функції до задачі максимізації:

$$F \rightarrow \min \quad \Leftrightarrow \quad -F \rightarrow \max$$

3. Перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} \leq b_i \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + x_{n+1} \geq -b_i \end{cases}$$

4. Заміна змінних, на які не накладено умови невід'ємності:

Якщо на змінну x_k не накладено умови невід'ємності, то її потрібно замінити двома змінними u_k, v_k увівши заміну $x_k = u_k - v_k$, причому $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$.

3.2. Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми « Σ ». Справді, задачу (3.1) – (3.3) можна подати так:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

за умов:

$$AX = A_0; \quad (3.5)$$

де

[illegible]

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор змінних; } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — вектор вільних членів;}$$

Часто задачу лінійного програмування зручно записувати у векторній формі:

За умов:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0; \quad (3.6)$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є векторами коефіцієнтів при змінних.

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i=1,2, \dots, m$). Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 3.1).

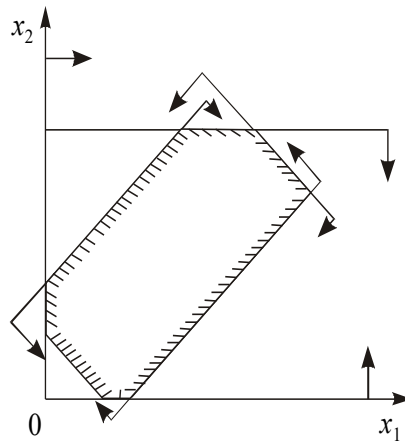


Рис. 3.1. Область допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування

Сукупність цих точок (розв'язків) називають **багатокутником розв'язків**, або **областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування**. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (3.7) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а умови невід'ємності – півпростори з граничними площинами $x_j=0$ ($j = 1, 2, 3$), де i – номер обмеження, а j – номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається **багатогранником розв'язків**. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (3.7) кількість змінних більша, ніж три: $x_1, x_2, \dots, x_n$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n -вимірного простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Кожному обмеженню виду (3.7) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності – півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0$ ($j=1, 2, 3, \dots, n$).

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n -вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукування координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2 x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

в n -вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z .

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл.3.1:

Таблиця 3.1

Показники вирощування сільськогосподарських культур

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрових буряків, ввівши такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0,7x_1 + x_2 \quad (3.8)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \leq 20; \quad (3.9)$$

$$5x_1 + 25x_2 \leq 270; \quad (3.10)$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 80; \quad (3.11)$$

$$x_2 \geq 5; \quad (3.12)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.13)$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рис. 3.2.

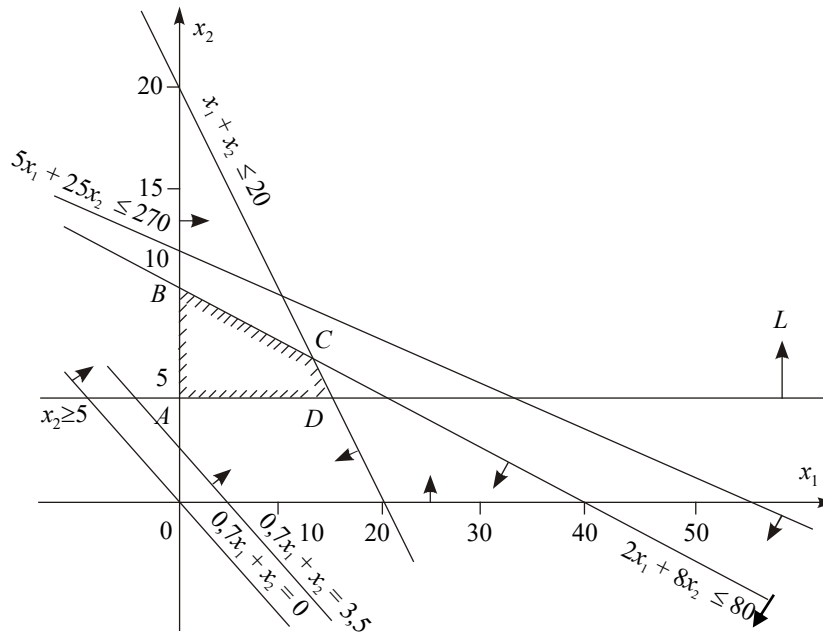


Рис. 3.2. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконаємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \leq 20$. Цей факт на рис.3.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (3.10)—(3.13). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис.3.2 – чотирикутник ABCD). Цільова функція $Z = 0,7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z . Зокрема, якщо $Z=0$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z=3,5$, то маємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

3.4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем.

Властивість 1. (Теорема 3.1) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 3.2) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.17)$$

Припустимо, що система (3.15) за умов (3.16) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (п.3.3) кожне i -те обмеження-нерівність у (3.16) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Системою обмежень (3.16) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі – **багатокутник розв'язків**.

Умова (3.17) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірному простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Скористаємося для графічного розв'язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в п.3.4: якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (3.15) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.16) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набуває екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рис. 3.3).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB (рис. 3.4). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис. 3.5) або система обмежень задачі несумісна (рис. 3.6).

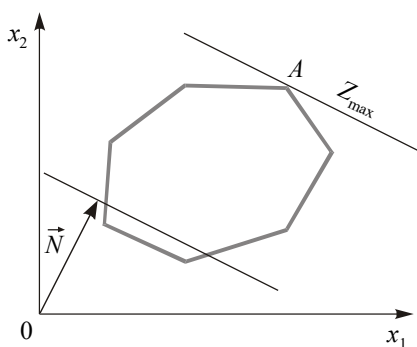


Рис. 3.3

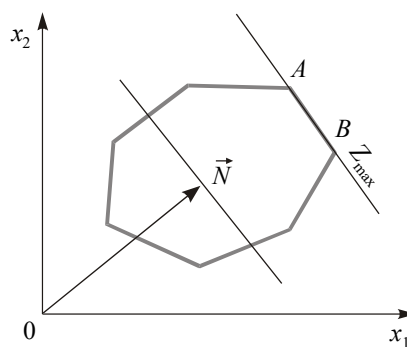


Рис. 3.4

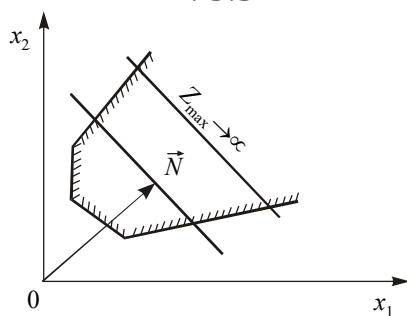


Рис. 3.5

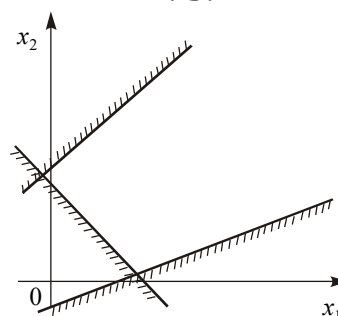


Рис. 3.6

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 3.7 і 3.8). На рис. 3.7 у точці B маємо максимум, на рис. 3.8 у точці A – мінімум, на рис. 3.9 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

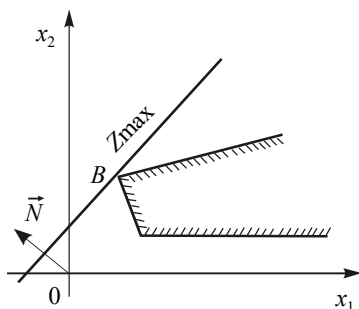


Рис. 3.7

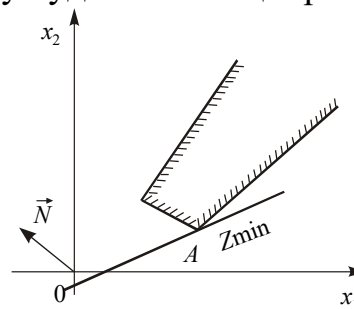


Рис. 3.8

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3 > 0$, а по другу – $x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$.

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; ...; $x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

У такий спосіб отримують $n-2$ прямі та дві осі координат ($x_1 = 0, x_2 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0$ ($i = \overline{1, n-2}$). Частина площини в x_1Ox_2 належить водночас всім півплощинам, утворюючи багатокутник допустимих розв'язків.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Підставивши вирази для $x_3, x_4, x_5, \dots, x_n$ з (3.18) у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2 :

$$F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

де γ_0 – вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2 , що й $F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$. Отже, процедура відшукування оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

3.6. Приклад розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом

Підприємство спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць – А та В. Полиці обох моделей обробляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці кожної моделі подано в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Вихідні дані для розв'язування задачі

Верстати	Тривалість обробки полиці, хв., за моделями	
	А	В
1	30	15
2	12	26

Час роботи верстатів 1 та 2 становить відповідно 40 та 36 год. на тиждень.

Прибуток підприємства від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В – 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток підприємства. Побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай x_1 – кількість полиць моделі А, виготовлюваних підприємством за тиждень, а x_2 – відповідна кількість полиць моделі В. Цільова функція моделі – максимізація прибутку підприємства від реалізації продукції. Математично її записують так:

$$\max F = 50x_1 + 30x_2$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи верстатів 1 та 2 для обробки продукції і попит на полиці різних моделей. Обмеження на час роботи верстатів 1 та 2 набирають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \text{для верстата 1} & - 30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \text{ хв.}; \\ \text{для верстата 2} & - 12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \text{ хв.} \end{aligned}$$

Обмеження на попит набирають вигляду:

$$x_1 - x_2 \leq 30 \quad \text{і} \quad x_2 \leq 80.$$

Отже, економіко-математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$\max F = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \\ x_1 - x_2 \leq 30 \\ x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Записана економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язування. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої

області, де одночасно виконуються всі обмеження моделі. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 3.4).

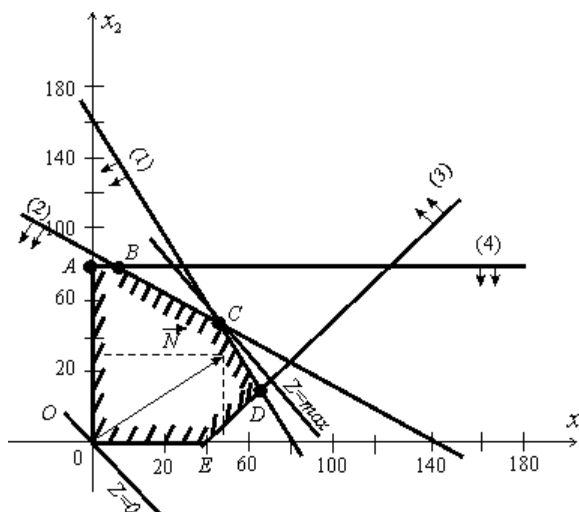


Рис. 3.4. Багатокутник розв'язків задачі

Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють розглядувану нерівність, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 4.4 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження.

Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі, – шестикутник $OABCDE$. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника $OABCDE$, в якій цільова функція F набуває найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x_1 = c_1; x_2 = c_2)$. У нашій задачі вектор $\vec{N} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції F , а вектор, протилежний йому, – напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $F = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ в напрямі вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 4.4 бачимо, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника $OABCDE$, є точка C . Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В, що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки C визначаються перетином прямих:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо $x_1 = 50; x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $\max F = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$. Це означає, що коли підприємство щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 – моделі В, то вона отримає максимальний прибуток 4300 у. о. При цьому тижневий фонд роботи верстатів 1 та 2 буде використано повністю.

3.7. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними.

За більшої кількості змінних вдаються до загального методу розв'язування задач лінійного програмування - так званого **симплекс-методу**.

Процес розв'язування задачі симплекс-методом має **ітераційний характер**: обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Ідея симплекс-методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі.

Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п.3.

Розглянемо докладніше кожний з етапів алгоритму

1. Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в канонічній формі, тобто у вигляді обмежень-рівнянь з невід'ємними правими частинами.

Якщо в умові задачі присутні обмеження-нерівності, то перетворення їх на рівняння виконується за допомогою додаткових змінних, які вводяться до лівої частини обмежень типу « $\leq$ » зі знаком « $+$ », а до обмежень типу « $\geq$ » – зі знаком « $-$ ».

У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m -вимірного простору (де m – кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

- після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;

- у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують метод штучного базису. Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом $+1$, які називаються штучними. У цільовій функції задачі лінійного програмування штучні змінні мають коефіцієнт $+M$ (для задачі на $\min$) або $-M$ (для задачі на $\max$), де M – досить велике додатне число.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають базисними, а всі інші змінні – вільними. Їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність подають у вигляді симплексної таблиці.

У першому стовпчику симплексної таблиці – «Базис» – базисні змінні опорного плану, причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.

У наступному стовпчику таблиці – «Сбаз» – записують коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

У третьому стовпчику – «План» – записують значення базисних змінних і відшукуванні у процесі розв'язування задачі компоненти оптимального плану.

У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування.

3. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною теоремою.

Теорема (ознака оптимальності опорного плану).

Опорний план задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх j ($j = 1, n$) виконується умова

$$Z_j - C_j \geq 0 \quad (\text{для задачі на max})$$

$$Z_j - C_j \leq 0 \quad (\text{для задачі на min})$$

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв'язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначають за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків « $C_{\text{баз}}$ » та « x_j » мінус відповідний коефіцієнт C_j . Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають **оцінковим**.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

- а) усі Δ_j ($j = \overline{1, n}$) задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;
- б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають **напрямним**.

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} прямого стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ , яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься **напрямним**.

Перетином прямого стовпчика та прямого рядка визначається

число симплексної таблиці a_{rk} , яке називають **розв'язувальним елементом**. За допомогою елемента a_{rk} , і методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{rk} , тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $Z_j - C_j (j = \overline{1, n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

3.8. Приклад розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Приклад 1. Необхідно розв'язати задачу про оптимальне використання ресурсів симплекс-методом. Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує три типи сировини. Норми витрат ресурсів сировини кожного типу на одиницю продукції, їхня наявність, а також прибуток від реалізації наведено в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Вихідні дані для виконання завдання

Тип ресурсу	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Наявність ресурсів
	A	B	C	D	
1	1	0	2	1	180
2	0	1	3	2	210
3	4	2	0	4	800
Прибуток	9	6	4	7	

Потрібно визначити, скільки сировини кожного виду має виготовляти підприємство, щоб максимізувати прибуток за умови, що збут продукції забезпечений.

Розв'язування. Складемо математичну модель. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 — кількість одиниць продукції, що відповідають видам A, B, C, D, які заплановано

виготовляти на підприємстві. Оскільки існують обмеження на розміри витрат ресурсів, то змінні x_1, x_2, x_3, x_4 мають задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 800 \end{cases}$$

За змістом задачі змінні відповідають умовам невід'ємності:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Сумарний прибуток від реалізації продукції дорівнює:

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 800 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Отже, потрібно знайти такий план виготовлення продукції $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задовольняє систему обмежень за умови невід'ємності змінних, за якого цільова функція набуває максимального значення.

Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5, x_6 та x_7 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_7 = 800 \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Додаткові змінні означають кількість відповідного ресурсу, що не використовується під час такого плану виготовлення продукції (залишок).

У цільовій функції F додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 + x_7 \cdot \vec{A}_7 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Оскільки вектори A_5, A_6 та A_7 одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у визначеній системі векторів. Змінні задачі x_5, x_6 та x_7 , що відповідають одиничним базисним векторам, називають **базисними**, а решта — **вільними змінними** задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad x_5 = 180, \quad x_6 = 210, \quad x_7 = 800$$

Згідно з визначеними $x_j (j = \overline{1,7})$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 180 \cdot \vec{A}_5 + 210 \cdot \vec{A}_6 + 800 \cdot \vec{A}_7 = \vec{A}_0$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5, x_6 та x_7 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0; 0; 0; 0; 180; 210; 800)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$F_0 = 9 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 0 \cdot 180 + 0 \cdot 210 + 0 \cdot 800 = 0$$

Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі (табл. 4.9)

Таблиця 4.9

Симплексна таблиця для першого опорного плану

Базис	С _{баз}	План	9	6	4	7	0	0	0	Оціночні відношення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	180	1	0	2	1	1	0	0	180
x_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0	∞

x_7	0	800	4	2	0	4	0	0	1	200
$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$	0	-9	-6	-4	-7	0	0	0	0	



Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j , за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$F_1 - c_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4) - 9 = -9$$

$$F_2 - c_2 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2) - 6 = -6$$

$$F_3 - c_3 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0) - 4 = -4$$

$$F_4 - c_4 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4) - 7 = -7$$

$$F_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$$

$$F_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$$

$$F_7 - c_7 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції F , якого вона набуває для визначеного опорного плану:

$$F_0 = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 210 + 0 \cdot 800 = 0$$

Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для зачачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для зачачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в зачачі на max або додатна в зачачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій зачачі в оцінковому рядку чотири оцінки $\Delta_1 = -9$, $\Delta_2 = -6$, $\Delta_3 = -4$ та $\Delta_4 = -7$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним.

Від'ємні числа не тільки засвідчують можливість збільшення загальної вартості продукції, що виготовляється, але й показують, наскільки збільшиться прибуток після введення у план одиниці того чи іншого товару. Так, число -9 означає, що під час введення у план виготовлення одиниці продукції A забезпечується збільшення загальної вартості товарів, що випускаються, на 9 грошових одиниць. Якщо ввести у план виготовлення по одиниці продукції B , C або D , то загальна вартість виготовлених товарів виросте, відповідно на 6, 4 або 7 грошових одиниць. Тому з економічного погляду найвигідніше вводити у план виготовлення продукцію типу A .

За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану зачачі.

Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_1 , оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності. Відповідний стовпець буде **напрямним (провідним)** (позначено вертикальною стрілкою).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика « x_1 » знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i1}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min \theta = \{180/1; 180/0; 800/4\} = 180$, і тому з базису виключаємо змінну x_1 , а число $a_{11} = 1$ – **розв’язувальний елемент**. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана-Гаусса.

Далі переходимо до нового опорного плану. Будуємо другу симплекс-таблицю (табл. 4.10).

Таблиця 4.10

Симплексна таблиця для другого опорного плану

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	9	6	4	7	0	0	0	Оціноч ні віднош ення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0	∞
x_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0	210
x_7	0	80	0	2	-8	0	-4	0	1	40
$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$			1620	0	-6	14	2	9	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і « $C_{\text{баз}}$ », а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1. Розділити всі елементи напрямного рядка на розв’язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. У напрямному стовпці усі елементи, крім головного, прирівнюємо до нуля.

3. У стовпцях на перетині рядків і стовпців однойменних векторів ставимо 1, а інші елементи = 0.

4. Розрахувати всі інші елементи правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюють такі числа:

1 – розв’язувальний елемент (число 1);

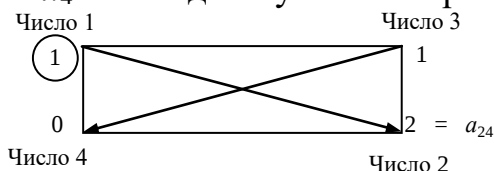
2 – число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 – елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24} , який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика « x_4 ». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) : 1 = 2$. Це значення записуємо в стовпчик « x_4 » у другому рядку другої симплексної таблиці.

$$b_2 = 210 - \frac{0 \cdot 180}{1} = 210; \quad b_3 = 800 - \frac{4 \cdot 180}{1} = 80;$$

$$a'_{22} = 1 - \frac{0 \cdot 0}{1} = 1; \quad a'_{23} = 3 - \frac{0 \cdot 2}{1} = 3; \quad a'_{24} = 2 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 2; \quad a'_{25} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 0;$$

$$a'_{32} = 2 - \frac{4 \cdot 0}{1} = 2; \quad a'_{33} = 0 - \frac{4 \cdot 2}{1} = -8; \quad a'_{34} = 4 - \frac{4 \cdot 1}{1} = 0; \quad a'_{35} = 0 - \frac{4 \cdot 1}{1} = -4$$

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, зокрема й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $F_j - c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_3 = -6$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі (табл. 4.11).

Таблиця 4.11

Симплексна таблиця для третього опорного плану

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	9	6	4	7	0	0	0	Оціноч-ні відно-шення
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0	90
x_6	0	170	0	0	7	2	2	1	-1/2	$24\frac{2}{7}$
x_2	6	40	0	1	-4	0	-2	0	1/2	∞
$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$		1860	0	0	-10	2	-3	0	3	

І цього разу критерію оптимальності не досягнуто: маємо два від'ємні елементи. Для обчислення виберемо як напрямний третій стовпець; визначимо, що другий рядок є напрямним, відповідно a_{23} – розв'язувальний елемент. Обчислимо нову симплекс-таблицю (табл. 4.12).

Таблиця 4.12

Симплексна таблиця для четвертого опорного плану

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	9	6	4	7	0	0	0	Оціноч-ні відно-шенн-я
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	9	$131\frac{3}{7}$	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$306\frac{2}{3}$
x_3	4	$24\frac{2}{7}$	0	0	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	85
x_2	6	$137\frac{1}{7}$	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$	∞
$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$		$2102\frac{6}{7}$	0	0	0	$4\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$1\frac{3}{7}$	$2\frac{2}{7}$	

У симплексній таблиці для четвертого опорного плану в останньому рядку існують від'ємні числа, а це свідчить про те, що план не є оптимальним. Отже, будемо наступну симплексну таблицю (табл. 4.13).

Таблиця 4.13

Симплексна таблиця для п'ятого опорного плану

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	9	6	4	7	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	9	95	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_5	0	85	0	0	$\frac{7}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
x_2	6	210	0	1	3	2	0	1	0
$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$		2115	0	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

Перевіримо, чи є цей план оптимальним, чи ні. Для цього розглянемо 4-й рядок табл. 5.6. У ньому немає від'ємних чисел. Це означає, що знайдений опорний план $X^* = (x_1 = 95, x_2 = 210, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 85, x_6 = 0, x_7 = 0)$

або

$X^* = (95, 210, 0, 0, 85, 0, 0)$ є оптимальним;

$$\max F = 9 \cdot 95 + 6 \cdot 210 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 85 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2115$$

Відповідно до умови задачі, план випуску продукції, що охоплює виготовлення 95 товарів *A* та 210 товарів *B*, є оптимальним. За такого плану випуску продукції повністю використовують сировину II та III виду і залишають невикористаними 85 одиниць сировини I виду, а вартість виготовленої продукції дорівнює 2115 грошових одиниць.

Приклад 2. Продукція чотирьох видів *A*, *B*, *C* і *D* проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду на верстатах наведена в табл. 4.14.

Таблиця 4.14

Вихідні дані для виконання завдання

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції (год.)			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн. – для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 – 380 машино-годин. Продукцію *C* мають виготовляти обсягом не менш як 9 одиниць. Ціна одиниці продукції видів *A*, *B*, *C* і *D* дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Розв’язування. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380 \\ x_3 \geq 9 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Застосовуючи для розв’язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 = 9 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Зауважимо, що нерівність типу « $\geq$ » перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком « $\leftarrow$ ».

Система містить лише два одиничні вектори $-\bar{A}_5$ та $\bar{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом $+1$ штучну змінну x_8 , якій відповідатиме одиничний вектор $\bar{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8} \end{cases}$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на $\min$) або $-M$ (для задачі на $\max$), де M – досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8 , а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0; 0; 0; 0; 450; 380; 0; 9),$$

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Таблиця 4.15

Симплексна таблиця для першого опорного плану

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380

x_8	$-M$	9	0	0	①	0	0	0	-1	1	9
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
		$-9M$	0	0	$-M$	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо:

$Z_0 = -9M$; $Z_1 - c_1 = -8$; $Z_2 - c_2 = -10$, $Z_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M , а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий – числа з коефіцієнтом M .

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Виконуємо перехід до наступного опорного плану.

Таблиця 4.16

Симплексна таблиця для опорних планів

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	-
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	-
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	-
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		1380	-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	

Оптимальним планом задачі є вектор:

$$X^* = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0),$$

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

ТЕМА 4

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА: ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

- 4.1. Економічна та математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі
- 4.2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі
 - 4.2.1. Метод північно-західного кута
 - 4.2.2. Метод мінімального елемента
 - 4.2.3. Евристичний метод Фойгеля
- 4.3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі
- 4.4. Приклад розв'язування транспортної задачі методом потенціалів

4.1. Економічна та математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі

Транспортна задача – це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min; \quad (4.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}), \quad (4.4)$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача; a_i – запаси продукції i -го постачальника; b_j – попит на продукцію j -го споживача.

Умови транспортної задачі можна записати у вигляді табл. 4.1.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.5)$$

то таку транспорту задачу називають **збалансованою**, або **закритою**. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають **незбалансованою**, або **відкритою**.

Тут може бути два випадки:

а) сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$;

б) сумарні запаси менше, ніж сумарних потреб, тобто $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$.

Таблиця .1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_i
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_i
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Відкриту модель завжди можна звести до моделі закритого типу. Для цього у випадку а) вводиться фіктивний споживач B_{n+1} , потреби якого дорівнюють $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, а у випадку б) вводиться фіктивний постачальник

A_{m+1} , запаси якого дорівнюють $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача і вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнюють нулю, оскільки вантаж в обох випадках не перевозиться.

Транспортну задачу застосовують також під час виконання економічних завдань, які за своїм характером не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу, тому величини можуть мати різний зміст залежно від конкретного завдання. Наприклад, величини c_{ij} можуть означати вартість, відстань, час, продуктивність тощо.

Як і для інших задач лінійного програмування, процес пошуку оптимального розв'язку транспортної задачі розпочинається із знаходження початкового опорного плану. Розглянемо системи обмежень (4.2) та (4.3) транспортної задачі. Вона містить mn невідомих та $m+n$ рівнянь, пов'язаних між собою співвідношенням (4.5). Якщо додати почленно рівняння окремо підсистеми (4.2) і окремо підсистеми (4.3), то отримаємо два однакові рівняння.

У табл. 4.1 таке додавання рівнозначне почленному додаванню стовпців і рядків.

Така ситуація свідчить про лінійну залежність системи обмежено. Якщо одне з рівнянь цієї системи відкинути, то система обмежень міститиме не більше $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь або стільки само базисних змінних, відповідно **невироджений опорний розв'язок транспортної задачі** містить $m + n - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний розв'язок записані у вигляді табл. 7.1, то клітини, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення називаються **заповненими** клітинами, решта – **вільними** клітинами. Зайняті клітини відповідають базисним змінним і для не виродженого опорного розв'язку їхня кількість дорівнює $m + n - 1$.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (4.2) – (4.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = (x_{ij}) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = (\bar{x}_{ij}^*) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (7.1) набуває найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

4.2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі

4.2.1. Метод північно-західного кута

Для знаходження початкового опорного розв'язку транспортної задачі зручно користуватися методом північно-західного кута, суть якого полягає у такому.

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 4.2.

Заповнюватимемо цю таблицю, починаючи від лівого верхнього кута, який умовно назовемо «північно-західним кутом». Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задовольняти потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1 . Для цього записуємо у лівий нижній кут клітинки A_1B_1 менше з чисел a_1 і b_1 , тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

На першому кроці можуть бути два випадки. Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший стовпець «закритий», тобто потреба першого споживача задоволена повністю. Це означає, що для решти клітин першого стовпця $x_{i1} = 0$ ($i = 2, \dots, m$). Рухаючись далі по першому рядку таблиці, переходимо до задоволення потреб другого споживача B_j за рахунок запасу, що залишився у постачальника A_1 . Тут у клітинку A_1B_2 записуємо менше з чисел $a_1 - b_1$ і b_2 , тобто $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$.

Таблиця 4.2

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_i
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_i
...	...	...	...	...	...
A_3	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Якщо $(a_1 - b_1) \geq b_2$, то $x_{12} = b_2$, другий стовпчик «закритий», тобто $x_{i2} = 0$ ($i = 2, \dots, m$), і тепер переходимо до задоволення потреб споживача B_3 . Якщо $(a_1 - b_1) < b_2$, то $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$ і перший рядок «закритий», тобто запаси першого постачальника повністю вивезені. Це означає, що для решти клітин першого рядка $x_{1j} = 0$ ($j = 3, \dots, n$). У цьому випадку задоволення потреб споживача B_j розпочинаємо тепер за рахунок запасів постачальника A_2 . Процес в аналогічний спосіб продовжуємо далі.

Якщо ж на першому кроці $(a_1 < b_1)$, то $x_{11} = a_1$ і перший рядок «закритий», тобто $x_{1j} = 0$ ($j = 2, \dots, n$), і тепер, рухаючись далі по першому стовпцю таблиці, переходимо до задоволення потреб споживача B_1 за рахунок запасів постачальника A_2 . Тут у клітинку A_2B_1 записуємо менше з чисел a_2 і $b_1 - a_1$, а саме: $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$.

Цей процес продовжується до вичерпання усіх запасів a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) та задоволення усіх потреб b_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Остання заповнена клітинка буде у n -му стовпчику та в m -му рядку. Починаючи рух із клітинки A_1B_1 тільки по зайнятих клітинках, неможливо повернутись не лише до неї, але і в будь-яку іншу заняту клітинку. Тобто розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, є опорним планом розв'язку транспортної задачі.

4.2.2. Метод мінімального елемента

Суть методу мінімального елемента полягає в тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе «переміщення» вантажу у клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу c_{ij} .

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 4.3.

