

О.М. Кравчук

Аналітична геометрія

УДК 514.122(075.8)
К 77

ББК 22.151.54я73
К77

Рецензенти:

Ковтонюк М.М. – доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Харкевич Ю.І. – кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Кравчук О.М.

К 77 **Аналітична геометрія:** навч. посіб. Луцьк, 2025. 282 с.

ISBN 978-966-600-5

Навчальний посібник за своєю структурою містить шість розділів: елементи векторної алгебри в просторі, метод координат на площині, пряма на площині, криві другого порядку, метод координат в просторі, пряма і площина в просторі, поверхні другого порядку; предметний покажчик, список рекомендованої літератури. Виклад теоретичного матеріалу всього курсу аналітичної геометрії здійснюється на основі векторної алгебри.

Посібник підготовлено для здобувачів освіти факультету інформаційних технологій і математики, які вивчають курс аналітичної геометрії, що належить до циклу фундаментальних дисциплін підготовки бакалаврів спеціальностей 111 «Математика» та 014 «Середня освіта (Математика)».

ПЕРЕДМОВА

Курс аналітичної геометрії належить до циклу фундаментальних дисциплін підготовки бакалаврів спеціальності «математика», «середня освіта. математика», а також «комп'ютерні науки і технології» на факультеті інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

«Аналітична геометрія» забезпечує професійний розвиток бакалавра та передбачає вивчення елементів векторної алгебри, теорії прямої на площині і в просторі, площини у просторі, кривих та поверхонь другого порядку. Усі ці питання тісно пов'язані між собою. Виклад аналітичної геометрії здійснюється на основі теорії векторної алгебри.

У першому розділі «Елементи векторної алгебри у просторі» формуються поняття, які є базовими для вивчення наступних розділів.

Векторне числення – це математична дисципліна, в якій вивчаються властивості операцій над векторами. Виникнення цієї теорії тісно пов'язане з потребами механіки і фізики. Векторне числення є могутнім апаратом дослідження цілого ряду математичних та прикладних дисциплін.

Тема «Метод координат на площині», що висвітлюється у другому розділі посібника, належить тій частині геометрії, яка називається аналітичною. Основними її поняттями є найпростіші геометричні образи (точки, прямі, площини, криві та поверхні II порядку). Аналітична геометрія – частина математики, яка застосовуючи координатний метод, досліджує геометричні об'єкти засобами алгебри. Метод координат дав можливість пов'язати геометрію з алгеброю й математичним аналізом, так як з'явився спосіб перекладу геометричних задач на мову алгебри і аналізу, який дозволив шифрувати різні фігури, записуючи їх за допомогою чисел, з'явилась можливість геометричні задачі розглядати з алгебраїчної точки зору, надаючи їх розв'язкам тієї загальності, яка властива алгебраїчному методу. І, навпаки,

задачі інших наук висвітлювати з геометричної точки зору, надаючи їм, властиву геометричним поняттям, наочність.

Вивчення теми «Лінії другого порядку», викладеної у третьому розділі, дає можливість здобувачу освіти переконатися в ефективності і перевагах аналітичного методу, за допомогою якого можна досить просто охарактеризувати властивості ліній та провести класифікацію всіх ліній другого порядку..

У четвертому розділі «Пряма і площина у просторі» за допомогою методу координат вивчаються різні рівняння площини та прямої у просторі, взаємне розміщення цих геометричних образів як у прямокутній, так і у афінній системах координат.

П'ятий розділ «Лінії та поверхні другого порядку у просторі» присвячений вивченню ліній у просторі, канонічних рівнянь поверхонь другого порядку та їх властивостей. Дослідження форм поверхонь за даними їх рівняннями виконується методом перерізів. Важливим є дослідження лінійчатих поверхонь, які мають дві серії прямолінійних твірних. Ці поверхні, їх властивості мають широке застосування у різних галузях науки та виробництва. Основні теоретичні положення щодо вивчення властивостей поверхонь за їх загальними рівняннями, зведення їх до канонічного виду викладені у пункті «Загальна теорія поверхонь другого порядку».

Теми аналітичної геометрії «Канонічні рівняння ліній другого порядку», «Загальна теорія ліній другого порядку», «Канонічні рівняння поверхонь другого порядку» та «Загальна теорія поверхонь другого порядку» тісно пов'язані із такими дисциплінами як «Диференціальна геометрія і топологія», «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра», що вивчаються студентами в університеті, а також із шкільним курсом геометрії, що особливо важливо враховувати при підготовці майбутніх учителів математики.

Вступ

Геометрія – розділ математики, що вивчає просторові відношення і форми, а також інші відношення і форми, які подібні до просторових, за своєю структурою.

У розвитку геометрії можна вказати чотири основні періоди.

I. *Період зародження геометрії* тривав до VI-V ст. до н.е.. Спочатку геометрія відносилася до фізики, що вивчає найбільш загальні взаємозв'язки та відношення, які існують в природі. Перші геометричні роботи, що дійшли до нас, були написані в Стародавньому Єгипті. Геометричні відомості того часу були мало вагомими та зводилися до обчислення площ і об'ємів, викладалися у вигляді правил, що не мали свого обґрунтування, логічні доведення були дуже примітивні. Основним засобом досліджень була інтуїція, підтверджена деякими спостереженнями. У зв'язку із занепадом економіки Єгипту центр математичної культури перейшов у Грецію, де спостерігався розвиток будівництва, мореплавства, зароджувались астрономія і фізика. В той час виявляються і встановлюються зв'язки між різними геометричними факторами, формуються поняття про фігуру і геометричні твердження, з'являються деякі логічні доведення. Нові відомості вступають у суперечність з існуючими фактами. Появляється систематичний виклад геометрії, де її твердження поступово доводяться. Застосовується дедуктивний метод, тобто логічне доведення закономірностей з невеликої кількості основних положень. З цього часу починається *другий період* – період елементарної геометрії (V ст. до н. е. – XVI ст. н. е.). Це вже наука про найпростіші просторові форми і відношення, яка розвивається в логічній послідовності, виходячи із основних положень-аксіом. Геометрія, крім відомих прямої і кола, вивчає більш складні лінії, нові методи визначення площ та об'ємів, вчення про конічні перерізи, початки тригонометрії. Протягом наступних півтори тисячі років не спостерігалось визначних відкриттів. Та з розвитком техніки з'явилася величезна кількість задач, які

неможливо було розв'язати. Математики зіткнулися із змінними величинами, що, як виявилось, тісно пов'язані з вивченням різноманітних кривих.

Третій – період математики змінних величин (початок XVII – середина XIX ст.). Існуюча геометрична система вже не могла задовольнити потреби нової практики. Тоді французькими математиками П'єром Ферма і Рене Декартом був винайдений загальний метод досліджень – метод координат. Сформувалась нова вітка геометрії - **аналітична геометрія**. Цей метод дозволив пов'язати геометрію з алгеброю.

З появою координатного методу виникають нові геометричні теорії: аналітична, диференціальна, проєктивна, нарисна геометрії.

Четвертий – період сучасної геометрії (з середини XIX ст.).

Предметом аналітичної геометрії є вивчення фігур і перетворень, що задаються алгебраїчними рівняннями відносно системи координат, використовуючи методи алгебри.

Два підходи до вивчення аналітичної геометрії

Перший, що склався історично: вводиться система координат і координати, що визначають положення точки на площині, розгортається теорія на основі координат точки.

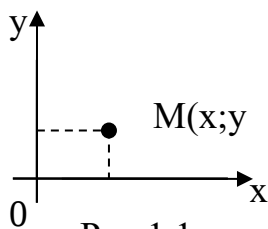


Рис.1.1

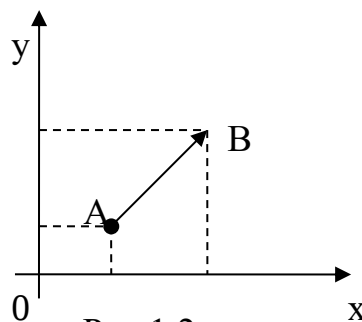


Рис.1.2

Другий підхід.

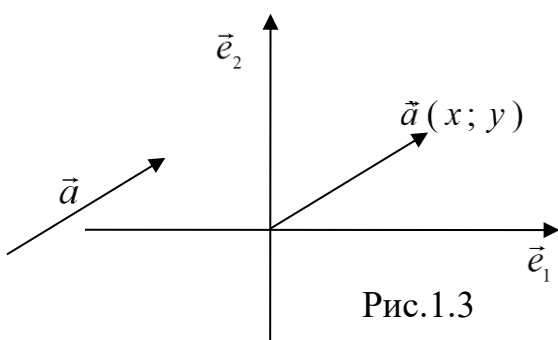


Рис.1.3

Вводиться поняття вектора. Визначаються координати вектора відносно векторного

базису (рис.1.3). Розгортається векторна теорія, а потім викладається аналітична геометрія на основі векторної теорії. Ми підемо другим шляхом.

Поняття *вектора* (від лат.vector- той, що несе (везе)) в науку ввів англійський математик, механік та астроном Уільям Роуен Гамільтон в 1846 році. Ми бачимо, що поняття вектора. і векторне числення виникли не так давно, тільки в 40-их роках XIX ст. В той час як теоретична механіка – наука, де фігурують сили і , тобто, векторні величини - набула цілком завершеної форми ще в кінці XVIII ст.. Величини, які пізніше були названі векторними , проектували на горизонтальний та вертикальний напрям і далі оперували з цими проекціями, які вже є числами (координатами). Це створювало певні труднощі і незручності , приводило до громіздких обчислень. Адже у векторному численні ми оперуємо з відомими, тобто геометричними об'єктами, оперуємо ними безпосередньо, а не обхідним шляхом через числа. Ця можливість такого оперування геометричними об'єктами і є другою сильною стороною векторного числення. Але, щоб все це з`явилося, необхідно було, щоб, *по-перше*, математика досягла свого певного розвитку, зокрема теорія комплексних чисел; а *по-друге*, щоб фізики і механіки досконало вивчили різні види рухів матеріальних тіл, електрику, магнетизм і т. д. Люди зрозуміли, що величини характеризуються не лише числом, а й напрямом. Як результат – є поняття вектора. Отже, *вектор* – це матеріальна абстракція конкретних величин, які існують в природі та теоретичних наукових дослідженнях. Так як вектор – напрямлений відрізок, а відрізок – ідеальний об'єкт, то поняття вектора – ідеалізація. Векторне числення сприяло дальшому розвитку тих наук, на базі яких воно виникло, але воно також продовжує розвиватись. В природі векторні величини існують трьох типів:

- 1) ***Прикладений або зв'язаний вектор*** – це напрямлений відрізок (наприклад, сила, що діє на точку; *швидкість* – частинки рідини, яка рухається із збуренням). Тут кожна частинка має свій вектор

швидкості, який не є вектором швидкості іншої частинки. Його не можна від точки його прикладання і переносити.

2) **Ковзний** (наприклад, сила, що діє на тверде тіло). Такі вектори можна переносити вздовж лінії їх дії.

3) **Вільний вектор** (наприклад, момент сили). Його можна зміщувати вздовж лінії його дії, переносити паралельно самому собі на будь-яку пряму, паралельну його дії, не змінюючи напрямку самого вектора.

Пряме оперування з геометричними об'єктами є однією з сильних сторін векторного числення.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ У ПРОСТОРИ

1.1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами

1.1.1 Векторні і скалярні величини

У природі існують величини двоякого роду.

Скалярні – величини, які характеризуються тільки числом (площа, об’єм, маса тощо).

Векторні – величини, які крім числа характеризуються ще й напрямком (швидкість, сила, прискорення та ін.).

В математиці вектор – це математична абстракція конкретних векторних величин природи.

Нас не цікавить зміст, а цікавлять тільки величина і напрям.

1.1.2 Напрявлений відрізок

Напрявленим відрізком називається відрізок, для якого суттєвим є порядок, в якому задані його кінці.

$\overline{AB}$, A – початок, B – кінець.

Наприклад відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ різні (рис.1.4).

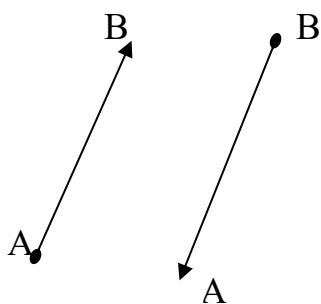


Рис.1.4

Властивості напрямлених відрізків:

1. *Довжина.*

Довжиною напрямленого відрізка $\overline{AB}$ називається відстань між точками A та B , або довжина відрізка AB .

$$|\overline{AB}| = AB = \rho(A, B)$$

2. *Нульовим* напрямленим відрізком називається відрізок, у якого початок співпадає з його кінцем, тобто це точка

$$\vec{0} = \overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} \dots$$

3. Кожен напрямлений відрізок в просторі (на площині, на прямій) визначає напрям, крім нульового напрямленого відрізка, який напрямку не визначає.

Проте, зручно для теорії вважати, що він визначає такий напрям, який нам потрібно.

4.

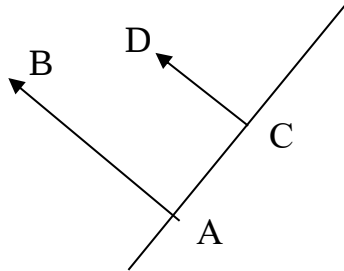


Рис.1.5

Напрявлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **співнаправленими**, якщо вони, по-перше, паралельні і, по-друге, якщо їх кінці лежать в одній півплощині відносно прямої, що сполучає їх початки,

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD} \text{ (рис.1.5).}$$

і протилежно напрямлені

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD} \text{ (рис.1.6),}$$

якщо вони паралельні і їх кінці лежать в різних півплощинах відносно прямої, що сполучає їх початки.

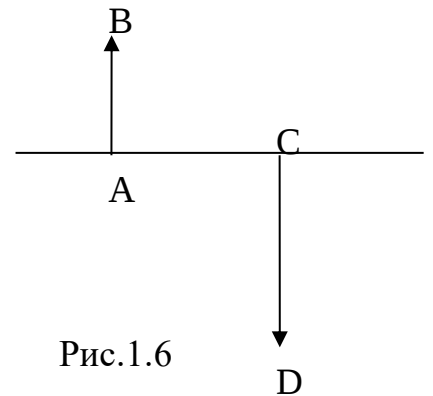


Рис.1.6

5. Рівні напрямлені відрізки.

Два напрямлені відрізки називаються **рівними**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

якщо вони співнаправлені і мають однакову довжину.

1.1.3 Поняття вектора

Історично спочатку вектор означався, як напрямлений відрізок. Але, в природі існують різні типи векторів (наприклад, прикладені до точки, твердого тіла, моменти сили, що можна переміщати), тобто, вектор - це не тільки напрямлений відрізок. З другого, боку математиків не задовольняє означення вектора, як направленої відрізка з двох причин. По-перше, в системі координат рівні вектори мають рівні координати і немає взаємно-однозначної відповідності. По-друге, рівні множини складаються з одних і тих же елементів, а рівні вектори це різні геометричні об'єкти.

Позначимо W множину всіх напрямлених відрізків простору (площини). У цій множині введемо відношення рівні напрямлені відрізки. Легко бачити, що це відношення має три властивості еквівалентності:

- рефлексивність:

$$\overline{AB} = \overline{AB};$$

- симетричність:

$$\text{якщо } \overline{AB} = \overline{CD}, \text{ то } \overline{CD} = \overline{AB};$$

- транзитивність:

$$\text{якщо } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ і } \overline{CD} = \overline{EF}, \text{ то } \overline{AB} = \overline{EF}.$$

З алгебри відомо, що таку множину W можна розбити на класи еквівалентності, які не перетинаються, об'єднавши в один клас всі рівні напрямлені відрізки. На кожен клас будемо дивитися як на один елемент, отримаємо нову множину таких елементів – V . Ця множина називається **фактор-множиною** множини W за відношенням поняття «рівні», і позначається

$$V = W / \sim$$

Вільним вектором або просто вектором називається елемент фактор-множини множини всіх напрямлених відрізків за відношенням «рівні».

Іншими словами вектор – це нескінченна множина рівних між собою напрямлених відрізків (рис.1.7).

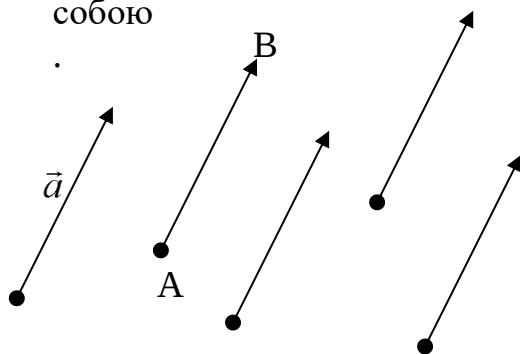


Рис.1.7

Теорема 1.1. Будь-який напрямлений відрізок $\overline{AB}$, представник вектора $\vec{a}$,
 $\overline{AB} \in \vec{a}$,

повністю і однозначно визначає вектор $\vec{a}$.

Доведення. З довільної точки A простору побудуємо напрямлений відрізок $\overline{AB}$. Щоб довести теорему досить довести, що з довільної точки простору можна побудувати напрямлений відрізок, рівний напрямленому

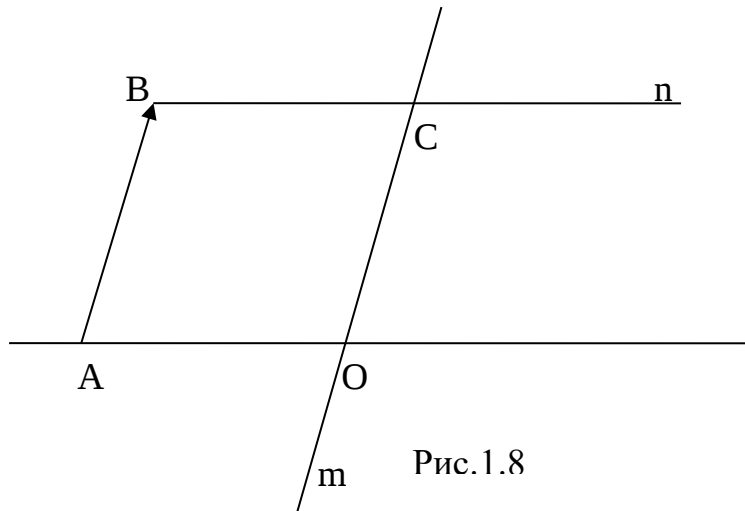


Рис.1.8

відрізку AB , представнику вектора $\vec{a}$, і до того ж єдиний.

І нехай точка O довільна точка простору. Побудуємо напрямлений відрізок $\overline{OC} = \overline{AB}$ і покажемо, що це виконується однозначно.

Дійсно, AO – єдиний відрізок, що визначається двома точками. Через точку O проведемо пряму m паралельно AB , вона єдина. Через $t. B$ проведемо пряму $BC \parallel AO$ – єдина, точка перетину $C = m \cap n$ – єдина. (рис.1.8).

Отже, однозначно визначається напрямлений відрізок

$$\overline{OC} = \overline{AB}$$

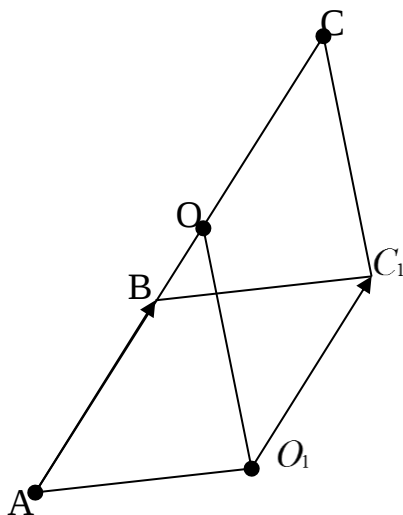


Рис.1.9

У випадку, коли точка O належить AB , візьмемо допоміжну довільну точку простору O_1 і побудуємо напрямлений відрізок $\overline{O_1C_1}$ рівний відрізку $\overline{AB}$ (рис.1.9). За попереднім пунктом існує єдиний такий напрямлений відрізок

$$\overline{O_1C_1} = \overline{AB}.$$

Розглянемо тепер напрямлений відрізок $\overline{O_1C_1}$ і точку O . За попереднім пунктом існує єдиний напрямлений відрізок

$$\overline{OC} = \overline{O_1C_1} = \overline{AB}.$$

Наслідки.

1. Доведена теорема дає право, працюючи з векторами, працювати тільки з їх представником – напрямленим відрізком, так як кожен напрямлений відрізок повністю визначає вектор.

2. Якщо

$$\overrightarrow{AB} \in \vec{a},$$

то цілком природно писати $\overrightarrow{AB}$, так як $\overrightarrow{AB}$ повністю визначає вектор $\vec{a}$, отже,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

1.2 Лінійні операції над векторами

1.2.1 Додавання векторів

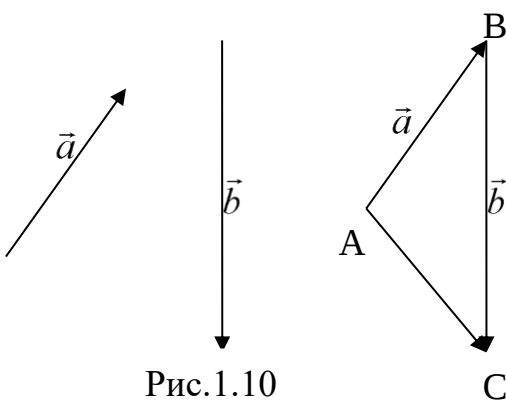


Рис.1.10

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З довільної точки А простору будуюмо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. З його кінця - точки В- будуюмо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, який сполучає початок першого вектора – точку А з кінцем другого – точкою С, і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Записують $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Таке правило додавання векторів називається правилом трикутника.

Із означення випливає дуже важлива фундаментальна рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1.1)$$

Зміст рівності (1.1) полягає в тому, що при будь-якому взаємному розміщенні трьох точок простору А,В,С мають місце різні векторні суми.

Наприклад,

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

Властивості операції додавання векторів:

1. Вектор $-\vec{a}$ називається *протилежним* до вектора $\vec{a}$, якщо він має протилежний напрям і однакову з ним довжину (рис.1.11)

Сумою протилежно напрямлених векторів є нуль-вектор :

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

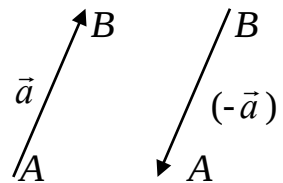


Рис.1.11

Дійсно, нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тоді $(-\vec{a}) = \overrightarrow{BA}$. За правилом трикутника та за рівністю (1) матимемо $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2. Нуль-вектор є нейтральним елементом операції додавання векторів:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Дійсно, нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$ тоді

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

3. *Комутативна* властивість додавання векторів, тобто

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Доведення.

Тут суттєво розглянути два випадки.

1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні;

2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - колінеарні, тобто паралельні або лежать на одній прямій.

У першому випадку:

з довільної точки А простору на векторах

$\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуємо паралелограм (рис.1.12).

$$\text{Тоді } \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\text{і } \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

Так як праві частини рівностей рівні, то рівні і ліві.

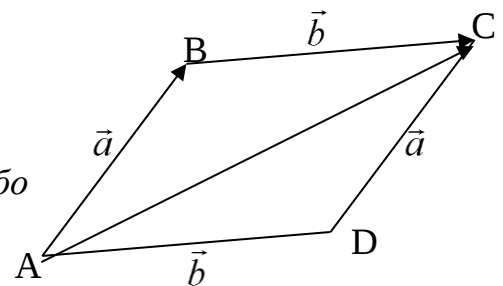


Рис.1.12

$$\text{Отже, } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

2) З довільної точки А простору (рис.1.13) будуємо вектор:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, з його кінця будуємо вектор

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тоді

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

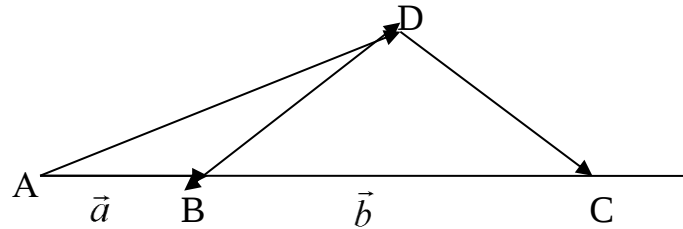


Рис.1.13

Візьмемо довільну точку D простору, яка не належить прямій AC.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \vec{a} + \vec{b} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \overrightarrow{DD} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{0} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{a}, \end{aligned}$$

що й треба було довести: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Наслідок: З доведеної властивості випливає ще одне правило додавання

векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: з довільної точки простору будуємо вектори, рівні даним і на них будуємо паралелограм. Вектор-діагональ, що має початок в точці відкладання векторів є їх сумою (рис.1.12):

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

4. *Асоціативна властивість* додавання векторів, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Доведення. Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.1.14)

З довільної точки А простору (рис.1.15) побудуємо вектори

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}; \overrightarrow{BC} = \vec{b}; \overrightarrow{CD} = \vec{c}.$$

$$\text{Тоді } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{і } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

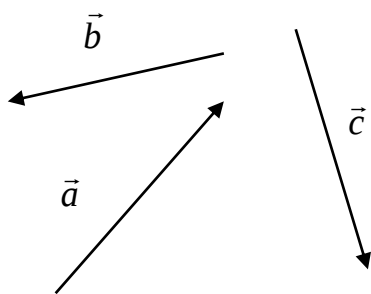


Рис.1.14

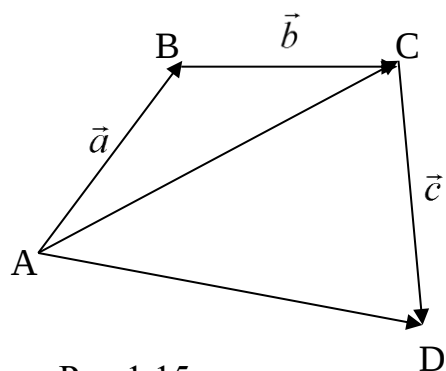


Рис.1.15

З отриманих двох рівностей, у яких праві частини рівні ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$), отримаємо рівність лівих частин, тобто властивість доведена.

1.2.2 Додавання m векторів

Доведені властивості (3) і (4) дають право відразу будувати суму m числа векторів,

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_m$$

Сума m числа векторів будується наступним способом:

з довільної точки A простору будуюмо вектор

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{AA_1},$$

з його кінця – вектор $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$, з кінця

вектора $\vec{a}_2$ – з точки A_2 вектор $\vec{a}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}$

і т.д., з кінця $\vec{a}_{m-1}$ вектор $\vec{a}_m = \overrightarrow{A_{m-1}A_m}$.

Тоді вектор, початком якого є початок першого вектора $\vec{a}_1$ і кінцем – кінець останнього вектора $\vec{a}_m$ є сумою цих всіх m векторів.

Дійсно, за рівністю (1):

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_m$$

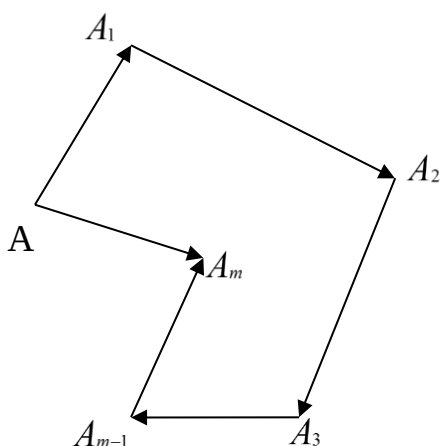


Рис.1.16

1.2.3 Додавання колінеарних векторів

Тут можливі два випадки:

1) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ - співнаправлені (рис.1.17)

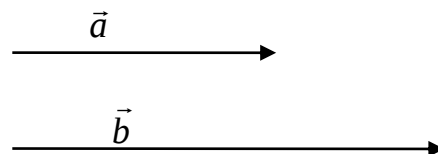


Рис.1.17

Будуємо суму векторів
(рис.1.18) . За правилом

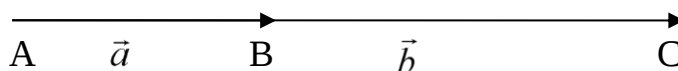


Рис.1.18

додавання векторів та за рівністю (1):

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Отже, сума співнаправлених векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\overrightarrow{AC}$ - співнаправлений з векторами-доданками

$$\overrightarrow{AC} \uparrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

і довжина його дорівнює сумі довжин даних векторів: $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

2) Якщо $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ - протилежно напрямлені (рис.1.19),

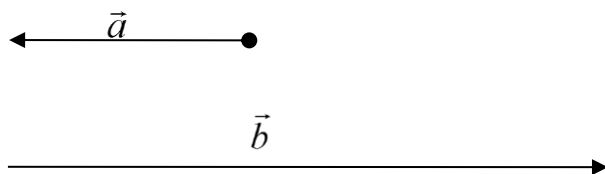


Рис.1.19

то знайдемо їх суму (рис.1.20) за правилом додавання векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

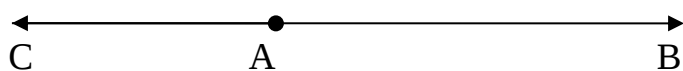


Рис.1.20

Очевидно, сумою протилежно напрямлених векторів є вектор співнаправлений з довшим

вектором і довжина його рівна різниці довжин векторів-доданків (від довжини більшого відняти довжину меншого).

1.2.4 Віднімання векторів

Як і при відніманні чисел, операція віднімання векторів протилежна до операції додавання векторів.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{x}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{x} \text{ такий, що } \vec{x} + \vec{b} = \vec{a} \quad (1.2)$$

Виникає питання, чи існує такий вектор. На це питання відповідає наступне твердження.

Теорема 1.2. Для будь-яких двох векторів простору існує їх вектор-різниця і притому єдиний.

