

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Федуник-Яремчук О.В., Соліч К.В., Падалко Н.Й.

Числові ряди:

методичні вказівки

Луцьк 2025

УДК 517.521 (072)

Ф 34

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 3 від 19 листопада 2025 року)

Рецензенти:

Гембарська Світлана Борисівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Костючко Сергій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету

Ф 34

Федуник-Яремчук О.В., Соліч К.В., Падалко Н.Й. Числові ряди: методичні вказівки з освітнього компонента “Математичний аналіз” для студентів, які навчаються за спеціальностями: Середня освіта (Математика), Математика/Оксана Володимирівна Федунік-Яремчук, Катерина Василівна Соліч, Ніна Йосипівна Падалко. Луцьк, 2025. 75 с.

Методичні вказівки призначені для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, а також самостійної роботи здобувачів у рамках курсу „Математичний аналіз”. Викладено основні теоретичні положення із розділу математичного аналізу “Числові ряди”; наведено приклади розв’язання типових задач, завдання для самостійної роботи та самоконтролю, а також індивідуальні завдання.

Мета розробки – допомогти студентам засвоїти основні поняття і методи математичного аналізу, виробити вміння застосовувати теоретичний матеріал в практичних задачах, підготувати студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

УДК 517.521 (072)

© О.В. Федунік-Яремчук, К.В. Соліч, Н.Й. Падалко

© Волинський національний університет
імені Лесі Українки, 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
1. Поняття числового ряду. Умови збіжності числового ряду	5
2. Арифметичні дії над числовими рядами	12
3. Ряди із додатними членами. Ознаки порівняння	14
4. Ознаки Даламбера збіжності числових рядів з додатними членами	23
5. Ознаки Коші збіжності числових рядів із додатними членами	28
6. Інтегральна ознака збіжності числових рядів з додатними членами	31
7. Ознаки Раабе збіжності числових рядів з додатними членами.....	36
8. Логарифмічні ознаки збіжності знакододатних рядів.....	40
9. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца	44
10. Ряди із членами довільних знаків	46
Завдання для самоконтролю.....	62
Завдання для самостійної роботи	64
Індивідуальні завдання до теми “Числові ряди”	67
Список використаної літератури	74

ПЕРЕДМОВА

Дана розробка призначена для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу „Математичний аналіз”, що вивчається на факультеті інформаційних технологій і математики.

Методична розробка містить розділ математичного аналізу “Числові ряди”. В розробці систематизовано теоретичні відомості із вказаного розділу, викладено основні поняття, теореми, деякі висновки і зауваження, які потрібні для розв’язування задач. Весь матеріал супроводжується розв’язанням типових прикладів. В кінці розділу наведені завдання для самоконтролю та самостійної роботи. Основну увагу приділено висвітленню алгоритмічного аспекту розглядуваних понять, методів і тверджень.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей всіх форм навчання, але вона може бути використана і для студентів інших спеціальностей.

1. Поняття числового ряду. Умови збіжності числового ряду

Нехай задано деяку послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

Означення 1. Вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

називають числовим рядом. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ називають членами ряду, a_n — загальним членом ряду.

Запишемо для ряду (1) такі скінченні суми:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

... ..

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

... ..

Означення 2. Сума S_n називається n — ою частинною сумою ряду (1).

Розглянемо послідовність частинних сум ряду $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Означення 3. Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум ряду (1), то ряд називається збіжним, а значення цієї границі називається сумою числового ряду.

Тобто, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо ж послідовність частинних сум S_n розбіжна або має нескінченну границю, то числовий ряд (1) називається розбіжним (кажуть, що він суми не має).

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

Розв'язання.

Запишемо послідовність частинних сум даного ряду

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2} \cdot n = \infty$.

Отже, даний ряд є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Розв'язання.

Знайдемо послідовність частинних сум даного ряду

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Обчислимо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Отже, цей ряд є збіжний і його сума $S = 1$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

Розв'язання.

Знайдемо послідовність частинних сум даного ряду:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \quad \dots$$

Ця послідовність розбіжна, отже, і ряд – розбіжний.

Приклад 4. Довести збіжність ряду

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{10^{n-1}} + \dots$$

і знайти його суму.

Розв'язання.

Запишемо послідовність частинних сум даного ряду

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{10^{n-1}} = \\ &= \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{10}{11} \left(1 - \left(-\frac{1}{10}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Знайдемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{11} \left(1 - \left(-\frac{1}{10}\right)^n\right) = \frac{10}{11}.$$

Отже, даний ряд є збіжний і його сума $S = \frac{10}{11}$.

Приклад 5. Довести збіжність ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

і знайти його суму.

Розв'язання.

Розглянемо загальний член цього ряду

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Запишемо послідовність частинних сум даного ряду

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Знайдемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, даний ряд є збіжний і його сума $S = \frac{1}{2}$.

Приклад 6. Записати ряд і знайти його суму, якщо $S_n = \frac{n+1}{n}$.

Розв'язання.

Обчислимо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Отже, цей ряд є збіжний і його сума $S = 1$.

Знайдемо загальний член цього ряду

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \\ &= \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = -\frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Знайдемо $a_1 = S_1 = 2$.

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}, \quad a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}, \dots$$

Отже, шуканий ряд матиме вигляд

$$2 - \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 4} - \dots = 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Розглянемо ряд (1). Йому відповідає послідовність частинних сум S_n .

Згідно з означенням збіжності числового ряду (1) рівносильна збіжності послідовних частинних сум S_n . Якщо до послідовності S_n застосувати критерій Коші збіжності числової послідовності, то одержимо наступну теорему.

Теорема 1 (критерій Коші збіжності числового ряду). Для того, щоб ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум S_n була фундаментальною, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Останню нерівність можна переписати у вигляді

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Приклад 7. Користуючись критерієм Коші довести збіжність ряду

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання.

Виберемо $\forall \varepsilon > 0$. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+p}| = \\ &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \frac{\sin(n+3)x}{2^{n+3}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \left| \frac{\sin(n+3)x}{2^{n+3}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| = \\ &= \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}} + \frac{|\sin(n+3)x|}{2^{n+3}} + \dots + \frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Розв'яжемо нерівність $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Покладемо $n_0 = \max \left\{ 1, \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \max \left\{ 1, \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \right\} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Згідно з критерієм Коші числовий ряд буде збіжним.

Означення 4. n -им залишком збіжного числового ряду називається вираз

$$R_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Із критерію Коші збіжності числового ряду випливає твердження.

Теорема 2. Для того, щоб ряд (1) був збіжним необхідно і достатньо, щоб $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Теорема 3 (Необхідна умова збіжності числового ряду).

Якщо числовий ряд (1) збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доведення.

Дійсно, маємо $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$,

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Зауваження. Умова $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ є лише необхідною умовою збіжності, але не є достатньою.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots.$$

Розв'язання.

Даний ряд називають гармонійним рядом. Для нього $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$.

Покажемо, що гармонійний ряд розбіжний.

Розглянемо підпослідовність послідовності частинних сум цього ряду

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{2}{2},$$

$$\begin{aligned} S_{2^3} = S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Звідси бачимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$. Ряд розбіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Розв'язання.

Для даного ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Отже, ряд розбіжний.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \quad (2)$$

Розв'язання.