Заповнення таблиці починаємо з клітинки, в якій найменша величина витрат c_{ij} . Запишемо у цю клітинку менше з чисел a_i і b_j . Потім або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю задоволені, або стовпець, що відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений, або і рядок, і

стовпець, якщо вивезені запаси постачальника і задоволені потреби споживача, «викреслюють», тобто вони більше не беруть участі у процесі побудови початкового опорного плану.

Таблиця 4.3

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Далі з решти клітин таблиці знову вибирають клітинку з найменшою величиною витрат, і процес розподілу запасів продовжується доти, доки вони усі не будуть вивезені, а потреби задоволені.

4.2.3. Евристичний метод Фойгеля

Метод Фойгеля доволі простий і дає змогу отримати опорний план, більш наближений до оптимального розв'язку, ніж у випадку застосування інших методів.

Цей метод полягає у такому:

- на кожній ітерації знаходять різниці між двома найменшими тарифами в усіх рядках і стовпцях, записуючи їх у додаткові стовпець і рядок таблиці;
- знаходять максимальну різницю і заповнюють клітину з мінімальною вартістю в рядку (стовпці), якій відповідає ця різниця.

4.3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є **метод потенціалів**.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (4.5) виявилось, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Як було зазначено вище, це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами

$\left(\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i \right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Якщо ж загальні запаси

постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \right)$ до закритого

типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з

потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} , вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; метод Фойгеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі – стовпчиками.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $(m + n - 1)$ клітинок, де m – кількість постачальників; n – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають **невиродженням**. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(m + n - 1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є не опорним. **Ознакою опорності** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. **Циклом** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають **виродженням**. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j , для

яких виконується умова

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij}, & x_{ij} &> 0, \\ u_i + v_j &\leq c_{ij}, & x_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

для всіх $i = \overline{1, m}$, та $j = \overline{1, n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

На основі вищенаведеної теореми для того, щоб опорний розв'язок транспортної задачі був оптимальним, необхідно виконати такі умови:

а) для кожної зайнятої клітинки сума потенціалів повинна дорівнювати

вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \quad (4.6)$$

б) для кожної вільної клітинки сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (4.7)$$

Якщо хоча б одна вільна клітинка не задовольняє умову (4.7), то знайдений опорний план не є оптимальним і його можна покращити.

4. Для перевірки оптимального плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати тільки для не виродженого опорного плану. Такий план містить $m + n - 1$ зайнятих клітин, тому для нього можна скласти систему із $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь вигляду (4.6) з $m + n$ невідомими. У цій системі рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому припустивши, що один із потенціалів дорівнює нулю, можна однозначно визначити решту. Потім необхідно перевірити правильність побудови системи потенціалів, для цього потрібно перевірити виконання умов (4.6) для всіх заповнених клітин.

Якщо опорний план є виродженим, тобто містить менше $m + n - 1$ заповнених клітин, то перед побудовою системи потенціалів вводимо додаткову кількість клітин з нульовим перевезенням, щоб отримати $m + n - 1$ заповнених. Клітинки, в як уведені нульові перевезення, називають **фіктивно заповненими клітинками**. Оскільки у транспортній задачі потрібно знайти мінімальне значення цільової функції, то доцільно зробити фіктивно заповненими ті клітинки, в яких найменша вартість перевезення.

Після того, як визначені числові значення усіх потенціалів, для усіх вільних клітин обчислюють величини

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad (4.8)$$

Якщо для усіх i та j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) виконується $\Delta_{ij} \leq 0$, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо, хоча б для однієї пари i та j виконується $\Delta_{ij} > 0$, то знайдений опорний план не буде оптимальним, і його замінюють на новий опорний план. Для цього необхідно «завантажити» вільну клітинку $A_k B_l$ (ввести у базис змінну x_{kl}), що задовольняє умову

$$\Delta_{kl} = \max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} \quad (4.9)$$

З цією метою будуємо цикл у вигляді ламаної ліній, починаючи від

вільної клітинки $A_k B_l$ і проводячи ланки ламаної рядків і стовпчиків до заповнених клітин. У клітину $A_k B_l$ ставимо знак «+», а решту вершин циклу – почергово знаки «-» та «+» (при цьому точки само перетину ламаної не враховуємо – вони не є вершинами циклу).

Вибираємо найменше перевезення з вершин циклу, відзначених «-» (у клітинці $A_r B_s$), позначаємо його через θ і цю величину «переміщаємо» клітинками циклу, тобто віднімаємо її від об'ємів перевезення у клітинках, відзначених «-», і додаємо до об'єму перевезень у клітинках, відзначених «+». Тоді об'єм перевезень у клітинці $A_k B_l$ дорівнює θ а в клітинці $A_r B_s$ – нулю.

У результаті клітинка клітинці $A_r B_s$ стає вільною (якщо після переміщення перевезень у деяких зайнятих клітинках з'являються нульові перевезення, то із цих клітин тільки одна перетворюється на вільну), а клітинки $A_k B_l$ – зайнятою, і отримаємо новий опорний план. Баланс перевезень не змінився, оскільки у кожному рядку та стовпчику ми додали і відняли одне і те саме значення.

Для отримання нового опорного плану знову визначаємо числові значення потенціалів і для вільних клітин обчислюємо величини вигляду (4.8). Цей процес продовжуємо, поки серед Δ_{ij} не залишиться жодного додатного.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

4.4. Приклад розв'язування транспортної задачі

Завдання 1. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої у табл. 4.7., за методом північно-західного кута.

Таблиця 4.7

Вихідні дані для виконання завдання

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Розв'язок цієї задачі наведено у табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250

	100	150				
A ₃	8	5	3	2	2	200
		50	100	50		
A ₄	11	8	12	16	13	300
				50	250	
Потреби	200	200	100	100	250	850

Отриманий розв'язок є невивірженим опорним розв'язком, оскільки містить точно $m + n - 1 = 8$ заповнених клітин.

Знайдемо загальну вартість перевезень як суму добутків обсягів перевезень, що стоять у лівому нижньому кутку заповнених клітин, на відповідні вартості перевезення одиниці вантажу у цих самих клітинах:

$$Z = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 150 \cdot 7 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 50 \cdot 16 + 250 \cdot 13 = 6950 \text{ ум. од.}$$

Початковий опорний розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, є дуже далеким від оптимального, бо під час його отримання не враховують вартості перевезень одиниці вантажу c_{ij} . Тому в подальших розрахунках потрібно буде багато ітерацій для досягнення оптимального розв'язку.

Завдання 2. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої у табл. 4.7, за методом мінімальної вартості.

Розпочинаємо з клітинки з величиною витрат $c_{14} = \min(c_{ij}) = 1$. Потреби споживача B₄ і запаси постачальника A₁ повністю задоволені, тому перший рядок і четвертий стовпець «викреслюють». Розв'язок цієї задачі наведено в табл. 4.9.

Таблиця 4.9

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₄	
A ₁	10	7	4	1	4	100
				100		
A ₂	2	7	10	6	11	250
	200	50				
A ₃	8	5	3	2	2	200
		50	100	50	200	
A ₄	11	8	12	16	13	300
		150	100		50	
Потреби	200	200	100	100	250	850

Цей розв'язок складається із 7 зайнятих клітин, а отже, є виродженим опорним розв'язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300 \text{ ум. од.}$$

Бачимо, що загальна вартість плану перевезень у прикладі 3 значно менша, ніж у прикладі 2, а отже, він ближчий до оптимального.

Завдання 3. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої в табл. 4.10, за методом Фойгеля.

Таблиця 4.10

Постачальники	Споживачі					Запаси	Різниці по рядках (кроки)					
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅		I	II	III	IV	V	VI
A ₁	10 –	7 –	4 –	1 50	4 50	100	3	3	3	<u>3</u>	0	0
A ₂	2 200	7 –	10 –	6 50	11 –	250	4	1	<u>4</u>	–	–	–
A ₃	8 –	5 –	3 –	2 –	2 200	200	0	0	0	0	1	–
A ₄	11 –	8 200	12 100	16 –	13 –	300	3	<u>4</u>	1	1	1	1
Потреби	200	200	100	100	250	850						
Різниці по стовпцях (кроки)	I	<u>6</u>	2	1	1	2						
	II	–	2	1	1	2						
	III	–	–	1	1	2						
	IV	–	–	1	1	2						
	V	–	–	1	–	<u>2</u>						
	VI	–	–	8	–	<u>9</u>						

Цей розв'язок складається із 7 зайнятих клітин, а отже, є виродженим опорним розв'язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 4150 \text{ у.м.од.}$$

Отже, метод Фойгеля дає змогу отримати ще кращий опорний план перевезень порівняно з методами північно-західного кута та мінімального елемента.

Завдання 4. Знайти методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі, заданої в табл. 4.7.

Нехай початковий опорний розв'язок (план) цієї транспортної задачі знайдено за методом мінімальної вартості (табл. 4.9).

Таблиця 4.11

Постачальники	Споживачі					u_i
	B ₁ (200)	B ₂ (200)	B ₃ (100)	B ₄ (100)	B ₅ (250)	
A ₁ (100)	10	7	4	1 100	4	$u_1 =$

A_2 (250)	200 2	50 7	10	6	11	$u_2 =$
A_3 (200)	8	5	3	2 0	200 2	$u_3 =$
A_4 (300)	11	150 8	100 12	16	50 13	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 =$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 =$	$v_5 = 13$	

Він є виродженим, бо кількість заповнених клітин дорівнює 7, а $m + n - 1 = 8$.

Обчислимо ці потенціали за формулою: $u_i + v_j = c_{ij}$

$$v_2 = c_{42} - u_4 = 8 - 0 = 8; \quad v_3 = c_{43} - u_4 = 12 - 0 = 12; \quad v_5 = c_{45} - u_4 = 13 - 0 = 13.$$

Решту потенціалів неможливо визначити за допомогою потенціалу u_4 . Тепер, по чергово переглянувши стовпці B_2 , B_3 та B_5 , за заповненими у них клітинками і відповідними потенціалами v_2 , v_3 та v_5 визначимо потенціали $u_2 = 7 - 8 = -1$; $u_3 = 2 - 13 = -11$. Решту потенціалів знайдемо в подібний спосіб і запишемо у табл.

Потім для всіх вільних клітин за формулою $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ визначимо знаки Δ_{ij} .

Наприклад, для рядка A_1 : $\Delta_{11} = -12 + 3 - 10 = -19$; $\Delta_{12} = -12 + 8 - 7 = -11$; $\Delta_{13} = -12 + 12 - 4 = -4$; $\Delta_{15} = -12 + 13 - 4 = -3$.

Таблиця 4.12

Постачальники	Споживачі					u_i
	B_1 (200)	B_2 (200)	B_3 (100)	B_4 (100)	B_5 (250)	
A_1 (100)	10	7	4	1 100	4	$u_1 = -12$
A_2 (250)	200 2	50 7	10	6	11	$u_2 = -1$
A_3 (200)	8	5	3	2 0	200 2	$u_3 = -11$
A_4 (300)	11	150 8	100 12	16	50 13	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 13$	$v_5 = 13$	

Для трьох вільних клітин Δ_{ij} будуть додатними, тобто $\Delta_{23} = 1$, $\Delta_{24} = 6$ і $\Delta_{25} = 1$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. За переходу до нового опорного плану клітинку, яку треба завантажувати, знаходимо з умови $\Delta_{kl} = \max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij}$, такою є клітинка A_2B_4 . Далі будемо цикл з вершинами у ній та

заповнених клітинках A_3B_4 , A_3B_5 , A_4B_5 , A_4B_2 і A_2B_2 ; у клітинку A_2B_4 ставимо знак «+», а решту вершин циклу – по чергово знаки «-» та «+» (табл. 4.13).

Таблиця 4.13

Постачальники	Споживачі					
	B ₁ (200)	B ₂ (200)	B ₃ (100)	B ₄ (100)	B ₅ (250)	u_i
A ₁ (100)	10	7	4	100 1	4	$u_1 = -12$
A ₂ (250)	2 200	7(-) 50	10	6(+)	11	$u_2 = -1$
A ₃ (200)	8	5	3	2(-) 0	2(+) 200	$u_3 = -11$
A ₄ (300)	11	8(+) 150	12 100	16	13(-) 50	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 13$	$v_5 = 13$	

Знаходимо найменші перевезення θ у вершинах циклу, відзначених «-» (клітинки A_3B_4 , A_4B_5 і A_2B_2): $\theta = \min(0; 50; 50) = 0$. Цю величину віднімаємо від об'ємів перевезень у клітинках зі знаком «-» і додаємо до об'ємів перевезень у клітинках зі знаком «+» (клітинки A_2B_2 , A_3B_5 і A_4B_2). Потім змінюємо значення потенціалів (табл. 4.14) і обчислюємо $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{15} = 3$, $\Delta_{23} = 1$ і $\Delta_{25} = 1$.

Таблиця 4.14

Постачальники	Споживачі					
	B ₁ (200)	B ₂ (200)	B ₃ (100)	B ₄ (100)	B ₅ (250)	u_i
A ₁ (100)	10	7	4	100 1	4	$u_1 = -6$
A ₂ (250)	2 200	7 50	10	6 0	11	$u_2 = -1$
A ₃ (200)	8	5	3	2	2 200	$u_3 = -11$
A ₄ (300)	11	8 150	12 100	16	13 50	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 7$	$v_5 = 13$	

Таблиця 4.15

Постачальники	Споживачі					u_i
	B_1 (200)	B_2 (200)	B_3 (100)	B_4 (100)	B_5 (250)	
A_1 (100)	10	7	4	100 ¹⁽⁻⁾	4 ⁽⁺⁾	$u_1 = -6$
A_2 (250)	200 ²	50 ⁷⁽⁻⁾	10	0 ⁶⁽⁺⁾	11	$u_2 = -1$
A_3 (200)	8	5	3	2	200 ²	$u_3 = -11$
A_4 (300)	11	150 ⁸⁽⁺⁾	100 ¹²	16 ¹⁶	50 ¹³⁽⁻⁾	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 7$	$v_5 = 13$	

Знайдений опорний план ще не є оптимальним. Будуємо цикл (табл. 4.15), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітин і знаходимо нові значення потенціалів (табл. 4.16).

Для трьох вільних клітин Δ_{ij} будуть додатними, а саме: $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{23} = 1$ і $\Delta_{33} = 1$. Отже, знайдений опорний план не оптимальний. Продовжуємо далі: будуємо цикл (табл. 4.17), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітин, обчислюємо нові значення потенціалів за заповненими клітинками і для всіх вільних клітин визначаємо знаки Δ_{ij} .