Доведення. Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

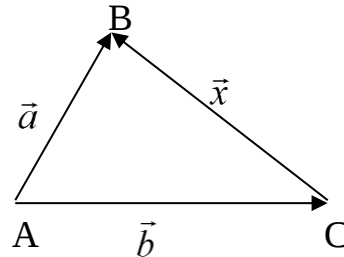
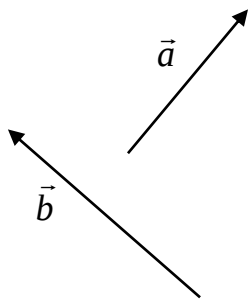


Рис.1.21

1) З довільної точки А простору побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$, що дорівнює $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис.1.21).

За рівністю (1.1) для довільних трьох точок простору виконується векторна рівність, тоді

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB},$$

$$\text{тобто } \vec{b} + \overrightarrow{CB} = \vec{a}.$$

За рівністю (1.2),

$$\overrightarrow{CB} = \vec{x}$$

Отже, для довільних векторів існує їх різниця.

2) Доведемо єдність методом від супротивного.

Нехай, крім різниці $\vec{x}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, існує ще одна різниця $\vec{x}_1$, тобто

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{x} \text{ і } \vec{a} - \vec{b} = \vec{x}_1 \text{ або}$$

$$\vec{x} + \vec{b} = \vec{a} \text{ і } \vec{x}_1 + \vec{b} = \vec{a}.$$

До обох частин кожної рівності додамо вектор, протилежний вектору $\vec{b}$. Отримаємо:

$$\vec{x} + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}); \quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b}); \quad \vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\text{і} \quad \vec{x}_1 + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}); \quad \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b}); \quad \vec{x}_1 = \vec{a} + (-\vec{b})$$

з отриманих двох співвідношень робимо висновок, що $\vec{x} = \vec{x}_1$.

Отже, вектор-різниця єдиний.

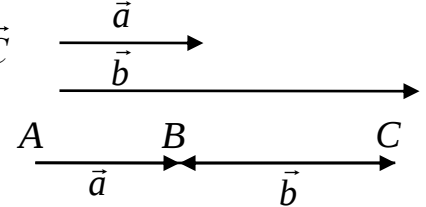
Наслідки

1. Побудова різниці двох векторів

З довільної точки простору, як з початку, будуємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сполучаємо їх кінці і направляємо вектор в бік того вектора, від якого віднімаємо.

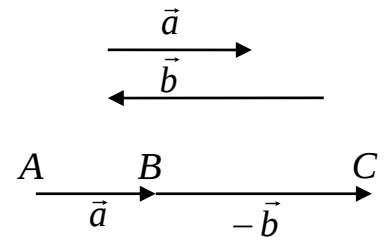
Якщо вектори колінеарні: 1) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}.$$



2) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$;

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



2. Операцію віднімання двох векторів можна замінити операцією додавання до першого вектора-доданка протилежного вектора другому.

При доведенні теореми ми отримали, що $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$ і за рівністю (1.2)

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}.$$

З цих двох рівностей маємо: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

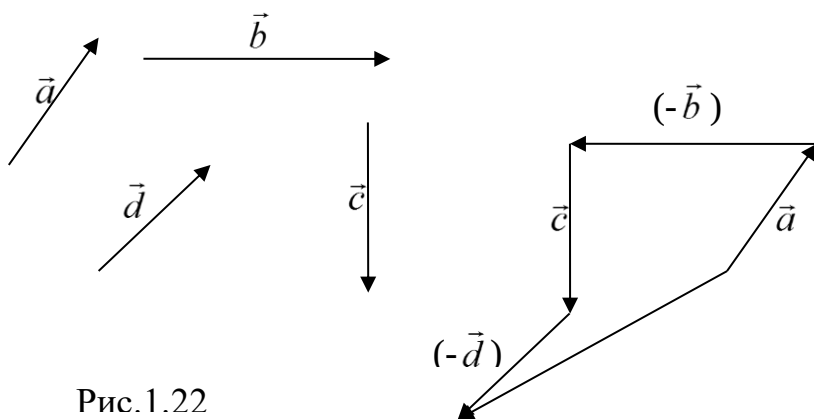


Рис.1.22

Цей факт дуже зручно використати при побудові алгебраїчної суми векторів.

Приклад. Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Побудувати вектор $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.

Розв'язання.

Запишемо шуканий вектор у вигляді суми векторів:

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + (-\vec{d})$ і побудуємо за правилом відшукування суми n векторів (рис.1.22)

1.2.5 Множення вектора на скаляр

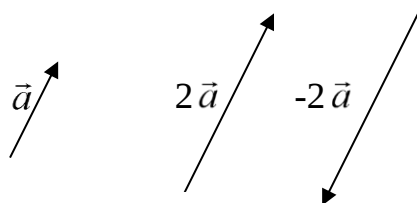


Рис.1.23

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор, довжина якого дорівнює добутку абсолютної величини числа λ на довжину вектора $\vec{a}$. Цей вектор співнаправлений з даним вектором $\vec{a}$, якщо λ - число додатне і протилежно направлений, якщо число від'ємне

(рис.1.23). Добуток нуля на будь-який вектор і добуток числа на нуль-вектор є нуль-вектор. Це означення можна записати так:

$$\lambda \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{aligned} |\vec{b}| &= |\lambda| \cdot |\vec{a}|, \\ \vec{b} &\uparrow\uparrow \vec{a}, \text{ якщо } \lambda > 0, \\ \vec{b} &\uparrow\downarrow \vec{a}, \text{ якщо } \lambda < 0, \\ 0 \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ця операція має такі три властивості.

1. Асоціативна

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$$

2. Дистрибутивна відносно векторного множника

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

3. Дистрибутивна відносно числового множника

$$(\vec{a} + \vec{b})\lambda = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Перш ніж, перейти до доведення цих властивостей, розглянемо деякі допоміжні поняття.

Лема 1.1. Для того, щоб два вектори були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб один вектор можна було подати, як добуток скаляра на другий вектор, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda : \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, покажемо, що $\exists \lambda : \vec{a} = \lambda \vec{b}$. Доведення існування числа λ полягає в тому, що безпосередньо це число знаходимо для двох випадків:

$$\text{а) } \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \text{ та б) } \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$$

Розглянемо *другий випадок*. За означенням добутку вектора на число

маємо $|\vec{a}| = |\lambda| |\vec{b}|$. Звідси $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, враховуючи що $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, покладемо

$\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Покажемо, що $\lambda \vec{b} = \vec{a}$. За означенням рівності двох векторів:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \end{cases}. \text{ Потрібно показати, що довжина вектора } \lambda \vec{b} \text{ рівна довжині}$$

вектора $\vec{a}$ і $\lambda \vec{b}$ співнапрямлений з $\vec{a}$.

Дійсно, маємо:

$$1) \lambda \vec{b} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}, \text{ тоді}$$

$$|\lambda \vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|, \text{ тобто } |\lambda \vec{b}| = |\vec{a}|.$$

$$2) \lambda \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}, \text{ бо } \lambda < 0$$

$$\lambda \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$$

$$\lambda \vec{b} = \vec{a}$$

Достатність доведена: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Випадок а) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ доводиться аналогічно.

Лема доведена.

Ортом називається вектор одиничної довжини.

Здебільшого орт позначають $\vec{e}$.

$$|\vec{e}| = 1.$$

Ортом вектора $\vec{a}$ називається вектор одиничної довжини, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$ (рис.1.24).

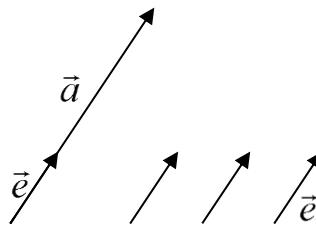


Рис.1.24

Виразення вектора через його орт

Нехай $\vec{e}$ орт вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{e}$

За лемою, існує таке λ , що $\vec{a} = \lambda \vec{e} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|} \vec{e} = |\vec{a}| \vec{e}$.

Отже, вектор $\vec{a}$ виражається через його орт за формулою :

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$$

Доведення властивостей операції множення вектора на число

1. Асоціативна

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$$

Введемо позначення $\alpha(\beta \vec{a}) = \vec{p}, (\alpha\beta) \vec{a} = \vec{q}$.

Потрібно довести, що $\vec{p} = \vec{q}$, для цього, за означенням рівності векторів потрібно показати, що виконуються дві умови:

$$1) |\vec{p}| = |\vec{q}|$$

$$2) \vec{p} \uparrow \uparrow \vec{q}$$

Дійсно,

$$1) |\vec{p}| = |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha| |\beta\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|,$$

$$|\vec{q}| = |(\alpha\beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| |\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|.$$

$$\text{Отже, } |\vec{p}| = |\vec{q}|$$

2) Можливі такі 4 випадки відносно знаків чисел.

$$1) \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$2) \alpha > 0, \beta < 0;$$

$$3) \alpha < 0, \beta > 0;$$

$$4) \alpha < 0, \beta < 0.$$

Доведемо третій випадок: $\alpha < 0, \beta > 0$, останні – аналогічно.

Розглянемо $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$.

Оскільки $\alpha < 0$, то $\vec{p} \uparrow \downarrow \beta\vec{a}, \vec{a} \uparrow \uparrow \beta\vec{a}, \text{ а } \beta > 0$. Отже, $\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{a}$

Тепер розглянемо вектор $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Оскільки $\alpha \cdot \beta < 0$, то

$$\vec{q} \uparrow \downarrow \vec{a}$$

Так як $\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{a}$ і $\vec{q} \uparrow \downarrow \vec{a}$, то $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{q}$.

Отже, виконуються обидві умови рівності векторів, тобто $\vec{p} = \vec{q}$

Властивість доведена.

2. **Дистрибутивна** відносно **векторного** множника

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

Аналогічно до попередньої властивості введемо позначення

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \vec{p}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = \vec{q}$ і доведемо рівність цих векторів: $\vec{p} = \vec{q}$.

Тут можливі такі 6 випадків, щодо знаків чисел α та β :

$$1) \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta > 0;$$

- 2) $\alpha > 0, \beta < 0, \alpha + \beta > 0$;
- 3) $\alpha > 0, \beta < 0, \alpha + \beta < 0$;
- 4) $\alpha < 0, \beta > 0, \alpha + \beta > 0$;
- 5) $\alpha < 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 0$;
- 6) $\alpha < 0, \beta < 0, \alpha + \beta < 0$.

Розглянемо один із випадків, наприклад, третій: $\alpha > 0, \beta < 0, \alpha + \beta < 0$ і покажемо, що виконуються обидві умови рівності векторів, тобто

$$a) |\vec{p}| = |\vec{q}| \text{ та } б) \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}.$$

a) $|\vec{p}| = |(\alpha + \beta)\vec{a}|$. За означенням добутку вектора на число:

$$|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |\alpha + \beta| \cdot |\vec{a}| = (|\beta| - |\alpha|) \cdot |\vec{a}| = |\beta||\vec{a}| - |\alpha||\vec{a}|,$$

$|\vec{q}| = |\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}|$. Довжина цього вектора дорівнює різниці довжин колінеарних векторів. Так як $\alpha > 0$, то $\alpha \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, а $\beta < 0$, то $\beta \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, тоді модуль суми протилежно направлених векторів дорівнює різниці модулів, тобто

$$|\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}| = |\beta \cdot \vec{a}| - |\alpha \cdot \vec{a}|$$

За означенням добутку вектора на число

$$|\beta \cdot \vec{a}| - |\alpha \cdot \vec{a}| = |\beta||\vec{a}| - |\alpha||\vec{a}|$$

$$\text{Отже, } |\vec{p}| = |\vec{q}|.$$

б) Покажемо, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ - співнаправлені.

Дійсно, $\vec{p} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, оскільки $\alpha + \beta < 0$.

$\vec{q} = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{a}) \uparrow\uparrow \beta \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, оскільки $\alpha \vec{a} \uparrow\downarrow \beta \vec{a}$, їх сумою є вектор співнаправлений з довшим, тобто $\beta \vec{a}$ і так як $\beta < 0$, то він протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$: $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$

Отже, обидва вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ протилежно напрямлені з вектором $\vec{a}$, тобто $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

Зауваження. Доведена властивість дає право, з *одного боку*, розкривати дужки, коли в дужках сума чисел; з *другого боку*, виносити за дужки спільний векторний множник. Інші випадки доводяться аналогічно.

3. Дистрибутивна властивість відносно числового множника

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Тут принципово важливі два випадки:

- 1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - колінеарні; 2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні.

Розглянемо кожен з них.

- 1) Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$

За лемою 1 існує λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Враховуючи властивість 2:

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha(\lambda\vec{b} + \vec{b}) = \alpha(\lambda + 1)\vec{b} = (\alpha\lambda + \alpha)\vec{b} = (\alpha\lambda)\vec{b} + \alpha\vec{b} = \alpha(\lambda\vec{b}) + \alpha\vec{b} = \\ &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \text{ тобто виконується властивість.} \end{aligned}$$

- 2) Нехай тепер $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні вектори.

З довільної точки А простору будуємо вектори

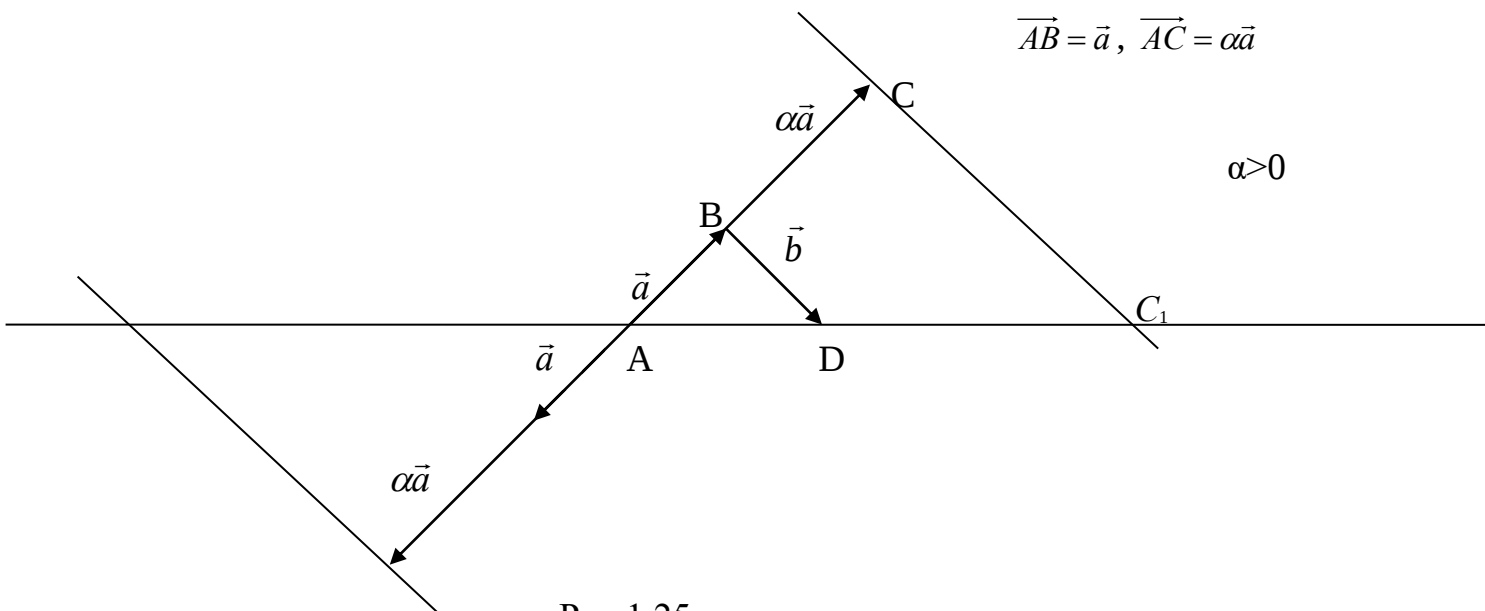


Рис.1.25

Тут можливі два випадки: $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ (рис.1.25). Побудуємо вектор $\vec{BD} = \vec{b}$. З точки С проведемо пряму паралельну вектору $\vec{BD}$ до перетину з прямою AD. Отримаємо точку C_1 .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\text{тобто } \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD} /$$

З подібності трикутників: $\triangle ABD \sim \triangle ACC_1$ запишемо відношення

$$\frac{CC_1}{BD} = \frac{AC}{AB} = \alpha.$$

$$\text{Звідси } \overrightarrow{CC_1} = \alpha \overrightarrow{BD} = \lambda \vec{b}.$$

$$\text{Оскільки } \frac{AC_1}{AD} = \frac{CC_1}{BD} = \alpha,$$

$$\text{то } \overrightarrow{AC_1} = \alpha \overrightarrow{AD} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}).$$

З другого боку, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}$, тобто $\overrightarrow{AC_1} = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$.

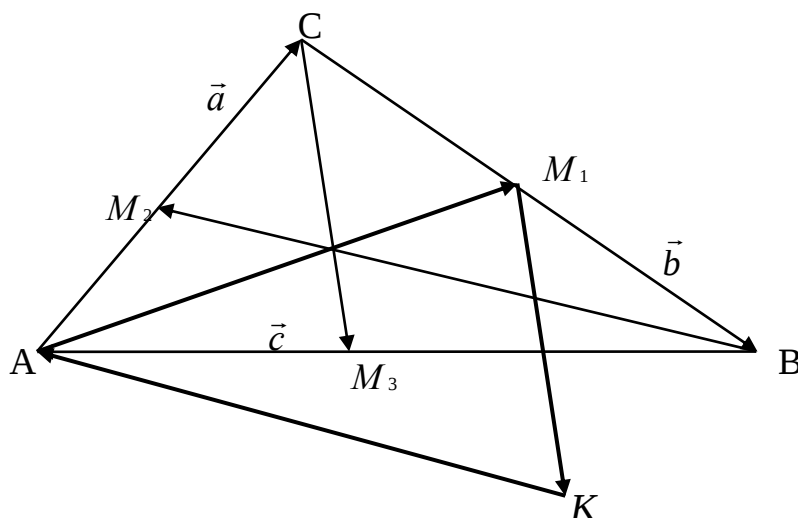
$$\text{Отже, } \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}.$$

Зауваження. Доведена властивість дає право, з одного боку, розкривати дужки, коли в дужках сума векторів, і, навпаки, виносити за дужки спільний числовий множник.

Задача. У трикутнику ABC проведено медіани AM_1, BM_2, CM_3 . Знайти і побудувати суму

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3}$$

Розв'язання. Введемо вектори



$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{c}$$

(рис.1.26)

Рис.1.26

$$\overrightarrow{AM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

Виразимо медіани через вектори $\overrightarrow{BM_2} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},$

$$\overrightarrow{CM_3} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Знайдемо їх суму:

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{3}{2}\vec{0} = \vec{0}.$$

Отже, вектори-медіани, при побудові їх суми, утворюють замкнену лінію, тобто трикутник. На рисунку – це $\triangle AM_1K$.

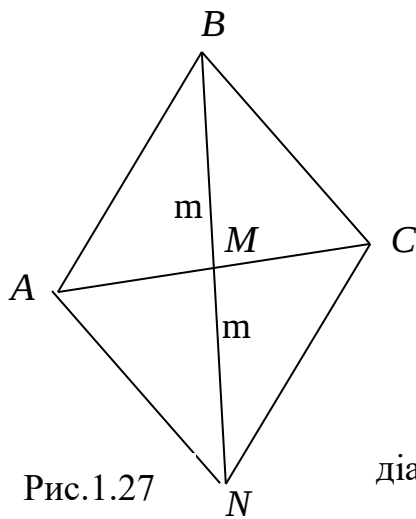


Рис.1.27

Зауваження. Якщо в умові задачі дано медіану трикутника, то, в багатьох випадках, корисно цю медіану продовжити і відкласти відрізок за довжиною рівний їй.

Отримаємо паралелограм (рис.1.27). Тоді скористуватися властивістю, що сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін, тобто

$$AC^2 + (2BM)^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Задача на розклад вектора за базисними векторами

Розглянемо випадок площини.

Потрібно вектор $\vec{c}$ розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

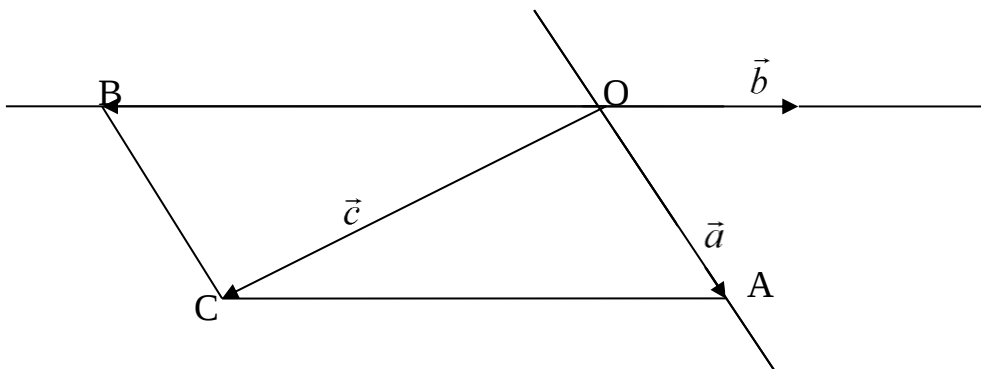


Рис.1.28

Продовжимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, що на них побудуємо паралелограм, у якому $\vec{c}$ буде діагоналлю (рис. 1.28). Тоді $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

За лемою, $\exists \alpha : \vec{OA} = \alpha \vec{a}, \exists \beta : \vec{OB} = \beta \vec{b}$, тоді $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

1.3 Лінійна залежність векторів

Ми вивчили лінійні операції над векторами. Це дає можливість розв'язати певний клас геометричних задач. Але ще не можемо розв'язувати задачі на обчислення довжин відрізків, величини кутів, площ, об'ємів, геометричних фігур тощо. Очевидно маємо ввести інші операції, а для цього нам буде потрібний допоміжний матеріал.

Нехай задана система векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$$

і, відповідно, система дійсних чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R.$$

Лінійною комбінацією векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$$

з коефіцієнтами

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

називається **вектор**, що є сумою добутків векторів $\vec{a}_i$ на відповідні коефіцієнти α_i , де i – пробігає значення 1, 2, 3...

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m \Leftrightarrow \vec{a} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i \quad (1.3)$$

Система векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$$

називається **лінійно залежною**, якщо існують такі числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що лінійна комбінація цих векторів з цими коефіцієнтами рівна $\vec{0}$.

$$\text{Отже, } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m - \text{лінійно залежні} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}, \quad (1.4)$$

причому $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| \neq 0$ (хоча б один α_i не дорівнює нулю).

Система векторів називається **лінійно незалежною**, якщо не існує чисел α_i , відмінних від нуля, таких, що виконується (1.4).

Іншими словами, система векторів лінійно незалежна, якщо $\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{a}_i =$

$$\vec{0} \Leftrightarrow \text{всі } \alpha_i = 0.$$

Наслідок1. Якщо дана система векторів містить нуль-вектор, то така система лінійно залежна.

Доведення.

Дійсно, розглянемо систему векторів

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}.$$

Очевидно,

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Так як один з коефіцієнтів (третій) $1 \neq 0$, то дана система векторів лінійно залежна.

Наслідок2. Якщо дана система векторів містить лінійно залежну підсистему, то і вся система лінійно залежна.

Доведення.

Дійсно, нехай $\vec{a}, \vec{b}$ - лінійно залежна система.

Розглянемо систему

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$$

Так як $\vec{a}, \vec{b}$ - лінійно залежна, то, за означенням,

$\exists \alpha, \beta : \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$, де α і β одночасно не рівні нулю. Нехай для означеності $\alpha \neq 0$, тоді, очевидно,

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}, \text{ оскільки } \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}, \text{ причому } \alpha \neq 0.$$

Це означає, що система векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ є лінійно залежною.

1.3.1 Колінеарність векторів

Виникає питання, як вияснити, чи дані вектори лінійно залежні чи лінійно незалежні? В цьому допоможе

Теорема 1.3. Для того, щоб два вектори були колінеарні необхідно і достатньо, щоб вони були лінійно залежними:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \text{лінійно залежні}$$

Доведення. Необхідність: нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$

За лемою 1 $\vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow 1 \cdot \vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0}$. Маємо, лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівна нуль-вектору, причому один із коефіцієнтів відмінний від нуля $1 \neq 0$. Значить вектори $\vec{a}, \vec{b}$ - лінійно залежні.

Достатність: нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}$ - лінійно залежні.

За означенням, $\exists \alpha, \beta$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$.

Нехай для означеності $\alpha \neq 0$.

Так як $\alpha \neq 0$, то можемо поділити обидві частини рівності на α і виразити вектор $\vec{a}$: $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \lambda \vec{b} \parallel \vec{b}$. Звідси $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Теорема доведена.

1.3.2 Компланарність векторів

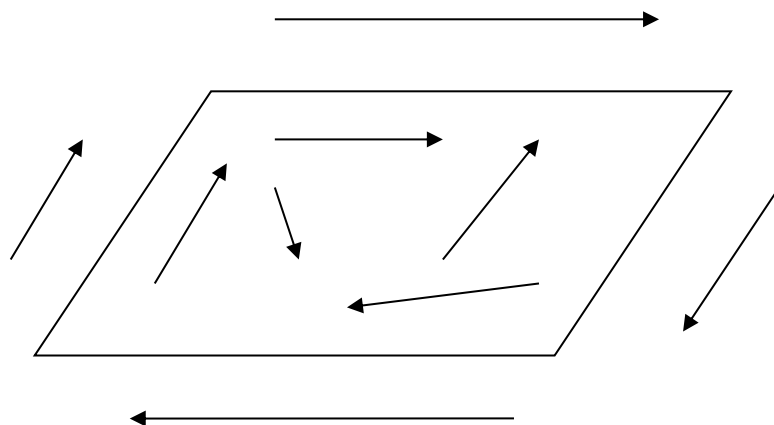


Рис.1.29

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині (або лежать в одній площині) (рис.1.29).

Теорема 1.4. Для того, щоб три вектори були компланарними, необхідно і достатньо, щоб вони були лінійно залежними, тобто: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарні $\Leftrightarrow$ вони лінійно залежні.

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

Тут принципово можливі два випадки:

- а) серед цих трьох векторів є два колінеарні.
- б) немає колінеарних.

Розглянемо ці випадки.

1) Нехай для означеності $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тоді за теоремою 3, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ – лінійно залежні. За наслідком II п.1.3.1 вся система векторів лінійно залежна.

2) Нехай для означеності вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. З довільної

точки А простору
будуємо вектори

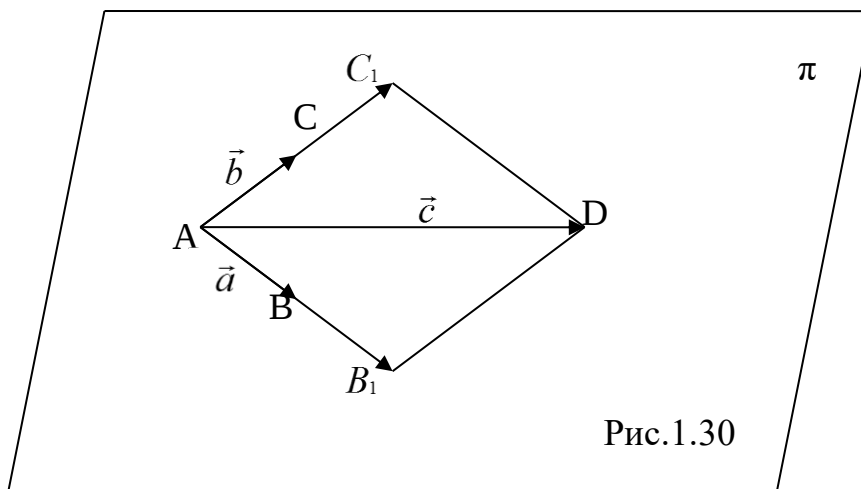


Рис.1.30

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$$

(рис.1.30)

Так як вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то точки А, В, С – єдиним способом визначають площину π . Побудуємо вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Через точку D проведемо $DB_1 \parallel AC$, $DC_1 \parallel AB$. Отримаємо паралелограм AB_1DC_1 . Вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$.

Так як $\overrightarrow{AB_1} \parallel \vec{a}$, то, за лемою $\overrightarrow{AB_1} = \alpha \vec{a}$ і так як $\overrightarrow{AC_1} \parallel \vec{b}$, то за лемою, $\overrightarrow{AC_1} = \beta \vec{b}$.

$$\text{Тоді } \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \Leftrightarrow 1 \cdot \vec{c} - \alpha \vec{a} - \beta \vec{b} = \vec{0}.$$

Очевидно, система векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежна, оскільки один з коефіцієнтів відмінний від нуля ($1 \neq 0$).

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні. Тоді $\exists \alpha, \beta, \gamma$, не всі одночасно рівні нулю такі, що $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$.

Нехай, для означеності, $\alpha \neq 0$, тоді поділивши обидві частини рівності на α , виразимо вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha} \vec{c}.$$

$$\text{Ввівши позначення, отримаємо } \vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow (m\vec{b} + n\vec{c}).$$

Якщо одне із чисел, m або n , дорівнює нулю, то вектори колінеарні і отже, компланарні. Якщо ж m, n відмінні від нуля, то вектори $m\vec{b}$ і $n\vec{c}$ визначають площину π і вектор $\vec{a} \parallel \pi$, тобто всі вектори компланарні. Що й треба було довести.

1.3.3 Лінійна залежність чотирьох векторів простору

Теорема 1.5. *Будь-які чотири вектори простору лінійно залежні.*

Доведення. Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Принципово можливі два випадки.

