

ІЗОМЕТРИЧНІСТЬ ПІДПРОСТОРІВ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРОСТОРАМ ДІЙСНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Бушев Д. М.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк.

В [1] були побудовані простори функцій від $n+k$ змінних ізометричні просторам дійсних функцій, заданих на дійсному n -вимірному евклідовому просторі. Результати про ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних рідкісне явище, і раніше були одержані тільки для просторів комплекснозначних функцій (див. [1, с.1027]). В [2] були наведені приклади рівності основних апроксимаційних характеристик в ізометричних просторах.

В зв'язку з цим цілком природно виникло питання про застосування ізометричності в математичній фізиці.

Для побудови підпросторів розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, ізометричних просторам дійсних функцій, було необхідно встановити умови збіжності згортки функції з дельтаподібним ядром до цієї функції, що було зроблено в статті [3].

Позначимо через C і L_p -простори дійсних функцій, заданих на всій дійсній осі, відповідно неперервних і обмежених, і вимірних з нормами

$$\|f\|_C = \sup_{x \in R} \{ |f(x)| \} \quad ; \quad \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$\Pi^+ = \{(x,y): y > 0\}$ і $\bar{\Pi}^+ = \{(x,y): y \geq 0\}$ - верхня півплощина і замкнена верхня півплощина в просторі R^2 ,

$C(\bar{\Pi}^+)$ -лінійні простори неперервних і обмежених функцій на множині $\bar{\Pi}^+$ з нормою

$$\|f(x,y)\|_{C(\bar{\Pi}^+)} = \sup_{y \geq 0} \sup_{x \in R} \{ |f(x,y)| \} \quad L_p \bar{M} - \text{лінійні простори функцій}$$

визначених на множині $\bar{\Pi}^+$ з нормою $\|f(x,y)\|_{L_p \bar{M}} = \sup_{y \geq 0} \{ \|f(x,y)\|_p \} \quad L_p M -$

лінійні простори функцій визначених на множині Π^+ з нормою $\|f(x,y)\|_{L_p M} = \sup_{y > 0} \{ \|f(x,y)\|_p \}$.

$$W_y(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-x^2/4y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|u|^2} e^{-iux} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-yu^2} \cos ux du, \text{ де } y > 0 -$$

Нехай

невід'ємне дельтаподібне ядро Гауса-Вейерштраса, яке задовольняє рівняння

теплопровідності $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}$,

$$\overline{C * W_y} = \left\{ u(x, y) = f * W_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) W_y(t) dt : f(x) \in C, y > 0, \right. \\ \left. f(x), y = 0. \right\} \subset C(\overline{\Pi}^+) \text{ і}$$

$$\overline{L_p * W_y} = \left\{ u(x, y) = f * W_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) W_y(t) dt : f(x) \in L_p, y > 0, \right. \\ \left. f(x), y = 0. \right\} \subset L_p \overline{M} \text{ - підпростори}$$

згорток функції $f(x)$ відповідно з просторів C і L_p з ядром Гауса-Вейерштраса, які є підпросторами нормованих просторів $C(\overline{\Pi}^+)$ і $L_p \overline{M}$,

$$L_p * W_y = \{u(x, y) = f * W_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) W_y(t) dt : (f(x) \in L_p) \wedge (y > 0)\} \subset L_p M -$$

підпростір згорток функції $f(x) \in L_p$ з ядром Гауса-Вейерштраса, якій є підпростором нормованого простору $L_p M$,

$C^\infty(\Pi^+)$ - простори нескінченно диференційовних функцій визначених на множині Π^+ , які мають частинні похідні довільного порядку, $M^+(\Pi^+)$ -простір функцій $f(x, y)$, визначених на множині Π^+ і обмежених при кожному $y \geq y_0 > 0$, тобто для яких при кожному $y_0 > 0$ справедлива нерівність: $\sup_{y \geq y_0} \sup_{x \in R} |f(x, y)| < K(y_0)$, де $K(y_0)$ -

константа, яка залежить тільки від y_0 , $\Gamma(\overline{\Pi}^+)$ -простір функцій $f(x, y)$, заданих на множині $\overline{\Pi}^+$ таких, що майже для всіх дійсних x існує $\lim_{y \rightarrow 0+0} f(x, y) = f(x, 0)$.