Членами цього ряду є члени нескінченної геометричної прогресії.

Частинна сума даного ряду

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ і послідовність S_n – збіжна. При цьому

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$. Це означає, що при $|q| < 1$ ряд (2) – збіжний і його сумою є число $\frac{a}{1-q}$.

Нехай тепер $|q| \geq 1$. Звідси $|aq^{n-1}| = |a| \cdot |q^{n-1}| \geq |a|$.

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^{n-1} \neq 0$. Ряд є розбіжний, оскільки не

виконується необхідна умова збіжності числового ряду.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \sqrt[4]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$$

Розв'язання.

Маємо $a_n = \sqrt[n]{0,001}$. Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,001} = 1$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, тому ряд розбіжний.

2. Арифметичні дії над числовими рядами

Розглянемо два числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Нехай $c \in \mathbb{R}$.

Означення 1. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ називається добутком числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на число c .

Ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

називаються відповідно сумою та різницею рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 1. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має суму S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ також збіжний і його сума дорівнює cS .

Доведення.

Нехай S_n — частинна сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Позначимо через S_n^c частинну суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тоді

$$S_n^c = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = cS_n.$$

$$\text{Маємо } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^c = \lim_{n \rightarrow \infty} c S_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS.$$

Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має суму S_a , ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний і має суму S_b , тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ і $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ збіжні і їх сумами є відповідно $S_a + S_b$ і $S_a - S_b$.

Доведення.

Позначим через S_n^a частинну суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, через S_n^b частинну суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. За умовою ряди збіжні, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a = S_a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = S_b$.

Нехай S_n — це частинна сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, тобто

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = S_n^a + S_n^b. \end{aligned}$$

Перейдемо до границі: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b = S_a + S_b$.

Для різниці рядів доведення аналогічне.

Теорема доведена.

Приклад 1. Довести збіжність ряду і знайти його суму

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

Розв'язання.

Розглянемо збіжні ряди:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots = \\ &\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Отже, вихідний ряд збіжний, як сума двох збіжних рядів, і має суму $\frac{3}{2}$.

Теорема 3. Вилучення (або приєднання) на початку ряду скінченної кількості членів не впливає на збіжність ряду.

Доведення.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Позначим через S_n n -ту частинну суму цього ряду, тобто $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Вилучимо на початку ряду перших m членів. Позначимо через S_m суму перших m вилучених членів (число n беремо настільки великим, щоб відкинуті члени містилися в сумі S_n).

Через σ_{n-m} позначимо різницю $S_n - S_m$. При довільному n величина S_m є числом і не залежить від n . Маємо $S_n = S_m + \sigma_{n-m}$.

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ в лівій і правій частині останньої рівності маємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-m}$ існують (або не існують) одночасно.

Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним (розбіжним) одночасно із рядом, отриманим із нього після вилучення перших m членів.

Теорема доведена.

3. Ряди із додатними членами. Ознаки порівняння

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

де $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Такі ряди називаються знакододатними.

Очевидно, що для знакододатного ряду послідовність частинних сум є зростаючою.

Теорема 1. Для того, щоб числовий ряд (1) був збіжний, необхідно і достатньо, щоб його послідовність частинних сум була обмежена зверху.

Доведення.

Необхідність. Нехай ряд (1) збіжний. Тобто існує границя послідовності частинних сум $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Оскільки послідовність S_n збіжна, то вона обмежена.

Достатність. Нехай послідовність S_n обмежена зверху. Окрім того, для знакододатного ряду ця послідовність є монотонною зростаючою.

За теоремою про збіжність монотонної послідовності, послідовність частинних сум S_n є збіжною. Отже, ряд (1) також збіжний.

Теорема доведена.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Розв'язання.

Розглянемо для цього ряду послідовність частинних сум S_n .

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Послідовність частинних сум S_n обмежена зверху. Отже, ряд збіжний.

При дослідженні числових рядів використовують ряд ознак (достатніх умов) збіжності числових рядів.

Крім ряду (1) розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (2)$$

де $b_n > 0$

Означення 1. Якщо $a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$, то ряд (2) називається мажорантним рядом для ряду (1).

Теорема 2 (ознака порівняння). Нехай задано знакододатні ряди (1) і (2), для членів яких починаючи з деякого номера виконується умова $a_n \leq b_n$. Тоді із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а з розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Доведення.

Оскільки відкидання скінченної кількості членів не впливає на збіжність ряду, то можемо вважати, що нерівність $a_n \leq b_n$ виконується для всіх членів рядів (1) і (2).

Нехай ряд (2) збіжний. Це означає, що його послідовність частинних сум S_n^b обмежена зверху, тобто

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : S_n^b = b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq M.$$

Оскільки $a_n \leq b_n$, то

$$S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^b.$$

Але тоді $S_n^a \leq M$, тобто послідовність S_n^a також обмежена зверху.

Отже, послідовність S_n^a є збіжною і ряд (1) – збіжний.

Нехай ряд (1) розбіжний. Якщо припустити, що ряд (2) є збіжний, то, згідно з доведеним вище, ряд (1) мав би бути також збіжним, а це суперечить умові, тому ряд (2) розбіжний.

Теорема доведена.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

Розв'язання.

Для загального члена ряду маємо $\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо тепер ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, за ознакою порівняння досліджуваний ряд буде збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha < 1.$$

Розв'язання.

Оскільки має місце нерівність $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то за ознакою порівняння вихідний ряд буде розбіжний.

Теорема 3. Нехай дано знакододатні ряди (1) та (2), для членів яких, починаючи з деякого номера, виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \quad (3)$$

Тоді із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а з розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Доведення. Оскільки відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду на його початку не впливає на збіжність ряду, то можна

вважати, що нерівність (3) виконується для всіх членів ряду (починаючи з номера $n = 1$).

Маємо

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \frac{a_4}{a_3} \leq \frac{b_4}{b_3}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемноживши ці рівності, будемо мати $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$. Звідси $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$.

Якщо ряд (2) збіжний, то збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$. Тому за ознакою порівняння буде збігатися і ряд (1). Якщо ж ряд (1) розбіжний, то розбіжним за ознакою порівняння буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$. Отже ряд (2) теж розбіжний.

Теорема доведена.

Теорема 4 (гранична ознака порівняння). Нехай дано знакододатні ряди (1) і (2). Якщо існує скінчена, відмінна від нуля, границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad 0 < k < +\infty,$$

то ряди (1) і (2) збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З того що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon.$$

Перепишемо останню нерівність у вигляді $k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$.

Оскільки $b_n > 0$, то $(k - \varepsilon)b_n < a_n < (k + \varepsilon)b_n$. Ця нерівність виконується, починаючи з номера $n_0 + 1$. Перепишемо її у вигляді $C_1 b_n < a_n < C_2 b_n$. Оскільки $a_n < C_2 b_n$, то за ознакою порівняння із збіжністю ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Оскільки $C_1 b_n < a_n$, то за ознакою порівняння із збіжністю ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ впливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема доведена.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots \quad (4)$$

Записаний ряд відрізняється лише одним членом від гармонійного ряду. Тому ряд (4) розбіжний, а, отже, досліджуваний ряд також розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+3n+5}}$$

Розв'язання.