- 1) Серед цих чотирьох векторів є три компланарні, тоді, за теоремою 1.4, ці три вектори лінійно залежні і, за наслідком 2 п.1.3, вся система векторів лінійно залежна.
- 2) Серед цих чотирьох векторів є три некомпланарні. Нехай для означеності $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні. З довільної точки O простору, будуємо $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Точки O, A, B – єдиним способом визначають площину π . Побудуємо $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Так як $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, то точка $C \notin \pi$. Побудуємо $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Через точку D проведемо пряму $DK \parallel OC$ до перетину

з площиною π в точці K . Розглянемо вектор $\overrightarrow{OK}$. Через точку K проведемо прямі $KA_1 \parallel OB$ і $KB_1 \parallel OA$. Отримаємо паралелограм OA_1KB_1 .

І, отже, $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$,

Так як $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} \parallel \vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1} \parallel \vec{c}$.

Тобто, $1 \cdot \vec{d} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} - \gamma\vec{c} = \vec{0}$ - лінійна комбінація векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ рівна нулю, причому існує коефіцієнт, відмінний від нуля. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ лінійно залежні.

Наслідок1. Будь-які $n \geq 4$ векторів простору лінійно залежні, так як є лінійно залежною підсистемою з чотирьох векторів.

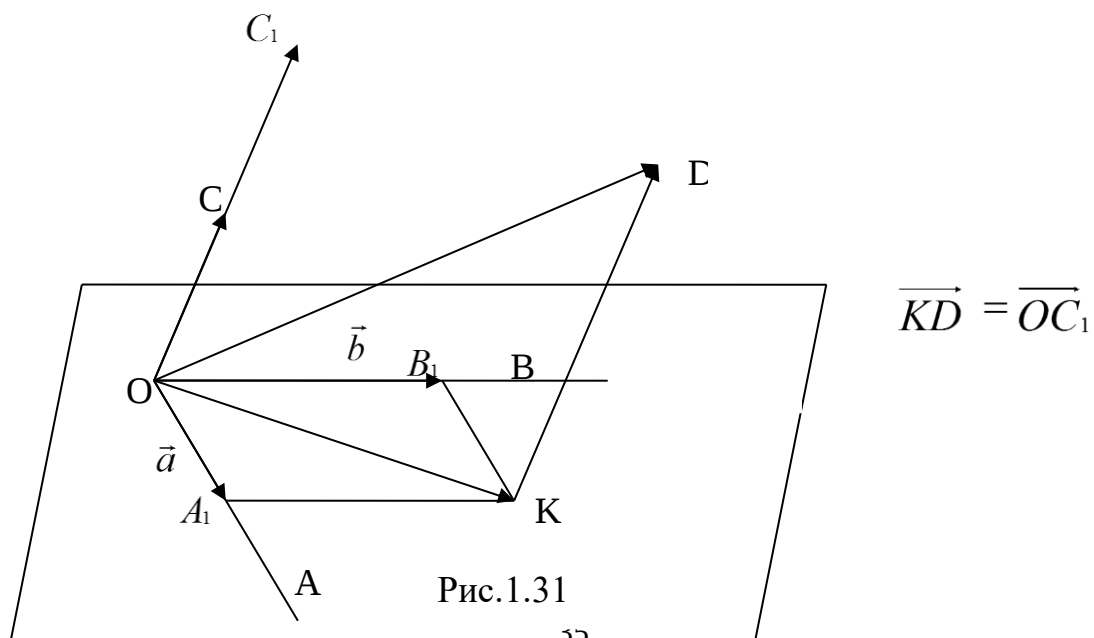
Наслідок2. Максимальне число лінійно незалежних векторів простору рівне 3 і тому простір *тривимірний*.

Упорядкована трійка лінійно незалежних векторів простору називається **базисом** цього **простору**. Здебільшого він позначається $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1.4 Координати вектора

Теорема 1.6. Будь-який вектор простору можна єдиним способом подати як лінійну комбінацію базисних векторів.

Доведення. 1) Нехай задано базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ і довільний вектор $\vec{a}$ простору. Розглянемо систему векторів



$$\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

За теоремою 1.5, система лінійно залежна. За означенням лінійної залежності

$\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2 + \delta \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Доведемо, що $\alpha \neq 0$. Дійсно, в супротивному випадку ми б отримали, що

$$\beta \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2 + \delta \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

і хоча б один з коефіцієнтів не рівний нулю. Це означало б, що система векторів

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

була б лінійно залежною, що неможливо, бо це базис. Отже, на α можна поділити обидві частини рівності, тоді

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{e}_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \vec{e}_2 - \frac{\delta}{\alpha} \vec{e}_3.$$

Позначивши коефіцієнти при $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ відповідно x, y, z , отримаємо вираз

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \quad (1.5)$$

для вектора $\vec{a}$ через лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

2) Єдиність доведемо методом від супротивного.

Нехай крім коефіцієнтів $(x; y; z)$ існують відмінні від них $(x_1; y_1; z_1)$, такі що

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3.$$

Прийнявши до уваги (1.5) отримаємо:

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3 \quad \text{або} \quad (x - x_1) \vec{e}_1 + (y - y_1) \vec{e}_2 + (z - z_1) \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Так як система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійно незалежна, то за означенням

$$\begin{cases} x - x_1 = 0, \\ y - y_1 = 0, \\ z - z_1 = 0. \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1, \\ z = z_1. \end{cases}$$

Ми прийшли до суперечності. Отже, коефіцієнти розкладу єдині.

Теорема доведена.

Координатами вектора відносно заданого базису називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі вектора за базисними векторами і позначається $\vec{a}(x;y;z)$

Зауваження: Якщо вектор $\vec{a}(x;y;z)$, то $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ і

як при доведенні теореми 1.5 вектор

$$\vec{a} = \vec{OD} = \vec{OK} + \vec{KD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\text{тобто } \begin{cases} x\vec{e}_1 = \vec{OA}, \\ y\vec{e}_2 = \vec{OB}, \\ z\vec{e}_3 = \vec{OC}. \end{cases} \text{ , де } \vec{e}_1 - \text{орт } \vec{OA}, \vec{e}_2 - \text{орт } \vec{OB}, \vec{e}_3 - \text{орт } \vec{OC}.$$

$$\text{Отже, } x = \begin{cases} +|\vec{OA}|, & \vec{OA} \uparrow \uparrow \vec{a}, \\ -|\vec{OA}|, & \vec{OA} \uparrow \downarrow \vec{a}. \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{Аналогічно } y = \begin{cases} +|\vec{OB}|, & \vec{OB} \uparrow \uparrow \vec{e}_2, \\ -|\vec{OB}|, & \vec{OB} \uparrow \downarrow \vec{e}_2. \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} +|\vec{OC}|, & \vec{OC} \uparrow \uparrow \vec{e}_3, \\ -|\vec{OC}|, & \vec{OC} \uparrow \downarrow \vec{e}_3. \end{cases}$$

Взагалі кажучи, ці орти можуть бути різної довжини. В такому випадку **базис B** називається *афінним*.

Якщо вектор колінеарний одному із базисних векторів, наприклад, $\vec{a} \parallel \vec{e}_2$, то за лемою $\vec{a} = \lambda \vec{e}_2$.

Формула (1.5) набуде вигляду:

$$\vec{a} = 0\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\text{тобто } \vec{a}(0; \lambda; 0)$$

Якщо вектор колінеарний площині, що визначається двома базисними векторами, наприклад $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$,

$$\text{тобто } \vec{a}(x;y;0)$$

Ортонормований базис

Якщо базисні вектори однієї й тієї ж довжини, а саме рівні 1 (в одному

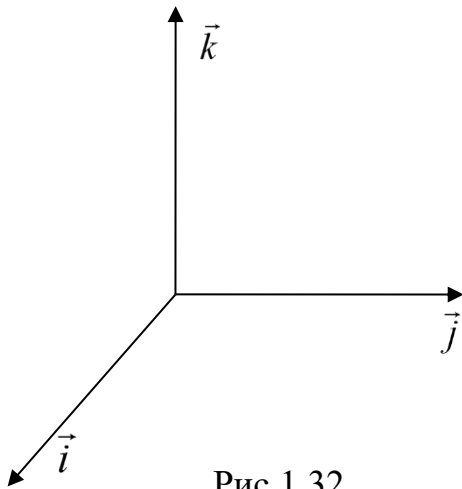


Рис.1.32

і тому ж масштабі) і, крім того, вони взаємно перпендикулярні, то такий **базис** називається **ортонормованим** (рис.1.32) і позначається

$$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|, \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

Формула (5) має вигляд

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

1.4.1 Лінійні операції над векторами у координатах

Ми вивчили лінійні операції над векторами геометрично: сума, різниця, добуток на скаляр будуються як геометричні об'єкти. За допомогою базису і координат вектора геометричну задачу перекладають на мову алгебри і замість геометричних об'єктів працюють з числами – координатами за законами чисел.

Теорема 1.7. *Координати лінійної комбінації векторів рівні тій же лінійній комбінації відповідних координат.*

Доведення. Для означеності розглянемо лінійну комбінацію двох векторів. Міркування справедливі для будь-якого числа векторів $n \geq 2$.

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ – два дані вектори.

$$\begin{aligned} \text{Побудуємо } \vec{c} &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha(x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) + \beta(x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2) \cdot \vec{e}_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2) \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Отже, отримали:

$$\begin{aligned}x_{\bar{c}} &= \alpha x_1 + \beta x_2, \\y_{\bar{c}} &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\z_{\bar{c}} &= \alpha z_1 + \beta z_2.\end{aligned}$$

Наслідок1. Координати суми векторів рівні сумі координат ($\alpha = \beta = 1$)

Наслідок2. Координати добутку вектора на скаляр ($\beta = 0$ рівні добутку скаляра на відповідні координати.

Теорема 1.8 (Необхідна і достатня умови колінеарності векторів у координатах): Для того, щоб вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ був колінеарний вектору $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, необхідно і достатньо, щоб відповідні координати цих векторів були пропорційні.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (1.7)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

За лемою $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Запишемо цю рівність у координатах.

Вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$,

Вектор $\lambda \vec{b}(\lambda x_2; \lambda y_2; \lambda z_2)$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати, бо рівні вектори це один і той же вектор. Тому

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2, \\ y_1 = \lambda y_2, \\ z_1 = \lambda z_2. \end{cases} \text{ тобто } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda.$$

Достатність. Нехай має місце формула (1.7). Введемо коефіцієнти пропорційності

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda, \text{ тоді } \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2, \text{ оскільки} \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \\ \lambda \vec{b}(\lambda x_2; \lambda y_2; \lambda z_2), \text{ то}\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \text{ Що і треба було довести.}$$

Теорема 1.9 (*Необхідні і достатні умови компланарності трьох векторів координатах*). Для того, щоб вектори

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), \vec{c}(x_3; y_3; z_3)$$

були компланарні, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова: детермінант, складений з координат цих векторів, дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, тоді $\exists \alpha, \beta, \gamma$ не всі одночасно рівні нулю, що $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$.

За теоремою 1.7

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0, \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0, \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

З алгебри відомо, що має місце (1.8).

Достатність. Якщо виконується (1.8), то має місце система (*) і, отже, вектори лінійно залежні і за теоремою 1.4 вони компланарні.

1.4.2 Проектування вектора

Будемо проектувати вектор на площину, на пряму і на вісь. Напря-

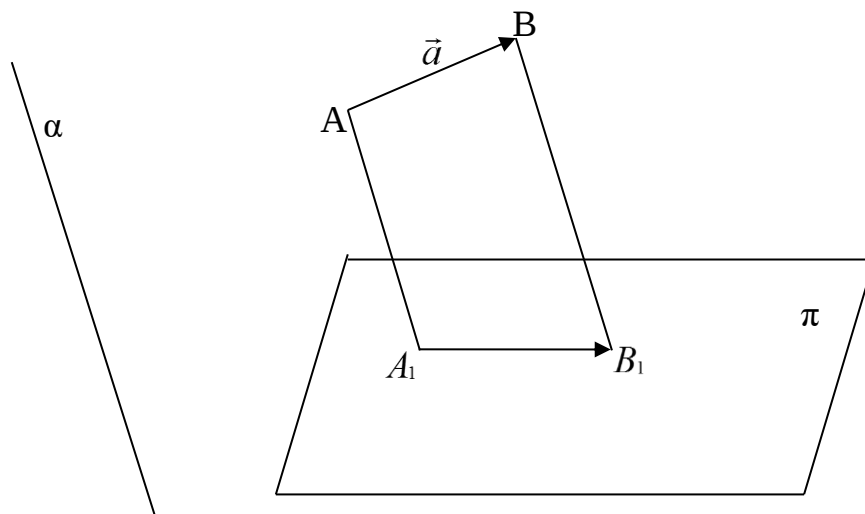


Рис.1.33

проектування буде задано відповідно прямою α і площиною π .

I. На площину

Проекцією точки A на площину π в напрямку прямої α називається точка перетину прямої, проведеної через точку A паралельно α з площиною π (рис.1.33).

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на площину π в напрямку прямої α називається вектор, початком якого є проекція початку, а кінцем – проекція кінця (рис.1.33).

Проекцією точки A на пряму U в напрямку площини α називається точка A_1 перетину площини, проведеної через точку A паралельно площині α

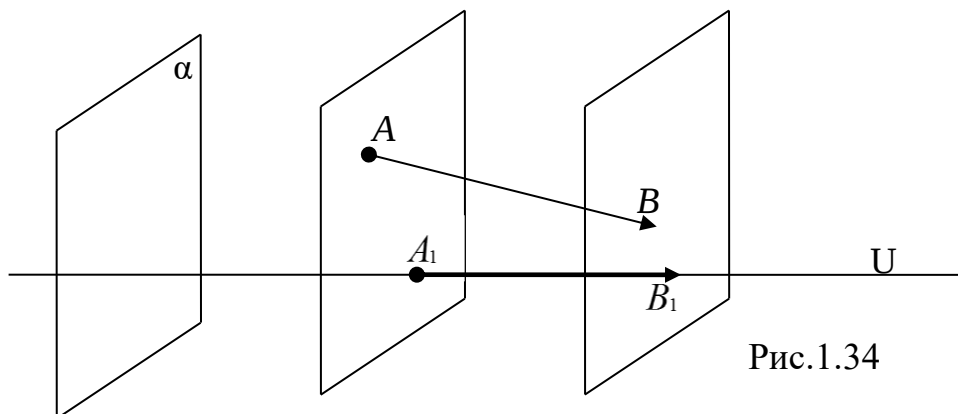


Рис.1.34

з прямою U (рис.1.34).

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на пряму U в напрямку площини α (вектор-проекцією або компонентою вектора) називається вектор, початком якого є проекція початку вектора, а кінцем – проекція кінця (рис.1.34).

$\overrightarrow{A_1B_1}$ – компонента $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$ – компонента $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{B_1A_1}$.

III. На вісь

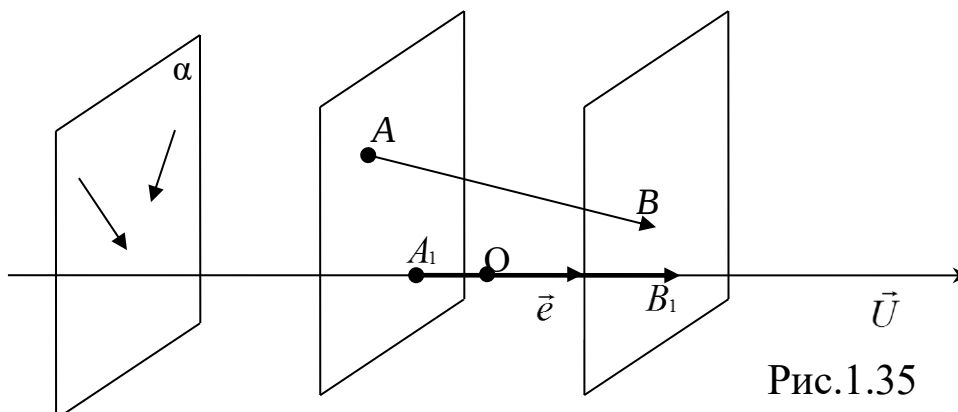


Рис.1.35

Нагадаємо: **віссю** називається пряма, на якій задано початок відліку точку O , масштаб і додатний напрям. Так як на осі заданий напрям, то легко відрізнити проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ від проекції $\overrightarrow{BA}$, їх можна відрізнити знаком.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь $\vec{U}$ (рис.1.35) називається число, абсолютна величина якого дорівнює довжині компоненти вектора на відповідну пряму, взятій із знаком «+», якщо вона співнапрямлена з напрямом осі, із знаком «-» в супротивному випадку.

$$\text{Отже,} \quad \text{Пр.}_{\vec{U}} \vec{a} = \begin{cases} +|\overrightarrow{A_1 B_1}|, & \text{якщо } \overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \uparrow \vec{U}, \\ -|\overrightarrow{A_1 B_1}|, & \text{якщо } \overrightarrow{A_1 B_1} \uparrow \downarrow \vec{U}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Якщо ж вектор належить площині α , що задає напрям проектування, то він проектується у точку.

1.4.3 Зв'язок понять “координати вектора” і “проекція вектора”

Теорема 1.10. Проекція вектора $\vec{a}$ на координатну вісь (базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) у напрямку площини, що визначається двома іншими координатними осями, рівна відповідній координаті вектора в даному базисі.

$$\text{Пр.}_{\vec{e}_1} \vec{a} = x, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$\text{Пр.}_{\vec{e}_2} \vec{a} = y, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \quad (1.10)$$

$$\text{Пр.}_{\vec{e}_3} \vec{a} = z, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Доведення. Розглянемо першу координату x . Ми знаємо, що

$$\vec{a} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow$$

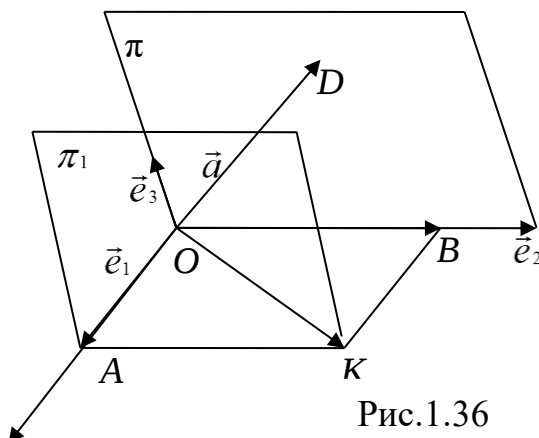


Рис.1.36

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 = \vec{OA} \\ y\vec{e}_2 = \vec{OB} \\ z\vec{e}_3 = \vec{OD} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \begin{cases} +|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1, \end{cases} \\ y = \begin{cases} +|\vec{OB}|, \vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{e}_2, \\ -|\vec{OB}|, \vec{OB} \uparrow\downarrow \vec{e}_2, \end{cases} \\ z = \begin{cases} +|\vec{OD}|, \vec{OD} \uparrow\uparrow \vec{e}_3, \\ -|\vec{OD}|, \vec{OD} \uparrow\downarrow \vec{e}_3. \end{cases} \end{cases} \quad (1.10)$$

За формулами (1.6)

$$x = \begin{cases} +|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1. \end{cases}$$

Спроектуємо вектор $\vec{a}$ на напрям $\vec{e}_1$ в напрямку площини π (рис.1.36), що визначається векторами $\vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точка O проектується в точку O . Через кінець вектора $\vec{a}$ проведемо площину $\pi_1: \pi_1 \parallel \pi$.

$$\begin{array}{ccc} O & \vec{e}_2 & A_2 \\ \vec{e}_1 & & \end{array} \quad \text{Тоді } \text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \begin{cases} +|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1 \\ -|\vec{OA}|, \vec{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1 \end{cases}$$

логічно для плоского випадку.

ування відбувається в напрямку

A_1 із базисних векторів на напрям

о (рис.1.37):

$\vec{OA}_1 = \text{I}\ddot{\partial}_{\vec{e}_1} \vec{a}$ в напрямку вектора $\vec{e}_2$, $\vec{OA}_2 = \text{I}\ddot{\partial}_{\vec{e}_2} \vec{a}$ в напрямку вектора $\vec{e}_1$.

1.4.4 Властивості проекції вектора на вісь

Теорема 1.11. Проекція лінійної комбінації векторів на вісь дорівнює тій же лінійній комбінації проекцій на ту ж вісь.

$$\text{Pr}_{\vec{v}}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m) = \alpha_1 \text{Pr}_{\vec{v}} \vec{a}_1 + \alpha_2 \text{Pr}_{\vec{v}} \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \text{Pr}_{\vec{v}} \vec{a}_m$$

Доведення. За формулами (1.10) координати вектора і проекція вектора на вісь це одне і те ж. Тому, щоб довести теорему слід в цій теоремі термін “проекція” замінити терміном “координата” і ми отримаємо теорему 1.7, яка вже доведена.

Наслідок1. Проекція суми векторів на вісь рівна сумі проекцій на цю ж вісь.

Наслідок2. Проекція добутку вектора на скаляр рівна добутку скаляра на проекцію вектора.

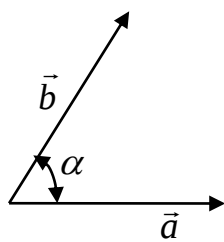
1.4.5 Ортогональне проектування

Якщо напрям проектування α перпендикулярний до площини, прямої чи осі, то таке проектування називається **ортогональним**.

Теорема 1.12. Ортогональна проекція вектора на вісь рівна довжині вектора, помноженій на косинус кута між вектором і віссю:

$$Pr_{\vec{U}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{U}) \quad (1.11)$$

Під кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють менший із кутів, утворених ними (рис.1.38)

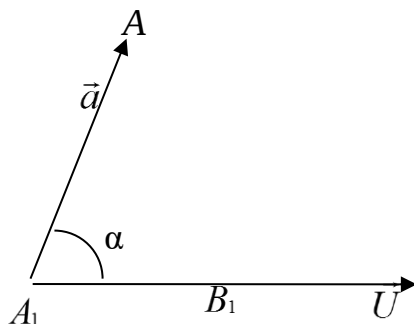


$$\alpha = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \wedge \vec{a}) - \text{менший із кутів.}$$

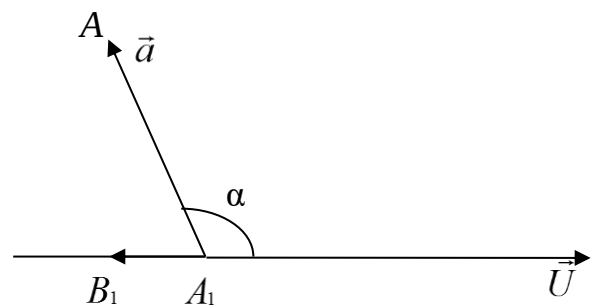
$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) < \pi$$

Рис.1.38

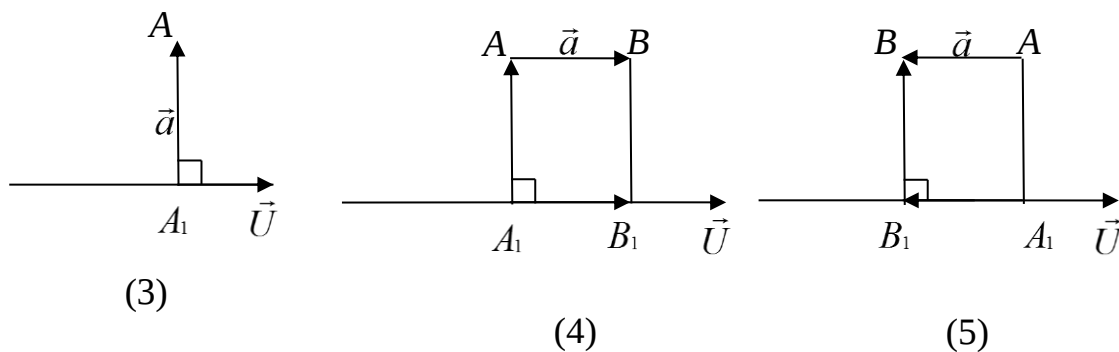
Знайдемо ортогональну проекцію вектора на вісь, розглянувши різні випадки на площині.



(1)



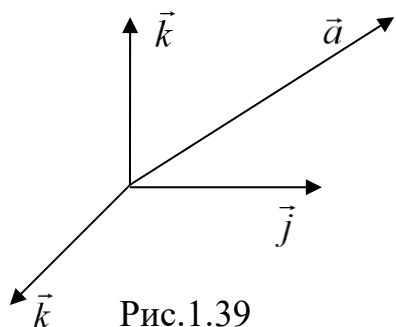
(2)



Для кожного випадку матимемо:

- 1) $Pr_{\vec{U}} \vec{A_1A} = |\vec{A_1B_1}| = |\vec{AA_1}| \cos \alpha = |\vec{a}| \cos \alpha;$
- 2) $Pr_{\vec{U}} \vec{a} = -|\vec{A_1B_1}| = -|\vec{a}| \cos(180^\circ - \alpha) = -|\vec{a}| \cdot (-\cos \alpha) = |\vec{a}| \cos \alpha;$
- 3) $Pr_{\vec{U}} \vec{a} = +|\vec{A_1A}| \cos 90^\circ = \vec{0} \cdot 0 = \vec{0};$
- 4) $Pr_{\vec{U}} \vec{a} = |\vec{AB}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot (1) = |\vec{a}|;$
- 5) $Pr_{\vec{U}} \vec{a} = -|\vec{A_1B_1}| \cdot \cos 180^\circ = -|\vec{a}|(-1) = |\vec{a}|.$

Наслідок 1. Розглянемо ортонормований базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в просторі і деякий вектор $\vec{a}$. Введемо кути між вектором і базисними ортами.



$$(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \alpha, \quad (\vec{a} \wedge \vec{j}) = \beta, \quad (\vec{a} \wedge \vec{i}) = \gamma.$$

За теоремою 11, $x = Pr_{\vec{i}} \vec{a}$. За формулою (11)

$$Pr_{\vec{i}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

$$\text{тоді} \begin{cases} x = \vec{i} \vec{\partial}_{\vec{i}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha, \\ y = \vec{j} \vec{\partial}_{\vec{j}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \\ z = \vec{k} \vec{\partial}_{\vec{k}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma. \end{cases} \quad (1.12)$$

Наслідок 2. Розглянемо будь-який орт $|\vec{e}| = 1$. За формулами (1.12)

$$\begin{cases} x_{\vec{a}} = \cos \alpha, \\ y_{\vec{a}} = \cos \beta, \\ z_{\vec{a}} = \cos \gamma. \end{cases}$$

Будь-який орт $\vec{e}$ має координати $\vec{e}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, і так як $|\vec{e}|=1$, то,

$$\text{оскільки } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{формула (1.17)})$$

отримаємо формулу:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.13).$$

1.5 Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.14)$$

Скалярним добутком двох векторів називається число, що дорівнює довжині одного вектора помноженій на проекцію другого в напрямку першого.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} \quad (1.15)$$

Доведення еквівалентності цих означень проводиться так. Нехай дано (1.14). Використаємо формулу (1.11) отримаємо (1.15).

Навпаки, нехай дано (1.15). Використавши (1.11) отримаємо (1.14).

1.5.1 Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) Комутативна

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Доведення випливає з формули (14) з урахуванням того, що $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b} \wedge \vec{a})$ за домовленістю.

2) Асоціативна $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Доведення випливає із формули (15). Дійсно,

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \alpha \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \alpha |\vec{b}| \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3) Дистрибутивна

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Дійсно, за формулою (15)

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(\text{Pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{b}) = |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{b} = \\ = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

З доведених властивостей випливає, що скалярно множити лінійні комбінації векторів можна так, як множити многочлени.

Приклад: Знайти скалярний добуток лінійних комбінацій векторів $3\vec{a} - 7\vec{b}$ і $4\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Множимо як многочлени:

$$(3\vec{a} - 7\vec{b})(4\vec{a} + 2\vec{b}) = 12\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 28\vec{a} \cdot \vec{b} - 14\vec{b} \cdot \vec{b} = 12a^2 - 22\vec{a} \cdot \vec{b} - 14b^2 = 108 - \\ - 22 \cdot 3 \cdot 2 \cos 60^\circ - 14 \cdot 4 = -14$$

1.5.2 Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема 1.13. Скалярний добуток двох векторів рівний нулю тоді і тільки тоді, коли вектори перпендикулярні.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тобто $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, тоді можливі два випадки:

1) Перемножувані вектори є нуль-вектори (один або обидва). За домовленістю $\vec{0}$ має той напрям, який нам потрібно, в даному випадку – перпендикулярний.

2) Якщо $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$, тоді $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, а це означає, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Достатність. Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$, тоді

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 90^\circ, \text{ отже, } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ або } |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \text{ тобто } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному із скалярного квадрата вектора.

$$\text{Дійсно, } \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

$$\text{Звідси: } |\vec{a}| = \sqrt{a^2} \quad (1.16)$$

1.5.3 Скалярний добуток у координатах відносно ортонормованого базису

1) **Теорема 1.14.** Якщо дано вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (1.17)$$

Доведення. За означенням координат вектора можемо записати

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3,$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3.$$

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) =$
 $= x_1 x_2 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) +$
 $+ z_1 y_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, так як $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ і базисні вектори взаємно ортогональні, тобто $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

2) Довжина вектора.

Скориставшись (1.16) $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$, за формулою (1.17) отримуємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (1.18),$$

якщо $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$.

3) Кут між двома векторами.

Із першого означення скалярного добутку за формулами (1.17) і (1.18) матимемо:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \text{ тоді } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (1.19)$$

Отже, користуючись скалярним добутком двох векторів, ми можемо розв'язувати такі типи задач:

- 1) на обчислення довжини відрізків, векторів;
- 2) на відшукування кута між прямими, векторами.
- 3) задачі на перпендикулярність прямих, векторів.

1.5.4 Спільні та різні властивості скалярного множення векторів і множення чисел

Алгебраїчні властивості скалярного множення векторів обумовлюють глибоку (хоч і неповну) аналогію між векторною алгеброю та алгеброю чисел. На підставі першої властивості можна переставляти місцями множники; друга властивість дозволяє об'єднувати числові коефіцієнти векторних множників, третя – розкривати або вводити дужки, виносити за них спільні скалярні і векторні множники. Взагалі при скалярному множенні двох векторних многочленів (лінійних) дії виконуються аналогічно діям елементарної алгебри.