Лінійні нормовані простори X і Y називають ізометричними, якщо існує взаємно однозначне відображення φ простору X на простір Y , яке не змінює віддалі між довільними елементами a та b простору X і їх образами в просторі Y , тобто $\|a - b\|_X = \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_Y$.

Встановлено, що підпростори розв'язків рівняння теплопровідності

$$\{u(x, y) \in C(\overline{\Pi}^+) : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (C^\infty(\Pi^+))\}, \text{ які неперервні і обмежені в замкненій}$$

верхній півплощині $\overline{\Pi}^+$ і нескінченно диференційовані в верхній півплощині Π^+ ізометричні простору C , підпростори розв'язків рівняння теплопровідності з простору

$$L_p \overline{M} \{u(x, y) \in L_p \overline{M} : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (u(x, y) \in C^\infty(\Pi^+) \cap M^+(\Pi^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi}^+))\}, \text{ які}$$

нескінченно диференційовані на Π^+ , обмежені при кожному $y \geq y_0 > 0$ такі, що майже для всіх дійсних x існує $\lim_{y \rightarrow 0+0} f(x, y) = f(x, 0)$ ізометричні простору L_p і підпростори

розв'язків рівняння теплопровідності з простору $L_p M$

$$\{u(x, y) \in L_p M : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (u(x, y) \in C^\infty(\Pi^+) \cap M^+(\Pi^+))\}, \text{ які нескінченно}$$

диференційовані на Π^+ і обмежені при кожному $y \geq y_0 > 0$ також ізометричні простору L_p , де $p > 1$.

Ізометричне вадображення задається за допомогою згортки з ядром Гауса-Вейерштрасса, тобто справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \overline{C * W_y} &= \{u(x, y) \in C(\overline{\Pi^+}) : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (C^\infty(\Pi^+))\}, \\ \overline{L_p * W_y} &= \{u(x, y) \in L_p \overline{M} : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (u(x, y) \in C^\infty(\Pi^+) \cap M^+(\Pi^+) \cap \Gamma(\overline{\Pi^+}))\}, \\ L_p * W_y &= \{u(x, y) \in L_p M : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \right) \wedge (u(x, y) \in C^\infty(\Pi^+) \cap M^+(\Pi^+))\}. \end{aligned}$$

Аналогічні твердження справедливі і для підпросторів розв'язків $u(x, y)$ рівняння теплопровідності 2π періодичних по змінній x , із заміною просторів C і L_p просторами

2π періодичних функцій $\tilde{C}$ і $\tilde{L}_p$ відповідно з нормами

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|, \quad \|f\|_{\tilde{L}_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Список використаних джерел:

1. Бушев Д.М. Ізометричність функціональних просторів з різним числом змінних / Д.М. Бушев. // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – С.1027–1045.
2. Бушев Д.М., Федунік-Яремчук О.В. Про ізометричність функціональних просторів. РЕЛАКСАЦІЙНО, НЕЛІНІЙНО, АКУСТООПТИЧНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕРІАЛИ: матеріали XI міжнародної наукової конференції (Луцьк, 1–5 червня 2022 р.). Луцьк, 2022. С. 94 – 95.
3. Бушев Д.М., Харкевич Ю. І. Умови збіжності майже скрізь згортки функції з дельтаподібним ядром до цієї функції. Укр. Матем. журн.-201. т. 50.-с.1027-1045.
4. Бушев Д.Н. “О некоторых применениях в прикладной математике изометричности функциональных пространств”, *Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”*, 2020 №1, с.81-90.