Таблиця 4.16

Постачальники	Споживачі					u_i
	B_1 (200)	B_2 (200)	B_3 (100)	B_4 (100)	B_5 (250)	
A_1 (100)	10	7	4	50 ¹	50 ⁴	$u_1 = -6$
A_2 (250)	200 ²	0 ⁷	10	50 ⁶	11	$u_2 = -1$
A_3 (200)	8	5	3	2	200 ²	$u_3 = -8$
A_4 (300)	11	200 ⁸	100 ¹²	16 ¹⁶	13 ¹³	$u_4 = 0$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 8$	$v_3 = 12$	$v_4 = 7$	$v_5 = 10$	

Таблиця 4.17

Постачальники	Споживачі				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₄
A ₁	10	7	4(+)	1(-)	4
A ₂	2	7(-)	10	6(+)	11
A ₃	8	5	3	2	2
A ₄	11	8(+)	12(-)	16	13

Для всіх вільних клітин Δ_{ij} будуть недодатними. Отже, знайдений опорний план є оптимальним, а його загальна вартість перевезень буде такою:

$$Z = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 6 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 = 4150 \text{ ум.од.}$$

ТЕМА 5

ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

- 5.1. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор
- 5.2. Матричні ігри двох осіб
- 5.3. Гра зі змішаними стратегіями
- 5.4. Приклад розв'язування ігор
- 5.5. Ігри з природою. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності

5.1. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор

За умов ринкової економіки все частіше мають місце *конфліктні ситуації*, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець – покупець. Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, два підприємства, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор – це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають *іграми*.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають *гравцями*, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються *стратегіями*, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються *функціями виграшу*. Задачею кожного гравця є знаходження *оптимальної стратегії*, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних

реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається **парною** (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є **множинною**.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – **скінченна**, в іншому разі – **нескінченна**.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо **гру з нульовою сумою**. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри – з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про кооперативну гру, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається некооперативною.

5.2. Матричні ігри двох осіб

Найчастіше розглядається гра з двома гравцями, в якій виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають **грою двох осіб з нульовою сумою**. Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв'язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуєчих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Отже, маємо два гравці А і В (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця А – A_i ($i = \overline{1, m}$), стратегії гравця В – B_j ($j = \overline{1, n}$).

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються спеціальними функціями, які залежать від стратегій гравців, як правило, у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1(A_i; B_j)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) – виграш гравця А;

$\varphi_2(A_i; B_j)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) – виграш гравця В.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1(A_i; B_j) + \varphi_2(A_i; B_j) \equiv 0$.

Тоді в разі, якщо $\varphi_1(A_i; B_j) = \varphi(A_i; B_j)$, то $\varphi_2(A_i; B_j) = -\varphi(A_i; B_j)$.

Отже, мета гравця А – максимізувати величину $\varphi(A_i; B_j)$, а гравця В – мінімізувати її. Нехай $\varphi(A_i; B_j) = a_{ij}$, тобто маємо матрицю А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям A_i , а стовпці – стратегіям B_j .

Матриця A називається **платіжною**, а також **матрицею гри**. Елемент цієї матриці a_{ij} – це виграш гравця A , якщо він вибрав стратегію A_i , а гравець B – стратегію B_j .

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибирання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію у наступному.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i , тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює $\min_j a_{ij}$, тобто навіть тоді, якщо гравець B і знав би стратегію гравця A . Передбачаючи таку можливість, гравець A має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця A позначається A_{i_0} і має назву **максимінної**, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається **нижньою ціною гри**.

Гравець B , який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A . Стратегія гравця B позначається через B_{j_0} і називається **мінімаксною**, а величина його програшу – **верхньою ціною гри**, тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon,$$

тобто, якщо $\alpha = \beta = \upsilon$, то гра називається **цілком визначеною**. В такому разі виграш гравця A (програш гравця B) називається **значенням гри** і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$. Цілком визначені ігри називаються **іграми з сідловою точкою**, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця A (програшу гравця B) і є сідловою точкою. В цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій – максимінної для гравця A та мінімаксної для гравця B , тобто

якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

5.3. Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \nu \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування **змішаних стратегій**, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця A – вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, де $\sum_{i=1}^m x_i = 1$;

для гравця B – вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, де $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Очевидно, що $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$); $y_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв'язку визначає теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема (основна теорема теорії ігор). Кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців A і B за теоремою визначають вектори $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$, що дають змогу отримати виграш:

$$\alpha \leq \nu \leq \beta.$$

Використання оптимальної змішаної стратегії гравцем A має забезпечувати виграш на рівні, не меншому, ніж ціна гри за умови вибору гравцем B будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq \nu \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.1)$$

З другого боку, використання оптимальної змішаної стратегії гравцем B має забезпечувати за будь-яких стратегій гравця A програш, що не перевищує ціну гри v , тобто:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5.2)$$

Ці співвідношення використовуються для знаходження розв'язку гри.

Зауважимо, що в даному разі розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри v незалежно від того, яку із можливих змішаних стратегій вибрав інший гравець.

5.4. Приклад розв'язування ігор

Завдання 1. Підприємство виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу підприємства розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: $A-1$, $A-2$, $A-3$. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: $M-1$, $M-2$, $M-3$ залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум. од.

Тип устаткування	Модифікація		
	M-1	M-2	M-3
A-1	10	6	5
A-2	8	7	9
A-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає через необхідність вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом підприємства. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу підприємства найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язування. Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу $A-1$, то економічний відділ наполягатиме на придбанні технології, що дає модифікацію $M-3$, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду $A-2$, то, найімовірніше, затверджено буде $M-2$, і нарешті для типу $A-3$ – також $M-2$.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно наполягати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу *A-2*, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов – 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min \{10; 6; 5\} = 5$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min \{8; 7; 9\} = 7$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min \{7; 5; 8\} = 5$$

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max \{5; 7; 5\} = 7 \text{ – нижня ціна гри.}$$

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду фахівців економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію *M-1*, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу *A-1*. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією *M-2* найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. – для устаткування *A-2*, а з модифікацією *M-3* – також для *A-2*. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати – 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max \{10; 8; 7\} = 10$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max \{6; 7; 5\} = 7$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max \{5; 9; 8\} = 9$$

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min \{10; 7; 9\} = 7 \text{ – верхня ціна гри.}$$

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Завдання 2. Матрицю гри розташуємо в табл.5.4.

Найменші елементи рядків $\min_j c_{ij}$ запишемо в додатковому стовпці таблиці, а найбільші елементи стовпців $\max_i c_{ij}$ – в додатковому рядку

Таблиця 5.4

	B_1	B_2	B_3	$\min_j c_{ij}$
A_1	2	0	-3	-3
A_2	3	-1	4	-1
A_3	-2	-3	2	-3
$\max_i c_{ij}$	3	0	4	-1

У правій нижній клітинці таблиці запишемо нижню ціну гри

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij} = -1$$

і верхню ціну гри

$$\beta = \max_j \max_i c_{ij} = 0$$

Гра не має сідлової точки, оскільки $\alpha < \beta$.

Завдання 3. Двоє гравців А і В розігрують гру з нульовою сумою, в якій А може записати одну з трьох цифр 0,1 або 2, а В – одну з двох цифр щ або 1. Якщо сума записаних цифр буде 3, то гравець А виграє 3 очки, якщо 2, то гравець В виграє 2 очки, а якщо 0 або 1, то виграш кожного гравця дорівнює 0. Записати матрицю гри, знайти нижню і верхню ціни гри.

Розв’язування. Нехай $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$ – стратегії гравця А, $B(0)$, $B(1)$ – стратегії гравця В. Таблиця виграшів гравця А має вигляд (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

	$B(0)$	$B(1)$	$\min_j c_{ij}$
$A(0)$	0	0	0
$A(1)$	0	-2	-2
$A(2)$	-2	3	-2
$\max_i c_{ij}$	0	3	0

Оскільки $\alpha = \beta$, то гра має сідлову точку (вона виділена). Чиста ціна (вона одночасно є нижньою і верхньою ціною) гри дорівнює нулю. Оптимальною стратегією гравця А є $A(0)$, а гравця В – $B(0)$.

5.5. Ігри з природою. Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності

На практиці зустрічаються ситуації, в яких один із гравців байдужий до виграшу і не бажає використовувати промахи іншого. Ця ситуація виникає у випадку, коли в якості одного з гравців виступає «природа»

Особливість гри з «природою» полягає в тому, що свідомо діє тільки один з гравців. Гравець «природа» свідомо проти іншого гравця не діє, а виступає як партнер в грі, що не має конкретної мети

Під стратегією «природи» розуміють сукупність зовнішніх умов, в яких гравцю приходится приймати рішення, тобто обирати свою стратегію.

Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності:

Критерій Вальда орієнтує особу, яка приймає рішення, на занадто обережну лінію поведінки, тому їм користуються у випадках, коли необхідно забезпечити успіх при будь-яких можливих умовах. Формалізоване значення критерія Вальда записується як:

– у випадку розгляду матриці виграшів:

$$H_V = \max_i \min_j a_{ij} \quad (5.4)$$

– у випадку розгляду матриці програшів:

$$H_V = \min_i \max_j a_{ij} \quad (5.5)$$

Критерій домінуючого результату (крайнього оптимізму) виражає позицію крайнього оптимізму в оцінці дій супротивників та господарської ситуації. Його використовують, коли особа, що приймає рішення, орієнтується на найбільш сприятливі умови:

– у випадку розгляду матриці виграшів:

$$H_O = \max_i \max_j a_{ij} \quad (5.6)$$

– у випадку розгляду матриці програшів:

$$H_O = \min_i \min_j a_{ij} \quad (5.7)$$

Критерій Севіджа – це критерій найменших втрат, який при прийнятті рішення в умовах невизначеності дозволяє визначити найгірші можливі наслідки для кожної з альтернатив та обрати ту, яка є найкращою.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца рекомендує в процесі прийняття рішення використовувати певний середній результат, що характеризує стан між крайнім песимізмом і крайнім оптимізмом.

Формалізоване значення критерія песимізму-оптимізму Гурвіца записується як:

– у випадку розгляду матриці виграшів:

$$H_H = \max_i \{ \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \}, \quad (5.8)$$

де λ – коефіцієнт оптимізму (песимізму); $0 \leq \lambda \leq 1$

– у випадку розгляду матриці програшів:

$$H_H = \min_i \{ \lambda \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij} \}, \quad (5.9)$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$

Критерій Байєса називається також критерієм максимуму середнього виграшу або максимізації середнього очікуваного доходу та використовується за умови, коли відомий розподіл ймовірностей відбуття станів системи і записується таким чином:

$$H_B = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \times p_j, \quad (5.10)$$

де p_j – ймовірність виникнення певного стану.

Критерій Бернуллі-Лапласа використовують у випадку, коли можна припустити, що будь-який з варіантів середовища не більш ймовірний, ніж інший. Тут передбачається, що всі стани середовища (всі варіанти реальної ситуації) рівноймовірні:

$$H_{BL} = \max_j \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \quad (5.11)$$

де n – кількість станів середовища.

5.6. Приклад застосування критеріїв для прийняття рішень в умовах невизначеності

Завдання 1. Підприємство планує виготовляти м'яке морозиво «Лакомка». Собівартість виготовлення однієї порції складає 1 грн., її збираються продавати за ціною 5 грн. Якщо морозиво виготовлено, але не продано, то додаткові збитки складають 0,5 грн. за порцію. Вивчивши ринок, відділ маркетингу визначив, що можуть виникнути 5 ситуацій:

Попит, одиниць	2000	3000	4000	5000	6000
----------------	------	------	------	------	------

Необхідно скласти матрицю прибутків.

Розв'язування. Складемо матрицю прибутків, в якій стовпчиками виступають варіанти зовнішніх умов (варіанти попиту), а рядками – варіанти рішень (варіанти випуску). Усі розрахунки отримання можливого прибутку при реалізації кожного рішення за можливих варіантів попиту наведено в таблиці 5.6. Для спрощення розрахунків варіанти випуску та попиту наведено в тисячах порцій, тому одиницями вимірювання прибутку є тисячі гривень.

Таблиця 5.6

Матриця прибутків (тис. грн.)

Варіанти рішень (випуск, тис. порцій) A_i	Варіанти попиту (тис. порцій) S_j				
	2	3	4	5	6
2	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 8,0$	$2 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 8,0$	8,0	8,0	8,0

3	$2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0,5 = 6,5$	$3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12,0$	$3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12,0$	12,0	12,0
4	$2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 = 5,0$	$3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0,5 = 10,5$	$4 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 16,0$	16,0	16,0
5	$2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0,5 = 3,5$	$3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 = 9,0$	$4 \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0,5 = 14,5$	$5 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 20,0$	20,0
6	$2 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 0,5 = 2,0$	$3 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - 3 \cdot 0,5 = 7,5$	$4 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 0,5 = 13,0$	$5 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - 1 \cdot 0,5 = 18,5$	$6 \cdot 5 - 6 \cdot 1 = 24,0$

Завдання 2. Використовуючи дані платіжної матриці (таблиця 5.7), оберіть найкращу стратегію за критерієм мінімаксного ризику Севіджа.

Таблиця 5.7

Матриця прибутків

Стратегії	Виграш за угодою 1	Виграш за угодою 2	Виграш за угодою 3	Виграш за угодою 4
Стратегія 1	1	4	8	3
Стратегія 2	5	8	7	6
Стратегія 3	8	3	2	8
Стратегія 4	5	6	8	9

Розв'язування. Для того, щоб застосувати критерій Севіджа, необхідно перетворити матрицю прибутків на матрицю ризиків. В осередках матриці величина ризику – різниця між максимальним результатом при цьому кінці (максимальному числі в даному стовпці) і результатом при обраній стратегії. Значення ризику показує величину, що втрачається при прийнятті неправильного рішення. Розрахунки заносимо в таблицю 5.8.

Тепер можна застосувати критерій Севіджа до матриці ризику за формулою:

$$H_C = \min_i \max_j a_{ij} \quad (5.12)$$

Таблиця 5.8

Матриця ризику за критерієм Севіджа

Стратегії	B_1	B_2	B_3	B_4	$\max_j$	$\min_i$
A_1	$8-1=7$	4	0	6	7	
A_2	$8-5=3$	0	1	3	3	3
A_3	$8-8=0$	5	6	1	6	
A_4	$8-5=3$	2	0	0	3	3

Отже, за критерієм мінімаксного ризику Севіджа гравцеві слід обрати стратегію A_2 або A_4 .

Завдання 3. Підприємству потрібно визначити, яку кількість продукції необхідно випускати, щоб отримати найбільший прибуток. Рішення залежить

від ситуації на ринку, тобто від конкретної кількості споживачів. Конкретна кількість споживачів наперед невідома та може бути трьох варіантів: S_1 , S_2 і S_3 . Є можливими чотири варіанти випуску продукції підприємством: A_1 , A_2 , A_3 . Здатність ОПР характеризує коефіцієнт оптимізму λ , який дорівнює 0,6 (таблиця 5.9).