Наприклад. Скалярний добуток векторів

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{c} + 5\vec{d}) = 8\vec{a}\vec{c} - 12\vec{b}\vec{c} + 10\vec{a}\vec{d} - 15\vec{b}\vec{d}.$$

Варто пам'ятати, що вказана аналогія між векторною алгеброю та алгеброю чисел хоч і значна, але неповна. Зокрема, скалярний добуток векторів істотно відрізняється від звичайного множення чисел вже тим, що не існує скалярного добутку трьох (і більше) векторних множників. Так, наприклад, символ $(\vec{a} \vec{b})\vec{c}$ є вектор, а не скаляр; це добуток числа $(\vec{a} \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$, тобто вектор $\vec{c}$ “розтягнутий” в $(\vec{a} \vec{b})$ разів.

Наведемо другий приклад порушення аналогії. В алгебрі чисел із рівності $\alpha \cdot \beta = 0$ випливає, що $\alpha = 0$ або $\beta = 0$. У векторній алгебрі, як нам відомо, рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ означає, що або $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$, або $\vec{a} \perp \vec{b}$ при $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, тобто рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ може виконуватись і при ненульових множниках.

У зв'язку з цим, взагалі кажучи не можна скорочувати рівність $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \vec{c}$ на векторний множник $\vec{a}$, навіть коли $\vec{a} \neq 0$. З $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \vec{c}$ рівність має місце і при $\vec{b} \neq \vec{c}$. Вона означає, що вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до вектора $(\vec{b} - \vec{c})$. Справді, $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \vec{c}$ або $\vec{a} \vec{b} - \vec{a} \vec{c} = 0$, тобто $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = 0$.

Отже, $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$.

В окремому випадку, коли $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$, тобто нуль-вектору, який перпендикулярний будь-якому вектору, в тому числі і $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Проте, якщо рівність $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ справедлива для будь-якого вектора $\vec{x}$, то справедлива також і рівність $\vec{a} = \vec{b}$, тобто “ скорочення ” обох частин рівності $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ на вектор $\vec{x}$ можливе лише тоді, коли ця рівність справджується для будь-якого $\vec{x}$.

1.6 Векторний добуток двох векторів

I. **Репером** $R(0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ називається базис із точкою, яка є початком базисних векторів (рис.1.40).

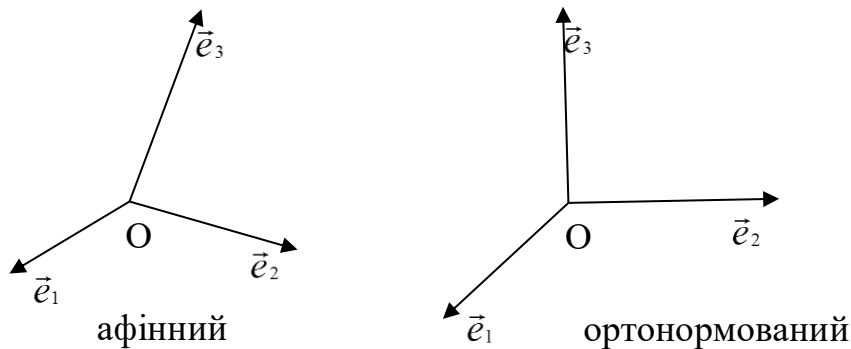


Рис.1.40

II. Орієнтація простору

Простір називається *орієнтованим*, якщо в ньому орієнтований репер.

Репер називається *додатно орієнтованим* або *правим* (рис.1.41), якщо спостерігач, який дивиться з кінця третього вектора на площину першого і другого векторів бачить рух від першого до другого вектора по найменшому куту проти руху годинникової стрілки.

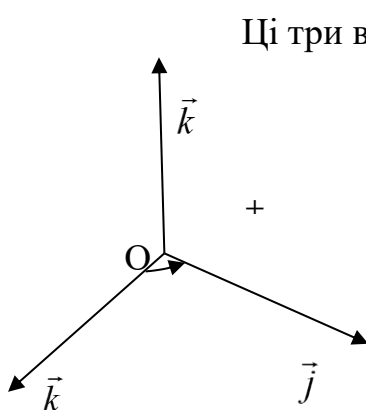


Рис.1.41

Ці три вектори $\vec{k}, \vec{j}, \vec{k}$ визначають шість реперів:

$R(0; \vec{k}; \vec{j}; \vec{k})$ – правий,

$R(0; \vec{j}; \vec{k}; \vec{k})$ – лівий,

$R(0; \vec{j}; \vec{k}; \vec{k})$ – правий,

$R(0; \vec{k}; \vec{k}; \vec{j})$ – правий,

$R(0; \vec{k}; \vec{k}; \vec{j})$ – лівий,

$R(0; \vec{k} : \vec{k}; \vec{j})$ – лівий.

Орієнтацію репера можна визначити за правилом руки(правої – правий; лівої – лівий): великий палець – перший вектор $\vec{a} = \vec{OA}$, вказівний – другий вектор $\vec{b}$ і середній, поставлений до них перпендикулярно – третій $\vec{c}$. Два інші загнуті.

III. *Означення векторного добутку.*

Векторним добутком двох векторів називається **вектор**, довжина, якого дорівнює добутку довжин перемножуваних векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до площини перемножуваних векторів; множене, множник і векторний добуток утворюють правий репер (рис.1.42).

Позначається векторний добуток $[\vec{a} \vec{b}]$ або $\vec{a} \times \vec{b}$.

Отже, векторним добутком двох векторів є вектор $[\vec{a} \vec{b}]$, який задовольняє

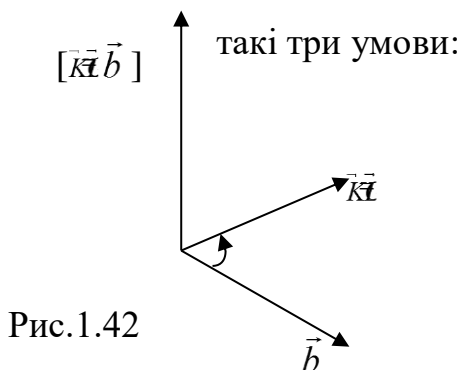


Рис.1.42

$$1) |[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$2) [\vec{a} \vec{b}] \perp \text{ площині } (\vec{a}, \vec{b}).$$

$$3) \vec{a}, \vec{b}, [\vec{a} \vec{b}] \text{ – правий репер.}$$

1.6.1 Геометричні властивості

- 1) **Довжина** вектора **векторного добутку** чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на перемножуваних векторах

Доведення. Дійсно, $|[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

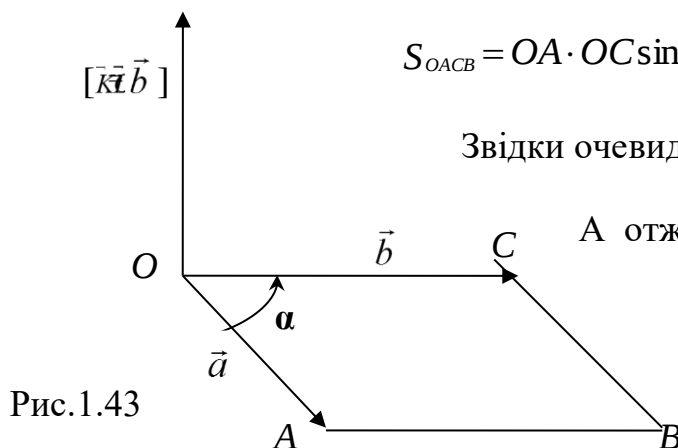


Рис.1.43

$$S_{OACB} = OA \cdot OC \sin \alpha = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \text{ (рис.1.43).}$$

$$\text{Звідки очевидно, що } S_{\diamond} = |[\vec{a} \vec{b}]|.$$

А отже S_{Δ} (рис.1.44) дорівнює

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB} \vec{AC}]| \quad (1.20).$$

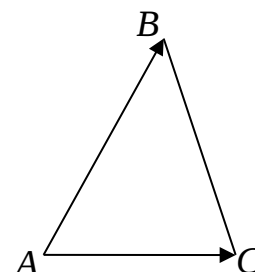


Рис.1.44

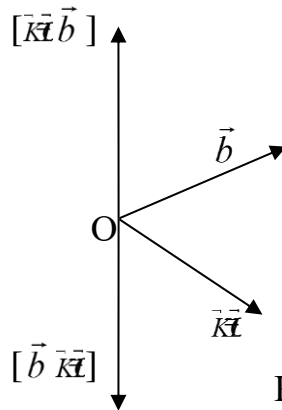


Рис.1.45

2) **Векторний добуток** двох векторів **рівний 0** тоді і тільки тоді, коли **вектори колінеарні**.

Доведення. Якщо один з векторів є нуль-вектор, то доведення очевидне. Нехай обидва вектори відмінні від нульових.

Необхідність. Нехай $[\vec{a} \vec{b}] = 0$, тоді $|\vec{a} \vec{b}| = 0$, тобто

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ або } \alpha = \pi.$$

Достатність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\alpha = 0$ або $\alpha = \pi \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = 0 \Rightarrow |\vec{a} \vec{b}| = 0 \Rightarrow [\vec{a} \vec{b}] = 0$.

1.6.2 Алгебраїчні властивості

1) **Антикомутативна**

$$[\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}] \quad (\text{рис.1.46})$$

Доведення. Позначимо $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{p}$, $-\vec{b} \vec{a} = \vec{q}$ і доведемо рівність векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

Дійсно, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$, так як $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$

$$\text{і } \vec{p} \uparrow \downarrow [\vec{b} \vec{a}] \Leftrightarrow \vec{p} \uparrow \uparrow \vec{q} \quad (\text{рис.1.45})$$

2) **Асоціативна**

$$[\alpha \vec{a} \vec{b}] = \alpha [\vec{a} \vec{b}]$$

Доведення. Введемо позначення $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{p}$, $\alpha [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{q}$ і доведемо їх рівність. Дійсно,

а) $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ — очевидно. $|\vec{p}| = |[\alpha \vec{a} \vec{b}]| = |\alpha \vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

і $|\vec{q}| = |\alpha [\vec{a} \vec{b}]| = |\alpha| |[\vec{a} \vec{b}]| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

б) Покажемо, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ співнапрямлені: можливі два випадки $\alpha > 0$ і $\alpha < 0$.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\alpha < 0$, тоді $\alpha \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$ (рис.1.46)

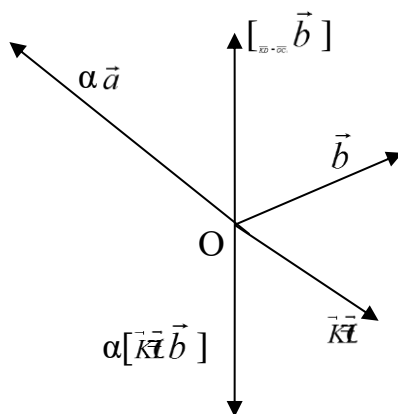


Рис.1.46

Орієнтації реперів $\vec{a}, \vec{b}, [\alpha \vec{a} \vec{b}]$ та $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a} \vec{b}]$ — різні, тому $[\alpha \vec{a} \vec{b}] \uparrow \downarrow [\vec{a} \vec{b}]$ і вектор $\alpha [\vec{a} \vec{b}] \uparrow \downarrow [\vec{a} \vec{b}]$, бо $\alpha < 0$.

Отже, $[\alpha \vec{a} \vec{b}] \uparrow \uparrow \alpha [\vec{a} \vec{b}]$.

3) Дистрибутивна

$$[\vec{a}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)] = [\vec{a} \vec{a}_1] + [\vec{a} \vec{a}_2] + \dots + [\vec{a} \vec{a}_n]$$

Доведемо цю властивість в три етапи.

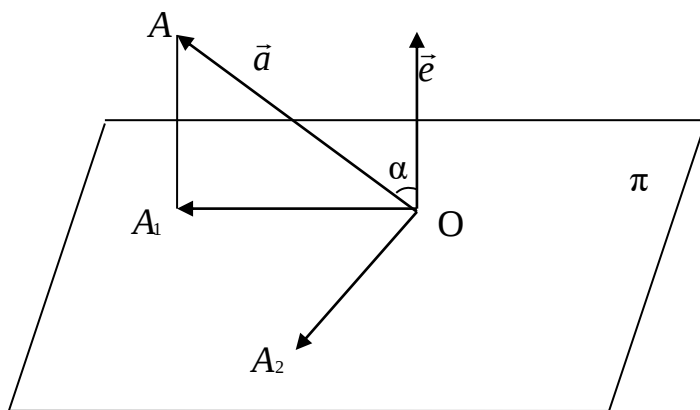


Рис.1.47

1. Побудуємо векторний добуток орта на будь-який вектор $\vec{a}$. З довільної точки O простору будуємо вектор $\vec{e}$; через точку O будуємо $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OA} \notin \pi$ (рис.1.47)

Ортогонально проектуємо вектор $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$ на площину π : $\vec{OA}_1$ – компонента. У площині повертаємо вектор $\vec{OA}_1$ навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки. Легко бачити, що $\vec{OA}_2 = [\vec{e} \vec{a}]$.

Дійсно,

а) $|\vec{OA}_2| = |\vec{OA}_1| = |\vec{a}| \cos(90^\circ - \alpha) = |\vec{a}| \sin \alpha$.

б) $\vec{OA}_2 \perp \vec{a}, \vec{OA}_2 \perp \vec{e}$

в) $\vec{e}, \vec{a}, \vec{OA}_2$ – правий репер

2. Розглянемо побудову вектора $[\vec{e}(\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n)]$ і доведемо для цього випадку

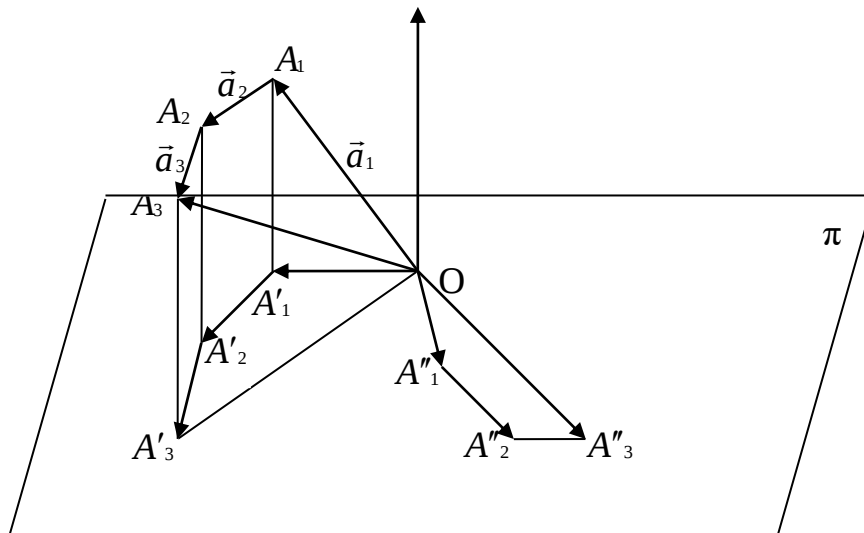


Рис.1.48

властивість. Нехай, для означеності, розглянемо суму трьох векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (рис.1.48)

Спроектуємо на площину весь цей малюнок і виконаємо поворот на кут 90° проти руху годинникової стрілки.. За першим випадком

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA''_1} &= [\vec{e} \vec{a}_1], \\ \overrightarrow{A''_1 A''_2} &= [\vec{e} \vec{a}_2], \\ \overrightarrow{OA''_3} &= [\vec{e} \overrightarrow{OA_3}] = [\vec{e}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)], \\ \overrightarrow{A''_2 A''_3} &= [\vec{e} \vec{a}_3]. \\ \overrightarrow{OA''_3} &= \overrightarrow{OA''_1} + \overrightarrow{A''_1 A''_2} + \overrightarrow{A''_2 A''_3}\end{aligned}$$

Тоді підставивши значення векторів-доданків з попередніх формул:

$$[\vec{e}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)] = [\vec{e} \vec{a}_1] + [\vec{e} \vec{a}_2] + [\vec{e} \vec{a}_3]$$

Побудуємо векторний добуток

$$\begin{aligned}3. [\vec{a} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)] &= [|\vec{a}| \vec{e} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)] = |\vec{a}| [\vec{e}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)] = |\vec{a}| ([\vec{e} \vec{a}_1] + [\vec{e} \vec{a}_2] + \\ &+ [\vec{e} \vec{a}_3]) = [|\vec{a}| \vec{e} \vec{a}_1] + [|\vec{a}| \vec{e} \vec{a}_2] + [|\vec{a}| \vec{e} \vec{a}_3] = [\vec{a} \vec{a}_1] + [\vec{a} \vec{a}_2] + [\vec{a} \vec{a}_3].\end{aligned}$$

Отримали доведення властивості.

Висновки: 1) Доведені алгебраїчні властивості дають право векторно множити лінійні комбінації векторів так, як множаться многочлени, з однією лише різницею, що при перестановці місцями множників, потрібно змінити знак на протилежний.

2) За допомогою векторного добутку двох векторів розв'язуються задачі:

- на знаходження площ фігур, а саме

$$\begin{aligned}S_{\triangle A B C} &= \left| \left[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \right] \right|, \\ S_{\triangle A B C} &= \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \right] \right|,\end{aligned}$$

площа многокутника рівна сумі площ трикутників, на які слід розбити многокутник;

- задачі на колінеарність векторів.

1.6.3. Векторний добуток у координатах відносно ортонормованого базису

Теорема 1.15. Якщо вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

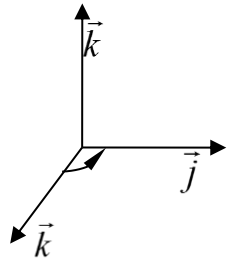


Рис.1.49

Доведення. В ході доведення ми використаємо факти (рис.149), що

$$\begin{aligned} [\vec{i}\vec{j}] &= \vec{k}; [\vec{j}\vec{i}] = -\vec{k}, \\ [\vec{j}\vec{k}] &= \vec{i}; [\vec{k}\vec{j}] = -\vec{i}, \\ [\vec{k}\vec{i}] &= \vec{j}; [\vec{i}\vec{k}] = -\vec{j}, \\ [\vec{i}\vec{i}] &= [\vec{j}\vec{j}] = [\vec{k}\vec{k}] = 0. \end{aligned}$$

За означенням координат вектора $\vec{i}$ за алгебраїчними властивостями векторного добутку отримаємо:

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}] &= [(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})] = x_1x_2[\vec{i}\vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}\vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}\vec{k}] + y_1z_2[\vec{j}\vec{i}] + \\ &+ y_1y_2[\vec{j}\vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}\vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}\vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}\vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}\vec{k}]. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}] &= x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + \\ &+ (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

Очевидно, що $[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix}$. Цим теорема доведена.

Приклад. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (1;0;-2)$, $\vec{b} = (-1;1;0)$.

Скористаємося формулою (1.21):

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow [\vec{a}\vec{b}] = (2;2;1).$$

1.7 Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів називається число

$$\mu = [\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c},$$

яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій. Позначається

$$\mu = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}. \quad (1.22)$$

1.7.1 Геометричний зміст мішаного добутку

Теорема 1.16. Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Це число додатне, якщо перемножувані вектори в порядку $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють правий репер, і від'ємне, якщо лівий. Число дорівнює нулю, якщо перемножувані вектори компланарні.

Доведення.

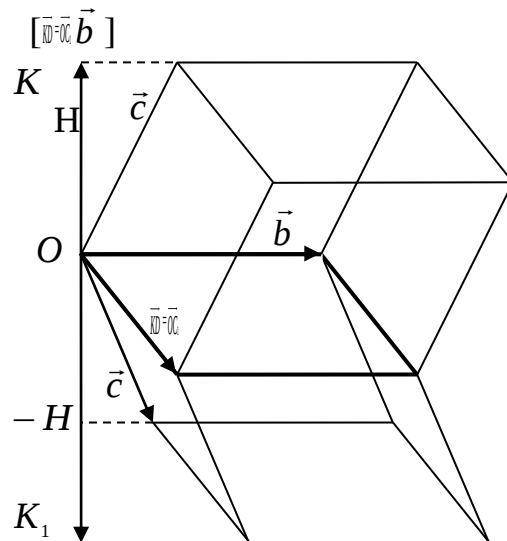


Рис.1.50

1. $\mu = [\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c} = |[\vec{a}\vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle([\vec{a}\vec{b}], \vec{c})$. Оскільки $OH = \text{Pr}_{[\vec{a}\vec{b}]} \vec{c} = (\pm h)$, то

$\mu = S_{\text{паралелограма}} \cdot (\pm H)$, тобто $\mu = \pm V_{\text{паралелепіпеда}}$. (рис.1.50)

2. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правий репер, тоді $\overrightarrow{OH} \uparrow \uparrow [\vec{a}\vec{b}]$

$$\text{Тобто } |\overrightarrow{OK}| = H$$

$$\mu = V.$$

3. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лівий репер, тоді $OK_1 = -H$, $\overrightarrow{OH} \uparrow \downarrow [\vec{a}\vec{b}]$, і $\mu = -V$.

4. Якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні (рис.1.51), то вектор $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ перпендикулярний

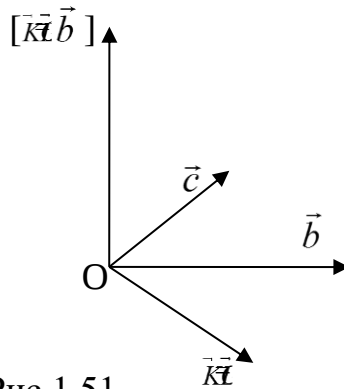


Рис.1.51

до площини векторів $\vec{a}, \vec{b}$, тобто $[\vec{a} \vec{b}] \perp \vec{c}$, отже, $[\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$, тобто $\mu = 0$.

1.7.2. Мішаний добуток у ортонормованому базисі

Теорема 1.17. Якщо $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), \vec{c}(x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток

$$\text{обчислюється за формулою} \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Доведення. Так як вектор $\vec{c}$ заданий координатами, то можемо подати його у вигляді розкладу за базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто $\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$ і скористаємось формулою (1.21). За означенням мішаного добутку $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \\ & (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \left(\begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) (x_3 \cdot \vec{i} + y_3 \cdot \vec{j} + z_3 \cdot \vec{k}) = \\ & = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} z_3 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Висновок: користуючись поняттям мішаного добутку, розв'язують клас геометричних задач на обчислення об'ємів тіл, зокрема $V_{\text{паралелепіпеда}} = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$

$$\text{і } V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Дійсно, паралелепіпед діагональною площиною розбивається на дві рівновеликі трикутні призми, а кожен трикутну призму можна розбити на три рівновеликі трикутні піраміди. Отже, паралелепіпед розбивається на шість рівновеликих пірамід (трикутних) - *тетраедрів*.

Розділ II. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

2.1 Різні системи координат на площині

2.1.1 Афінна система координат

Ця *система* координат визначається двома базисними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ із спільним початком у точці O – початку координат (рис.2.1). Вектор $\vec{e}_1$ задає вісь Ox , $\vec{e}_2$ – вісь Oy . Взагалі кажучи, довжини базисних векторів різні.

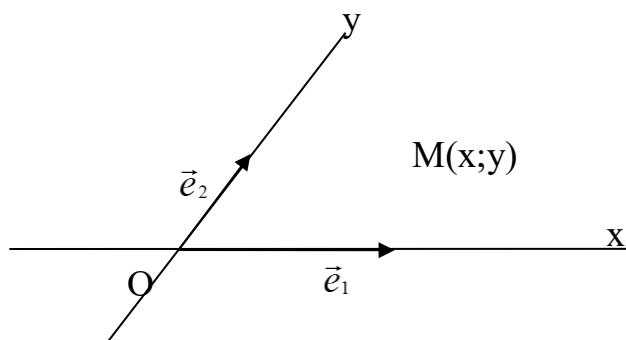


Рис.2.1

Базис $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ називається **правим** (додатно орієнтованим), якщо рух від $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$ по меншому куту здійснюється в напрямку проти руху годинникової стрілки. Протилежно орієнтований базис називається **лівим** (від'ємно орієнтованим). При цьому система координат називається відповідно **правою** (лівою) або **додатно** (від'ємна) **орієнтованою**.

Якщо $\vec{a}, \vec{b}$ – ненульові вектори, не колінеарні, то **напрямленим** (орієнтованим) **кутом** між векторами $\vec{a}, \vec{b}$ називається величина $(\vec{a} \wedge \vec{b})$, якщо базис $(\vec{a}, \vec{b})$ правий (рис. 2.2.а) та $-(\vec{a} \wedge \vec{b})$, якщо базис $(\vec{a}, \vec{b})$ лівий (рис.2.2б). Орієнтований кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символом

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

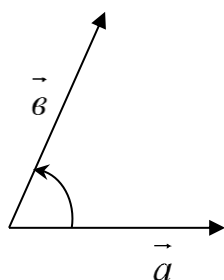


Рис. 2.2.а

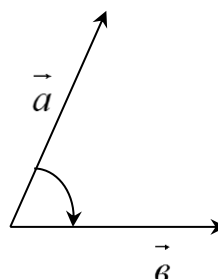


Рис. 2.2.б

Формули для обчислення орієнтованого

кута між векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ (рис.2.3):

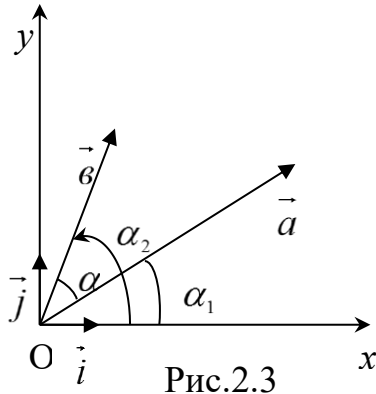


Рис.2.3

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \\ \sin \alpha &= \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1\end{aligned}\quad (2.1)$$

Так як

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{|\vec{a}|}; \sin \alpha_1 = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \cos \alpha_2 = \frac{x_2}{|\vec{b}|}; \sin \alpha_2 = \frac{y_2}{|\vec{b}|}, \quad (2.2)$$

$$\text{то } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \sin \alpha = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2.3)$$

Якщо базисні вектори різної довжини (різний масштаб), то такий базис називається **афінним**, а система координат – **афінною**.

Прямокутна декартова система координат визначається двома взаємно перпендикулярними базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}$ одиничної довжини. Такий базис називається ортонормованим і задає прямокутну декартову систему координат.

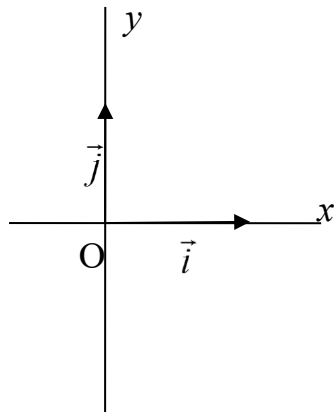


Рис.2.4.

Координатами вектора відносно системи координат Oxy називаються його координати відносно координатного базису, тобто **коефіцієнти розкладу вектора** за векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ чи $\vec{i}, \vec{j}$. Отже, $\vec{a}(x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ або

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Координати точки М – це координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(x; y) = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$.

2.1.2 Основні задачі аналітичної геометрії на площині

1) Поділ відрізка у заданому відношенні

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda \quad (2.4)$$

Якщо $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, то $M(x; y)$, де

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2.5)$$

2) Відстань між точками

Якщо система координат прямокутна декартова, тобто $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, то

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.6)$$

3) Площа трикутника, заданого координатами вершин $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.

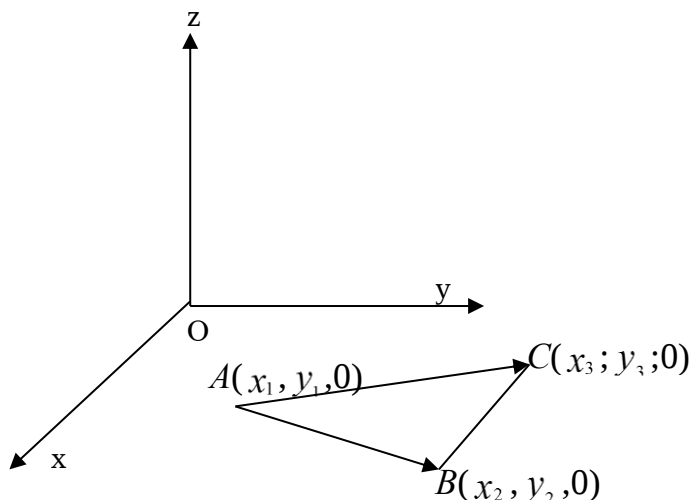


Рис.2.5

Будемо дивитися на площину $хоу$ як на координатну в системі $Oxyz$, тобто координати вершин $A(x_1; y_1; 0), B(x_2; y_2; 0), C(x_3; y_3; 0)$, тоді

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \vec{k})$$

Так як $|\vec{k}|=1$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

За властивостями детермінанта це, очевидно, рівно

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

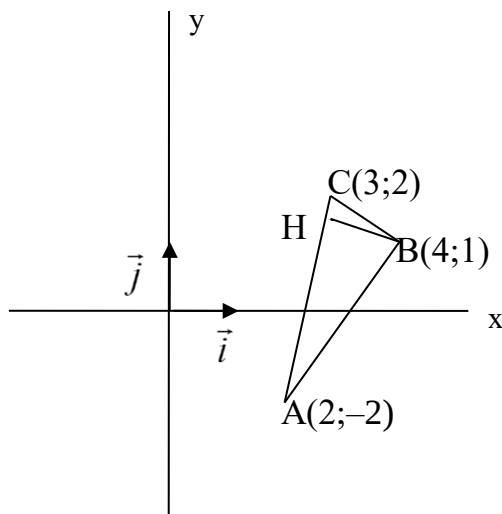


Рис.2.6

Приклад. Трикутник задано координатами своїх вершин $A(2;-2)$, $B(4;1)$, $C(3;2)$ (рис.2.6). Знайти висоту, проведену з вершини B .