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^4+3n+5}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^4+3n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}}} = 1.$$

Оскільки гармонійний ряд розбіжний, то і досліджуваний ряд також розбіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}, n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Оскільки цей ряд збіжний, як нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{4}$, то за ознакою порівняння вихідний ряд також буде збіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

Розв'язання.

Має місце нерівність $\sin x < x$, якщо $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Отже, $\sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi.$$

Оскільки цей ряд збіжний, як нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q = \frac{1}{2}$, то за ознакою порівняння вихідний ряд також буде збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність $\frac{1}{3n-1} > \frac{1}{3n}, n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо ряд із загальним членом $a_n = \frac{1}{3n}$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжний, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ також розбіжний. Але тоді, згідно з ознакою порівняння, досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ розбіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність

$$\left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2 \leq \left(\frac{n^2+n^2}{n^3} \right)^2 = \left(\frac{2n^2}{n^3} \right)^2 = \frac{4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо ряд із загальним членом $a_n = \frac{4}{n^2}$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжний, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ також збіжний. Але тоді за ознакою порівняння збігається і досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} = \frac{1}{n + 1}, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

є розбіжний, тому за ознакою порівняння досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ розбіжний.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Розв'язання.

Порівняємо досліджуваний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки $0 < k = \frac{1}{4} < +\infty$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ також збіжний.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

Розв'язання.

Порівняємо досліджуваний ряд із розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $0 < k = \frac{1}{2} < +\infty$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ також розбіжний.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Розв'язання.

Порівняємо досліджуваний ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $0 < k = \frac{1}{2} < +\infty$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ також розбіжний.

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$$

Розв'язання.

Порівняємо досліджуваний ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} : \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки $0 < k = \frac{\pi}{4} < +\infty$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ також розбіжний.

4. Ознаки Даламбера збіжності числових рядів з додатними членами

Розглянемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Теорема 1 (ознака Даламбера). Нехай дано знакододатний ряд (1), для членів якого, починаючи з деякого номера n , виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Тоді ряд (1) збігається.

Якщо ж починаючи з деякого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд (1) розбіжний.

Доведення.

Розглянемо ряд

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Оскільки $0 < q < 1$, то ряд (2) збіжний. Для членів ряду (1) виконується

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < \frac{q^n}{q^{n-1}}. \quad (3)$$

Згідно з теоремою 3 пункту 3 ряд (1) збіжний, оскільки ряд (2) є збіжний.

Нехай, починаючи з деякого номера, виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Не втрачаючи загальності можна вважати, що вона виконується для всіх членів ряду. Тоді $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$.

Звідси випливає, що не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Тому ряд (1) є розбіжний.

Теорема доведена.

Теорема 2 (гранична ознака Даламбера). Нехай дано знакододатний ряд (1) і нехай існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:

1. якщо $q < 1$, то ряд (1) збіжний,
2. якщо $q > 1$, то ряд (1) розбіжний,
3. якщо $q = 1$, то маємо сумнівний випадок.

Доведення.

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

1. Нехай $q < 1$. Виберемо число q_1 , так, щоб $q < q_1 < 1$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q_1$. Згідно з теоремою про нерівність між членами послідовності маємо, що починаючи з деякого номера n виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_1$. Звідси $a_{n+1} < q_1 \cdot a_n$. Маємо

$$a_{n+2} < q_1 \cdot a_{n+1} < q_1^2 \cdot a_n,$$

$$a_{n+3} < q_1^3 \cdot a_n,$$

... ..

$$a_{n+k} < q_1^k \cdot a_n.$$

Розглянемо ряд $q_1 \cdot a_n + q_1^2 \cdot a_n + q_1^3 \cdot a_n + \dots + q_1^k \cdot a_n + \dots$.

Цей ряд буде збіжний, тому за ознакою порівняння збіжний буде ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k} + \dots$$

Останній ряд відрізняється від ряду (1) першими n членами, що не впливає на збіжність ряду. Отже, ряд (1) збіжний.

2. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Це означає, що починаючи з деякого номера n виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Але тоді $a_{n+1} > a_n > 0$, тобто не виконується необхідна умова збіжності числового ряду, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

3. Нехай $q = 1$. Маємо сумнівний випадок. Про збіжність чи розбіжність числового ряду в цьому випадку нічого не можна сказати. Ряд може бути як збіжний, так і розбіжний.

Теорема доведена.

Приклад 1. Розглянемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який, як вже відомо, розбіжний. Але для цього ряду

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Даламбера. Маємо

$$a_n = \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad a_{n+1} = \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}. \quad \text{Тоді}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \cdot \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5}}{2^{n+n}}$.

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Даламбера. Маємо

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1} + 5}{2^{n+1} + n + 1}, \quad a_n = \frac{3^n + 5}{2^n + n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} + 5}{2^{n+1} + n + 1}}{\frac{3^n + 5}{2^n + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^{n+1} + 5)(2^n + n)}{(3^n + 5)(2^{n+1} + n + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{3^n}}{1 + \frac{5}{3^n}} \cdot \frac{1 + \frac{n}{2^n}}{2 + \frac{n+1}{2^n}} = \frac{3}{2} > 1.\end{aligned}$$

Отже, ряд розбіжний.

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!}$.

Розв'язання.

Розглянемо та дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0 < 1.$$

Згідно з ознакою Даламбера, ряд збіжний. Враховуючи необхідну умову збіжності ряду, одержимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!} = 0$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Даламбера. Знайдемо

$$\begin{aligned}q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n \cdot (2n+1)} = 0.\end{aligned}$$

Оскільки $q = 0 < 1$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$ збіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \dots + n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Даламбера. Знайдемо

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \cdot \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки $q = \frac{1}{2} < 1$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$ збіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Даламбера. Знайдемо

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Оскільки $q = \frac{1}{e} < 1$, то вихідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ збіжний за ознакою

Даламбера.

5. Ознаки Коші збіжності числових рядів із додатними членами

Нехай дано знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

Теорема 1 (ознака Коші). Якщо для членів знакододатного ряду (1) починаючи з деякого номера n виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то ряд збіжний, якщо $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд розбіжний.

Доведення.

Нехай починаючи з деякого номера n виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що вона виконується для всіх членів ряду. Тоді маємо, що $a_n < q^n$.

Ряд $q + q^2 + q^3 + \dots$ є збіжним. Тоді, згідно з ознакою порівняння, ряд (1) також збіжний.

Нехай починаючи з деякого номера n виконується $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Отже, $a_n \geq 1$. Це означає, що не буде виконуватися необхідна умова збіжності ряду, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Ряд (1) розбіжний.

Теорема доведена.

Теорема 2 (гранична ознака Коші). Нехай для знакододатного ряду (1) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

1. якщо $q < 1$, то ряд (1) збіжний,
2. якщо $q > 1$, то ряд (1) розбіжний,
3. якщо $q = 1$, то маємо сумнівний випадок.

Доведення.

Припустимо, що існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. Нехай $q < 1$. Виберемо число q_1 , так, щоб $q < q_1 < 1$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < q_1$. Це означає, що починаючи з деякого номера n виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} < q_1$. Згідно з попередньою теоремою, ряд (1) є збіжний.

2. Нехай $q > 1$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Це означає, що починаючи з деякого номера n матимемо, що $\sqrt[n]{a_n} > 1$ і, згідно з попередньою теоремою, ряд (1) є розбіжний.