Таблиця 5.9

Прибуток від реалізації продукції, тис. грн.

Альтернатива рішення	Можливий стан навколишнього середовища		
	S_1	S_2	S_3
A_1	2,5	3,5	4,0
A_2	1,5	2,0	3,5
A_3	3,0	8,0	2,5
P_j	0,4	0,3	0,3

Потрібно знайти оптимальну альтернативу випуску продукції за критеріями Вальда, домінуючого результату, песимізму, Севіджа, Гурвіца, Байєса, Бернуллі-Лапласа.

Розв'язування.

1. Визначення альтернативи за **критерієм Вальда** представлено в таблиці 5.10.

Таблиця 5.10

Визначення альтернативи за критерієм Вальда (максимін)

Альтернатива рішення	Можливий стан навколишнього середовища			$\min_j a_{ij}$	$\max_i$
	S_1	S_2	S_3		
A_1	2,5	3,5	4,0	2,5	2,5
A_2	1,5	2,0	3,5	1,5	
A_3	3,0	8,0	2,5	2,5	2,5

За критерієм Вальда оптимальними будуть альтернативні рішення A_1 і A_3 , які вважаються еквівалентними, тобто мають однакові переваги для виконання.

2. Визначення альтернативи за **критерієм домінуючого результату** представлено в таблиці 5.11.

Таблиця 5.11

Визначення альтернативи за критерієм домінуючого результату

Альтернатива рішення	Можливий стан навколишнього середовища			$\max_j a_{ij}$	$\max_i$
	S_1	S_2	S_3		
A_1	2,5	3,5	4,0	4,0	
A_2	1,5	2,0	3,5	3,5	
A_3	3,0	8,0	2,5	8,0	8,0

За критерієм домінуючого результату оптимальним буде альтернативне рішення A_3 .

3. Критерій Севіджа – це критерій найменших втрат, який при прийнятті рішення в умовах невизначеності дозволяє визначити найгірші можливі наслідки для кожної з альтернатив та обрати ту, яка є найкращою. Для визначення даного критерію складемо матрицю ризику (таблиця 5.12).

Таблиця 5.12

Побудова матриці ризику

Альтернатива рішення	Матриця прибутків			Матриця ризику		
	Можливий стан середовища			Можливий стан середовища		
	S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3
A_1	2,5	3,5	4,0	0,5	4,5	0
A_2	1,5	2,0	3,5	1,5	6,0	0,5
A_3	3,0	8,0	2,5	0	0	1,5

Визначимо альтернативу за критерієм Севіджа, застосувавши формулу 5.12 (таблиця 5.13).

Таблиця 5.13

Визначення альтернативи за критерієм Севіджа (мінімакс)

Альтернатива рішення	Можливий стан середовища (матриця ризику)			$\max_j a_{ij}$	$\min_i$
	S_1	S_2	S_3		
A_1	0,5	4,5	0	4,5	
A_2	1,5	6,0	0,5	6,0	
A_3	0	0	1,5	1,5	1,5

Вибір оптимального рішення за критерієм Севіджа – альтернативне рішення A_3 .

4. Визначення альтернативи за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца представлено в таблиці 5.14.

Таблиця 5.14

Визначення альтернативи за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца

Альтернатива рішення	Можливий стан середовища			$\max_j a_{ij}$	$\min_j a_{ij}$	$\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}$	$\max_i$
	S_1	S_2	S_3				
A_1	2,5	3,5	4,0	4,0	2,5	$0,6 \cdot 2,5 + (1-0,6) \cdot 4,0 = 3,1$	
A_2	1,5	2,0	3,5	3,5	1,5	$0,6 \cdot 1,5 + (1-0,6) \cdot 3,5 = 2,3$	
A_3	3,0	8,0	2,5	8,0	2,5	$0,6 \cdot 2,5 + (1-0,6) \cdot 8,0 = 4,7$	4,7

Вибір оптимального рішення за критерієм Гурвіца – альтернативне рішення

A_3 .

5. Визначення альтернативи за критерієм Байєса представлено в таблиці 5.15.

Таблиця 5.15

Визначення альтернативи за критерієм Байєса

Альтернатива рішення	Можливий стан навколишнього середовища			$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times p_j$	max_i
	S_1	S_2	S_3		
A_1	2,5	3,5	4,0	$2,5 \cdot 0,4 + 3,5 \cdot 0,3 + 4,0 \cdot 0,3 = 3,25$	
A_2	1,5	2,0	3,5	$1,5 \cdot 0,4 + 2,0 \cdot 0,3 + 3,5 \cdot 0,3 = 2,25$	
A_3	3,0	8,0	2,5	$3,0 \cdot 0,4 + 8,0 \cdot 0,3 + 2,5 \cdot 0,3 = 4,35$	4,35
P_j	0,4	0,3	0,3		

Отже, за критерієм Байєса оптимальним буде альтернативне рішення A_3 .

6. Визначення альтернативи за критерієм Бернуллі-Лапласа представлено в таблиці 5.16.

Таблиця 5.16

Визначення альтернативи за критерієм Бернуллі-Лапласа

Альтернатива рішення	Можливий стан навколишнього середовища			$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$	max_i
	S_1	S_2	S_3		
A_1	2,5	3,5	4,0	$\frac{2,5 + 3,5 + 4,0}{3} = 3,33$	
A_2	1,5	2,0	3,5	$\frac{1,5 + 2,0 + 3,5}{3} = 2,33$	
A_3	3,0	8,0	2,5	$\frac{3,0 + 8,0 + 2,5}{3} = 4,5$	4,5

Отже, за критерієм Бернуллі-Лапласа оптимальним буде альтернативне рішення A_3 .

Таким чином, розрахунок за більшістю поданих критеріїв, оптимальним є альтернативне рішення A_3 .

ЗМСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: ЕКОНОМЕТРИКА

ТЕМА 6

ЛІНІЙНА ОДНОФАКТОРНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

- 6.1. Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії
- 6.2. Економетрія як наука
- 6.3. Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами
- 6.4. Класифікація економетричних моделей та методів
- 6.5. Загальне поняття про лінійну регресію
- 6.6. Оцінювання параметрів лінійної регресії за методом найменших квадратів (МНК)
- 6.7. Коефіцієнти кореляції та детермінації
- 6.8. Поняття про ступені вільності та середні квадрати
- 6.9. Перевірка простої регресійної моделі на адекватність. Поняття F -критерію Фішера

6. 1. Об'єкт, предмет, мета та завдання економетрії

Об'єктом економетрії є економічні системи та простори різного рівня складності: від окремого підприємства чи фірми до економіки галузей, регіонів, держави й світу загалом.

Предмет економетрії – це методи побудови та дослідження математико-статистичних моделей економіки, проведення кількісних досліджень економічних явищ, пояснення та прогнозування розвитку економічних процесів.

Метою економетричного дослідження є аналіз реальних економічних систем і процесів, що в них відбуваються, за допомогою економетричних методів і моделей, їх застосування під час прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень.

Основне завдання економетрії – оцінити параметри моделей з урахуванням особливостей вхідної економічної інформації, перевірити відповідність моделей досліджуваному явищу і спрогнозувати розвиток економічних процесів.

6. 2. Економетрія як наука

Під час формалізації математичної моделі відображаються лише найсуттєвіші чинники та закономірності процесу (моделі), що вивчається.

Прикладом економічних моделей є моделі споживчого вибору, економічного зростання, модель фірми, модель рівноваги на товарних та фінансових ринках.

Будуючи моделі, економісти виявляють лише найсуттєвіші фактори, які визначають досліджуване економічне явище та відкидають деталі, які є несуттєвими для розв'язання поставленої проблеми.

Формалізація основних особливостей функціонування об'єкта (процесу, явища) дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на ці об'єкти (явища) інших чинників або явищ та використовувати такі оцінки для керування цими об'єктами.

Економетрія – це порівняно новий напрямок економічної науки, що утворився від поєднання теоретичної економіки, математики та статистики.

Слово «економетрія» (у деяких джерелах «економетрика») буквально означає «вимірювання в економіці» (гр. «економіка» – ведення домашнього господарства та «metreo» – вимірюю), що дає підстави під цим терміном розуміти все, що пов'язано з вимірюваннями в економіці.

Однак таке тлумачення надзвичайно широке і не відображає особливостей цієї галузі знань. З іншого боку, через необхідність застосування математико-статистичних методів інколи економетрії дають вужче тлумачення, а саме, розглядають її лише як певний набір математико-статистичних засобів, якими кількісно досліджують взаємозв'язки певних рядів статистичних даних.

Тому економетрія є самостійною науковою дисципліною, яка об'єднує сукупність теоретичних результатів, засобів, прийомів, методів і моделей, призначених для того, щоб на базі економічної теорії, економічної статистики та математико-статистичного інструментарію надавати конкретних кількісних значень загальним (якісним) закономірностям, обґрунтованим економічною теорією.

Завдання економічної теорії в межах економетрії полягають не лише в тому, щоб виявляти закони та зв'язки, які об'єктивно існують в економіці, а й описувати їх математичними методами. Економічна статистика акумулює всю інформацію про економічні процеси, що відбуваються в реальній економіці, та уособлює той практичний досвід, який має підтвердити чи спростувати відповідні економічні теорії. А під математико-статистичним інструментарієм розуміють не всю математичну статистику, а лише окремі її розділи: лінійні моделі регресійного аналізу, аналіз часових рядів, побудову та аналіз систем одночасних рівнянь, перевірку статистичних гіпотез.

Саме «приземлення» економічної теорії на базу конкретної економічної статистики та отримання за допомогою відповідних математичних методів кількісних взаємозв'язків між економічними показниками є сутністю економетрії. Зазначені в такий спосіб ключові моменти у визначенні економетрії забезпечують її розмежування з такими дисциплінами, як математична економіка, описова економічна статистика та математична статистика.

Математична економіка – це математично сформульована економічна теорія, що вивчає зв'язки між економічними змінними на загальному (некількісному) рівні. Вона стає економетрією, коли символічно подані в рівняннях коефіцієнти замінюють конкретними числовими оцінками, отриманими на базі відповідних статистичних даних (даних описової статистики) методами математичної статистики.

Отже, **економетрія** – це наука, що досліджує та встановлює кількісні взаємозв'язки та закономірності в економіці за допомогою математичних та статистичних методів.

6.3. Історичний розвиток економетрії, її зв'язок з іншими дисциплінами

Розвиток економетрії започаткувався в Стародавній Греції. Тоді економіка займалася питаннями раціонального господарювання. Заможне давньогрецьке рабовласницьке господарство було складною економічною системою, на якій відбивалися всі політичні, соціальні та ін. процеси, що відбувалися у тогочасному суспільстві.

Тому, зрозуміло, що окрім суто розрахункових питань в економіці виникала потреба у розв'язанні таких проблем: з яких одиниць має складатися раціонально побудована держава, в якому співвідношенні ці одиниці мають обмінюватись виробленими товарами, яку роль в суспільстві відіграють торгівля і гроші.

Проблеми економічної науки в такому ракурсі вперше було сформульовано Аристотелем. Він першим спробував описати та проаналізувати економічні закономірності. Саме Аристотель вперше висловив думку про перетворення грошей на капітал.

Таким чином, ще в давній Греції в економіці було започатковано 2 напрямки:

- аналіз методів раціонального керування господарством (цей напрямок дав поштовх для розвитку в майбутньому сучасного менеджменту);
- вивчення основних економічних закономірностей, що відбуваються в суспільстві (цей напрямок дав поштовх для розвитку політекономії).

У 1778 р. лейб-медик короля Людовіка XV Франсуа Кене (1694–1774 рр.) опублікував працю «Економічна таблиця», в якій спробував описати процес суспільного виробництва.

Якісний стрибок у використанні математичного моделювання в економічних дослідженнях пов'язаний з ім'ям німецького політеконома Карла Маркса (1818–1883 рр.).

Він розробив більш змістовну та глибоку, ніж Франсуа Кене, формалізовану схему суспільного відтворення, сформулював відповідну математичну модель цього процесу. Ця модель дала можливість виявити основні економічні закони суспільства та передбачити перспективи його розвитку.

Необхідно зауважити, що математичні методи в цій моделі мали допоміжний характер. В ті часи математичні моделі використовувалися з ілюстраційною метою, зокрема модель шотландця Адама Сміта (1723–1790 рр.) (класична макроекономічна модель), модель англійця Давида Рікардо (1772–1823 рр.) (модель міжнародної торгівлі).

У XIX столітті вагомий внесок в моделювання ринкової економіки зробила математична школа. Використання сучасних методів математичної статистики почалося в біології.

Засновником математичної статистики вважають англійського біолога, математика, статистика, філософа Карла Пірсона (1857–1936 рр.). Пірсон вивчав криві розподілу характеристик людського мозку, а також чисельні характеристики всього людського організму.

Перша робота з економетрії була опублікована в 1897 р.

Опублікував її один із засновників математичної школи в економіці – Вільфредо Парето (1848–1923 рр.). Ця робота була присвячена статистичному вивченню доходів населення в різних країнах світу. Була запропонована крива Парето:

$$y = A(x - a) - \alpha ,$$

де y – чисельність населення, яка має дохід, що є більшим за x ; x – досліджувана величина доходу;

a – мінімальний дохід;

A , α – параметри залежності, які було отримано статистичними методами.

З 1830-х рр. найбільш розвинені країни стали відчувати незрозумілі з погляду економічної науки того часу потрясіння: занепад ділової активності, виникнення масового безробіття.

Вже в кінці XIX століття неокласична теорія стала сприйматися як занадто віддалена від дійсності. Теорія могла стати переконливою у тому випадку, якщо вона б змогла пояснити зміни, що відбуваються в економіці.

Для її практичного застосування були потрібні кількісні вираження базових економічних термінів.

На початку XX століття англійський статист Р. Г. Гукер (1867–1944 рр.) застосував кореляційно-регресійні методи, розроблені Пірсоном, для вивчення взаємозв'язку різних економічних показників, а саме впливу кількості банкрутств на Берлінській товарній біржі на ціну зерна (1901 р.), залежність врожаю пшениці від погоди (1907 р.).

Р. Г. Гукер вимірював зв'язок між рівнем шлюбності та добробутом (1901 р.), в якому використовував кілька індикаторів добробуту (зокрема, зовнішню торгівлю).

Йому також належать перші дослідження часових рядів економічних змінних. Гукер встановив, що вплив змін в експорті та імпорті Англії найбільше позначається через 5 місяців, а зміни оборотів розрахункових палат – через 1 р. і 2,5 р. (коефіцієнт кореляції $r \approx 0,86$ і $r \approx 0,94$, відповідно).

Гукеру належить ідея кореляції не самих величин, а їх послідовних збільшень.

Важливим етапом формування економетрії стало розроблення економічних барометрів. Вони були основані на ідеї, що існують показники, які змінюються раніше за інші й тому можуть слугувати сигналами змін останніх.