Розв'язання. Оскільки

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot AC,$$

$$\text{то } BH = \frac{2S}{AC}$$

Площу трикутника обчислимо за формулою (2.7):

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} |-2 + 2 + 5| = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Знайдемо довжину сторони AC за формулою (2.6)

$$AC = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}.$$

Тоді $BH = \frac{5}{\sqrt{17}}.$

2.1.3 Полярна система координат

Полярною системою координат називається промінь із заданим на ньому одиничним вектором.

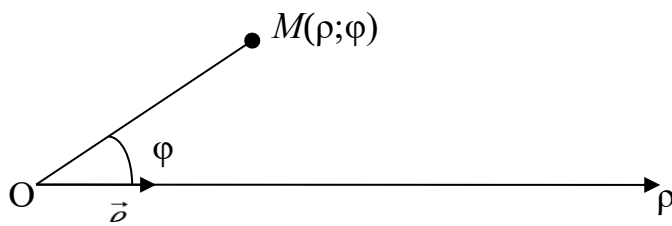


Рис.2.7

Початок променя точку O називають **полюсом**, промінь – **полярною віссю**.

Положення точки M (точка

$M \neq$ точці O) на площині визначається двома координатами:

ρ – відстань від точки до полюса – **полярний радіус**: $\rho = OM$;

φ – кут φ між полярною віссю і полярним радіусом. φ – **полярний кут**.

Зрозуміло, що

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.8)$$

Полюс O має полярний радіус рівний нулю, а полярний кут – довільний.

На практиці часто треба вміти переходити від полярної до прямокутної декартової системи координат і навпаки. Знайдемо зв'язок між полярними і декартовими координатами. Виберемо прямокутну декартову систему так:

- початок в полюсі;
- вісь Ox співпадає з полярною віссю;
- вісь Oy - через точку O , перпендикулярно до осі Ox .

Нехай точка M має відповідно координати (x, y) і (ρ, φ) відносно цих систем координат.

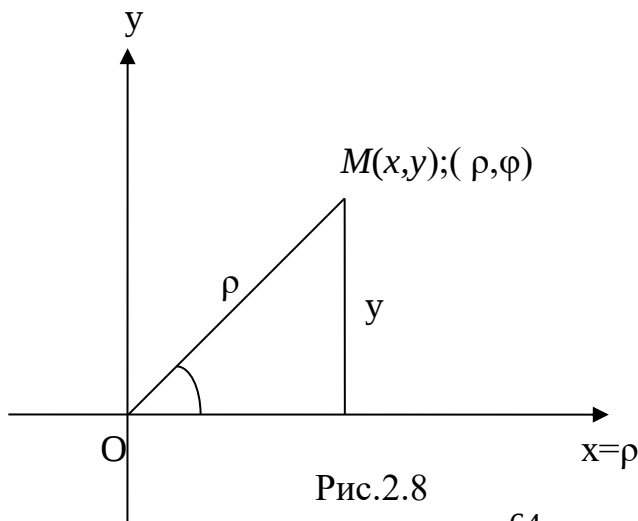


Рис.2.8

З трикутника OAM :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi; \\ y = \rho \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Отже, якщо відомі полярні координати точки M , то за допомогою формул (2.9) можемо знайти декартові.

Навпаки, нехай відомі x і y , тоді, очевидно: $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi$, тобто $x^2 + y^2 = \rho^2$. Значить, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

З першої рівності

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

З другої

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.10)$$

Тоді
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Отже, від декартових координат до полярних переходимо за формулами

(2.10):
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Узагальнена полярна система координат

Не дивлячись на те, що полярний радіус ρ – відстань, тобто $\rho \geq 0$, у багатьох задачах, де застосовується ця система координат корисно, щоб і ρ набував від'ємних значень.

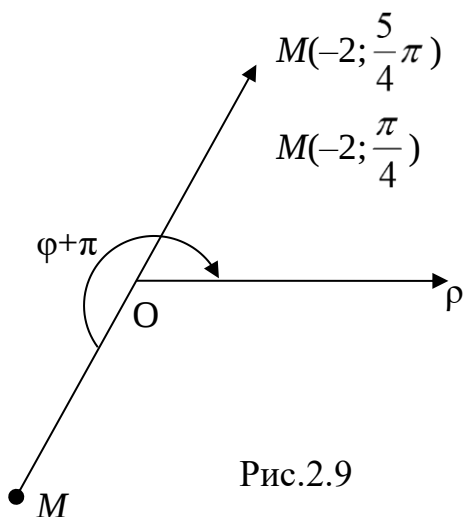


Рис.2.9

Зрозуміло, що кожна точка $M(\rho; \varphi)$ в попередньо означеній системі координат буде мати ще координати $(\rho; \pi + \varphi)$. Така система координат називається узагальненою. Щоб побудувати точку з координатами $(-\rho; \pi + \varphi)$ потрібно побудувати

вектор $\overrightarrow{OM}$ таким чином:

будуємо промінь OM під кутом $\varphi + \pi$, якщо координата ρ від'ємна, то точку M відкладаємо на продовженні променя в протилежному напрямі (рис.2.9).

Приклади. Побудувати точки

1) $M(1; \frac{3\pi}{4})$

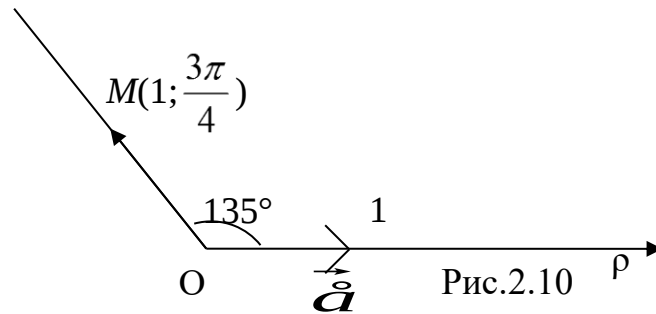


Рис.2.10

2) $M(-2; \frac{\pi}{4})$

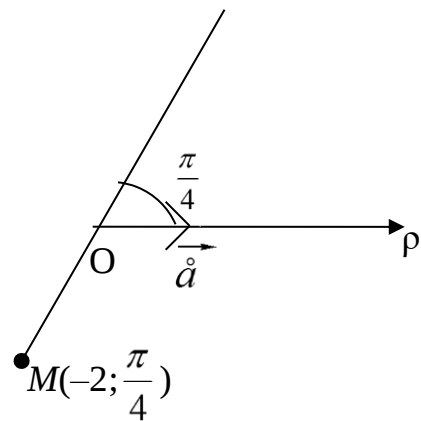


Рис.2.11

3) $M(3; \frac{4\pi}{3})$

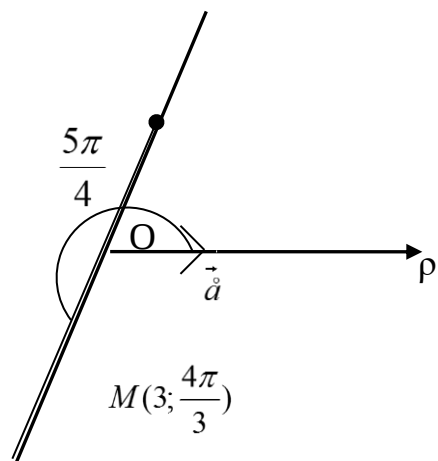


Рис.2.12

Зауваження. Полярний кут задається у радіанах.

$$1\text{рад} \approx 57^{\circ}17'45''$$

Якщо мова йде про узагальнену систему координат, то зрозуміло, що формули (2.9) залишаються тими ж, тільки у випадку від'ємного ρ матимемо

$$x = -\rho \cdot \cos(\pi + \varphi) = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = -\rho \cdot \sin(\pi + \varphi) = \rho \cdot \sin \varphi$$

Що стосується формул(2.10), то в них перед радикалом слід брати знак мінус.

2.2 Перетворення систем координат

2.2.1 Задача перетворення афінних систем координат

Вище ми показали як від полярної системи перейти до прямокутної декартової і навпаки. Виявляється, що такі ж задачі ставляться і для інших систем координат. Вміти перейти від задачі, сформульованої в одній афінній системі координат, до цієї самої задачі, але в іншій афінній системі. Розв'язання задачі розіб'ємо на два етапи.

I. Постановка задачі

Задані дві афінні системи координат (рис.2.13): Oxy – стара і нова $O'x'y'$, відоме розміщення нової системи координат відносно старої, а саме:

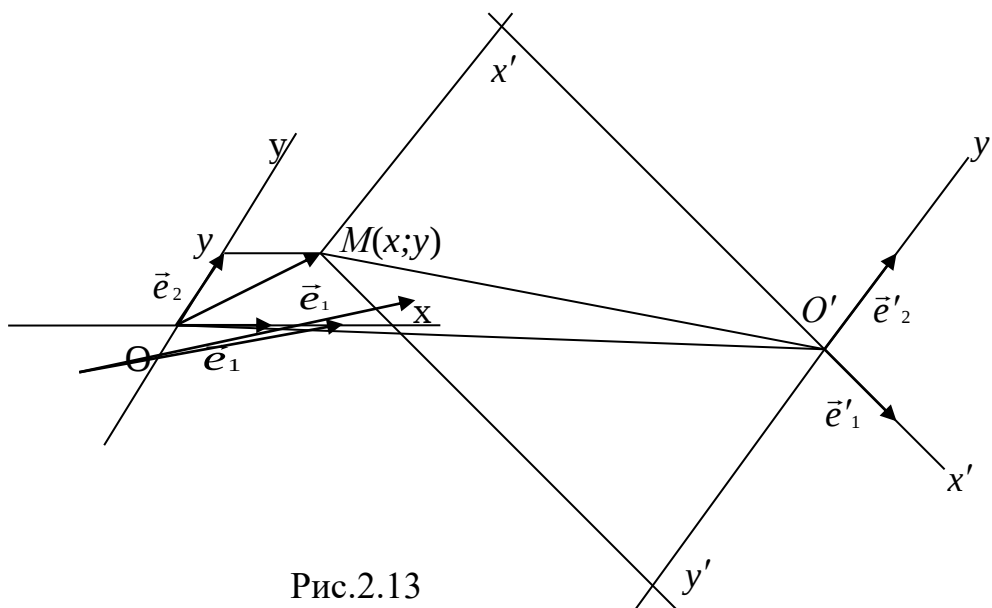


Рис.2.13

Координати нового початку $O'(a,b)$ та координати нових ортів

$$\vec{e}'_1(c_{11}, c_{12}), \vec{e}'_2(c_{21}, c_{22}).$$

Нехай довільна точка M відносно старої системи має координати $(x;y)$ і ця ж точка має координати $(x';y')$ відносно нової. Задача полягає в тому, щоб виразити старі координати через нові.

II. Розв'язання задачі

Якщо задане положення нової системи координат відносно старої, то старі координати довільної точки площини обчислюються через нові за формулами.

Доведення. За означенням координат точки M для старої системи маємо

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (\alpha)$$

і за означенням координат цієї точки для нової системи

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 \quad (\beta)$$

Запишемо вектор $\overrightarrow{OM}$ як суму векторів $\overrightarrow{OO'}$ та $\overrightarrow{O'M}$ і знайдемо його координати. При цьому у формулі (β) перейдемо до старої системи координат, скориставшись координатами векторів $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ і точки O' .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'} = x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) + y'(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2) + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = (c_{11}x' + \\ &+ c_{12}y' + a)\vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y' + b)\vec{e}_2 \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Порівняємо формули (α) і (γ) . Отримаємо формули (2.15).

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + a \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b \end{cases} \quad (2.11)$$

Отже, якщо задане положення нової системи координат відносно старої, то старі координати довільної точки площини обчислюються через нові за формулами (2.11)

Розглянемо часткові випадки перетворення систем координат.

III. Перенесення початку без зміни базису

Базисні вектори залишаються такими ж, тобто

$$\begin{aligned}\vec{e}'_{2_1} &= \vec{e}_{2_1}(0,1), \\ \vec{e}'_{1_1} &= \vec{e}_{1_1}(1,0),\end{aligned}$$

а початок координат O переносимо в точку $O'(a;b)$, тоді формули (2.11) наберуть вигляду

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \quad (2.12)$$

IV. Заміна базису без зміни початку.

Тут точка $O'(0;0)$, тобто у формулах (2.15) $a=b=0$. Тоді формули зміни базису наберуть вигляду

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y'. \end{cases} \quad (2.13)$$

А нові орти матимуть координати $\vec{e}'_1(c_{11};c_{21}), \vec{e}'_2(c_{12};c_{22})$.

В формулах (2.11) розглянемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Матриця C називається **матрицею переходу** від однієї системи координат до другої, так як її стовпці – це координати базисних векторів, а вони не колінеарні, то стовпці лінійно незалежні і детермінант цієї матриці $\det C \neq 0$, тобто відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Така матриця називається невиворотною.

Висновок: для того, щоб лінійні формули (2.11) задавали перетворення афінних координат необхідно і достатньо, щоб матриця переходу була невиворотною.

Приклад. Вияснити, чи задають перетворення координат формули

$$\begin{cases} x = 3x' - 2y' + 1, \\ y = x' + 3y' + 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці переходу:

$$\det C = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Оскільки $\det C \neq 0$, то формули задають перетворення координат. При цьому $\vec{e}'_1(3,1), \vec{e}'_2(-2,3), O'(1,2)$.

2.2.2 Перетворення прямокутної декартової системи координат в прямокутну декартову

Перш, ніж перейти до розв'язання задачі, нагадаємо, що будь-який орт *в просторі* відносно прямокутної декартової системи координат має координати

$\vec{e}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – напрямні косинуси.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Напрямні косинуси рівні відповідним координатам вектора, поділеним на його довжину. У курсі планіметрії

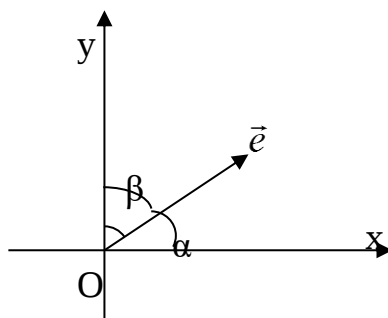


Рис.2.14

$\vec{e}(\cos \alpha; \cos \beta)$ причому $\vec{e} = (\overrightarrow{\cos \alpha}, \overrightarrow{\cos(90^\circ - \alpha)}) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. (рис.2.14)

Перейдемо до розв'язання задачі. Зрозуміло, що, так як прямокутна декартова система координат є частковим випадком афінної, то формули (2.11) є також розв'язком задачі. У цих формулах, щоб задати перетворення, потрібно задати шість чисел $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, a, b$. Виявляється, що у випадку прямокутної декартової системи координат, вистачить трьох чисел, а саме: α – кут між $(\vec{i}, \vec{i}')$ і a, b . (рис.2.13)

Тут принципово можливі два випадки:

- 1) стара і нова системи координат мають однакову орієнтацію;
- 2) стара і нова системи координат мають протилежну орієнтацію.

Розглянемо перший випадок. (рис.2.15)

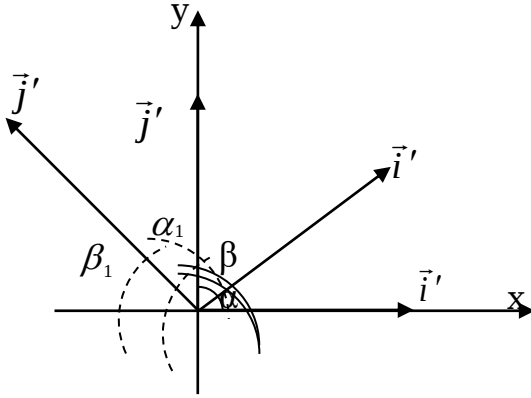


Рис.2.15

Обчислимо координати нових ортів.

$$\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha), \vec{j}'(\cos\alpha_1, \cos\beta_1). \quad \beta_1 = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$$

$$\vec{j}'(\cos(90^\circ + \alpha), \cos\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Формули (2.15) наберуть вигляду:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{cases} \quad (2.14)$$

3) Якщо системи координат різної орієнтації (рис.2.16), то $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$,

$$\vec{j}'(\cos(270^\circ + \alpha), \cos(180^\circ + \alpha)) = (\sin\alpha, -\cos\alpha).$$

Формули (2.11) наберуть вигляду

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + a, \\ y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha + b. \end{cases} \quad (2.15)$$

Формули (2.18) і (2.19) можна

подати однією формулою

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - \varepsilon y' \sin\alpha + a, \\ y = x' \sin\alpha + \varepsilon y' \cos\alpha + b. \end{cases} \quad (2.16),$$

де $\varepsilon = +1$, якщо обидві системи

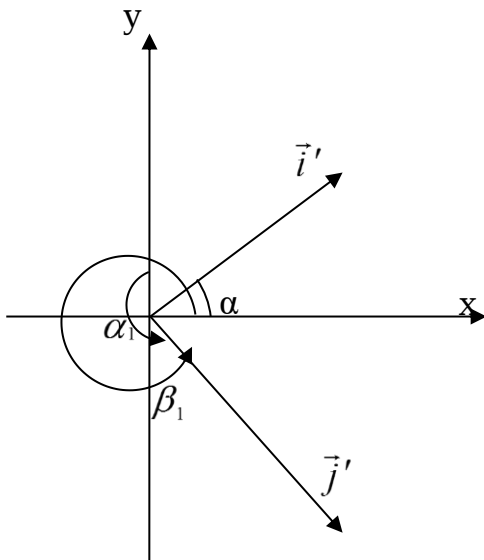


Рис. 2.16

координат однаково орієнтовані і $\varepsilon = -1$, якщо протилежно орієнтовані.

Тут матриця переходу $C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\varepsilon \sin \alpha \\ \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix}$ має такі властивості:

- 1) сума квадратів елементів кожного рядка рівна 1;
- 2) сума квадратів елементів кожного стовпця рівна 1;
- 3) сума добутків елементів стовпців рівна 0;
- 4) сума добутків елементів рядків рівна 0.

Це абсолютно зрозуміло, так як стовпці є координатами векторів нового ортонормованого базису. Аналогічно рядки є координатами старого ортонормованого базису відносно нового. А також

$$\begin{aligned} \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = (\vec{i}')^2 = (\vec{j}')^2 &= 1, \\ \vec{i}\vec{j} = \vec{j}'\vec{i}' &= 0. \end{aligned}$$

Матриця, яка має такі властивості, називається **ортогональною**.

Висновок. Для того, щоб лінійні формули (2.15) задавали перетворення прямокутної декартової системи координат в прямокутну декартову систему координат, необхідно і достатньо, щоб матриця переходу була ортогональною.

Приклад. Вияснити, перетворення яких систем координат задають формули

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' + 7 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' + 5 \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю переходу $\tilde{N} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Очевидно, що ця

матриця має чотири властивості, які характерні для ортогональної. Дійсно,

сума квадратів елементів першого рядка $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$

другого $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

Сума добутків елементів стовпців $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0;$

сума добутків елементів рядків $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$

Отже, матриця ортогональна. Це є необхідною і достатньою умовами того, що формули задають перетворення прямокутних систем координат.

2.3 Геометричний зміст рівнянь та нерівностей на площині

2.3.1 Лінія на площині

Як відомо, в основі аналітичної геометрії лежать дві ідеї:

1. Співставлення точкам площини їх координат – пари дійсних чисел, що визначають положення точки відносно системи координат.

Цю ідею ми вже розглянули.

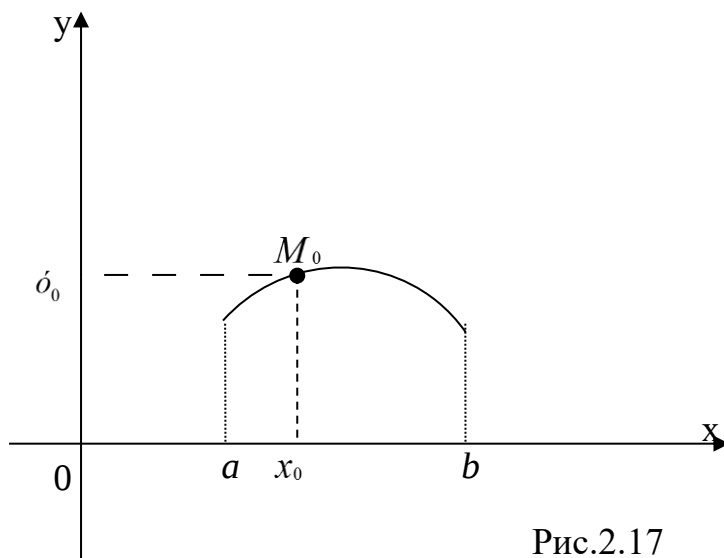


Рис.2.17

2. Співставлення рівнянням відносно змінних x і y геометричних фігур – ліній (кривих). Переходимо до розв'язування цієї другої ідеї.

Розглянемо функцію $y = f(x)$ задану на проміжку $x \in [a, b]$. (рис.2.17)

Надаємо x фіксованого значення $\delta = \delta_0$.

Обчислимо $y = y_0$.

Розглянемо пару $(x_0; y_0)$. На площині в системі координат цій парі відповідає точка M_0 .

Заставимо тепер x_0 пробігати неперервно весь проміжок $[a, b]$. Кожному положенню точки x_0 буде відповідати своє y_0 і, отже, своє положення точки M_0 , тобто коли x_0 пробігає проміжок $[a, b]$ точка M_0 описує на площині деяку лінію, яку в математичному аналізі називають графіком функції $y = f(x)$. В аналітичній геометрії цей графік називають **кривою**, заданою рівнянням $y = f(x)$.

Розглянемо тепер складніший випадок, коли функція задана неявно.

Наприклад, $x^2 + y^2 - 25 = 0$. $x \in [-5; 5]$.

Як в попередньому випадку, зафіксуємо $\delta = \delta_0 = 0$. Отримаємо рівняння з однією змінною.

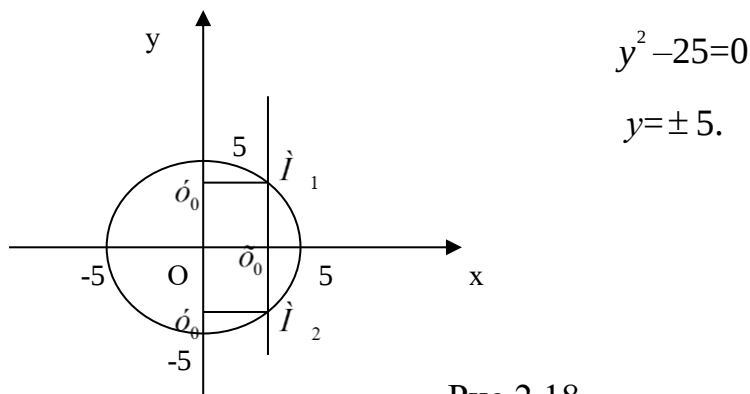


Рис.2.18

Змусимо x_0 пробігати весь проміжок $[-5; 5]$ (рис.2.18). При кожному положенні x_0 ми отримаємо два значення y_0 і дві точки M_1 і M_2 . Отже, коли x_0 пробігає $[-5; 5]$, то точка M_1 опише верхнє півколо, а разом дві точки опишуть коло.

Розглянемо загальний випадок: $F(x, y) = 0$, $x \in [a, b]$ (рис. 2.18).

Зафіксуємо x_0 . Отримаємо рівняння з однією змінною $F(x_0, y) = 0$. Розв'яжемо його. Нехай y_1, y_2, y_3 – розв'язки. Розглянемо точки $M_1(x_0, y_1)$, $M_2(x_0, y_2)$, $M_3(x_0, y_3)$. Координати цих точок задовольняють рівняння. Заставимо x_0 пробігати весь проміжок $[a, b]$, тоді кожна із точок $M_1(x_0, y_1)$, $M_2(x_0, y_2)$, $M_3(x_0, y_3)$. Координати цих точок задовольняють рівняння. Заставимо x_0

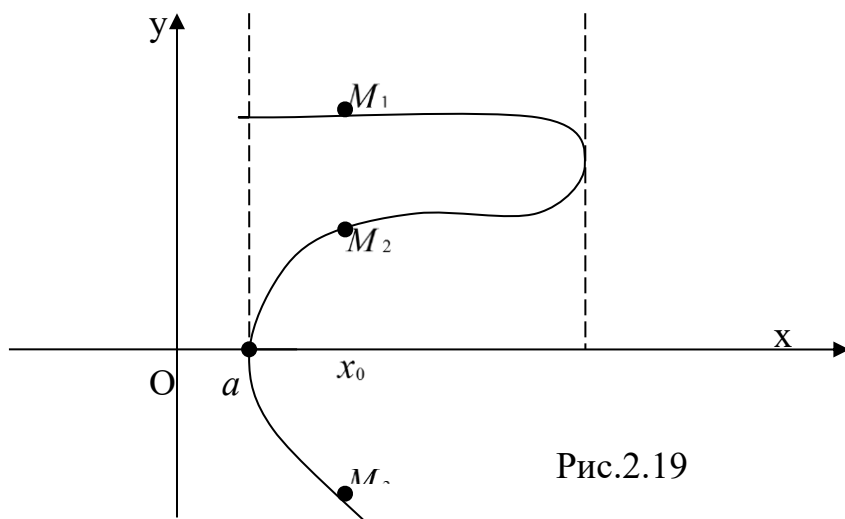


Рис.2.19

пробігати весь проміжок $[a,b]$, тоді кожна із точок M_1, M_2, M_3 опише деяку ланку кривої, а всі разом опишуть криву, задану рівнянням $F(x,y)=0$.

Кривою (лінією), заданою рівнянням $F(x,y)=0$, називається множина точок площини, координати яких задовольняють це рівняння і ця множина не містить жодної точки, координати якої не задовольняють це рівняння.

Іншими словами: $F(x,y)=0$ - це ті і тільки ті точки площини, координати яких задовольняють це рівняння, або крива – це геометричне місце точок.

Пояснимо, чому в означенні кривої потрібно розглядати дві умови.

Приклад. Стверджуємо, що рівняння $x^2 - y^2 = 0$ задає бісектрису першого і третього координатних кутів. Чи правильно це?

Розв'язання. Побудуємо бісектрису першого і третього координатних кутів (рис. 2.20).

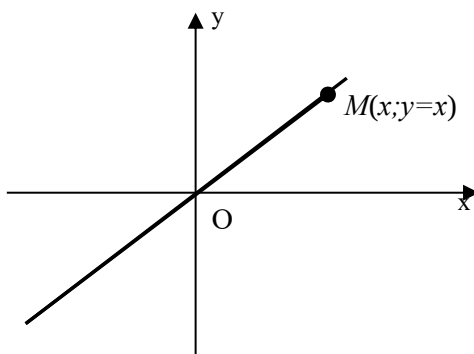


Рис.2.20

Бачимо, що кожна координата точки бісектриси задовольняє рівняння. Але це рівняння, крім точок цієї бісектриси, задовольняють точки другої

бісектриси - другого і четвертого координатних кутів (і квадратне рівняння ніколи не є рівнянням прямої), отже, невірно, що це рівняння бісектриси. Це рівняння задає дві бісектриси координатних кутів.

2.3.2 Часткові випадки рівнянь кривих

1. Рівняння не задовольняє жодна дійсна точка площини:

$$x^2 + y^2 + 25 = 0$$

Але щоб не порушувати загальності, ми будемо говорити, що це рівняння задає уявну криву – уявне коло.

2. Рівняння задовольняє скінченне число точок:

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 0, \quad M(1; -5).$$

Будемо говорити, що це рівняння уявної кривої з дійсними точками.

3. Розпад лінії

Теорема 2.1. Якщо ліву частину рівняння $F(x,y)=0$ можна подати у вигляді добутку двох або більше функцій, то це рівняння задає дві або більше дійсних чи уявних кривих. Тоді кажуть, що крива

$$\gamma: F(x,y)=0$$

розпадається на дві або більше кривих $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k$.

Доведення. Нехай для означеності $F(x,y)=\varphi(x,y) \cdot \psi(x,y)$. І нехай $\gamma: F(x,y)=0$. Тоді або $\gamma_1: \varphi(\tilde{\alpha}; \tilde{\alpha}) = 0$, або $\gamma_2: \psi(\tilde{\alpha}; \tilde{\alpha}) = 0$.

Нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, тоді її координати задовольняють рівняння кривої, тобто

$$F(x_0; y_0) = 0, \text{ і, отже,}$$

$$\varphi(x_0; y_0) \cdot \psi(x_0; y_0) = 0.$$

Значить, або

$$\varphi(x_0; y_0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \in \gamma_1 \text{ або}$$

$$\psi(x_0; y_0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \in \gamma_2, \text{ або}$$

$$M_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2.$$

Навпаки, нехай $M(x_0; y_0)$ належить принаймні одній із кривих γ_1, γ_2 .
 Для означеності, нехай γ_1 . Тоді $\varphi(x_0; y_0)=0$.

Значить, $F(x_0; y_0)=\varphi(x_0; y_0) \cdot \psi(x_0; y_0)=0$. Отже, точка $M(x_0; y_0) \in \gamma$.

4. Рівняння з однією змінною

Теорема 2.2. Рівнянню x однією змінною на площині відповідає система дійсних або уявних прямих, паралельних тій координатній осі, що відповідає відсутній змінній.

Наприклад, рівняння $F(x)=0$ визначає прямі, паралельні осі Oy .