3. Нехай $q = 1$. Маємо сумнівний випадок. Про збіжність чи розбіжність числового ряду в цьому випадку нічого не можна сказати. Ряд може бути як збіжний, так і розбіжний.

Теорема доведена.

Зауваження. Зазначимо, що в деяких випадках замість границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \text{ можна шукати верхню границю } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{n+1} \right)^n.$$

Розв'язання.

$$\text{Знайдемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+1} = 4 > 1. \text{ Отже, ряд розбіжний.}$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Розв'язання.

$$\text{Знайдемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1. \text{ Отже, ряд збіжний.}$$

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$$

Розв'язання.

Обчислимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Згідно з ознакою Коші, ряд збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Коші. Знайдемо

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $q = \frac{1}{2} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ збіжний за ознакою Коші.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Коші. Знайдемо

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-2}{n+1} \right)^{n-1} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{n+1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{n+1}\right) \cdot (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2(n-1)}{n+1}} = e^{-2}.
\end{aligned}$$

Оскільки $q = e^{-2} < 1$, то досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$ збіжний за ознакою Коші.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Коші. Знайдемо

$$\begin{aligned}
q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n + 3^n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Оскільки $q = \frac{1}{3} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$ збіжний за ознакою Коші.

6. Інтегральна ознака збіжності числових рядів з додатними членами

Нехай дано знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

Припустимо, що існує функція $f(x)$, яка визначена на множині $[1; +\infty)$ і така, що $a_n = f(n)$, тоді ряд (1) запишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Теорема 1 (інтегральна ознака Коші–Маклорена). Нехай на множині $[1; +\infty)$ задана додатна, монотонно спадна функція $f(x)$ і така, що $a_n = f(n)$. Тоді ряд (1) збігається або розбігається одночасно із невласним інтегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

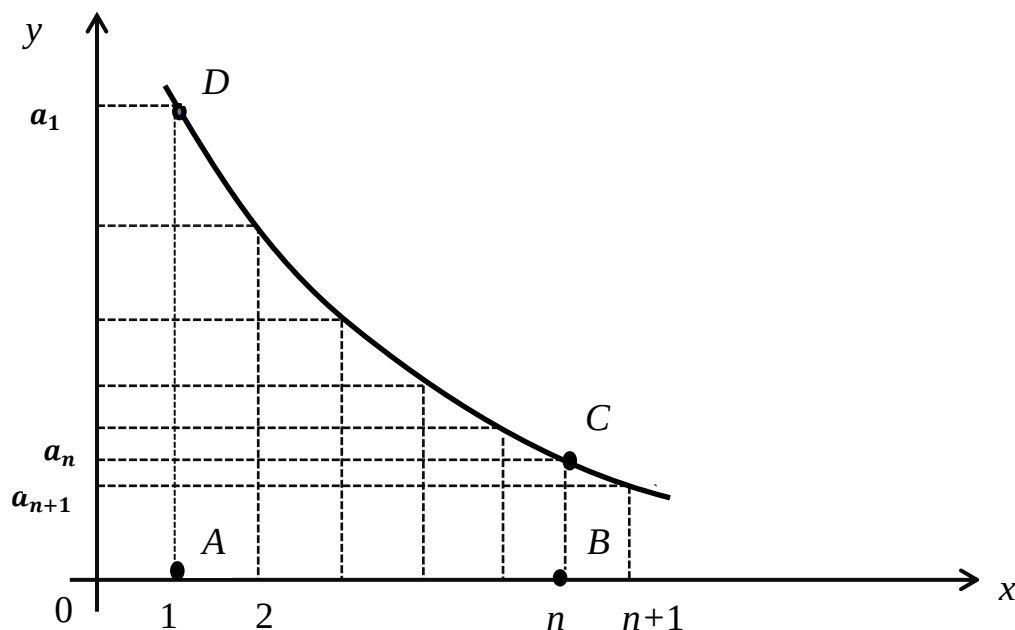
Доведення.

Розглянемо частинну суму ряду

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} = \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_{n-1} \cdot 1 > S_{ABCD} = \int_1^n f(x)dx. \end{aligned}$$

З іншого боку, маємо

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n < S_{ABCD} = \int_1^n f(x)dx.$$



Нехай ряд (1) збіжний, тоді послідовність його частинних сум є обмеженою зверху. Це означає, що

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq M.$$

Звідси маємо, що $\int_1^n f(x)dx < S_{n-1} \leq M$. Отже, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжний.

Нехай $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжний. Тоді матимемо, що $S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx$.

При всіх $n \in \mathbb{N}$ послідовність $\int_1^n f(x)dx$ є обмеженою зверху. Значить послідовність S_n теж повинна бути обмеженою зверху. Отже, ряд (1) збіжний.

У випадку розбіжності доведення аналогічне.

Теорема доведена.

Приклад 1. Дослідити на збіжність узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Розв'язання.

Вище було показано, що $\alpha \leq 1$ ряд розбіжний.

Нехай $\alpha > 1$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \alpha > 1$ на множині $[1; +\infty)$. Функція $f(x)$ набуває додатних значень і є монотонно спадною.

Розглянемо невластний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_1^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\frac{B^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл є збіжний, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, якщо $\alpha > 1$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}.$$

Розв'язання.

Має місце нерівність

$$\sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}} < \sqrt{\frac{n}{n^4}} = \sqrt{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, n \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо ряд із загальним членом $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ із показником $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ є збіжний, тому за ознакою порівняння збігається досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \dots$$

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, яка на множині $[1; +\infty)$ набуває додатних значень і є монотонно спадною.

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^B \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} (\ln(\ln(B+1)) - \ln \ln 2) = +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл розбіжний, то і ряд також розбіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} + \dots$$

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, яка на множині $[1; +\infty)$ набуває додатних значень і є монотонно спадною.

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \ln^{-2}(x+1) d(\ln(x+1)) = \\
 &= - \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln^{-1}(x+1) \Big|_1^B = - \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^B = \\
 &= - \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln(B+1)} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.
 \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл збіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ також збіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))}.$$

Розв'язання.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)\ln(\ln(x+1))}$, яка на множині $[1; +\infty)$ набуває додатних значень і є монотонно спадною.

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)\ln(\ln(x+1))} &= \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)\ln(\ln(x+1))} = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln(\ln(x+1)))}{\ln(\ln(x+1))} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln(\ln(\ln(x+1))) \Big|_1^B = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} (\ln(\ln(\ln(B+1))) - \ln \ln \ln 2) = +\infty.
 \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл розбіжний, то і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln(\ln(n+1))}$$

також розбіжний.

7. Ознаки Раабе збіжності числових рядів з додатними членами

Доведені ознаки Даламбера і Коші ґрунтуються на порівнянні досліджуваного ряду із геометричною прогресією.

Інші ознаки можна одержати, якщо досліджуваний ряд порівнювати із числовим рядом, члени якого повільніше прямують до нуля.

Однією із таких ознак є ознака Раабе, яка ґрунтується на порівнянні членів досліджуваного ряду із членами узагальненого гармонійного ряду.

Нехай дано знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

Теорема 1 (ознака Раабе). Якщо для членів знакододатного ряду (1) починаючи з деякого номера n виконується нерівність $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1$, то ряд (1) збіжний. Якщо ж, починається з деякого n виконується $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, то ряд розбіжний.