Першим і найвідомішим став Гарвардський барометр, який був створений в 1903 році під керівництвом Уоррена Персона (1878–1937 рр.) та Уеслі Клер Мітчелла (1874–1948 рр.).

Приблизно з 1925 р. він втратив свою чутливість. Його крах пояснюється появою потужного регулювального чинника в економіці США.

У 1911 р. вийшла книга американського економіста Генрі Мура (1869–1958 рр.) «Закони заробітної плати: есе зі статистичної економіки».

У своєму дослідженні Г. Мур провів аналіз ринку праці, статистично перевіряв теорію продуктивності Дж. Кларка (1847–1938 рр.) і виклав основи стратегії об'єднання пролетаріату.

Г. Мур показав, що за допомогою статистико-математичних моделей, оснований на фактичних даних, можна розробити основу для соціальної політики.

У цей самий час італійський економіст Р. Беніні (1862–1956 рр.) вперше використав множинну регресію під час оцінювання функції попиту.

Отже, як самостійна дисципліна економетрія сформувалася у 20–30 рр. ХХ століття завдяки працям Генрі Мура і Теодора Шульца.

У перших працях розроблялися аналітико-статистичні моделі. Здебільшого це були рівняння лінійної регресії з параметрами, оцінюваними за методом найменших квадратів (МНК).

Такі рівняння дозволяли описувати функції попиту і залежність їх від прибутків, обсягів випуску продукції, цін, податків та інших чинників, а також функцій пропозиції, виробничих функцій, які відображали технологічну залежність випуску продукції від витрат праці та засобів виробництва.

Одна з перших виробничих функцій (1928 р.) була побудована Чарльзом Коббом (1875–1949 рр.) та Полом Дугласом (1892–1976 рр.).

Пізніше вона була вдосконалена Робертом Солоу (нар. у 1924 р.).

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

де Q – обсяг продукції;

L – робоча сила;

K – основний капітал;

α , β – коефіцієнти еластичності обсягу виробництва за витратами праці та капіталу; вони показують на скільки відсотків зросте Q за зростання L або K на 1%.

Ця виробнича функція широко використовується в економіко-математичному аналізі завдяки відносній простоті функціональної залежності і є достатньо універсальною. Але вона має деякі обмеження: не дозволяє забезпечити задану точність відновлення економічного процесу у разі фіксованого числа даних маркетингового дослідження.

Засновниками економетрії вважають норвежця Рагнара Фріша (1895–1973 рр.), австрійця Йозефа Шумпетера (1883–1950 р.), голландця Яна Тінбергена (1903–1994 р.) – послідовників неокласичної економічної школи і кейнсіанства.

Вони одними з перших цілеспрямовано намагалися поєднати економічну теорію з математичними та статистичними методами. Основним внеском цих

учених в економетрію є розроблення економетричних моделей прийняття рішень.

У ХХ столітті математичні моделі застосовувалися достатньо широко. З їх використанням пов'язані більшість праць, які були нагороджені Нобелівською премією.

Це праці Джона Хікса (1972 р.), Рагнара Фріша (1969 р.), Яна Тінбергена (1969 р.), Василя Леонтьєва (1973 рр.), Роберта Солоу (1987 р.), Пола Самуельсона (1970 р.).

Зауважимо, що термін «економетрія» вперше запровадив львівський учений Павло Чомпа (1867–1913 рр.), опублікувавши у Львові в 1910 р. книгу «Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка ґрунтується на політичній економії». Однак це поняття не набуло поширення, оскільки на той час не було фундаментальних праць у цій галузі науки.

Економетрія як окрема галузь науки відома під такою назвою лише з 1930 р. Саме тоді було засновано економетричне товариство, яке визначало себе так: «Міжнародне товариство для розвитку економічної теорії і її зв'язку зі статистикою та математикою».

Сьогодні економетрія посідає провідне місце в ряду економічних наук. Економетрію вивчають у провідних світових університетах, прийшло розуміння, що без економетричних методів неможливо проводити сучасний макро- і мікроекономічний аналіз.

6. 4. Класифікація економетричних методів та моделей

Існує багато різних класифікаційних напрямів економетричних моделей. Розглянемо один із підходів до їх поділу

Отже, за способом математичного подання економетричні моделі поділяють на:

- прості – економетричні моделі, подані одним рівнянням (залежністю);
- складні – економетричні моделі, подані кількома рівняннями (залежностями).

За кількістю факторних ознак, що містяться у моделі, економетричні моделі поділяють на:

- однофакторні – моделі містять одну незалежну ознаку;
- багатофакторні моделі мають два або більше незалежних фактори.

Однофакторні і багатофакторні моделі можуть подаватися лінійними або нелінійними функціями.

Залежно від того, чи присутній (відсутній) у моделі фактор часу, моделі бувають:

- динамічні: моделі часових рядів, зокрема, трендові моделі; моделі згладжування; моделі декомпозиції часового ряду; авторегресії – ковзного середнього;
- статичні.

6.5. Загальне поняття про лінійну регресію

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють залежність між двома змінними: факторною і результативною ознаками.

Наприклад, між витратами на відпустку і складом родини, між обсягом реалізованої продукції і витратами на рекламу.

При цьому одна із змінних вважається залежною змінною (y) та розглядається як функція від незалежної змінної (x).

У загальному вигляді **проста вибіркова лінійна регресія** записується так:

$$y = b_0 + b_1x + e \quad (6.1)$$

де y – вектор спостережень за залежною змінною (результативною ознакою) $y = \{y_1, \dots, y_n\}$;

x – вектор спостережень за незалежною змінною (факторною ознакою) $x = \{x_1, \dots, x_n\}$;

e – вектор випадкових величин (помилки) $e = \{e_1, \dots, e_n\}$;

b_0 та b_1 – невідомі параметри регресійної моделі.

Регресійна модель називається **лінійною**, якщо вона лінійна за своїми параметрами. Отже, модель (6.1) є лінійною регресійною моделлю.

Її ще можна трактувати як пряму на площині, де b_0 – перетин з віссю ординат, а b_1 – нахил (звичайно, якщо абстрагуватись від випадкової величини e).

6.6. Оцінювання параметрів лінійної регресії за методом найменших квадратів (МНК)

Для того, щоб визначити залежність між y та x потрібно знайти невідомі параметри b_0 та b_1 .

Це можливо, якщо мати певний критерій.

Розглянемо приклад.

Приклад. Бюро економічного аналізу фабрики «Світоч» оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок і тістечок. Для такого оцінювання є досвід роботи у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарного знака і т. п.).

У цих зонах зафіксовано протягом однакового періоду обсяги продажу (млн коробок) – y_i , витрати (млн грн.) фірми на просування товару на ринку – x_i .

Розглянемо дані у табл. 6.1, для чого ці спостереження зобразимо точками у системі координат (X, Y), як показано на рис. 6.1. Візуально можна припустити, що між даними є лінійна залежність, тобто їх можна апроксимувати прямою лінією.

Таблиця 6.1

Дані щодо залежності між витратами та обсягами продажу		
Географічна зона	y_i	x_i
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

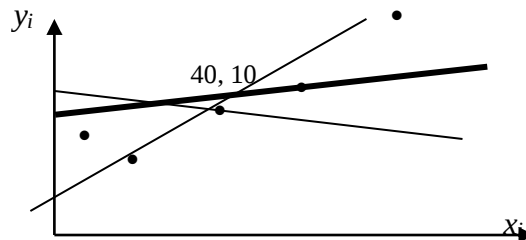


Рис. 6.1. Графік точок залежності

Взагалі існує безліч прямих, які можна провести через множину спостережуваних точок. Яку ж з них вибрати?

Для цього потрібно скористатися критерієм, який дасть змогу обрати «найкращу» із них за цим критерієм. Найпоширенішим є **критерій мінімізації суми квадратів відхилень**, тобто **метод найменших квадратів (МНК)**.

На рис. 6.1 будь-яка з прямих, яку можна провести через задані точки, має точки, які знаходяться над прямою і під нею. На основі цього можна встановлювати відхилення від безпомилкової прямої, зображені на рис 6.2.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i, \quad (6.2)$$

де $\hat{y}_i$ – i -та точка на прямій, яка відповідає значенню x_i .

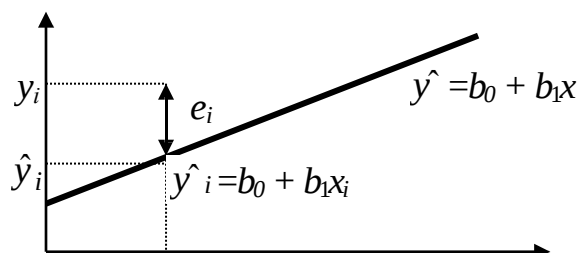


Рис. 6.2. Відхилення оцінених значень від емпіричних

Відхилення (помилки) називають ще залишками. Зрозуміло, що логічно вибирати таку пряму, щоб сума квадратів помилок була мінімальною. У цьому й полягає **критерій найменших квадратів**: невідомі параметри b_0 та b_1 визначаються таким чином, щоб мінімізувати суму квадратів помилок.

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{cov(x, y)}{var(x)} \quad (6.3)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \quad (6.4)$$

Чисельник (6.3) є коефіцієнтом коваріації між x та y . За означенням, **коефіцієнт коваріації (співзмінення)** цих величин) визначається за формулою:

$$cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \quad (6.5)$$

Коваріація (cov) – це абсолютна міра зв'язку між двома величинами. Знаменник (6.3) є **дисперсією** величини x , тобто:

$$var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (6.6)$$

Визначимо невідомі параметри (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Дані щодо залежності між витратами та обсягами продажу

Географічна зона	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	25	5	25	125
2	30	6	36	180
3	35	9	81	315
4	45	12	144	540
5	65	18	324	1170
$\sum$	200	50	610	2330
$\frac{\sum}{n}$	40	10	122	466

$$var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{610}{5} - 100 = 22$$

$$cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{2330}{5} - 400 = 66$$

$$b_1 = \frac{cov(x, y)}{var(x)} = \frac{66}{22} = 3$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 40 - 3 \times 10 = 10$$

Знаючи параметри b_0 та b_1 , отриману пряму запишемо у вигляді:

$$y = 10 + 3x$$

6.7. Коефіцієнти кореляції та детермінації

Після того, як визначені невідомі параметри регресійної моделі, необхідно оцінити щільність зв'язку між залежною величиною і незалежною.

Тобто потрібно відповісти на запитання, наскільки значним є вплив змінної x на y .

Найпростішим критерієм, який дає кількісну оцінку зв'язку між двома показниками, є **коефіцієнт кореляції**. Він розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (6.7)$$

$$\sigma_x = \sqrt{var(x)} \quad \sigma_y = \sqrt{var(y)}$$

де $cov(x, y)$ – коефіцієнт коваріацій між x та y ;

$var(x)$ – дисперсія змінної x ;

$var(y)$ – дисперсія змінної y .

Коефіцієнт кореляції, на відміну від коефіцієнта коваріації, є не абсолютною, а **відносною мірою зв'язку між двома факторами**, тому значення коефіцієнта кореляції (r_{xy}) змінюються у межах: від -1 до +1, тобто $-1 \leq r_{xy} \leq +1$.

Додатне значення коефіцієнта кореляції свідчить про прямий зв'язок між показниками, а від'ємне – про зворотний зв'язок. Коли коефіцієнт кореляції прямує до $r_{xy} \rightarrow 1$, це свідчить про наявність щільного зв'язку між двома факторами. У протилежному випадку – коефіцієнт кореляції прямує до нуля ($r_{xy} \rightarrow 0$), тобто зв'язку між змінними немає.

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною, яка характеризує ступінь залежності цих величин, яка виявляється в тому, що за умови зростання однієї випадкової величини інша також виявляє тенденцію до зростання (чи убуття). У першому випадку говорять, що випадкові величини пов'язані позитивною кореляцією, а в другому – кореляція негативна.

Поряд з коефіцієнтом кореляції використовується ще один критерій, за допомогою якого також вимірюється щільність зв'язку між двома або більше показниками та перевіряється адекватність (відповідність) побудованої моделі реальній дійсності. Тобто дається відповідь на запитання чи справді змінна y лінійно залежить від змінної x .

Таким критерієм є **коефіцієнт детермінації**:

$$R^2 = \frac{\sigma_{\text{регр}}^2}{\sigma_{\text{заг}}^2} = \frac{SSR}{SST} \quad (6.8)$$

де $\sigma_{\text{регр}}^2$ – дисперсія, що пояснює регресію;

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n} \quad (6.9)$$

де $\sigma_{\text{заг}}^2$ – загальна дисперсія;

$$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} \quad (6.10)$$

SST – загальна сума квадратів;

SSR – загальна сума квадратів, що пояснює регресію.

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (6.11)$$

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (6.12)$$

$$R^2 = r^2 \quad (6.13)$$

Повернемося до нашого прикладу. Розрахуємо коефіцієнт кореляції та детермінації.

Таблиця 6.3

Дані щодо залежності між витратами та обсягами продажу

I	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - y_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$
1	25	5	25	125	-15	225	25	0	225
2	30	6	36	180	-10	100	28	4	144
3	35	9	81	315	-5	25	37	4	9
4	45	12	144	540	5	25	46	1	36
5	65	18	324	1170	25	625	64	1	576
$\sum$	200	50	610	2330	0	1000		10	990
$\frac{\sum}{n}$	40	10	122	466	0	200			

$$\bar{x} = 10, \bar{y} = 40$$

$$b_1 = 3; b_0 = 10$$

$$y = 3x + 10;$$

$$var(x) = 22$$

$$\text{cov}(x, y) = 66$$

$$\text{var}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 200$$

$$\sqrt{\text{var}(y)} = \sigma_y = 14$$

$$\sqrt{\text{var}(x)} = 4,7$$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)\text{var}(y)}} = \frac{66}{66,3} = 0,995$$

$$r^2 = \frac{[\text{cov}(x, y)]^2}{\text{var}(x)\text{var}(y)} = \frac{66 * 66}{22 * 200} = 0.99$$

6.8. Поняття про ступені вільності та середні квадрати

Щоб застосувати критерій Фішера, варто з'ясувати сутність **поняття про ступені вільності**.

Кожна сума квадратів пов'язана з числом, яке називається її **ступенем вільності**. Це число показує, скільки незалежних елементів інформації, які утворюються з елементів $(y_1, \dots, y_n)$ потрібно для розрахунку цієї суми квадратів.

У статистиці кількістю ступенів вільності певної величини часто називають різницю між кількістю різних дослідів і кількістю констант, встановлених в результаті цих дослідів, незалежно один від одного.

Розглянемо скільки ступенів вільності має кожна сума квадратів.