Доведення. Нехай для означеності $F(x)=0$. Це рівняння з однією змінною, воно має дійсні або уявні корені, тому нехай воно має дійсні корені $x_1, x_2, x_3 \dots \tilde{\alpha}_k$. Тобто $F(x_i)=0, i=1,2,3,\dots k$. Тоді функцію $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

і отже, за попередньою теоремою лінія розпадається на

$$\gamma_1: x-x_1=0,$$

$$\gamma_2: x-x_2=0,$$

$$\gamma_3: x-x_3=0.$$

Кожна з цих ліній – пряма, паралельна осі Oy (рис.2.21)

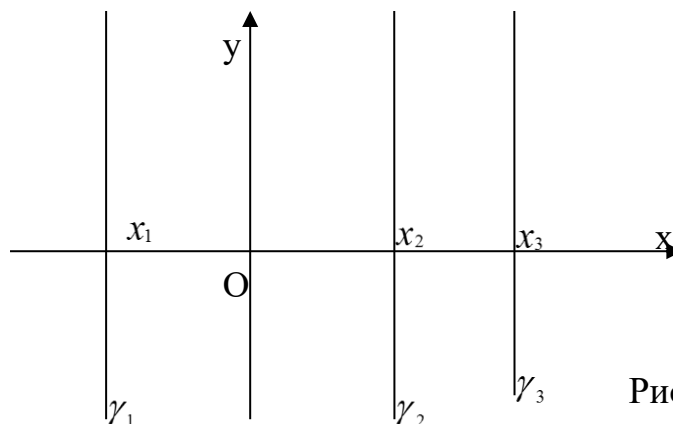


Рис.2.21

Дійсно, наприклад, $x - x_1 = 0$ – це ті точки площини, які мають абсцису x_1 , тобто це точки прямої γ . Рівняння задовольняють точки $(x_1; y)$.

Приклад 1. Вияснити геометричний зміст рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Розв’язання. Це рівняння має корені $x=3$; $x=5$. Тоді його можна записати у вигляді $(x-3)(x-5)=0$. За теоремою 1, крива розпадається на дві прямі: $\gamma_1: x-3=0$, $\gamma_2: x-5=0$. Тобто це дві прямі $x=3$ та $x=5$, паралельні осі Oy .

Довгий час вважалося, що таким способом можна ввести означення поняття лінії на площині. Будь-яку лінію можна було б задати рівнянням, і будь-яке рівняння з двома (однією) змінними задає лінію. Але виявляється, що можна навести такі приклади рівнянь з двома змінними, які лінії не задають.

Приклад 2. Рівняння $y - |y| = 0 \Leftrightarrow y > 0$ задає верхню півплощину над віссю ox (рис.2.22).

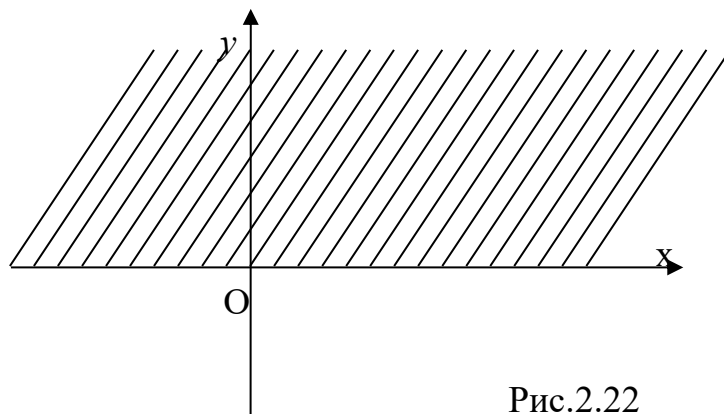


Рис.2.22

Приклад 3. Рівняння $x + |x| = y + |y|$ задає два геометричні місця точок (рис.2.23).

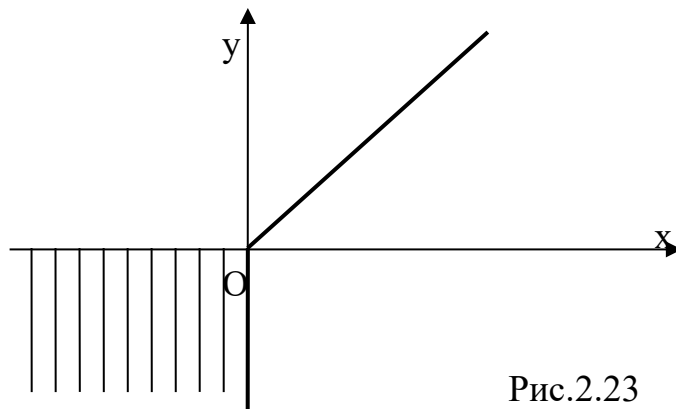


Рис.2.23

Висновок. Взагалі кажучи, за винятком окремих прикладів, рівняння з двома (однією) змінними на площині задає дійсну або уявну криву (лінію).

2.3.3 Система двох рівнянь з двома (однією) змінними

Розглянемо систему

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Система рівнянь задає геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють кожне рівняння системи, тобто спільні точки.

Кожне рівняння системи задає криву. Точка, яка є розв'язком системи повинна задовольняти обом кривим, тобто система задає точку перетину двох кривих. *Навпаки:* нехай точка $M(x_0, y_0) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, тоді $M \in \gamma_1$ і $M \in \gamma_2$. Отже, задовольняє обом рівнянням, тобто задовольняє системі.

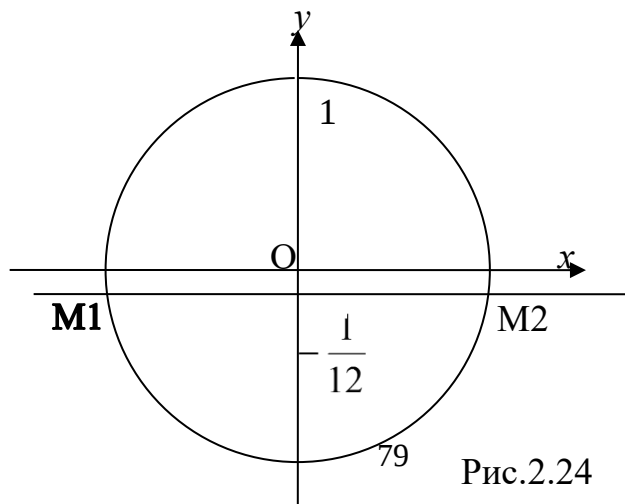
Приклад. Вияснити геометричний зміст системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 12y + 1 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння задає коло з центром в початку координат радіуса 1, друге – пряму $y = -\frac{1}{12}$, паралельну осі Ох. (рис.2.24)

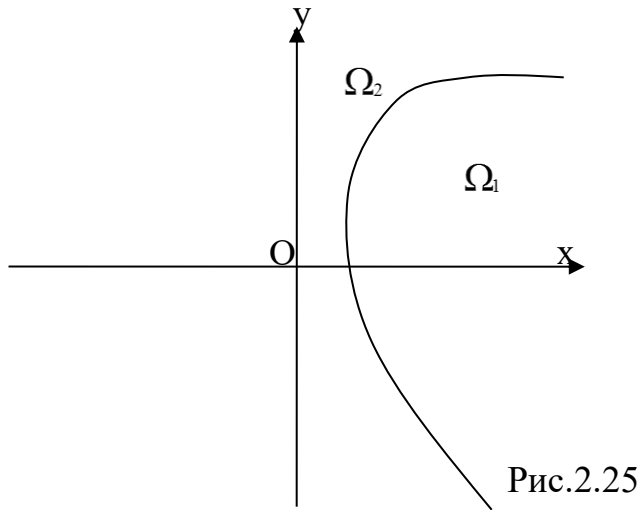
Отже, система рівнянь визначає дві точки M_1 і M_2 перетину кола з прямою.

Позначити дві точки M_1 і M_2 **на рисунку**



2.3.4 Нерівності

Нехай задана $\gamma: F(x,y)=0$ (рис.2.25)..



Якщо в точці $M(x_0, y_0) \in \gamma$, то $F(x_0, y_0)=0$.

Нехай точка $M_1(x_1; y_1) \notin \gamma$, тоді $F(x_1; y_1) \neq 0$.

Тому $F(x_1; y_1) > 0$ або $F(x_1; y_1) < 0$.

Які геометричні образи відповідають цим нерівностям? Взагалі кажучи, задана крива γ розбиває цю площину на дві області (рис. 2.25). Одну із цих областей називають внутрішньою, а другу – зовнішньою. Можна довести, що для всіх точок даної області виконується одна із цих двох нерівностей.

Наприклад, для Ω_1 $F(x,y) > 0$, для Ω_2 $F(x,y) < 0$ або навпаки.

Розглянемо **приклад**. Яку множину точок площини задає нерівність

$$y^2 - 2x > 0 ?$$

Розв'язання.

1. Побудуємо $\gamma: y^2 - 2x = 0$ – параболу (рис.2.26)

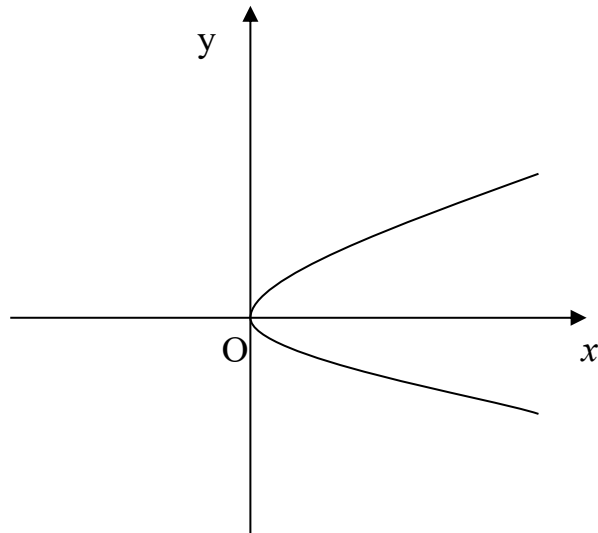


Рис.2.26

Всі точки півплощини $x \geq 0$ задовольняють рівняння $y^2 - 2x = 0$

2. Візьмемо точку $(x_0; y)$ і $|y| < y_0$, $y_0 = \sqrt{2x}$, $|y| < \sqrt{2x}$; $y^2 - 2x < 0$ – всередині.

3. $|y| > y_0$, тоді $y^2 - 2x > 0$ – зовнішня область.

2.3.5 Система нерівностей

Система нерівностей визначає перетин (переріз) областей, які задає кожна із нерівностей системи.

Приклад. Яку множину точок визначає система нерівностей?

$$\begin{cases} y^2 - 2x < 0 \\ x^2 + y^2 - 1 < 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Побудуємо криву $y^2 - 2x = 0$, яка розбиває площину на дві області: внутрішню і зовнішню (рис.2.27). Візьмемо довільну точку з однієї з областей, наприклад, з внутрішньої – точку $(1; 0)$ і обчислимо значення лівої частини рівняння в цій точці $0 - 1 \cdot 2 < 0$. Отже, перша нерівність визначає внутрішню область параболи. Побудуємо коло $x^2 + y^2 = 1$. Воно розбиває

площину на зовнішню та внутрішню області. Візьмемо довільну точку із зовнішньої області, наприклад, $(0;2)$ і обчислимо $F(0;2)$.

Матимемо $0+4-1=3>0$ – нерівність неправильна, тобто друга нерівність задає внутрішність кола.

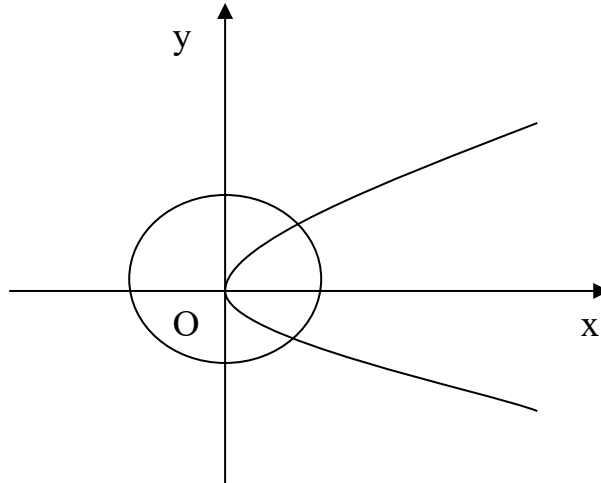


Рис.2.27

Отже, система нерівностей визначає множину точок, яка є спільною для параболи та кола.

Висновок. Щоб вияснити, яку область задає дана нерівність потрібно:

1. Побудувати криву $\gamma: F(x;y) = 0$
2. Визначити внутрішні і зовнішні області.
3. У фіксованій області Ω_1 взяти фіксовану точку $M_0(x_0; y_0)$.
4. Обчислити значення виразу $F(x_0; y_0)$: який знак буде у цього числа, нерівність того сенсу задає Ω_1

2.3.6 Класифікація ліній (кривих)

Всі лінії площини класифікують як алгебраїчні та трансцендентні.

Лінія γ називається **алгебраїчною**, якщо її рівняння у прямокутній декартовій системі координат або афінній можна подати у вигляді многочлена степеня n відносно змінних x та y . При цьому степінь многочленна називається **порядком лінії**.

Приклади.

1. Рівняння $\gamma: x^2y + 7x^2 + 2y + 4 = 0$ задає лінію третього порядку.

Всі інші лінії, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендентними**.

2. Рівняння задає трансцендентну лінію, оскільки функція $\phi = \sin x$ не є многочленом.

Якщо рівняння лінії задано в полярній системі, то, щоб з'ясувати, якого вона типу, необхідно подати її рівняння в прямокутній декартовій системі координат.

3. Яку лінію задає рівняння

$$\rho = -\frac{1}{2\cos\varphi + 3\sin\varphi}?$$

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння $2\rho\cos\varphi + 3\rho\sin\varphi + 1 = 0$ у прямокутній декартовій системі координат, скориставшись формулами (2.14).

Отримаємо $2x + 3y + 1 = 0$. Це рівняння прямої.

Теорема 2.3. *Порядок алгебраїчних ліній не змінюється при перетвореннях афінних координат.*

Доведення Нехай, для означеності, задана лінія другого порядку.

$\gamma: a_1x^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0$ в деякій системі координат xOy .

Виконаємо перетворення координат за формулами:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + a; \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b. \end{cases}$$

Нове рівняння γ отримаємо, якщо в задане рівняння замість x і y підставимо їх значення. Так як формули лінійні, то степеня вище, ніж другий, не може бути. Отже, при переході від xOy до $x'O'y'$ порядок лінії не підвищується.

Виникає питання: «А чи не міг би порядок понизитися за рахунок зведення подібних членів?» Наприклад: було квадратне, а нове відносно $x'y'$ стало лінійним у системі $x'O'y'$. Очевидно, ні, бо якщо у $x'O'y'$ рівняння лінійне, то при переході в xOy степінь повинен підвищитися, а це неможливо.

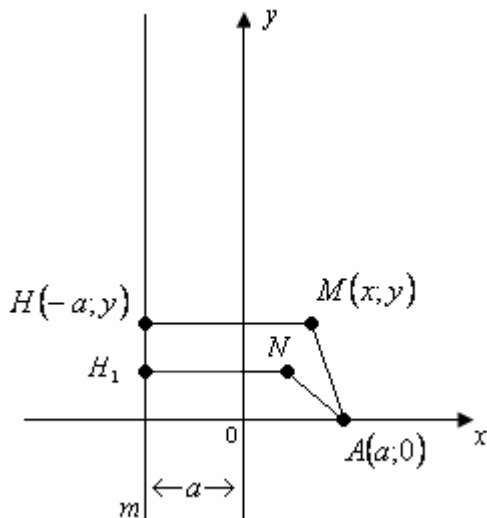
2.4 Складання рівнянь кривої

2.4.1 Дві основні задачі аналітичної геометрії площини

Перша основна задача

Задано рівняння з двома (однією) змінними чи система рівнянь, або нерівність чи система нерівностей. З'ясувати, який геометричний образ задається цим аналітичним виразом.

При розв'язуванні цієї задачі необхідно мати набір основних рівнянь кривих (пряма, коло, еліпс, гіпербола, парабола і т. д.). В складніших випадках за допомогою перетворень координат спростити рівняння до відомого. Часто, коли рівняння степеня вищого, ніж другий, спробувати його ліву частину розкласти на множники і тоді лінія розпадається. Якщо цього не вдається зробити, то потрібно перейти до полярної системи координат, отримати рівняння $\rho = f(\cos \varphi, \sin \varphi)$ і тоді скласти таблицю для значень знаходжень кута φ і відповідних значень ρ ; за таблицею побудувати криву.



Друга основна задача

Геометричний об'єкт, заданий своїми властивостями. Записати його рівняння. Найбільш поширеною є задача складення рівнянь кривих. Для її розв'язання можна запропонувати такий алгоритм.

1. Зручно (доцільно) вибираємо систему координат. Наприклад, якщо в умові дана пряма і точка A, то через

Рис.2.28 точку проводимо вісь абсцис, перпендикулярно до заданої прямої (рис. 2.28), а вісь оу так, щоб вона ділила відстань

між прямою m і точкою A навпіл.

2. На площині беремо довільну точку M з координатами $(x; y)$ і вважаємо, що вона належить даній кривій (тобто має властивості, задані умовою задачі).

3. Записуємо співвідношення, справедливе для будь-якої точки лінії. Воно або безпосередньо задане умовою задачі, або може бути легко визначене за невідомими геометричними фактами.
4. Отримане співвідношення записуємо у координатах.
5. Виконуємо всі можливі перетворення у рівнянні. Отримуємо найпростіше рівняння.
6. Доводимо, що отримане рівняння задає ту, і лише ту множину точок площини, що задані умовою задачі.

Приклад. Скласти рівняння кола з центром в точці $O(a;b)$ і радіуса R .

Розв'язання.

1. Система координат задана, відомі координати центра та радіус кола.
2. Візьмемо біжучу точку M з координатами $(x; y)$, яка лежить на кривій (задовольняє умові задачі). (рис.2.28)
3. Запишемо основне співвідношення, яке залишається незмінним коли точка M пробігає всю криву: $MC=R$.
4. Запишемо це основне співвідношення у координатах:

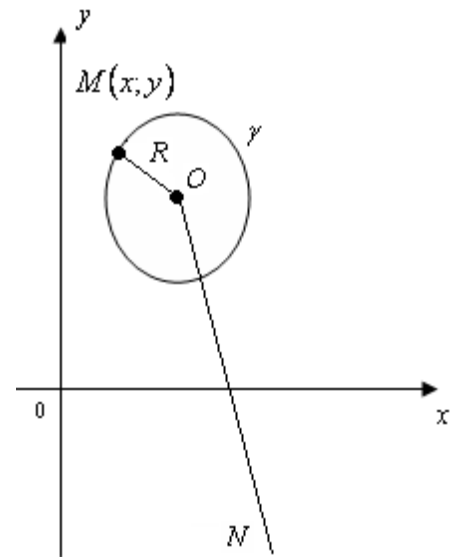


Рис. 2,28

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

5. Виконаємо спрощення, піднесемо обидві частини до квадрату:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (*)$$

6. Ми маємо, що коли точка M пробігає коло, її координати задовольняють (*). Але ми піднесли вираз до квадрату, могло трапитися, що з'явилися ще якісь точки, координати яких задовольняють рівняння.

Доведемо, що це не так. Візьмемо деяку точку $\dot{I} (\tilde{o}_1; \dot{o}_1) \notin \gamma$ (колу).

Покажемо, що вона не задовольняє (*).

Дійсно $CN > R$ або $CN < R$, тобто $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > R^2$ або $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < R^2$. В координатах $\sqrt{(x_1 - \tilde{o}_0)^2 + (y_1 - \tilde{o}_0)^2} < R$ або $\sqrt{(x_1 - \tilde{o}_0)^2 + (y_1 - \tilde{o}_0)^2} > R$, тобто не виконується (*).

Значить, якщо точка не належить колу, то її координати не задовольняють рівняння кола.

Таким чином, отримане рівняння (*) задає ті, і лише ті точки площини, які належать колу.

Отже, (*) рівняння кола. Якщо центр кола в початку координат, то

$$a = b = 0 \text{ і рівняння } x^2 + y^2 = R^2 \quad (2.17)$$

2.4.2 Рівняння кривої у полярній системі координат

Іноді корисно при складанні рівняння кривої вибрати полярну систему координат, особливо, коли в задачі йде мова про прямокутні трикутники.

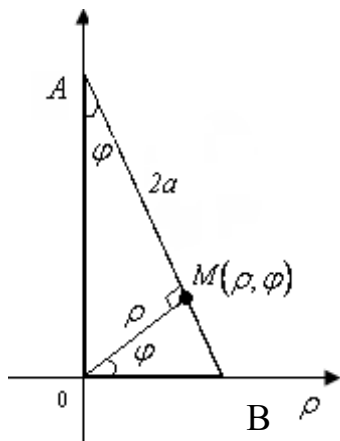


Рис.2.29

Приклад. Відрізок сталої довжини $2a$ ковзає по сторонах прямого кута.

Із вершини цього прямого кута опускається перпендикуляр OM на цей відрізок. Скласти рівняння геометричного місця точок M .

Розв'язання.

1.Виберемо полярну систему координат $O\rho$: полюс – вершина прямого кута, полярна вісь – промінь з початком в точці O , напрямлений вздовж одного з катетів (рис.2.29).

2.Тоді біжуча точка M буде мати координати $(\rho; \varphi)$.

3. Запишемо основне співвідношення: з $\triangle OMB$: $OM = OB \cdot \cos \varphi$;

з $\triangle OAB$: $OB = AB \cdot \sin \varphi$, тобто $OB = 2a \cdot \sin \varphi$.

4. Оскільки $OM = \rho = OB \cdot \cos \varphi$, то матимемо $\rho = 2a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$.

5. Остаточно $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$ (2.18)

6. Побудова кривої. Складаємо таблицю значень φ , 2φ , ρ

φ	2φ	ρ
0°	0°	0
15°	30°	$\frac{a}{2}$
30°	60°	$\frac{\sqrt{3}a}{2}$
45°	90°	a

За отриманими даними побудуємо криву(рис.2.30).

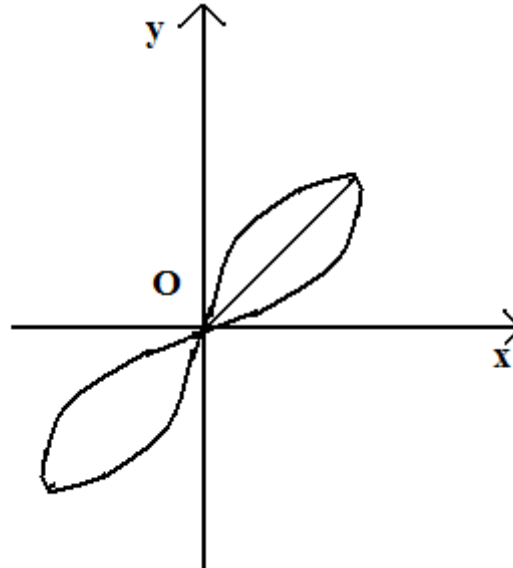


Рис.2.30

2.4.3 Параметричне рівняння кривої

Французький математик Кармін Йордан, намагаючись дати наукові

означення поняття лінія запропонував дивитися на лінію, як на множину точок, яку описує точка, що неперервно рухається по площині, так, як пересувається жук, а не стрибками (рис. 2.31)

Під час руху точки неперервно змінюються її координати x і y . Отже, вони є деякими неперервними функціями від часу, а саме :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

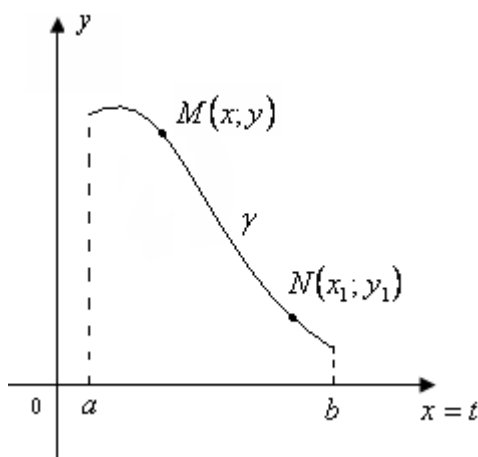


Рис. 2.31

Формули типу (2.19) називаються *параметричними рівняннями кривої γ* .

Дійсно, якщо t надати будь-якого значення із проміжку можливих $t = t_0$, то

точка $x = \varphi(t_0)$, $y = \psi(t_0)$ належить γ . *Навпаки* : для кожної точки

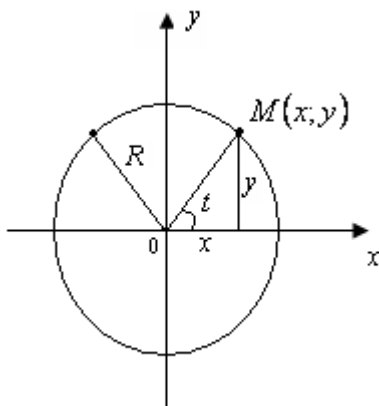
$N(x_1; y_1) \in \gamma$ знайдеться значення параметра $t = t_1 \in [a; b]$ таке, що координати цієї точки $(x_1; y_1)$:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1); \\ y_1 = \psi(t_1). \end{cases}$$

Приклад. Записати параметричне рівняння кола з центром у початку координат.

Розв'язання.

У ролі параметра в геометрії здебільшого беруть не час, а кут. Нехай точка $M(x; y)$ - довільна точка кола. Проведемо промінь OM . Позначимо кут, який утворює промінь з додатним напрямом осі Ox через t (рис.2.31), тоді координати точки M виразимо через нього:



$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t; \\ y = R \cdot \sin t. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.20)$$

Легко бачити, що в даному випадку можна перейти до декартового рівняння кола. Дійсно, із системи (2.20) маємо:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{R}\right)^2 = \cos^2 t; \\ \left(\frac{y}{R}\right)^2 = \sin^2 t. \end{cases}$$

Рис. 2.31

Додавши обидва рівняння системи, матимемо

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 - \text{рівняння кола.}$$

Отже, при переході від параметричного рівняння до декартового, необхідно виключити параметр t із системи (2.20).

Приклад 2. Записати параметричне рівняння еліпса.

Дано два концентричні кола, радіуси яких a та b , причому $a > b$, з центром в початку координат.

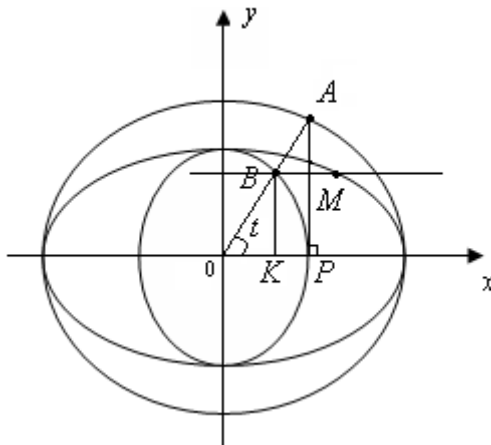


Рис.2.32

Розв'язання.

Проведемо промінь OA : точка A – перетин з більшим колом, точка B – з меншим (рис. 2.32). З точки A опустимо перпендикуляр на вісь Ox . З точки B проводимо пряму паралельну осі Ox . Перетин цих двох прямих позначимо точкою

M . З центра кола проводимо всі можливі радіуси AO для більшого і OB – для меншого

кіл. З точки A проводимо перпендикуляр до осі Ox , з точок B – паралельні прямі до осі Ox . Скласти рівняння точок перетину цих прямих, тобто точок M . В ролі параметра візьмемо кут t .

Тоді з $\triangle OAP$: $x = OP = a \cdot \cos t$ та з $\triangle OBK$: $y = BK = b \cdot \sin t$.

$$\text{Отримали: } \begin{cases} x = a \cdot \cos t; \\ y = b \cdot \sin t. \end{cases} \quad (\alpha)$$

Це і є *параметричне рівняння кривої*. Запишемо його у декартових координатах. Знайдемо $\cos t$ з першого рівняння системи, $\sin t$ – з другого, піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрату і додамо. Матимемо:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2 t; \\ + \\ \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2 t. \end{cases}$$

$$\text{Звідки } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{Це рівняння еліпса.}$$

Приклад . *Вияснити, які лінії задають параметричні рівняння:*

$$\text{а) } \begin{cases} x = 5 \cos t; \\ y = 6 \sin t. \end{cases} \quad - \text{ еліпс, для якого канонічне рівняння } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

б) $\begin{cases} x = 5 \cos t; \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$ - коло , з центром у початку координат радіуса $R=5$.

Розв'язання.

У першому випадку система а) задає еліпс, канонічне рівняння якого

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Система б) задає коло з центром у початку координат і радіус $R=5$.

Розділ III. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

3.1 Пряма у афінній системі координат

Із шкільного курсу геометрії відомо, що пряма однозначно визначається двома точками - це аксіома. Виявляється, що це не єдиний спосіб задання прямої. Пряма визначається двома незалежними елементами і, відповідно, отримуємо різні рівняння прямої, що є корисним при розв'язуванні задач.

3.1.1 Канонічне рівняння прямої

Будь-який ненульовий вектор $\vec{p}$, колінеарний заданій прямій, називається *напрямним вектором прямої*.