Доведення.

Нехай починаючи з деякого номера n виконується нерівність

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1. \text{ Оскільки відкидання або приєднання на початку}$$

ряду скінченної кількості членів не впливає на збіжність ряду, можна вважати, що ця нерівність виконується для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$. Тоді з даної нерівності випливає, що

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{r}{n} + 1, \quad r > 1. \quad (2)$$

Виберемо число s так, щоб $1 < s < r$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^s$. Знайдемо $f'(x) = sx^{s-1}$, $f'(1) = s$.

Оскільки згідно з означенням $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^s - 1}{\Delta x}.$$

Поклавши $\Delta x = \frac{1}{n}$, матимемо

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Так як $s < r$, то починаючи з деякого номера буде виконуватися:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r.$$

Зробимо в останній нерівності деякі перетворення

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n}.$$

Внаслідок нерівності (2) будемо мати

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Звідки

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = \frac{n^s}{(n+1)^s} = \frac{1}{\frac{1}{n^s}}.$$

Оскільки $s > 1$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ є збіжний, то згідно з теоремою 3 пункту 3 ряд (1) буде збіжний.

Нехай, починаючи з деякого номера n , виконується $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$.

Тоді

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, тому за теоремою 3 пункту 3 ряд (1) буде розбіжний.

Теорема доведена.

Теорема 2 (гранична ознака Раабе). Нехай для знакододатного ряду (1) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$. Тоді:

1. якщо $r > 1$, то ряд (1) збіжний,
2. якщо $r < 1$, то ряд (1) розбіжний,
3. якщо $r = 1$, то маємо сумнівний випадок.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

де $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

Розв'язання.

Для даного ряду загальний член

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+3}.$$

Скориставшись ознакою Даламбера, будемо мати

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} = 1. \end{aligned}$$

Одержали сумнівний випадок. Дослідимо ряд за ознакою Раабе.

Маємо

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{6n + 5}{4n^2 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{3}{2} > 1.\end{aligned}$$

За ознакою Раабе ряд збіжний.

Ознака Раабе сильніша, ніж ознака Даламбера.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdot \dots \cdot (2 + \sqrt{n})}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Раабе. Знайдемо

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1}) \cdot \dots \cdot (2 + \sqrt{n})} \cdot \frac{(2 + \sqrt{1}) \cdot \dots \cdot (2 + \sqrt{n})(2 + \sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}} = \\ &= \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Тоді

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Оскільки $r = \infty > 1$, то досліджуваний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdot \dots \cdot (2 + \sqrt{n})} \text{ збіжний за ознакою Раабе.}$$

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Розв'язання.

Скористаємось ознакою Раабе. Знайдемо

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n)!! \cdot (2n+2)}{(2n-1)!! \cdot (2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Тоді

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $r = \frac{1}{2} < 1$, то досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ розбіжний за ознакою Раабе.

8. Логарифмічні ознаки збіжності знакододатних рядів

Нехай дано знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

Теорема 1 (логарифмічна ознака). Якщо для членів знакододатного ряду (1), починаючи з деякого номера n , виконується нерівність $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq r > 1$, то ряд збіжний, якщо $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$, то ряд розбіжний.

Доведення.

Використаємо відому нерівність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Отже, нехай починаючи з деякого номера n виконується:

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq r > 1.$$

Можна вважати, що ця нерівність виконується для всіх членів ряду (1). Виберемо деяке число s так, щоб $1 < s < r$. Тоді виконується нерівність

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > s.$$

Звідси, враховуючи нерівність (2), одержимо, що

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > s \cdot n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Тоді

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > s \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s,$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} = \frac{n^s}{(n+1)^s} = \frac{1}{\frac{(n+1)^s}{n^s}}.$$

Оскільки $s > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ збіжний. Згідно з теоремою 3 пункту 3 ряд (1) збіжний.

Нехай починаючи з деякого n виконується $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

З нерівності (2) випливає, що $1 < n \ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$. Звідси маємо, що $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < n \ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$. Отже,

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}.$$

Оскільки гармонійний ряд розбіжний, то за теоремою 3 пункту 3 ряд (1) розбіжний.

Теорема доведена.

Теорема 2 (гранична логарифмічна ознака).

Нехай для знакододатного ряду (1) існує границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = r$. Тоді:

1. якщо $r > 1$, то ряд (1) збіжний,
2. якщо $r < 1$, то ряд (1) розбіжний,
3. якщо $r = 1$, то маємо сумнівний випадок.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$, $x > 0$.

Розв'язання.

Знайдемо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n^{\ln x}}{(n+1)^{\ln x}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \cdot \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \cdot \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \ln x \cdot \ln \frac{1}{e} = -\ln x. \end{aligned}$$

Якщо $-\ln x > 1$, тобто $x < \frac{1}{e}$, то досліджуваний ряд збіжний.

Якщо $-\ln x < 1$, тобто $x > \frac{1}{e}$, то досліджуваний ряд розбіжний.

Якщо $-\ln x = 1$, тобто $x = \frac{1}{e}$, то одержимо гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln \frac{1}{e}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який також розбіжний.

Отже, ряд збіжний при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Наведемо також інші логарифмічні ознаки.

Теорема 3 (логарифмічна ознака). Якщо для членів знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ починаючи з деякого номера n виконується нерівність

$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq r > 1$, то ряд збіжний, якщо $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, то ряд розбіжний.

Теорема 4 (гранична логарифмічна ознака).

Нехай для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = r. \text{ Тоді}$$

1. якщо $r > 1$, то ряд збіжний,
2. якщо $r < 1$, то ряд розбіжний,
3. якщо $r = 1$, то маємо сумнівний випадок.

Приклад 2. Розглянутий вище ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$, $x > 0$, можна дослідити на збіжність і за теоремою 4.

Розв'язання.

Знайдемо

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n^{\ln x}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^{-\ln x}}{\ln n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \ln n}{\ln n} = - \ln x.$$

Якщо $-\ln x > 1$, тобто $x < \frac{1}{e}$, то досліджуваний ряд збіжний.

Якщо $-\ln x < 1$, тобто $x > \frac{1}{e}$, то досліджуваний ряд розбіжний.

Якщо $-\ln x = 1$, тобто $x = \frac{1}{e}$, то одержимо розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Отже, ряд збіжний при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}.$$

Розв'язання.

Знайдемо

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \cdot \ln(\ln(\ln n))}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln(\ln n)) = \infty. \end{aligned}$$

Оскільки $r = \infty > 1$, то досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$ збіжний за логарифмічною ознакою.

9. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Означення 1. Ряд виду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \quad a_n > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

називають знакозмінним.

Зауважимо також, що ряд виду

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots, \quad a_n > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

теж є знакозмінним.

Теорема 1 (ознака Лейбніца). Нехай для членів знакозмінного ряду (1) виконуються умови:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тоді ряд (1) є збіжним, його сума додатня і не перевищує першого члена.

Доведення.

Розглянемо послідовність частинних сум ряду (1) з парними номерами

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) > 0.$$

Послідовність S_{2n} монотонно зростаюча. Запишемо S_{2n} у вигляді

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Послідовність S_{2n} є обмеженою зверху. Отже, вона збіжна. Тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. З іншого боку, $S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n},$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} + 0.$$

Отже, послідовність частинних сум ряду (1) з непарними номерами S_{2n-1} також збіжна, і її границею є число S .