Для утворення загальної суми квадратів SST потрібно $(n-1)$ незалежних чисел, тому що з чисел $\{(y_1 - \bar{y}), (y_2 - \bar{y}), \dots, (y_n - \bar{y})\}$ незалежні тільки $(n - 1)$ завдяки властивості:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = 0 \quad (6.14)$$

Сума квадратів, що пояснює регресію, SSR має $(n-1)$ незалежну одиницю інформації (n – кількість параметрів у регресійній моделі), яка утворюється з $y_1, \dots, y_n$, тобто незалежними одиницями інформації є параметри $b_1 \dots b_p$, оскільки параметр b_0 не утворюється з $y_1, \dots, y_n$. У випадку простої (однофакторної) лінійної регресії SSR має лише одну незалежну одиницю інформації, а саме параметр b_1 , оскільки параметр b_0 не утворюється на базі незалежних одиниць $y_1, \dots, y_n$.

Сума квадратів помилок SSE базується на кількості ступенів вільності, що дорівнює $(n - m)$, тобто різниці між кількістю дослідів n і кількістю

параметрів, що оцінюються m . У разі простої лінійної регресії оцінюються два параметри b_0 та b_1 , то в такому випадку SSE має $(n - 2)$ ступеня вільності.

У разі простої (однофакторної) лінійної регресії:

$$\begin{aligned} SST &= SSE + SSR \\ n-1 &= n-2 + 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Використовуючи суми квадратів та відповідні їм ступенів вільності, введемо поняття про середні квадрати.

Середнім квадратом називається сума квадратів, поділена на відповідний їй ступінь вільності

Середній квадрат помилки (MSE) – сума квадратів помилок, поділена на відповідний їй ступінь вільності:

$$MSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - 2) \quad (6.16)$$

Середній квадрат, що пояснює регресію, позначається через **MSR** та відповідно дорівнює сумі квадратів, що пояснює регресію, поділену на її ступінь вільності $(n - 1)$.

Оскільки у разі простої лінійної регресії кількість параметрів $n=2$, то SSR має лише один ступінь вільності $2 - 1 = 1$, тобто середній квадрат збігається із сумою квадратів, а саме: $MSR = SSR$.

$$MRS = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} = SSR \quad (6.17)$$

Потрібно зазначити, що для загальної суми квадратів середній квадрат не розраховується.

Суми квадратів, пов'язані з певними джерелами варіації, а також їх ступенями вільності та середніми квадратами, наведено у табл. 6.4.

Таблиця 6.4

ANOVA-таблиця

Сума квадратів	Кількість ступенів вільності	Середні квадрати
$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	$MRS = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} = SSR$
$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n - 2$	$MSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - 2)$

$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	$n - 1$	
--	---------	--

6.9. Перевірка простої регресійної моделі на адекватність. Поняття F-критерію Фішера

У попередніх пунктах було показано, що адекватність простої лінійної регресивної моделі можна перевірити за допомогою коефіцієнта детермінації. Якщо його значення близьке до одиниці, то можна вважати, що модель адекватна.

Якщо його значення наближається до 0, то модель неадекватна, тобто лінійного зв'язку між двома змінними немає. Але, який висновок можна зробити, якщо значення коефіцієнта детермінації має нечітко виражене граничне значення, наприклад 0.44, 0.45, 0.5, 0.54 і т. п.

Зрозуміло, що в таких випадках важко зробити однозначний висновок про наявність зв'язку відповідної форми, тобто про адекватність моделі. Потрібен інший критерій, який би однозначно відповідав на питання про адекватність моделі.

Найпоширенішим серед таких критеріїв є **критерій Фішера**. Він дає змогу перевірити наявність або відсутності лінійного зв'язку між змінними, тобто перевірити адекватність побудованої регресійної моделі реальності.

Перевірка моделей на адекватність за F -критерієм Фішера передбачає такі етапи:

1. На першому етапі розрахунок величини F -відношення:

$$F_{(1,n-2)} = \frac{SSR / 1}{SSE / (n - 2)} = \frac{MSR}{MSE} \quad (6.17)$$

де MSR – середній квадрат, що пояснює регресію;

MSE – середній квадрат помилок; $(n-2)$ – ступені вільності.

2. На другому етапі задаємо рівень значимості α або α 100% . Наприклад, якщо ми вважаємо, що можлива помилка для нас становить 0,05 (5%), то це означає, що ми можемо помилитися не більше, ніж у 5% випадків, а у 95% = $(100(1 - \alpha))\%$ наші висновки будуть правильними.

3. На третьому етапі за статистичними таблицями F -розподілу Фішера зі ступенями вільності $(1, n-2)$ ступенями вільності і рівнем значимості $(100(1 - \alpha))\%$ обчислимо критичне (табличне) значення $F_{кр}$.

4. Якщо розраховане нами значення $F > F_{кр}$, то побудована нами регресійна модель є адекватною (ризик помилитися є не більшим, ніж у 5% випадків) і нульова гіпотеза H_0 не справджується.

Якщо навпаки: $F < F_{кр}$, то побудована нами регресійна модель є неадекватною (ризик помилитися є не більшим, ніж у 5% випадків) і нульова гіпотеза H_0 справджується.

Повернемося до прикладу. Перевіримо розраховану раніше модель на адекватність за F-критерієм Фішера.

Таблиця 6.5

Дані щодо залежності між витратами та обсягами продажу

I	y_i	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
1	25	25	0	225
2	30	28	4	144
3	35	37	4	9
4	45	46	1	36
5	65	64	1	576
Σ	200		10	990

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 990$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 10$$

$$MSR = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} = \frac{990}{1} = 990$$

$$MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{10}{3} = 3.33$$

Використовуючи значення середніх квадратів, обчислимо F-відношення Фішера:

$$F_{(1,n-2)} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{990}{3.33} = 300$$

За таблицею F-розподілу знаходимо критичне значення $F_{кр}$

З 1 та 3 ступенями вільності, задавши попередньо рівень довіри 95% або рівень значимості (помилки) 5%. Це буде точка $F_{(1;3;0,95)}=10,13$.

Розраховане значення $F_{(1;3)}=300$, а табличне значення $F_{(1;3;0,95)кр}=10,13$.

Отже, $F > F_{кр}$, що дозволяє зробити висновок про адекватність побудованої моделі.

Приклад.

Студенти підробляють у вільний час. Є такі дані про те, скільки годин на тиждень вони працюють (X), та який у них місячний дохід у доларах (Y):

Дані щодо залежності доходу студента від кількості годин роботи

I	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$
1	240	5	25	1200	-312	97344	242	4	96100
2	410	10	100	4100	-142	20164	397	169	24025
3	530	15	225	7950	-22	484	552	484	0
4	720	20	400	14400	168	28224	707	169	24025
5	860	25	625	21500	308	94864	862	4	96100
$\sum$	2760	75	1375	49150	0	241080	2760	830	240250
$\frac{\sum}{n}$	552	15	275	9830	0	48216			

Знайдемо невідомі параметри

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{cov(x, y)}{var(x)} = \frac{\frac{49150}{5} - (552 * 15)}{\frac{1375}{5} - 225} = 32$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 552 - 32 * 15 = 72$$

Знаючи параметри b_0 та b_1 , отриману пряму запишемо у вигляді:

$$y = 72 + 32x$$

72 – базовий дохід студента, навіть без підробітку (можливо, стипендія або допомога).

32 – кожна додаткова година підробітку на тиждень додає **\$30** до щомісячного доходу.

Визначимо коефіцієнт кореляції та коефіцієнт детермінації

$$var(x) = 50$$

$$cov(x, y) = 1550$$

$$var(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 48216$$

$$r_{xy} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} = \frac{1550}{1552} = 0,998$$

Коефіцієнт кореляції $r \approx 1$. → дуже сильний позитивний зв'язок.

$$r^2 = \frac{[cov(x, y)]^2}{var(x)var(y)} = \frac{1550 * 1550}{50 * 48216} = 0,996$$

Перевіримо модель на адекватність за критерієм Фішера

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 240240$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 830$$

$$MSR = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1} = \frac{240240}{1} = 240240$$

$$MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{830}{3} = 267,67$$

Використовуючи значення середніх квадратів, обчислимо F-відношення Фішера:

$$F_{(1,n-2)} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{240240}{267,67} = 897,52$$

За таблицею F-розподілу знаходимо критичне значення $F_{кр}$

З 1 та 3 ступенями вільності, задавши попередньо рівень довіри 95% або рівень значимості (помилки) 5%. Це буде точка $F_{(1;3;0,95)}=10,13$.

Розраховане значення $F_{(1;3)}=897,52$, а табличне значення $F_{(1;3;0,95)кр}=10,13$.

Отже, $F > F_{кр}$, що дозволяє зробити висновок про адекватність побудованої моделі.

Можемо зробити прогноз

Скільки зароблятиме студент, якщо працює 18 год/тиждень?

$$y=72+32 \cdot 18=72+576=648 \text{ доларів/міс.}$$

ТЕМА 7

ЛІНІЙНА БАГАТОФАКТОРНА ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ

7.1. Загальне поняття багатофакторної регресії

7.2. Оцінювання параметрів лінійної багатофакторної регресії за методом найменших квадратів (МНК)

7.3. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації

7.4. Перевірка моделі на адекватність за F–критерієм Фішера

7.1. Загальне поняття багатофакторної регресії

Багатофакторна лінійна регресія є звичайним продовженням лінійної регресії.

У багатофакторній регресії ми припускаємо, що на залежну змінну y може впливати більше, ніж один фактор. Наприклад, обсяг продажу компанії може залежати як від ціни товару, так і від кількості грошей, затрачених на рекламу і т. ін.

Багатофакторна регресія (також відома як **множинна лінійна регресія**) – це статистичний метод, який дозволяє моделювати залежність однієї **залежної змінної** (результату) від **кількох незалежних змінних** (факторів).

Узагальнена **багатофакторна лінійна регресійна модель** записується так:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + e \quad (7.1)$$

де y – залежна змінна (те, що ми прогнозуємо);

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні змінні;

e – випадкова величина (помилка)

$b_0, b_1, \dots, b_p$ – невідомі параметри регресійної моделі.

Лінійною регресійною моделлю називається модель, лінійна за своїми параметрами.

Багатофакторна регресійна модель має p незалежних змінних, або факторів, які впливають на залежну змінну y та $(p+1)$ невідомих параметрів, які потрібно оцінити.

Фактори множинної регресії повинні бути лінійно незалежними між собою. Якщо вони лінійно залежні, ми маємо **мультиколінеарність**.

У багатофакторній регресії, як і в простій лінійній регресії, невідомі параметри розраховують за методом найменших квадратів.

7.2. Етапи побудови багатофакторної регресійної моделі

Процес побудови багатофакторної регресійної моделі більш складний, ніж процес побудови простої лінійної регресії.

Етапи:

1. Вибір та аналіз усіх можливих факторів, які впливають на процес або показник), що вивчається.

2. Вимір та аналіз знайдених факторів.

3. Математико-статистичний аналіз факторів.
4. Вибір методу та побудова регресійної багатфакторної моделі.
5. Оцінка невідомих параметрів регресійної моделі.
6. Перевірка моделі на адекватність.
7. Розрахунок основних характеристик та побудова інтервалів довіри.
8. Аналіз отриманих результатів, висновки.

7.3. Оцінювання параметрів лінійної багатфакторної регресії за методом найменших квадратів (МНК)

Як і у випадку простої лінійної регресії, невідомі параметри багатфакторної лінійної регресії знайдемо за методом найменших квадратів, тобто мінімізуючи суму квадратів відхилень фактичних даних від теоретичних.

Оцінка параметрів у багатфакторній регресії тільки з двома факторами визначаються за формулою:

$$b_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n x_{i2}^2 - n\bar{x}_2^2)[\sum_{i=1}^n x_{i1}y_i - n\bar{x}_1\bar{y}] - ((\sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)(\sum_{i=1}^n x_{i2}y_i - n\bar{x}_2\bar{y}))}{(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - n\bar{x}_1^2)(\sum_{i=1}^n x_{i2}^2 - n\bar{x}_2^2)(\sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)^2} \quad (7.2)$$

$$b_2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - n\bar{x}_1^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_{i2}y_i - n\bar{x}_2\bar{y}\right) - (\sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)[\sum_{i=1}^n x_{i1}y_i - n\bar{x}_1\bar{y}]}{(\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - n\bar{x}_1^2)(\sum_{i=1}^n x_{i2}^2 - n\bar{x}_2^2)(\sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} - n\bar{x}_1\bar{x}_2)^2} \quad (7.3)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 \quad (7.4)$$

7.3. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації

Коефіцієнт множинної кореляції визначається за формулою:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}} \quad (7.5)$$

Квадрат коефіцієнта множинної кореляції називають коефіцієнтом детермінації і позначають R^2 :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (7.6)$$

7.4. Перевірка моделі на адекватність за F-критерієм Фішера

Для перевірки адекватності багатфакторної регресійної моделі, як і у випадку простої лінійної моделі, використовується F -критерій Фішера.

Для перевірки моделі розраховується F -статистика Фішера з p та $(n-p-1)$ ступенями вільності:

$$F_{p,n-p-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / p}{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n - p - 1)} \quad (7.7)$$

де p – кількість факторів, які увійшли в модель; n – загальна кількість спостережень.

За F -таблиця Фішера знаходимо критичне значення $F_{\alpha p}$ з p та $(n-p-1)$ ступенями вільності, задавши попередньо рівень помилки α 100% (або рівень довіри $(1 - \alpha)$ 100%).

Якщо $F > F_{\alpha p}$, тоді нуль-гіпотеза відкидається, що свідчить про адекватність побудованої моделі. У протилежному випадку вона приймається і модель вважається неадекватною.

ТЕМА 8

ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ

- 8.1. Основні поняття і попередній аналіз рядів динаміки
 - 8.1.1. Поняття часового ряду
 - 8.1.2. Основі характеристики динаміки часового ряду
 - 8.1.3. Систематичні та випадкові компоненти часового ряду
- 8.2. Перевірка гіпотези про існування тренду
- 8.3. Методи прогнозування часових рядів

8.1. Основні поняття і попередній аналіз рядів динаміки

8.1.1. Поняття часового ряду

При побудові економетричної моделі використовують два типи даних: дані, що характеризують сукупність різних об'єктів у певний момент часу; дані, що характеризують один об'єкт за ряд послідовних моментів часу.

Моделі, побудовані на підставі даних першого – **просторові моделі**. Моделі, побудовані на підставі даних другого типу – **моделі часових рядів**.

Часовий ряд (ряд динаміки) – сукупність значень будь-якого показника за кілька послідовних моментів або періодів часу.

Складовими ряду спостережень є числові значення показника, які називають **рівнями ряду**, та моменти або інтервали часу, до яких належать рівні.

Довжина ряду – час, що минув від першого до останнього моменту спостереження. Часто довжиною ряду називають кількість рівнів n , які утворюють часовий ряд.