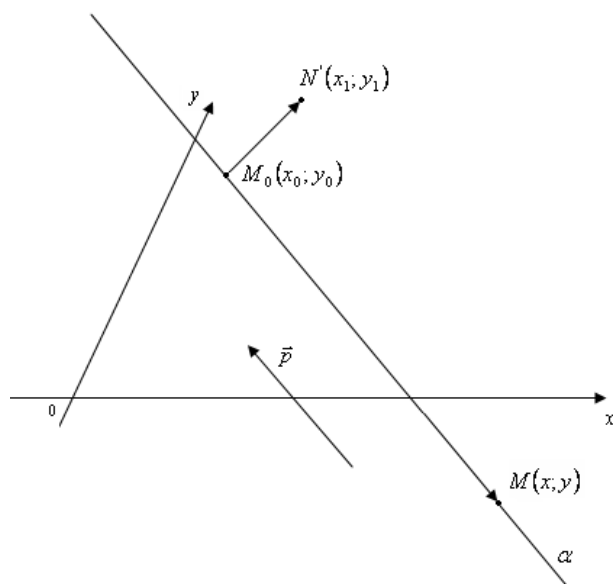


Рис. 3.1

Пряма задана двома такими елементами: фіксованою точкою $M_0(x_0; y_0) \in \alpha$ і напрямним вектором $\vec{p} \parallel \alpha$; $\vec{p} \neq \vec{0}$. Записати рівняння цієї прямої.

Фіксовану точку $M_0(x_0; y_0) \in \alpha$ називають *початком* на прямій.

Рівняння прямої ми запишемо, скориставшись алгоритмом розв'язання задач на складання рівнянь.

1. Система координат задана.
2. Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ - біжучу на прямій. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}$ матиме координати $(x - x_0; y - y_0)$.
3. Запишемо основне співвідношення: точка M належатиме прямій, тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$.
4. Запишемо це співвідношення у координатах:

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0) \parallel \vec{p}(l;m)$$

$$\frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m} \quad (3.1)$$

5. Отримали рівняння прямої.

6. Доведемо, що це рівняння задає лише точки, які належать заданій прямій. Нехай тепер точка $N(x_1; y_1) \notin \alpha$, тоді $\overrightarrow{M_0N}$ не паралельний $\vec{p}$ тобто

$$\frac{x_1-x_0}{e} \neq \frac{y_1-y_0}{m}$$

Це співвідношення свідчить, що координати точки N не задовольняють рівняння (3.1). Отже (3.1) є рівнянням заданої прямої.

Рівняння (3.1) називається *канонічним* рівнянням прямої.

Приклад. Через точку $A(3;-5)$ провести пряму, паралельну осі ординат (рис.3.2).

Розв'язання.

Напрямним вектором

осі Oy є вектор $\vec{e}_2(0;1)$, отже

$\vec{p}(0;1)$.

Скориставшись рівнянням (3.1),

запишемо

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{1}.$$

За властивістю пропорції з отриманого рівняння запишемо:

$$(x-3) \cdot 1 = 0 \cdot (y+5), \text{ або } x-3=0$$

Звідси $x=3$.

Зауваження. Якщо пряма L паралельна одній із координатних осей, наприклад, осі Ox , тоді її напрямним вектором є $\vec{e}_1(1;0)$ і рівняння набере

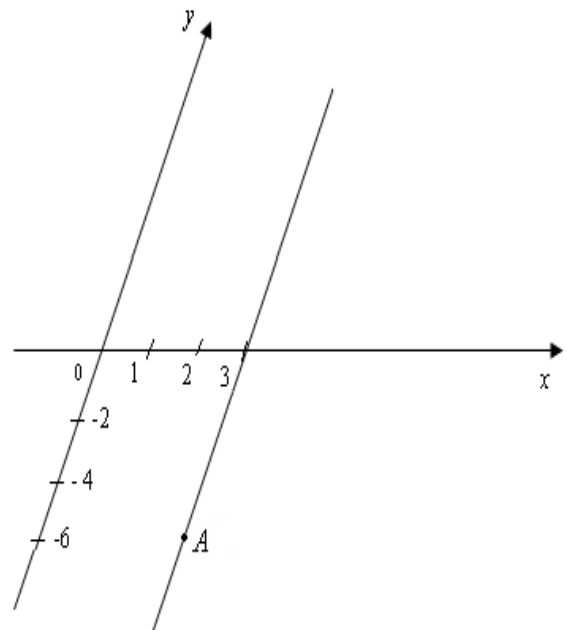


Рис. 3.2

вигляду $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0}$. Зрозуміло що для того, щоб рівняння мало зміст необхідно прирівняти до нуля чисельник, тобто $y-y_0=0$.

Рівняння прямої матиме вигляд $y=y_0$.

3.1.2 Параметричне рівняння прямої

Нехай пряма, як і в 3.1.1, задана точкою $M_0(x_0; y_0) \in \alpha$ і $\vec{p}(l; m) \parallel \alpha$.

Записати її параметричне рівняння.

Міркуємо точно так, як для канонічного рівняння.

Основне співвідношення $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Тоді за лемою 1 для кожного положення точки M знайдеться своє число t : $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{p}$.

Запишемо у координатах.

Так як $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0; y-y_0)$ і $t \cdot \vec{p}(t \cdot l; t \cdot m)$, а рівні вектори мають рівні відповідні координати, то $x-x_0=t \cdot l$, $y-y_0=t \cdot m$

$$\text{тобто} \quad \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t; \\ y = y_0 + m \cdot t. \end{cases} \quad (3.2)$$

де $-\infty < t < +\infty$.

Якщо точка M співпадає з точкою M_0 , то $t=0$; якщо точка M розміщена від точки M_0 у напрямку вектора $\vec{p}$, то $t>0$ і зростає, якщо у протилежному напрямку, то $t<0$ і зростає за абсолютною величиною.

Рівняння (3.2) – параметричне рівняння прямої.

Приклад. Записати параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-3;1)$ і паралельна вектору $\vec{p}(2;5)$.

Розв'язання. Скористаємось рівнянням (3.2).

Отримаємо $\begin{cases} x = -3 + 2t; \\ y = 1 + 5t. \end{cases}$ параметричне рівняння шуканої прямої.

3.1.3 Пряма задана двома точками

Нехай дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки.

Скористаємося рівнянням (3.1). У ролі точки M_0 візьмемо будь-яку із двох даних, наприклад точку $A(x_1; y_1)$, а за напрямний вектор

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Отримаємо рівняння
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (3.3)$$

яке називається рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(4; -5)$, $M_2(-1; 3)$.

Розв'язання. Підставимо у рівняння (3.3) координати заданих точок.

$$\text{Матимемо: } \frac{x - 4}{-1 - 4} = \frac{y + 5}{3 + 5} \text{ або } 8(x - 4) = -5(y - 5).$$

Отже, рівняння шуканої прямої: $8x + 5y - 57 = 0$.

3.1.4 Рівняння прямої у «відрізках» на осях

Нехай пряма відтинає на осях ox та oy відповідно «відрізки» a та b . Запишемо рівняння цієї прямої. Так як пряма проходить через точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$, то запишемо рівняння у вигляді (3.3).

$$\text{Матимемо } \frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \text{ або } \frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}.$$

Звідки
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.4)$$

Це рівняння прямої у «відрізках» на осях.

Зауваження. Рівнянням (3.4) зручно користуватися для побудови прямої у системі координат.

Приклад. Записати рівняння прямої, яка відтинає на осі ox «відрізок» $a = -5$, на осі oy відрізок $b = 2$.

Розв'язання. За рівнянням (3.4) запишемо $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$ або $2x - 5y + 10 = 0$.

3.1.5 Пряма з кутовим коефіцієнтом

Лема 3.1. Відношення ординати до абсциси будь-якого напрямного вектора прямої є величина стала, (однакова для всіх напрямних векторів).

Позначається
$$\frac{m}{l} = k$$
 (3.5)

і називається *кутовим коефіцієнтом прямої* (рис.3.4).

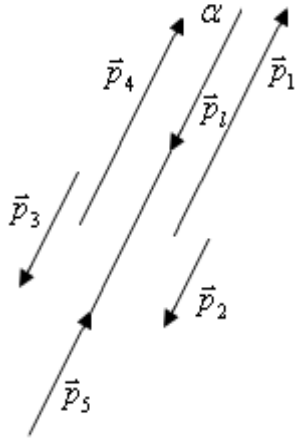


Рис. 3.3

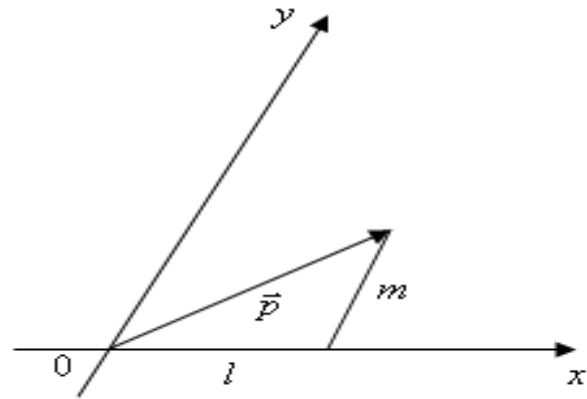


Рис. 3.4

Нехай $\vec{p}_1(l_1, m_1)$, $\vec{p}_2(l_2, m_2)$ два довільні напрямні вектори заданої прямої α (рис.3.3).

За означенням напрямного вектора: $\vec{p}_1 \parallel \alpha$, $\vec{p}_2 \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow l_1 \cdot m_2 = l_2 \cdot m_1 \Leftrightarrow \frac{m_1}{l_1} = \frac{m_2}{l_2}$$

Так як ці відношення рівні для будь-яких двох векторів, то **лема доведена.**

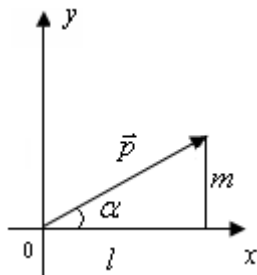


Рис.3.5

Для прямої у декартовій системі координат (рис.3.5)

$$k = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.6)$$

де α - кут між прямою і додатним напрямком осі абсцис.

Нехай тепер пряма задана такими двома своїми елементами:

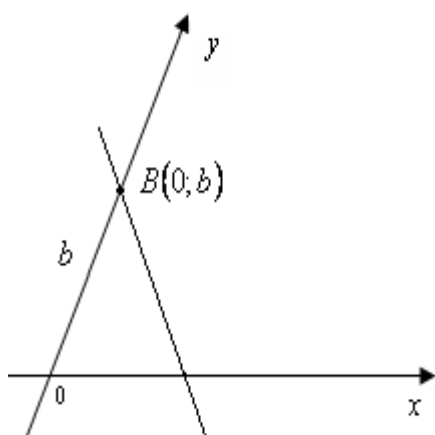


Рис.3.6

- відрізком b , який пряма відтинає на осі ординат, рахуючи від початку координат(рис.3.6). Записати рівняння прямої. Так як задано b , то маємо точку $B(0, b)$. За даним кутовим коефіцієнтом k можна записати, що напрямний вектор $\vec{p}\{1; k\}$:

$$\left(\frac{k}{1} = k \right).$$

Знаючи точку $B(0, b)$ і напрямний вектор прямої $\vec{p}(1; k)$, запишемо її рівняння у

канонічному вигляді $\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{k}$.

Звідси

$$y = kx + b \quad (3.7)$$

Якщо пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$, що не є точкою перетину прямої з віссю ординат, і кутовим коефіцієнтом, то скористаємось канонічним рівнянням (3.1). оскільки $k = \frac{m}{l}$, то, знаючи k , можемо записати координати напрямного вектора: $\vec{p}(1; k)$ тоді матимемо

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{k} \text{ або } y-y_0 = k(x-x_0) \quad (3.8)$$

Приклад. Пряма задана у прямокутній декартовій системі координат. Вона проходить через точку $M_0(-2; 3)$ і утворює з додатним напрямком осі ox кут 45° . Записати рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Оскільки $\tan 45^\circ = 1$ є кутовим коефіцієнтом прямої, то скористаємось рівнянням (3.7) для якого $k=1$, $x_0 = -2$; $y_0 = 3$.

Отримаємо:

$$y - 3 = 1(x + 2) \text{ або } y = x + 5.$$

3.1.6 Загальне рівняння прямої

Теорема 3.1. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють загальне лінійне рівняння виду

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.9)$$

у якому коефіцієнти при змінних одночасно не рівні 0, є пряма з напрямним вектором $\vec{p}(-B; A)$

Доведення. Рівнянням (3.8) з двома змінними і, як відомо, воно задає дійсну або уявну лінію $\gamma : Ax + By + C = 0$.

Скористаємося коефіцієнтами цього рівняння і побудуємо точку $M_0\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$,

якщо $A \neq 0$, (якщо ж $A=0$, то тоді візьмемо точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$) та вектор

$\vec{p}(-B; A) \neq \vec{0}$. Маючи точку і напрямний вектор, запишемо канонічне рівняння прямої α :

$$\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y - 0}{A} \quad \text{або} \quad Ax + C = -By \quad \text{тобто}$$

$$Ax + By + c = 0.$$

Отримане рівняння (3.8) називається *загальним рівнянням прямої*.

Висновок. Для того, щоб рівняння з двома змінними задавало пряму необхідно і достатньо, щоб воно було лінійним (першого степеня).

Дійсно, у п.3.1.1 ми показали, що рівняння прямої є лінійним (3.1).

У п.3.1.6 показали навпаки, що будь-яке лінійне рівняння задає пряму.

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3; 2)$ і паралельна прямій: $x - 4y + 5 = 0$

Розв'язання. За теоремою 3.1, напрямний вектор має координати $(-B; A)$, тобто $\vec{p}(4; 1)$. Оскільки шукана пряма паралельна заданій, то запишемо у вигляді (3.1). Тоді $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{1}$. Звідси загальне рівняння прямої $x + 4y + 11 = 0$.

3.1.7 Взаємне розміщення прямих на площині

Нехай задані дві прямі L_1 та L_2 загальними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} L_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 &= 0 \\ L_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Щоб в'яснити взаємне розміщення цих прямих, потрібно дослідити систему двох рівнянь з двома невідомими. $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$

Розв'язок системи визначає точку перетину двох прямих:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\delta_x}{\delta}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\delta} = \frac{\delta_y}{\delta} \quad (\alpha)$$

Дослідження. Тут можливі такі і тільки такі три випадки:

$$\text{I. } \delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Отже, якщо коефіцієнти при змінних у лінійних рівняннях прямих не пропорційні, то прямі перетинаються в єдиній точці за формулою (α) .

$$\text{II. } \delta = 0, \delta_x \neq 0 \text{ тоді } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Легко переконатися, що й $\delta_y \neq 0$, якщо $\delta_x \neq 0$ і навпаки. Тоді знаменники у формулі (α) дорівнюють 0, а чисельники не дорівнюють 0, то прямі перетинаються в нескінченності і, отже, паралельні.

$$\text{III. } \delta = 0, \delta_x = 0, \text{ то тоді і } \delta_y = 0.$$

$$\text{Отримаємо } \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda.$$

Це означає, що якщо ввести коефіцієнт пропорційності λ , то

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

$$\text{Тоді } L_1 : \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

$$L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Легко бачити, що кожна точка, координати якої задовольняють рівняння однієї прямої, також задовольняють і рівняння другої, тобто прямі співпадають: $L_1 = L_2$.

Висновок: ми отримали необхідну і достатню умову *паралельності* двох прямих, заданих загальними рівняннями

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (3.10)$$

Запишемо необхідну і достатню умову паралельності прямих, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом. Нехай

$$L_1 : y = k_1 \cdot x + b_1 \text{ або } k_1 \cdot x - y + b_1 = 0 \text{ і } L_2 : y = k_2 \cdot x + b_2 \text{ або } k_2 \cdot x - y + b_2 = 0$$

Умова (3.8) набере вигляду $\frac{k_1}{k_2} = \frac{-1}{-1} = 1$, тобто

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad (3.11)$$

Приклад. Через точку $(1; -1)$ провести пряму, паралельну прямій

$$3x - 5y + 7 = 0.$$

Розв'язання. Шукаємо рівняння прямої у вигляді $Ax + By + C = 0$.

І спосіб

Невідомі три числа A, B, C . Для їх відшукування існує дві умови! Тому ми, по суті справи, знаходимо не самі числа, а тільки їх відношення.

Використавши умову паралельності прямих, запишемо: $\frac{A}{3} = \frac{B}{-5}$ звідки

$$-5A = 3B; \text{ або } A = -\frac{3}{5}B.$$

Оскільки задана точка належить шуканій прямій, то її координати задовольняють рівняння $A - B + C = 0$; $-\frac{3}{5}B - B \neq -C$; звідки $C = \frac{8}{5}B$.

Отримуємо рівняння $-\frac{3}{5}B \cdot x + By + \frac{8}{5}B = 0$, або $3x - 5y - 8 = 0$.

Зауваження. Бачимо, що відповідні коефіцієнти при змінних у рівняннях паралельних прямих однакові, то надалі записувати рівняння прямої,

паралельної даній, будемо у вигляді $Ax + By + C = 0$, де C знайдемо з умови, що шукана пряма проходить через дану точку. Звідси отримаємо другий спосіб розв'язування задачі.

II спосіб

$$\text{Рівняння прямої записуємо у вигляді } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3.12)$$

3.1.8 Пучок прямих

Пучком прямих називається сукупність прямих, які проходять через одну і ту ж точку площини, яка називається *центром пучка* (рис. 3.7).

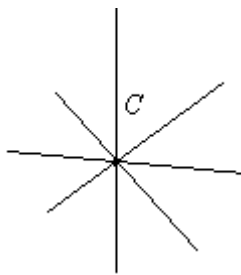


Рис. 3.7

Пучок прямих можна задавати різними способами:

- 1) *координатами центра*

Нехай точка $C(x_0, y_0)$ - центр пучка. Скласти його

рівняння.

- а) Будемо шукати у вигляді загального рівняння (3.8): $Ax + By + C = 0$.

Так як всі прямі проходять через центр, то координати центра задовольняють рівняння $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Віднявши від першого рівняння друге отримаємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3.13)$$

(3.13) є *рівнянням пучка* прямих з центром у точці C .

Дійсно, це рівняння лінійне, воно задає пряму при довільних A і B одночасно не рівних 0 . Кожна з цих прямих проходить через точку (x_0, y_0) .

- б) Будемо шукати рівняння пучка у вигляді $y = k \cdot x + b$.

Всі прямі проходять через центр пучка, а координати центра задовольняють рівняння $y_0 = k \cdot x_0 + b$, то віднявши рівняння отримаємо рівняння пучка:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.14)$$

- 2) Пучок заданий *перетином двох прямих* (рис.3.8)

Зрозуміло, що можна було б розв'язати систему рівнянь і знайти центр, і скористатися рівнянням (3.12) або (3.13). Але цього не варто робити.

Можемо записати рівняння пучка у вигляді

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 + \lambda(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0 \quad (3.15)$$

або, в особливих випадках,

$$\alpha_1 \cdot (A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1) + \alpha_2 \cdot (A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2) = 0.$$

Дійсно, при будь-якому λ це рівняння першого степеня, а, отже, задає пряму. Точка перетину прямих задовольняє це рівняння. Змінюючи λ будемо отримувати різні рівняння пучка.

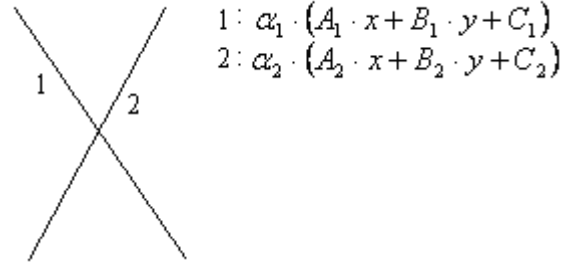


Рис.3.8

При $\lambda = 0$ матимемо першу пряму. при $\alpha_1 = 0$ другу пряму (або при $\lambda = \infty$). Отже, (3.12) пучок прямих, які проходять через точку перетину двох даних прямих.

Приклад. Через точку перетину прямих $L_1: 38x - 42y + 164 = 0$ та

$L_2: 21x + 71y + 128 = 0$ провести пряму, паралельну осі Ox .

Розв'язання. Рівняння шукаємо у вигляді пучка

$$38x - 42y + 164 + \lambda(21x + 71y + 128) = 0.$$

Так як пряма паралельна осі Ox , то $A = 0$, тобто $38 + 21\lambda = A = 0$.

Звідки, $\lambda = -\frac{38}{21}$.

Підставимо λ у рівняння шуканої прямої і отримаємо:

$$38x - 42y + 164 + \left(-\frac{38}{21}\right) \cdot 21x - \frac{38}{21} \cdot 71y - \frac{38}{21} \cdot 128 = 0;$$

$$-170\frac{10}{21}y - 67\frac{13}{21} = 0, \text{ або } 1700x + 871 = 0.$$

3.1.9 Геометричний зміст лінійної нерівності

Теорема 3.2. Геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють лінійну нерівність виду $Ax + By + C > 0$ (або $Ax + By + C < 0$),

де A і B одночасно не рівні нулю, є одна із півплощин, на які відповідна пряма $L: Ax + By + C = 0$ розбиває площину.

Перш, ніж перейти до доведення теореми, сформулюємо і доведемо лему. Введемо позначення $\delta_{M(x_0, y_0)} = Ax_0 + By_0 + C$ - результат підстановки у рівняння прямої (для будь-якої δ) координат даної точки.

$\delta_{M(x_0, y_0)}$ називається відхиленням точки M_0 від прямої L .

Лема 3.2. Для того, щоб дві точки M_1 і M_2 лежали по різні боки відносно прямої $L: Ax + By + C = 0$, необхідно і достатньо, щоб відхилення цих точок мали різні знаки, тобто $\delta_{M_1} \cdot \delta_{M_2} < 0$.

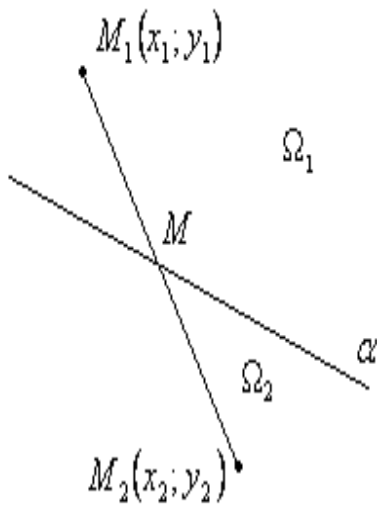


Рис.3.9

Доведення. Необхідність. Нехай точки M_1 і M_2 лежать по різні боки від прямої (рис.3.9), тоді точка перетину M прямої із відрізком, ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda > 0$.

Ми знаємо, що координати цієї точки M обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$$

Точка M належить прямій L , отже її координати задовольняють рівняння прямої:

$$A \cdot \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} + B \cdot \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} + C = 0.$$

Звідси:

$$\delta_{M_1} + \lambda \cdot \delta_{M_2} = 0, \text{ тобто } \lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}} > 0.$$

Достатність. Нехай $-\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}} > 0$. Доведемо, що задані точки M_1 і M_2 по різні боки відносно прямої.

Покладемо число $\lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}} > 0$.

Побудуємо точку $M\left(\frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}; \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}\right)$ і доведемо, що її координати задовольняють рівняння прямої. Так як $\lambda > 0$, то вона між точками M_1 і M_2 .

Отже,

$$A \cdot \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} + B \cdot \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} + C = 0;$$

$$\frac{\delta \cdot x_1 + \lambda \cdot \delta x_2}{1 + \lambda} = \frac{\delta \cdot x_1 - \frac{\delta \cdot x_1}{\delta \cdot x_2} \delta \cdot x_2}{1 + \lambda}$$

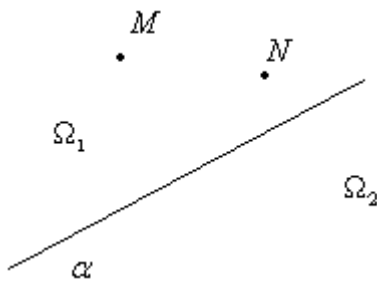


Рис.3.10

Доведемо тепер теорему.

Пряма L розбиває площину на дві півплощини – це аксіома. Для означеності розглянемо нерівність $Ax + By + C > 0$ і нехай $A \neq 0$. Побудуємо точку, координати якої задовольняють цю нерівність.

Наприклад, точка $M\left(\frac{-C}{A} + A; 0\right)$.

Знайдемо її відхилення $\delta_M = A\left(\frac{-C}{A} + A\right) + B \cdot 0 + C = A^2 > 0$.

Нехай для означеності точка $M \in \Omega_1$ (рис.3.10). Стверджуємо, що для всіх точок цієї півплощини $Ax + By + C > 0$. Дійсно, нехай для точки $N \in \Omega$ маємо $\delta_N < 0$. Тоді за лемою 3, так як $\delta_M > 0$, то $N \in \Omega_2$. Отримали суперечність.

3.2 Пряма у прямокутній декартовій системі координат

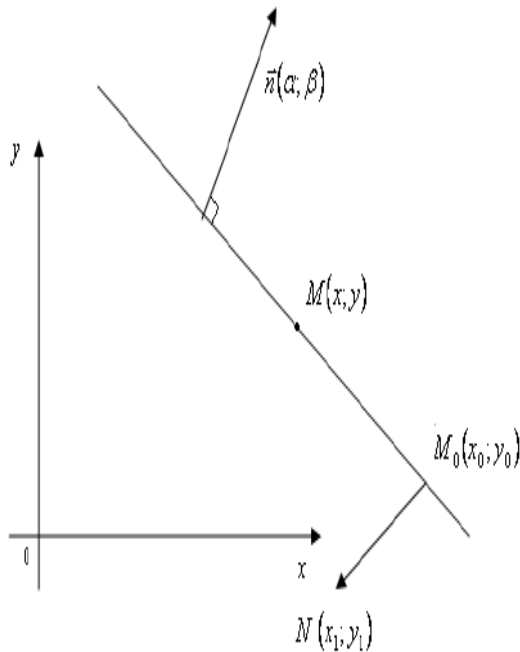
3.2.1 Пряма задана нормальним вектором і точкою

Пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(\alpha; \beta)$. Записати рівняння прямої у прямокутній декартовій системі координат.

Задана пряма у декартовій системі координат (рис.3.11). За алгоритмом розв'язування задач на складання рівнянь, візьмемо біжучу точку $M(x, y)$ і запишемо основне співвідношення:

$$\vec{n} \perp \alpha \text{ тоді } \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \text{ тобто } \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\text{У координатах це записується так: } \alpha \cdot (x - x_0) + \beta \cdot (y - y_0) = 0 \quad (3.13)$$



Отримане рівняння називається *рівнянням прямої, заданої нормальним вектором і точкою*.

Доведемо, що для довільної точки $N(x_1, y_1) \notin \alpha$, координати не задовольняють рівняння (3.13).

Дійсно, вектор $\overrightarrow{M_0N}$ не перпендикулярний вектору $\vec{n}$, тобто $\alpha \cdot (x - x_0) + \beta \cdot (y - y_0) \neq 0$.

Це означає, що рівняння (3.13) задає ті і лише ті точки, які належать даній

прямій..

Рис. 3.11

Приклад. Записати рівняння прямої, на якій лежить висота CH трикутника ABC , заданого координати вершин: $A(1;1)$, $B(3;-2)$, $C(4;7)$.

Розв'язання. Пряма $CH \perp AB$ (рис.3.12),

тобто вектор $\overrightarrow{AB}(2;-3)$ є вектором нормалі прямої, що містить сторону AB . Так як CH

проходить через точку C , то, скориставшись

рівнянням (3.11), матимемо $2 \cdot (x - 4) - 3 \cdot (y - 7) = 0$, тобто $2x - 3y + 13 = 0$.

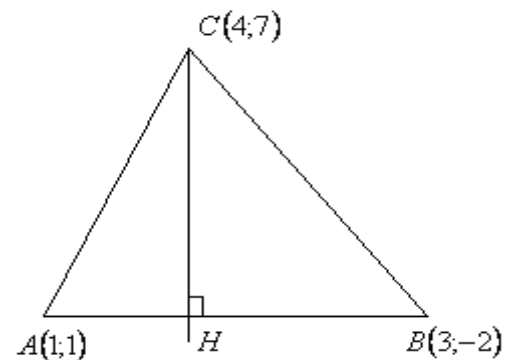


Рис.3.12

3.2.2 Геометричний зміст коефіцієнтів при змінних у загальному рівнянні прямої

Теорема 3.3. У рівнянні $L: Ax + By + C = 0$ вектор $\vec{n}(A; B)$ є вектором нормалі до прямої L .

Доведення. Нехай точки A і B дві довільні точки прямої L .

Їх координати задовольняють рівняння цієї прямої, тобто

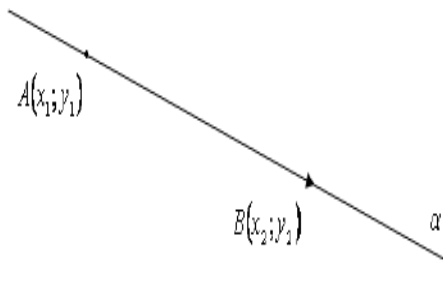


Рис. 3.13

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \quad \text{і} \quad Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Віднявши ці два рівняння отримаємо:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$$

Розглянемо вектор $\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ і вектор $\vec{n}(A; B)$.

З отриманого результату стверджуємо, що $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$.

Отже, $\vec{n} \perp L$ так як точки A і B довільні точки прямої L .

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $K(1; -2)$, перпендикулярно до прямої $L: 5x - 4y + 7 = 0$.

Розв'язання.

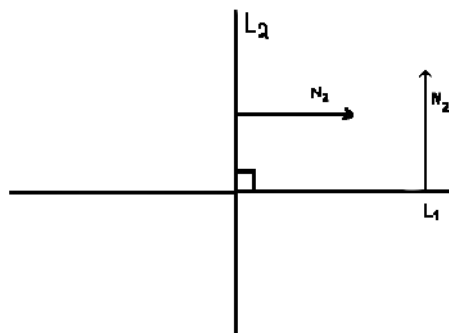


Рис. 3.14

I спосіб.

Шукаємо пряму $L_1 \perp L$ (рис. 3.14). Тоді вектор нормалі $\vec{n}(5; -4)$ заданої прямої

є напрямним для шуканої. Рівняння L_1 можемо записати як (3.1): $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-4}$.