Звідси слідує, що послідовність S_n при будь-якому n є збіжною, і її границею є число S .

В нерівності $0 < S_{2n} < a_1$ перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$. Будемо мати, що $0 \leq S \leq a_1$. Оскільки всі частинні суми додатні, то і число S є додатним.

Теорема доведена.

Зауваження. Для ряду (2) також має місце ознака Лейбніца. Але в цьому випадку сума ряду S є від'ємною і $|S| \leq a_1$.

Наслідок. Похибка від заміни суми знакозмінного ряду його частинною сумою за модулем не перевищує першого з відкинутих членів, тобто

$$|S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1}.$$

Дійсно, $R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$ є знакозмінним рядом і, згідно з ознакою Лейбніца, модуль його суми не перевищує першого члена.

Приклади 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

Розв'язання.

Загальний член даного ряду $a_n = \frac{1}{n}$. Послідовність a_n є спадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, за ознакою Лейбніца досліджуваний ряд збіжний.

Приклади 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n)^3} = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{16^3} + \dots.$$

Розв'язання.

Загальний член даного ряду $a_n = \frac{1}{(4n)^3}$. Послідовність a_n є спадною і

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(4n)^3} = 0$. Отже, за ознакою Лейбніца досліджуваний ряд збіжний.

Знайдемо з точністю до $\frac{1}{1000}$ суму даного ряду. Для цього, згідно з наслідком, треба взяти стільки членів ряду, щоб перший із відкинутих членів за модулем був меншим, ніж $\frac{1}{1000}$. Тоді й залишок ряду (похибка наближення суми ряду частинною сумою) буде меншим за $\frac{1}{1000}$. Маємо

$$a_1 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} \geq 0,001, \quad a_2 = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512} > 0,001,$$

$$a_3 = \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} < 0,001.$$

Тому з точністю до 0,001 сума ряду $S = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} = \frac{7}{512}$.

10. Ряди із членами довільних знаків

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

члени якого можуть бути як додатними так і від'ємними. Окремим випадком таких рядів є знакододатні ряди. Окрім ряду (1) розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad (2)$$

Означення 1. Ряд (1) називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд (2).

Теорема 1. Якщо ряд абсолютно збіжний, то цей ряд є збіжним.

Доведення.

Нехай ряд (1) абсолютно збіжний. Це означає, що збігається ряд (2). Згідно з критерієм Коші збіжності числового ряду для ряду (2) маємо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Оскільки

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

ряд (1) є збіжним згідно з Критерієм Коші.

Означення 2. Ряд (1) називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, а ряд (2) розбіжним.

Для будь-якого числового ряду можливий лише один із трьох випадків:

1. ряд збігається абсолютно,
2. ряд збігається умовно,
3. ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Розв'язання.

Розглянемо ряд, складений із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Цей ряд є збіжним, як узагальнений гармонійний ряд із показником $\alpha = 2 > 1$. Отже, досліджуваний ряд є абсолютно збіжним.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

Розв'язання.

Ряд знакозмінний. Розглянемо ряд, складений з модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Цей ряд є узагальненим гармонійним рядом, який збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Отже, при $p > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ є абсолютно збіжний.

Нехай $0 < p \leq 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ знакозмінний. Оскільки послідовність $\frac{1}{n^p}$ є монотонно спадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$, то за ознакою Лейбніца цей ряд збіжний.

Отже, при $0 < p \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ є умовно збіжний.

Нехай $p \leq 0$. Тоді не виконується необхідна умова збіжності ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ряд розбіжний.

Отже, при $p \leq 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ є розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

Розв'язання.

Загальний член даного ряду $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Послідовність a_n є спадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Отже, за ознакою Лейбніца досліджуваний ряд збіжний.

Дослідимо цей ряд на абсолютну та умовну збіжність. Розглянемо ряд, складений із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Має місце нерівність $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо ряд із загальним членом $a_n = \frac{1}{2n}$.

Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжний, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ також розбіжний. Але тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ розбіжний.

Отже, досліджуваний ряд є умовно збіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Розв'язання.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ не існує, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ не існує.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = 1$$

Не виконується необхідна умова збіжності ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ряд розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Розв'язання.

Ряд знакозмінний. Розглянемо загальний член даного ряду $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

Покажемо, що послідовність a_n є спадною. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}. \text{ Тоді}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \quad \text{якщо } x > e.$$

При $x \in [e, +\infty)$ функція $f(x)$ є спадною.

Знайдемо тепер $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца досліджуваний ряд збіжний.

Дослідимо цей ряд на абсолютну та умовну збіжність. Розглянемо ряд, складений із модулів членів даного ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. Має місце нерівність $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, n > e$.

Гармонічний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжний, тому і ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ також розбіжний. Отже, досліджуваний ряд є умовно збіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

Розв'язання.

Ряд знакозмінний. Розглянемо загальний член даного ряду $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

Покажемо, що послідовність a_n є спадною.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$. Знайдемо

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x+100) - \sqrt{x}}{(x+100)^2} = \frac{x+100-2x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} < 0,$$

якщо $x > 100$.

При $x \in [100, +\infty)$ функція $f(x)$ є спадною.

Знайдемо тепер $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{100}{n}} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца досліджуваний ряд збіжний.

Дослідимо цей ряд на абсолютну та умовну збіжність. Розглянемо ряд, складений із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$. Порівняємо досліджуваний ряд із розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Скористаємось граничною ознакою порівняння. Знайдемо

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+100} = 1.$$

Оскільки $0 < k = 1 < +\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ також розбіжний.

Отже, досліджуваний ряд є умовно збіжним.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

Розв'язання.

Ряд знакозмінний. Розглянемо ряд, складений з модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$. Цей ряд знакододатний. Застосуємо до нього ознаку Коші. Знайдемо

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3}.$$

Оскільки $q = \frac{2}{3} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$ збіжний за ознакою Коші.

Отже, досліджуваний ряд є абсолютно збіжний, а, отже, й збіжний.

Лема (перетворення Абеля). Нехай задано послідовності

$a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$. Тоді виконується рівність

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \sigma(k, n+1) (a_k - a_{k+1}) + \sigma(n+p, n+1) a_{n+p},$$

$$\text{де } \sigma(k, n+1) = \sum_{i=n+1}^k b_i.$$

Теорема 2 (ознака Діріхле). Нехай задано послідовності a_n та b_n , для яких виконуються умови:

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

2. послідовність a_n монотонна,

$$3. \quad \exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq C.$$

Тоді збіжним є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \quad (3)$$

Доведення.

Нехай для означення послідовність a_n монотонно спадає. Розглянемо вираз

$$|\sigma(k, n+1)| = \left| \sum_{i=n+1}^n b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^k b_i - \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k b_i \right| + \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq 2C.$$

Використаємо для ряду (3) перетворення Абеля. Маємо

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \sigma(k, n+1)(a_k - a_{k+1}) + \sigma(n+p, n+1)a_{n+p} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |\sigma(k, n+1)| \cdot |a_k - a_{k+1}| + |\sigma(n+p, n+1)| \cdot |a_{n+p}| \leq \\ &\leq 2C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + 2C|a_{n+p}| = \\ &= 2C(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + |a_{n+p}|) = \\ &= 2C(a_{n+1} - a_{n+p} + |a_{n+p}|). \end{aligned}$$

Згідно з умовою 1 теореми $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{6C}.$$

Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &< 2C(a_{n+1} - a_{n+p} + |a_{n+p}|) \leq 2C(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < \\ &< 2C\left(\frac{\varepsilon}{6C} + \frac{2\varepsilon}{6C}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Згідно з критерієм Коші ряд збіжний.