Моментні часові ряди – часові ряди, утворені показниками, що характеризують економічне явище на певні моменти часу; прикладом такого ряду є дані щодо виданих позичок відділенням Держбанку (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Моментний часовий ряд

Дата надання позички	01.10	05.10	12.10	23.10	03.11	07.11
Величина наданої позички, тис. грн. од	3747	3710	3839	3783	3747	3710

Інтервальні часові ряди – якщо рівні часового ряду утворюються шляхом агрегування за певний проміжок (інтервал) часу; приклад наведено в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Інтервальний часовий ряд

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень
Обсяг залучених депозитів, млн грн	6578	7016	7353	7353	7941	8020

Часові ряди можуть бути створені як з абсолютних значень економічних показників, так із середніх або відносних величин – це **похідні ряди**; приклад такого ряду наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Часовий ряд, утворений із середніх значень показників

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень
Середня заробітна плата працівників банківської установи, грн / міс	152,2	153,7	165,8	161,61	163,71	165,2

8.1.2. Основі характеристики динаміки часового ряду

Для аналізу соціально-економічних показників абсолютні рівні моментних або інтервальних часових рядів, а також рівні середніх величин часто доводиться перетворювати на відносні величини. До найпоширеніших характеристик динаміки розвитку соціально-економічних процесів та їхніх розрахунків належать: абсолютний приріст, коефіцієнти зростання та приросту, темпи зростання та приросту, середні арифметична, хронологічна тощо (табл. 8.4).

Таблиця 8.4

Характеристики динаміки часових рядів

Характеристики	Формули для розрахунку
Абсолютний приріст	$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}$
Коефіцієнт зростання	$K_{i(зр)} = \frac{y_i}{y_{i-k}}$
Коефіцієнт приросту	$K_{i(пр)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}}$
Темп зростання	$T_{i(зр)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} 100\% = K_{i(зр)} 100\%$
Темп приросту	$T_{i(пр)} = T_{i(зр)} - 100\%$ або $T_{i(пр)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} 100\%$
Середня арифметична	$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$
Середня хронологічна	$\bar{y} = \frac{\sum y_i t}{\sum t}$
Середній абсолютний приріст	$\Delta y = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$
Середній темп зростання	$\bar{T}_{(зр)} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%$
Середній темп приросту	$\bar{T}_{(пр)} = \bar{T}_{(зр)} - 100\%$

Для визначення змін, що відбуваються з досліджуваним явищем, передусім обчислюють швидкість розвитку цього явища за часом. Показник швидкості слугує **абсолютний приріст**, який характеризує зміни показника за інтервал часу між порівнюваними періодами й обчислюється за формулою:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-k} \quad (8.1)$$

де y_i – i -й рівень часового ряду ($i=2, 3, \dots, n$);

k – індекс початкового рівня; $k = 1, 2, \dots, n-1$ і може бути обраний будь-яким залежно від мети дослідження: за $k = 1$ отримують ланцюгові показники, за $k = i-1$ отримуються базові показники із базовим початковим рівнем ряду тощо.

Точніше, швидкість зміни показника характеризує приріст з одиницю часу; ця величина – **середній абсолютний приріст**:

$$\Delta \bar{y}_k = \frac{y_i - y_{i-k}}{k} \quad (8.2)$$

Середній абсолютний приріст за весь період спостереження для заданого часового ряду дорівнює:

$$\Delta y = \frac{y_n - y_1}{n - 1} \quad (8.3)$$

і характеризує середню швидкість зміни часового ряду, де n – індекс останнього спостереження.

Для визначення відносної швидкості зміни економічного явища як одиницю часу використовують відносні показники: коефіцієнти зростання й приросту (якщо ці показники виражені у відсотках, їх називають, відповідно, темпами зростання й приросту).

Коефіцієнт зростання для i -го періоду обчислюють за формулою:

$$K_{i(зр)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \quad (8.4)$$

$K_{i(зр)} > 1$, якщо рівень підвищується; $K_{i(зр)} < 1$, якщо рівень зменшується; за $K_{i(зр)} = 1$ рівень не змінюється.

Коефіцієнт приросту дорівнює:

$$K_{i(пр)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \quad (8.5)$$

або

$$K_{i(пр)} = K_{i(зр)} - 1 \quad (8.6)$$

На практиці часто застосовують **показники темпу зростання й темпу приросту**:

$$T_{i(\text{зр})} = \frac{y_i}{y_{i-k}} 100\%$$

$$T_{i(\text{пр})} = T_{i(\text{зр})} - 100\% \quad (8.7)$$

або

$$T_{i(\text{пр})} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} 100\% \quad (8.8)$$

Темп приросту показує, на скільки відсотків рівень одного періоду збільшився стосовно рівня іншого періоду, тобто цей показник характеризує відносну величину приросту у відсотках.

Порівняння абсолютного приросту та темпу приросту за той самий інтервал часу показує, що в реальних економічних процесах уповільнення темпу приросту часто не супроводжується зменшенням абсолютних приростів.

Середню швидкість зміни показника, що вивчається, за певний період характеризує також **середній темп зростання**. Його розраховують за формулою середньої геометричної:

$$\bar{T}_{(\text{зр})} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\% \quad (8.9)$$

Середній темп приросту визначають як

$$\bar{T}_{(\text{пр})} = \bar{T}_{(\text{зр})} - 100\% \quad (8.10)$$

8.1.3. Систематичні та випадкові компоненти часового ряду

При дослідженні часового ряду виникає питання існування систематичної та випадкової компонент, які дозволяють ідентифікувати природу цього ряду, побудувати адекватну модель та розрахувати прогнозні значення досліджуваного показника. Існує дві основні мети аналізу часових рядів:

1. Визначення природи ряду.
2. Прогнозування.

Моделі тренду й сезонності (тренд-сезонні) можуть відображати як відносно постійну сезонну хвилю (цикл), так і динамічно змінювану залежно від тренду. Перша форма належить до адитивних, друга – до мультиплікативних моделей.

Систематичні компоненти часового ряду – тренд, сезонна і циклічна компоненти.

Випадкова компонента (залишки, помилки) E_t – складова частина часового ряду, що залишається після вилучення систематичних компонент.

Тенденція, тренд – не випадкова складова часового ряду, яка змінюється повільно і описується за допомогою певної функції, яку називаються функцією тренду.

Тренд відображає вплив на економічний показник деяких постійних чинників, дія яких акумулюється в часі.

Послідовність етапів побудови економіко-математичної моделі часового ряду:

1. Вирівнювання вихідного ряду за методом змінної середньої.
2. Розрахунок значень сезонної компоненти S .
3. Видалення сезонної компоненти із вихідних рівнів ряду й отримання вирівняних даних $(T + E)$ у адитивній або $(T \cdot E)$ у мультиплікативній моделі.
4. Аналітичне вирівнювання рівнів $(T + E)$ або $(T \cdot E)$ та розрахунок значень T з використанням отриманого рівняння тренду.
5. Розрахунок отриманих за моделлю значень $(T + E)$ або $(T \cdot E)$.
6. Розрахунок абсолютних і/та відносних помилок. Якщо отримані значення помилок не містять автокореляції, ними можна замінити вихідні рівні ряду і у подальшому використовувати часовий ряд помилок E для аналізу взаємозв'язку вихідного ряду й інших часових рядів.

8.2. Перевірка гіпотези про існування тренду

За наявності у часовому ряду тенденції й циклічних коливань значення кожного наступного рівня ряду залежать від попередніх. Кореляційну залежність між послідовними рівнями часового ряду називають **автокореляцією рівнів ряду**.

Кількісно її можна виміряти за допомогою лінійного коефіцієнта кореляції між рівнями вихідного часового ряду і рівнями цього ряду, зсунутих на декілька кроків у часі.

Формула розрахунку коефіцієнта автокореляції має вигляд:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}} \quad (8.11)$$

де

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_t \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_{t-1}$$

Цю величину називають коефіцієнтом автокореляції рівнів ряду першого порядку, так як він вимірює залежність між сусідніми рівнями ряду t і y_{t-1} .

Під час досліджень економічних показників результат впливу факторів на їх значення простежується не відразу, а через певний проміжок часу, що викликає необхідність введення лага.

Лag – це запізнення впливу факторів на досліджуваний показник. Математично виражається як кількість періодів, за якими розраховується коефіцієнт автокореляції.

Із збільшенням лага кількість спостережень, за якими розраховується коефіцієнт автокореляції, зменшується. Для забезпечення статистичної достовірності коефіцієнтів автокореляції необхідно використовувати наступне правило – максимальний лаг має бути не більше – $n/4$.

Автокореляційна функція часового ряду – послідовність коефіцієнтів автокореляції рівнів першого, другого тощо порядків.

Корелограма – графік залежності значень автокореляційної функції від величини лага (порядка коефіцієнта автокореляції).

Аналіз автокореляційної функції і корелограми дозволяє визначити лаг, при якому автокореляція найбільш висока, а отже, і лаг, при якому зв'язок між поточним і попередніми рівнями ряду найбільш тісна, тобто за допомогою аналізу автокореляційної функції і корелограми можна виявити структуру ряду.

Якщо найбільш високим виявився коефіцієнт автокореляції першого порядку, досліджуваний ряд містить тільки тенденцію. Якщо найбільш високим виявився коефіцієнт автокореляції порядку τ , то ряд містить циклічні коливання з періодичністю в τ моментів часу. Якщо жоден із коефіцієнтів автокореляції не є значимим, можна зробити одне з двох припущень відносно структури цього ряду: або ряд не містить тенденції і циклічних коливань, або ряд містить сильну нелінійну тенденцію, для виявлення якої треба провести додатковий аналіз. Тому коефіцієнт автокореляції рівнів і автокореляційну функцію доцільно використовувати для виявлення у часовому ряді наявності чи відсутності трендової компоненти і циклічної (сезонної) компоненти.

8.3 Методи прогнозування часових рядів

Одним з основних завдань дослідження та аналізу часових рядів з визначення головних тенденцій їх зміни та перспектив, основних напрямів розвитку в майбутньому, що дозволяють отримати результати прогнозів.

Прогноз – це науково обгрунтоване судження стосовно можливих станів об'єкта в майбутньому, альтернативні шляхи й терміни їх здійснення.

Прогноз має випадковий характер, та оскільки він будується на підставі аргументованих наукових уявлень про стан і розвиток об'єкта, здійснення його є доволі ймовірним. Самі розробники прогнозу оцінюють його як очікуваний, ймовірний стан об'єкта в майбутньому.

Прогнозування – це процес розроблення прогнозів.

Методи прогнозування:

1. Кількісні методи:

- каузальні методи (багатовимірні регресійні моделі, економетричні моделі, комп'ютерна імітація);
- аналіз часових рядів.

2. Якісні методи.

КОРОТКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Економетрія	– це наука, що досліджує та встановлює кількісні взаємозв'язки та закономірності в економіці за допомогою математичних та статистичних методів
Економіко-математична модель	– концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь
Економіко-математичне моделювання	– це процес побудови, реалізації та дослідження соціально-економічних систем математичними засобами, що включає в себе систему рівнянь і нерівностей математичного опису економічних процесів та явищ, які складаються з набору змінних і параметрів
Задача лінійного програмування	– задача знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь
Задача цілочислового програмування	– задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею
Інтервальні часові ряди	– якщо рівні часового ряду утворюються шляхом агрегування за певний проміжок (інтервал) час
Моментні часові ряди	– часові ряди, утворені показниками, що характеризують економічне явище на певні моменти часу
Математична модель	– це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється
Математичне програмування (mathematical programming)	– розроблення за допомогою математичних розрахунків програми дій для досягнення певної мети; вибір найкращого (наїефективнішого), з усіх можливих, варіанту розвитку деякого економічного процесу
Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра)	– це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез
Симплекс-метод	– це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування
Теорія ігор	– це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри
Транспортна задача	– це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів
Цикл у транспортній задачі	– замкнена ламана лінія, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці
Часовий ряд (ряд динаміки)	– сукупність значень будь-якого показника за кілька послідовних моментів або періодів часу

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.
2. Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. 440 с.
3. Економіко-математичне моделювання в обліково-аналітичному забезпеченні діяльності підприємства в умовах розвитку цифрових технологій / О. В. Скорук, О. О. Подзійей, Т. О. Шматковська. *Інвестиції: практика та досвід*. 2025. № 19. DOI: <https://doi.org/10.32702/2306-6814.2025.19.159>
4. Козьменко О. В., Кузьменко О. В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) : навч. посіб. Суми : Університетська книга, 2023. 406 с.
5. Кузьмін О. Є., Новаківський І. І. Економіко-математичні методи та моделі у науково-дослідних роботах : навч. посіб. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2021. 284 с.
6. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності : навч. посіб. / Волонтир Л. О., Потапова Н. А., Ушкаленко І. М., Чіков І. А. Вінниця : ВНАУ, 2020. 404 с.
7. Полінкевич О. М., Волинець І. Г. Обґрунтування управлінських рішень та оцінювання ризиків: навч. посіб. Луцьк : Вежа-Друк, 2023. 1 електрон. опт. диск (CD-ROM). Об'єм даних 9,59 Мб.
8. Руська Р. В. Економетрика : навч. посібник. Тернопіль: Тайп, 2021. 248 с
9. Скорук О. В. Економіко-математичне моделювання сталого розвитку у діяльності підприємств. *Економічний часопис Волинського національного університету імені Лесі Українки*. 2023. Том 4 № 36. С. 183–189. DOI : <https://doi.org/10.29038/2786-4618-2023-04-183-189>.
10. Скорук О. В. Ефективність економіко-математичного моделювання в оптимізації бізнес-процесів. *Економіка та суспільство*. 2023. № 57. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/3134>
11. Скорук О. В., Грудзевич Ю. І. Інтеграція цифрових технологій та економіко-математичного моделювання в бізнес-процесах підприємств. *Цифрова економіка та економічна безпека*. 2024. Випуск 6(15). URL: <http://dees.iei.od.ua/index.php/journal/article/view/496> DOI: 10.32782/dees.15-12.
12. Скорук О. В. Оптимізаційні методи і моделі : навч. посіб. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2023. 273 с. URL : <https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/22437>
13. Скорук О. В. Оптимізаційні методи та моделі : метод. вказівки для практичних занять. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2021. 150 с.
14. Скорук О. В. Оптимізаційні методи та моделі : метод. рекомендації для самостійної роботи. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2023. 28 с. URL : <https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/23154>
15. Bhunia A. K., Laxminarayan S., Shaikh A. A. Advanced Optimization and Operations Research. Singapore: Springer, 2019. 626 p.
15. Tshepo Chris Nokeri. Econometrics and Data Science. Apress. 2022. 228 p.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Навчальне видання

Грудзевич Юлія Ігорівна
Скорук Олена Володимирівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Конспект лекцій

Друкується в авторській редакції

Підп. до друку __.__.2025. Формат 60x84/16. Папір офс.
Гарн. Таймс New Roman. Ум. друк. арк.3,15
Тираж 50 прим.