Теорема доведена.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}.$$

Розв'язання.

Якщо $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, то $\sin \alpha = 0$ і ряд збіжний.

Нехай $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Покладемо, що $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \sin n\alpha$. Тоді маємо,

що

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \\ 2. \quad & \text{послідовність } a_n \text{ монотонно спадає,} \\ 3. \quad & \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sin i\alpha \right| = |\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha| = \\ &= \frac{\left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha + \dots + 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin n\alpha \right|}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \\ &= \frac{\left| \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} + \dots + \cos \frac{2n-1}{2}\alpha - \cos \frac{2n+1}{2}\alpha \right|}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \\ &= \frac{\left| \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}\alpha \right|}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \leq \frac{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| + \left| \cos \frac{2n+1}{2}\alpha \right|}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|}. \end{aligned}$$

Згідно із ознакою Діріхле ряд збіжний.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}.$$

Розв'язання.

Дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Розглянемо ряд, складений з модулів членів даного ряду, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$. Дослідимо його за ознакою Діріхле.

Покладемо $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = \cos 2n$. Тоді маємо, що

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,
2. послідовність a_n монотонно спадає,
3.
$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \cos 2i \right| = |\cos 2 + \cos 4 + \cos 6 + \dots + \cos 2n| = \\ &= \frac{|2\sin 1 \cos 2 + 2\sin 1 \cos 4 + 2\sin 1 \cos 6 + \dots + 2\sin 1 \cos 2n|}{2 \sin 1} = \\ &= \frac{|-\sin 1 + \sin 3 - \sin 3 + \sin 5 - \dots - \sin(2n-1) + \sin(2n+1)|}{2 \sin 1} = \\ &= \frac{|\sin(2n+1) - \sin 1|}{2 \sin 1} \leq \frac{|\sin(2n+1)| + |\sin 1|}{2 \sin 1} < \frac{2}{2 \sin 1} = \frac{1}{\sin 1}. \end{aligned}$$

Тобто $\exists C = \frac{1}{\sin 1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \cos 2i \right| < \frac{1}{\sin 1}$.

Згідно із ознакою Діріхле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ збіжний.

Оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ також розбіжний.

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ на умовну збіжність. Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - \cos 2n)}{2n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}. \end{aligned}$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Він є знакозмінний. Загальний член даного ряду $a_n = \frac{1}{2n}$. Послідовність a_n є спадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ збіжний.

Розглянемо тепер ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}$. Дослідимо його за ознакою Діріхле.

Покладемо, що $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = (-1)^n \cos 2n$. Тоді маємо, що

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

2. послідовність a_n монотонно спадна,

$$3. \quad \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos 2i \right| =$$

$$= |-\cos 2 + \cos 4 - \cos 6 + \dots + (-1)^n \cos 2n| =$$

$$= |\cos 2 - \cos 4 + \cos 6 - \dots + (-1)^{n+1} \cos 2n| =$$

$$= \frac{|2\cos 1 \cos 2 - 2\cos 1 \cos 4 + 2\cos 1 \cos 6 - \dots + (-1)^{n+1} 2\cos 1 \cos 2n|}{2 \cos 1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\cos 1 + \cos 3 - \cos 3 - \cos 5 - \dots + (-1)^{n+1}(\cos(2n-1) + \cos(2n+1))|}{2 \cos 1} = \\
&= \frac{|\cos 1 + (-1)^{n+1} \cos(2n+1)|}{2 \cos 1} \leq \frac{|\cos 1| + |\cos(2n+1)|}{2 \cos 1} < \\
&< \frac{2}{2 \cos 1} = \frac{1}{\cos 1}.
\end{aligned}$$

Тобто $\exists C = \frac{1}{\cos 1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |\sum_{i=1}^n b_i| = |\sum_{i=1}^n (-1)^i \cos 2i| < \frac{1}{\cos 1}$.

Згідно із ознакою Діріхле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}$ збіжний.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ є збіжний.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ розбіжний, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ збігається

умовно.

Теорема 3 (ознака Абеля). Нехай задано послідовності a_n та b_n , для яких виконуються умови:

1. послідовність a_n обмежена,
2. послідовність a_n монотонна,

3. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний.

Доведення.

Дійсно, оскільки послідовність a_n монотонна і обмежена, то вона збіжна. Тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Розглянемо послідовність $(a_n - a)$. Ця послідовність також є монотонною і збігається до 0.

До послідовностей $(a_n - a)$ і b_n застосуємо ознаку Діріхле. Згідно цієї ознаки, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$ збіжний і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ за умовою збіжний, тому і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ також збіжний.

Теорема доведена.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання.

Покладемо $a_n = \operatorname{arctg} n$; $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Тоді виконуються умови

1. $a_n = \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$,
2. послідовність a_n монотонно зростає,
3. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ збіжний за ознакою Лейбніца.

Отже, досліджуваний ряд також збіжний.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{\pi n}{4}.$$

Розв'язання.

Нехай $a_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$, $b_n = \sin \frac{\pi n}{4}$.

Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{100} n}{n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 \cdot \ln^{99} n \cdot \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 \ln^{99} n}{n} = \\ &= \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 2 \cdot \ln n}{n} = 100! \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0. \end{aligned}$$

Тепер доведемо, що послідовність a_n є спадною. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\ln^{100} x}{x}. \text{ Знайдемо}$$

$$f'(x) = \frac{100 \cdot \ln^{99} x - \ln^{100} x}{x^2} = \frac{\ln^{99} x (100 - \ln x)}{x^2} < 0, \quad \text{якщо } x > e^{100}.$$

При $x \in [e^{100}, +\infty)$ функція $f(x)$ є спадною.

Розглянемо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{4} \right| = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} \left| \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{8} + \dots + \sin \frac{\pi n}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right| = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} \left| \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} - \cos \frac{5\pi}{8} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{8} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \frac{(2n+1)\pi}{8} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \left| \cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{(2n+1)\pi}{8} \right| = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} \left| \sin \frac{\pi n}{8} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{8} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\exists C = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^n b_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi i}{4} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}.$$

За ознакою Діріхле ряд збіжний.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Розв'язання.

Зробимо перетворення

$$\cos \left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n \right) = \cos \frac{\pi n^2}{n+1} \cos \pi n + \sin \frac{\pi n^2}{n+1} \sin \pi n = (-1)^n \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi n^2}{n+1} &= (-1)^n \cos \left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n \right) = \\ &= (-1)^n \cos \frac{\pi n^2 - \pi n^2 - \pi n}{n+1} = (-1)^n \cos \frac{\pi n}{n+1}.\end{aligned}$$

Досліджуваний ряд матиме вигляд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi n^2}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi n}{n+1}.$$

Покладемо $a_n = \cos \frac{\pi n}{n+1}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$. Скористаємося ознакою Абеля.

1. Послідовність a_n є монотонно спадною.

Дійсно, розглянемо функцію $f(x) = \cos \frac{\pi x}{x+1}$, $x \geq 2$. Знайдемо

$$f'(x) = -\sin \frac{\pi x}{x+1} \cdot \frac{\pi(x+1) - \pi x}{(x+1)^2} = -\sin \frac{\pi x}{x+1} \cdot \frac{\pi}{(x+1)^2}.$$

Якщо $x \geq 2$, то $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{x+1} < 1$, і $\sin \frac{\pi x}{x+1}$ набуває додатних значень.

Отже, $f'(x) < 0$ при $x \geq 2$. Тобто функція

$f(x) = \cos \frac{\pi x}{x+1}$ спадає, якщо $x \geq 2$.

2. Послідовність a_n є обмеженою, оскільки $\left| \cos \frac{\pi n}{n+1} \right| \leq 1$.

3. Розглянемо тепер знакозмінний ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}.$$

Оскільки послідовність $\frac{1}{\ln^2 n}$ є монотонно спадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0$, то за

ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ збіжний.

Таким чином, вихідний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ збіжний за ознакою

Абеля.

Розглянемо деякі властивості збіжних числових рядів.

Теорема 4. Нехай ряд (1) збіжний. Тоді ряд

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \\ + (a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \dots + a_{n_3}) + \dots + (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \dots + a_{n_{k+1}}) + \dots, \quad (4)$$

утворений об'єднанням членів ряду (1) в групи без перестановки членів також збіжний. Якщо S – сума ряду (1), то сума ряду (4) також дорівнює S .

Доведення.

Позначимо частинні суми (1) через S_n , а ряду (4) через S'_n . Очевидно, $S_{n_k} = S'_k$. Послідовність частинних сум ряду (4) є підпослідовністю частинних сум ряду (1). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то і $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_k$. Отже, ряд (4) збіжний і його сума S .

Теорема доведена.

Зауваження. Обернене твердження хибне.

Розглянемо ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$. Цей ряд збіжний, його сумою є 0. В той же час ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ розбіжний.

Теорема 5. Нехай ряд (1) є абсолютно збіжний і його сума дорівнює S , тоді ряд, утворений з членів ряду (1) довільною перестановкою цих членів є збіжним і має суму S .

Приклад 13. Довести збіжність ряду і знайти його суму

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

Розв'язання.

Розглянемо ряд, складений із модулів членів даного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Цей ряд збіжний, як нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $\frac{1}{2}$ і

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Тобто ряд $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ є абсолютно збіжним. Як відомо, в абсолютно збіжному ряді можна проводити довільні перестановки членів, причому утворений ряд також буде збіжним і матиме таку ж суму, як і вихідний ряд. Переставимо члени ряду наступним чином

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \dots = \\ & = \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \dots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \dots\right) + \dots = \\ & = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Отже,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{10}{7}.$$

Теорема 6 (теорема Рімана). Нехай ряд (1) є умовно збіжний, тоді яке б не було число A (можливо навіть $A = \pm\infty$) завжди можна переставити члени ряду так, щоб одержаний ряд був збіжний і мав своєю сумою A .

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення числового ряду.
2. Сформулювати означення частинної суми числового ряду.
3. Навести означення збіжності числового ряду.
4. Сформулювати означення залишку числового ряду.
5. Сформулювати критерій Коші збіжності числового ряду.
6. Довести необхідну умову збіжності числового ряду.
7. Сформулювати теореми про арифметичні дії над збіжними числовими рядами.
8. Навести означення мажорантного ряду.
9. Сформулювати і довести ознаки порівняння.
10. Який ряд називають гармонійним?
11. Навести умови збіжності узагальненого гармонійного ряду.
12. Навести умови збіжності ряду, членами якого є члени нескінченної геометричної прогресії
13. Сформулювати і довести ознаки Даламбера збіжності знакододатних рядів.
14. Сформулювати і довести ознаки Коші збіжності знакододатних рядів.
15. Навести інтегральну ознаку Коші-Маклорена збіжності знакододатних рядів.
16. Довести знаку Раабе збіжності знакододатних рядів.
17. Сформулювати і довести логарифмічну ознаку збіжності знакододатних рядів.
18. Які ряди називають знакозмінними?
19. Сформулювати і довести ознаку Лейбніца.

20. Навести означення абсолютно збіжних числових рядів (умовно збіжних числових рядів).

21. Навести властивості збіжних числових рядів із членами довільних знаків.

22. Сформулювати ознаки Абеля і Діріхле збіжності числових рядів.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести збіжність ряду і знайти його суму

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

2. Записати ряд і знайти його суму, якщо $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

3. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

4. Користуючись критерієм Коші довести збіжність ряду

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \frac{\cos x^3}{3^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}).$$

7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3n}.$$

8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{2n}}.$$

10. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}.$$

11. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

12. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + 1}.$$

13. Дослідити на збіжність ряд

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots \\ + \frac{a(a+d)(a+2d) \cdot \dots \cdot (a+(n-1)d)}{b(b+d)(b+2d) \cdot \dots \cdot (b+(n-1)d)} + \dots, \end{aligned}$$

де $a, b, d > 0$.

14. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+2}}.$$

15. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}.$$

16. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^2(\ln n)}.$$

17. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}.$$

18. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}.$$

19. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}.$$

20. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}.$$

Індивідуальні завдання до теми “Числові ряди”

Варіант 1

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+1}.$$

Варіант 2

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Варіант 3

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+2n+3} \right)^n.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

Варіант 4

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{2+4n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Варіант 5

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^{n+1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{5^n}.$$

Варіант 6

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Варіант 7

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{2n}}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}.$$

Варіант 8

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+5)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}.$$

Варіант 9

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^6+2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+2n}.$$

Варіант 10

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n.$$

Варіант 11

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n^2 + 2}.$$

Варіант 12

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+3)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{4^n}.$$

Варіант 13

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{5^n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}.$$

Варіант 14

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^n.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 7n}{n^2 + 3}.$$

Варіант 15

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

2. Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n}{5n+1} \right)^{3n}.$$

Список використаної літератури

1. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник у 3-х ч. Ч.1. Функції однієї змінної. 2-ге вид. Київ: Вища школа, 2002. 275 с.
2. Денисьєвський М.О. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної / М.О. Денисьєвський, О.О. Курченко, В.Н. Нагорний, Т.О. Петрова, А.В. Чайковський. Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2005. 240 с.
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник у 2-х ч. Ч. 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.
4. Дюженкова Л.І. Вища математика: Приклади і задачі / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. К.: Видавничий центр “Академія”, 2002. 624 с.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
6. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математичний аналіз в прикладах і задачах. 2025. 1636 с. <https://surl.lu/pxoprr>
7. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: підручник у 2-х ч. Ч.1. Київ: Вища школа, 1992. 495 с.
8. Радченко О. М. Математичний аналіз. Т. 2: Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних. Київ: ТВіМС, 2000. 152 с.
9. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. 2025. 2390 с. <https://surl.li/ehlmhb>
10. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник у 2-х ч. Ч.2. Київ: Вища школа, 2005. 510 с.

Навчально-методичне видання

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна

Соліч Катерина Василівна

Падалко Ніна Йосипівна

Числові ряди:

методичні вказівки

Друкується в авторській редакції