Звідки $L_1: 4x + 5y + 6 = 0$

II спосіб

Напрямний вектор $\vec{p}(4;5)$ даної прямої є вектором нормалі шуканої прямої.

Тоді рівняння прямої L_1 можемо записати у вигляді (3.13):

$$4(x-1)+5(y+2)=0 \text{ або } 4x+5y+6=0.$$

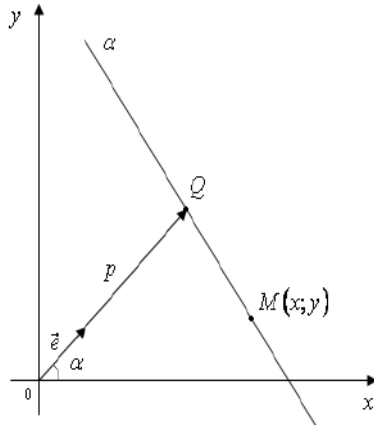


Рис. 3.15

3.2.3 Нормальне рівняння прямої

Пряма задана відстанню від початку координат

$\rho(0;L)=p$ (рис.3.15), причому, перпендикуляр до прямої утворює з додатним напрямком осі абсцис кут α .

Записати рівняння прямої.

Візьмемо біжучу точку $M(x, y)$ - на прямій.

Скористаємося рівнянням (3.15). Для цього

треба мати точку $M_0 = Q(p \cdot \cos \alpha; p \cdot \sin \alpha)$ і вектор

нормалі $\vec{n} = \vec{e}$. У його ролі візьмемо орт $\vec{e}(\sin \alpha; \cos \alpha)$.

За (3.15) запишемо:

$$\cos \alpha (x - p \cdot \cos \alpha) + \sin \alpha (y - p \cdot \sin \alpha) = 0 \text{ або } x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 0$$

Отримане рівняння

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0 \quad (3.16)$$

називається *нормальним рівнянням прямої*.

Зауваження.

1. Сума квадратів коефіцієнтів при змінних

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = A^2 + B^2 = 1$$

2. Вільний член завжди від'ємний $-p < 0$, де $p = \rho(0; \alpha)$.

3.2.4 Нормування загального рівняння прямої

Нехай задана пряма $L : Ax + By + C = 0$. Пронормуємо рівняння.

Помножимо обидві частини рівняння на поки що довільний множник

$N \neq 0$. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$ANx + BNy + CN = 0$$

Щоб воно було нормальним, необхідно, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} A^2 N^2 + B^2 N^2 = 1 \\ CN < 0 \end{cases},$$

звідси

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (3.17)$$

де знак перед радикалом береться протилежним знаку вільного члена.

Число N називається *нормуючим множником*, а рівняння

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \quad (3.18)$$

де знак перед радикалом протилежний знаку вільного члена C , називається *нормованим рівнянням прямої*.

Приклад. Записати нормоване рівняння прямої $3x+4y+7=0$.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник $N = \frac{1}{-\sqrt{3^2 + 4^2}}$ і запишемо

нормоване рівняння прямої

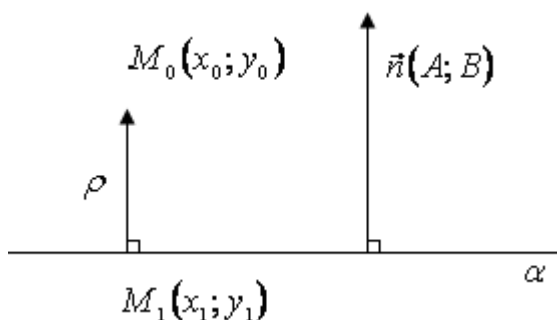
$$\frac{3}{-\sqrt{9+16}} \cdot x - \frac{4}{-\sqrt{25}} \cdot y + \frac{7}{-\sqrt{25}} = 0; \text{ або } -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0 \text{ за рівнянням (3.18).}$$

$$\text{Звідки } \cos \alpha = -\frac{3}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad \rho(0; \alpha) = \frac{7}{5}$$

3.2.5 Відстань від точки до прямої

Теорема 3.4. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $L: Ax + By + C = 0$

обчислюється за формулою:
$$\rho(M_0; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.19)$$



Доведення. Відстань від точки M_0 до прямої L – це довжина перпендикуляра проведеного з точки M_0 до прямої, тобто довжина відрізка M_1M_0 (рис. 3.16)

Розглянемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1; y_0 - y_1) \text{ і}$$

Рис. 3.16

$\vec{n}(A; B)$ та обчислимо їх скалярний добуток двома способами:

1) Оскільки $\overrightarrow{M_1M_0} \parallel \vec{n}$, то за означенням $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = (\pm 1) |\rho| \cdot |\vec{n}|$.

2) У координатах:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1).$$

Прирівнявши отримані значення матимемо

$$|\vec{n}| \cdot |\rho| \cdot (\pm 1) = Ax_0 + By_0 + C - Ax_1 - By_1 - C.$$

Оскільки точка $M_1 \in L$, то $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$, тоді $|\vec{n}| \cdot \rho(\pm 1) = Ax_0 + By_0 + C$.

$$\text{Звідси} \quad \rho = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (*)$$

Так як ρ додатне, то отримаємо формулу (3.19).

Повернемося до формули (*). У правій частині цієї формули маємо

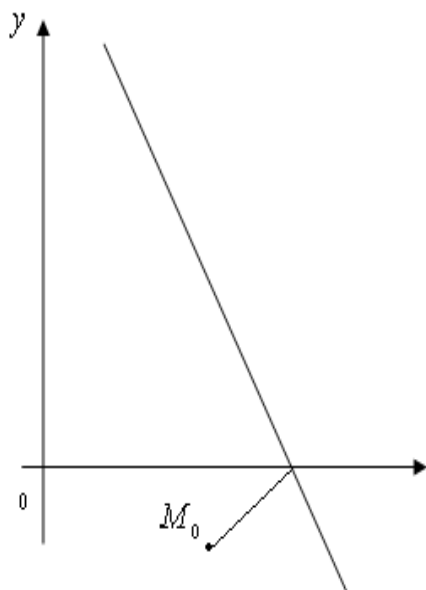


Рис. 3.17

результат підстановки у нормоване рівняння прямої замість біжучих координат x і y координат тієї точки, від якої шукається відстань до прямої, а таке число позначаємо δ_{M_0} :

$$\delta_{M_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак перед радикалом протилежний вільному члену. Це число називається *відхиленням точки M_0 від прямої L* . Якщо $\delta_{M_0} > 0$, то $\delta_{M_0} = \rho$.

Вияснимо зміст формули (*).

Якщо точка M_0 і початок координат розміщені по один бік від прямої (рис.3.17), то $\delta_{M_0} = \delta_{(0;0)} = C$. У формулі (*). знак протилежний C , знаку вільного члена, тому $\delta_{M_0} < 0$. Отже, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від прямої, то відхилення цієї точки від прямої від'ємне, якщо ж по різні - то додатне.

3.2.6 Кут між двома прямими

Якщо прямі задані загальними рівняннями

$$L_1: A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$$

$$L_2: A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0,$$

то кут між прямими можна знайти як кут між їх напрямними векторами

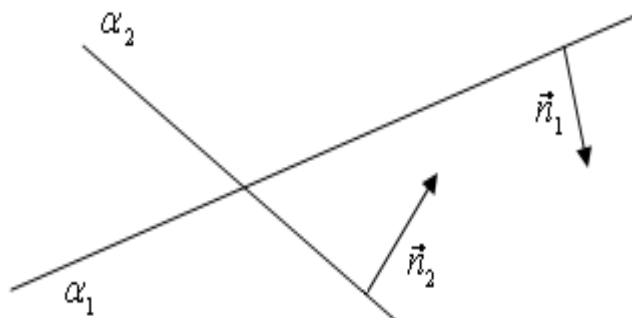


Рис.3.18

$\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$, де $\vec{p}_1(-B_1; A_1)$, $\vec{p}_2(-B_2; A_2)$, або між векторами їх нормалей $n_1(A_1; B_1)$, $n_2(A_2; B_2)$ (рис.3.18).

Нехай прямі задані рівняннями у вигляді з кутовими коефіцієнтами,

тобто

$$L_1: y = k_1 \cdot x + b_1$$

$$L_2: y = k_2 \cdot x + b_2, \text{ де } k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

За теоремою: зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох його внутрішніх кутів, не суміжних з ним (рис.3.19), тобто

$$\alpha_2 = \theta + \alpha_1 \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1, \text{ звідки}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\text{і } \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

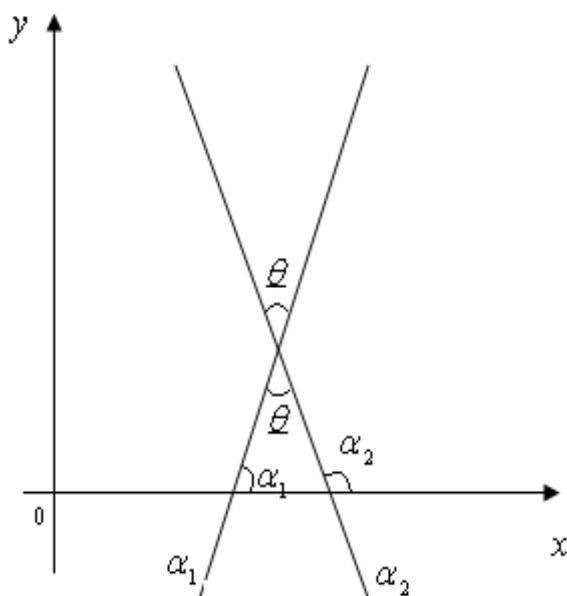


Рис. 3.19

$$\text{Остаточно: } \operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (3.20)$$

Варто зауважити, що ця формула дає два суміжні кути.

Приклад. Знайти кут між прямими $L: y = 2x - 1$ та $L: y = 5x - 7$

Розв'язання. За формулою (3.20)

Тоді $\theta = \operatorname{arctg} \frac{3}{11}$.

Теорема 3.5 Для того, щоб дві прямі L_1 і L_2 , задані загальними рівняннями були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

якщо прямі L_1 і L_2 , задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами, то

Доведення. 1) Нехай прямі задані загальними рівняннями, тоді $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, де, $\vec{n}_1(A_1;B_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2)$, і, отже, скалярний добуток $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ дорівнює 0.

2) Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, тоді, так як $L_1 \perp L_2; \theta = 90^\circ$, і $tg \theta = \infty$. Знаменник формули (3.22) дорівнює 0, тобто $1 + k_1 k_2 = 0$, звідки $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ і навпаки.

3.2.8 Рівняння бісектриси кута між прямими

Нехай дві прямі $L_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ та $L_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$ перетинаються. Щоб отримати рівняння бісектриси кута, який вони утворюють, потрібно їх рівняння пронормувати і додати ліві частини, коли початок координат не належить куту, та відняти, коли належить.

Дійсно нехай m_1 бісектриса кута, утвореного прямими L_1 і L_2 (рис. 3.20). Із шкільного курсу відомо: бісектриса – геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута.

Запишемо рівняння бісектриси за алгоритмом розв’язування задач на складання рівнянь. Нехай $M(x; y) \in m_1$ – біжуча точка бісектриси кута. Тоді основне співвідношення: $MN_1 = MN_2$. Запишемо його у координатах. За формулою (3.19):

$$\frac{|A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Розкривши модуль, отримаємо два рівняння :

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \quad (3.23)$$

Отримане рівняння задає дві бісектриси m_1 та m_2 .

Повернемось до поняття «відхилення точки від прямої - δ ».

Якщо m_1 не належить куту, в якому лежить початок координат, то відхилення точок прямої m_1 від прямої L_1 $\delta < 0$, від L_2 відхилення $\delta > 0$.

Маємо $\delta_M^{L_1} = -\delta_M^{L_2} \Leftrightarrow \delta_M^{L_1} + \delta_M^{L_2} = 0$

Аналогічно для m_2 . $\delta_M^{L_1} = -\delta_M^{L_2}$.

Приклад. Знайти відхилення точок $M_1(2;0)$ та $M_2(1;3)$ від прямої $L: 2x + y - 2 = 0$ Чи розміщені точки по один бік від прямої?

Розв’язання. Знайдемо відхилення точок від даної прямої:

$$\delta_{M_1} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 - 2 > 0;$$

$$\delta_{M_2} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 > 0.$$

Так як відхилення однакових знаків, то точки розміщені по один бік від прямої.

Розділ IV. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

4.1 Канонічні рівняння ліній другого порядку на площині

Ми знаємо деякі лінії другого порядку. А саме:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ - коло,}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0, \quad x + y = 0 \text{ - бісектриси координатних кутів,}$$

$$x^2 - a^2 = 0 \text{ - пара паралельних прямих : } x - a = 0, \quad x + a = 0.$$

Надалі розглянемо канонічні рівняння найпростіших ліній другого порядку на площині.

4.1.1 Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох фіксованих точок цієї площини (фокусів) є величина стала рівна $2a$.

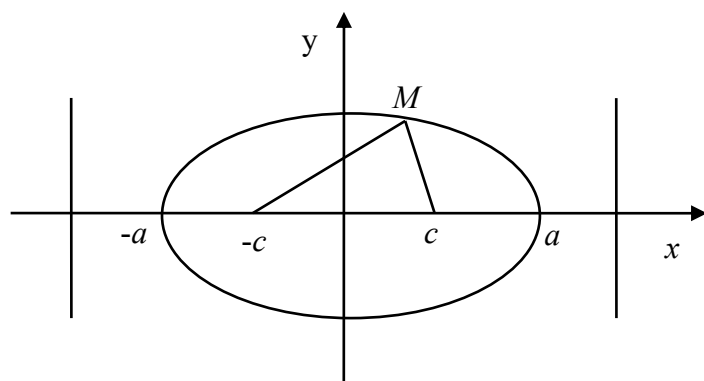


Рис. 4.1

$2a > 2c$, де $2c$ – міжфокусна відстань.

Виведемо рівняння еліпса.

1) Систему координат виберемо так, щоб вісь ox проходила через дві дані точки F_1 та F_2 (фокуси), а oy – серединний перпендикуляр до відрізка F_1F_2 (рис. 4.1).

Відстань між точками F_1 та F_2 , називається *міжфокусною відстанню*.

Відстані від довільної точки еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки і позначаються $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$.

2) Нехай $M(x;y)$ – біжуча точка еліпса.

3) Позначимо суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів $2a$, причому $2a > 2c$. Так як за означенням еліпса $MF_1 + MF_2 = \text{const}$, то $MF_1 + MF_2 = 2a$.

3) Запишемо це співвідношення в координатах:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

4) Виконавши перетворення, запишемо отриману рівність у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо обидві частини до квадрату

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Звідси $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$.

Піднісши обидві частини до квадрату, отримаємо:

$$a^2 + x^2 + a^2 y^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2.$$
 Звідки

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$
 Враховуючи, що $a > 0$ $a > c$, маємо $a^2 - c^2 > 0$.

Введемо позначення $a^2 - c^2 = b^2$ (4.1)

Тоді отримане рівняння набере вигляду $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Поділимо обидві частини рівняння на $a^2 \cdot b^2$ і отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.2)$$

рівняння еліпса

Ми показали, що коли точка M пробігає еліпс, то її координати задовольняють рівняння (3.2). Виникає питання, а чи не існують точки, що задовольняють (3.2), але еліпсу не належать. Доведемо, що це не так.

Нехай координати точки $N(x_1; y_1)$ задовольняють рівняння (4.2), тобто

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (\alpha)$$

Доведемо, що вона належить еліпсу, тобто має властивість, вказану в означенні еліпса: $NF_1 + NF_2 = 2a$.

NF_1 - це фокальний радіус точки $N(x_1; y_1)$:

$$r_1 = NF_1 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} . R_1 = NF_1 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$$

Знайдемо y_1^2 з формули (α) :

$$y_1^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

і підставимо його значення в r_1 :

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + 2x_1c + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 + 2x_1c + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_1\right)^2 + 2x_1c + a^2} =$$

$$\sqrt{\left(a + \frac{c}{a} x_1\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a} x_1\right|.$$

$$\text{Отже } r_1 = \left|a + \frac{c}{a} x_1\right|.$$

$$\text{Аналогічно: } r_2 = \left|a - \frac{c}{a} x_1\right| \quad (\beta)$$

$$\text{З формули } (\alpha) \text{ маємо } \frac{y_1^2}{b^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} > 0 \Leftrightarrow x_1^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x_1| \leq a$$

- Якщо $x_1 > 0$, то $r_1 = a + \frac{c}{a} x_1$,

- Якщо $x_1 < 0$, $|x_1| \leq a$, то $r_1 = a - \frac{c}{a} x_1$, тоді $r_1 + r_2 = 2a$.

Отже, для будь якої точки $M(x; y)$ знаходимо фокальні радіуси

$$\begin{cases} r_1 = a + \frac{c}{a} x_1, \\ r_2 = a - \frac{c}{a} x_1 \end{cases} \quad (\gamma)$$

4.1.2 Властивості еліпса

1. Еліпс лінія другого порядку.

2. Ми показали, що $|x| \leq a$, аналогічно $|y| \leq b$.

Це означає, що весь еліпс знаходиться в середині прямокутника із центром у початку координат із сторонами $2a$ і $2b$ (рис.4.2)

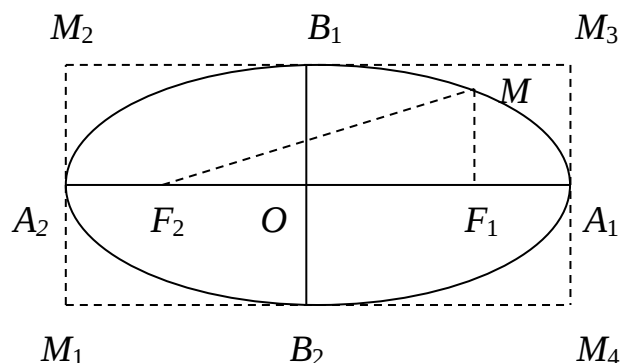


Рис. 4.2

3. Координати точок $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ задовольняють рівняння (4.2) і, отже, належать еліпсу. Вони називаються *вершинами* еліпса або *точками заокруглення* еліпса. Відрізок: $2a$ – називається *великою* віссю еліпса, $2b$ – відрізок *малою* віссю. Відповідно a , b – півосі.

4. *Симетрія*. Еліпс має дві осі симетрії (в канонічній системі координат – це осі координат), один центр симетрії (в канонічній системі – це початок координат).

Дійсно. Нехай точка $N(x_0; y_0)$ належить еліпсу, тобто її координати задовольняють рівняння (4.2), тоді і координати точки $N_1(-x_1; y_0)$ також задовольняють (4.2) і, отже, належить еліпсу. Це означає, що вісь oy є віссю симетрії. Координати точки $N_2(x_1; -y_0)$ також задовольняють рівняння (4.2) і, отже, ця точка належить еліпсу. Тоді Ox – вісь симетрії. Точка $N_3(-x_1; -y_0)$ також належить еліпсу, а це означає, що точка $O(0;0)$ – центр симетрії еліпса. Проведені міркування справедливі для довільної точки N еліпса.

5. *Форма еліпса*. Так як еліпс симетричний відносно осей і початку координат, то достатньо вивести форму еліпса лише у першій координатній чверті і відобразити симетрично відносно координатних осей.

Отже, нехай $x > 0$ $y > 0$, тоді $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ Ми довели, що $x \leq a$.

Дослідження: Якщо $x = 0$, то $y = b$ і отримаємо точку $B(0;b)$. Нехай тепер x зростає від 0 до a , тоді y спадає від b до 0. Якщо $x = a$, то $y = 0$, отримаємо точку $A(a;0)$

6. Ексцентриситет

Ексцентриситетом еліпса називається відношення міжфокусної відстані до великої осі.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (4.3)$$

Який же геометричний зміст ε ?

З формули $c^2 = a^2 - b^2$ маємо $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тоді $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

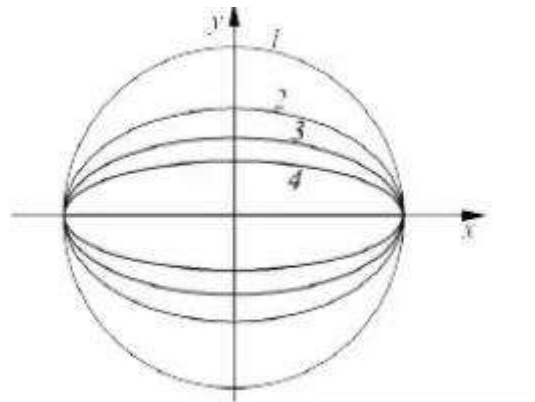


Рис.4.3

Дослідження. Нехай $a = b$, тобто еліпс є колом радіуса a з центром в початку координат. Тобто $\varepsilon = 0$ для кола. Нехай b – спадає, а a – стале, при цьому ε зменшується від 0 до 1. Отже, для еліпса

$$0 \leq \varepsilon < 1 \quad (4.4)$$

Висновок: ε показує ступінь стиснутості еліпса до великої осі. Чим більше значення ε , тим більше стиснутий еліпс (рис.4.3).

7. Фокальні радіуси точок еліпса

Фокальні радіуси обчислюються за формулою (γ) , якщо в ній замість

$\frac{c}{a}$ відношення $\frac{c}{a}$ підставити ε , то отримаємо:

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{cases} \quad (4.5)$$

8. *Директрисами* еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні до великої (фокальної) осі його і розміщені симетрично відносно малої осі на

відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від неї (рис.4.4). Рівняння директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. Оскільки для еліпса

$\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$, тобто директриси ніколи не перетинають еліпс.



Рис.4.4

9. Дотична до еліпса

Нагадаємо, що *дотичною до кривої γ в точці M_0* називається граничне положення січної M_0M , коли точка M по кривій прямує до точки M_0 .

Теорема 4.1. Дотична до еліпса $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у його точці $M_0(x_0; y_0)$, має рівняння.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (4.6)$$

Доведення. Нехай дотична $\mathcal{L}$, проведена в точці $M_0(x_0; y_0)$ еліпса. Будемо шукати її у вигляді пучка: $y - y_0 = k(x - x_0)$,

де $k = \lim_{M \rightarrow M_0} k_{\text{січної}}.$

Рівняння січної запишемо за двома точками M_0 та M :

$$M_0 M : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow (x - x_0)(y - y_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0),$$

де $k_{\text{січної}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$

Скористаємося тим, що точка M прямує до точки M_0 вздовж еліпса, тобто в кожному її положенні координати задовольняють рівнянню еліпса. Будемо мати

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге отримаємо: $\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} = 0$
або $b^2(x_1^2 - x_0^2) = -a^2(y_1^2 - y_0^2), b^2(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = -a^2(y_1 - y_0)(y_1 + y_0).$

Звідки $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{b^2(x_1 + x_0)}{a^2(y_1 + y_0)}.$

Тоді $k = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_0 \\ y_1 \rightarrow y_0}} \left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$

Підставимо це значення у рівняння пучка шуканої дотичної:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \quad \text{звідси} \quad y_0 a^2 (y - y_0) = -b^2 x_0 (x - x_0)$$

$$a^2 y y_0 - a^2 y_0^2 = -b^2 x x_0 + b^2 x_0^2; \quad a^2 y y_0 + b^2 y^2 = b^2 x_0^2 + a^2 x_0^2.$$

Поділимо на $a^2 \cdot b^2$ обидві частини рівняння, отримаємо :

$$\frac{y \cdot y_0}{b^2} + \frac{x \cdot x_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Оскільки $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, то отримуємо рівняння $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ (4.6) – рівняння дотичної.

Теорема доведена.

Перпендикуляр, проведений до дотичної в точці дотику M_0 називається нормаллю до еліпса в точці M_0 .

10. Оптична властивість еліпса

Теорема 4.2. Якщо в одному із фокусів еліпса помістити джерело світла, то промені, відбившись від поверхні еліпса, зберуться у другому фокусі (рис.4.5).

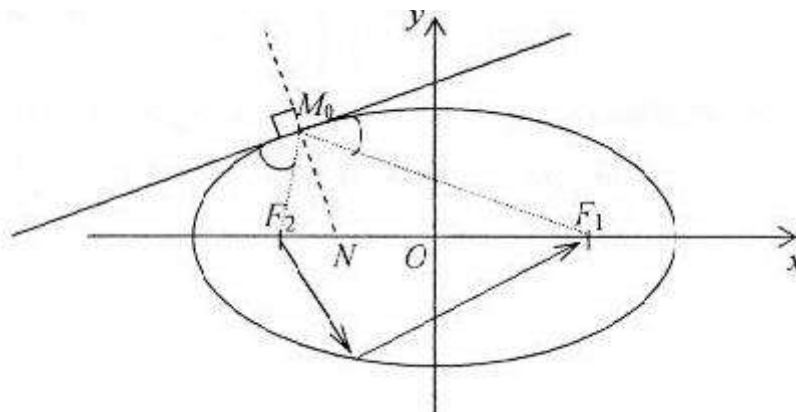


Рис. 4.5

Перш, ніж перейти до доведення теореми, сформулюємо і доведемо лему.

Лема 4.1. Дотична, проведена в точці M_0 еліпса утворює рівні кути з фокальними радіусами, проведеними в цю точку (рис.4.6).

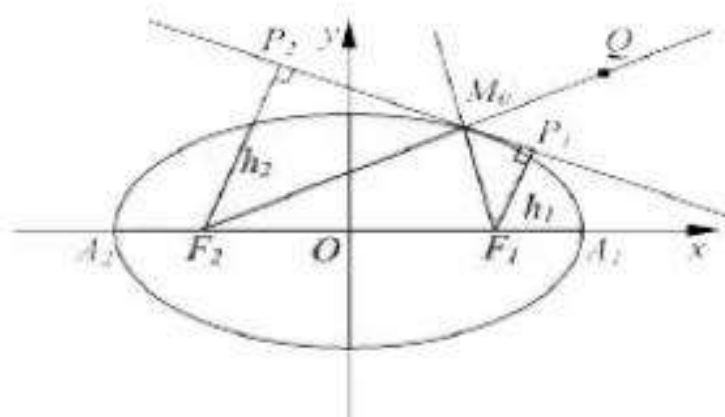


Рис. 4.6

Доведення. З фокусів опустимо перпендикуляри на дотичну $F_1H_1 \perp \mathcal{L}$ та $F_2H_2 \perp \mathcal{L}$ (рис.4.6). Доведемо, що $\Delta F_1P_1M_0$ і $\Delta F_2P_2M_0$ подібні.

Так як вони прямокутні, то достатньо довести рівність відношень одного з катетів та гіпотенузи цих трикутників, тобто $\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

r_1 і r_2 обчислюємо за формулами (4.5), тому

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a + \varepsilon x}{a - \varepsilon x} \quad (*)$$

Катети F_1P_1 і F_2P_2 обчислимо як відстані від фокусів до дотичної $\mathcal{L}$:

$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ за формулами відстані від точки до прямої. Тоді

$$F_1H_1 = \frac{\left| -\frac{x_0 \cdot c}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} =$$

$$\frac{\left| -\frac{x_0 \cdot c}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = \frac{\left| -\frac{c}{a} x_0 - a \right|}{a \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + \varepsilon \cdot x_0}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}$$

$$F_2H_2 = \frac{a - \varepsilon \cdot x_0}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}.$$

Аналогічно

З отриманих співвідношень маємо: $\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{a + \varepsilon x}{a - \varepsilon x}$. Враховуючи

формулу (*) отримаємо доведення леми.

Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

Перейдемо до доведення теорему. Проведемо нормаль у точці дотику (рис.4.5). За лемою 4.1 $\angle 1 = \angle 2$ і, отже, $\angle 3 = \angle 4$. Кут 3 називається *кутом падіння*, а $\angle 4$ - *кутом відбивання*, якщо джерело світла помістити в фокусі F_1 .

Теорема доведена.

Директрисами еліпса називаються прямі, паралельні до його малої осі і

розміщені на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ по обидва боки від неї.

Директриси еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ мають рівняння $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. Вони еліпса не

перетинають, оскільки $a > 0$, бо $x = \frac{a^2}{c} > a$.

Виведемо параметричне рівняння еліпса

Введемо параметр t - кут який утворює промінь OA з додатним напрямком осі OX .

з $\triangle OAK : OK = x_m = a \cdot \cos t$, з $\triangle OBN : BN = MK = y_m = b \cdot \cos t$, тобто

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (**)$$

Підставивши ці значення у канонічне рівняння еліпса, отримаємо правильну числову рівність, тобто координати точки M задовольняють рівняння. Отже, точка M належить еліпсу.

Зауваження. Рівняння $(**)$ називають *параметричним рівнянням еліпса*.

4.1.3 Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох фіксованих точок (фокусів), є величина стала (ця величина менша від відстані між даними точками).

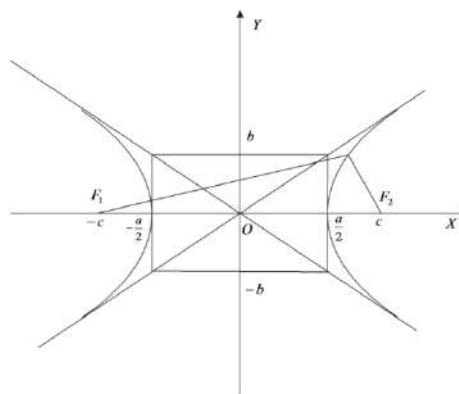


Рис.4.7

Виведемо рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.7)$$

де $c^2 - a^2 = b^2$ або $a^2 + b^2 = c^2$

1) Виберемо доцільно систему координат: вісь ox проведемо через фокуси, а oy – серединний перпендикуляр (рис.4.7).

2) Візьмемо біжучу точку $M(x;y)$ гіперболи.

3) Запишемо основне співвідношення

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

4) Це співвідношення у координатах має вигляд:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad \text{або} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

5) Виконаємо необхідні перетворення та спрощення, піднісши на початку до квадрату обидві частини рівності $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \end{aligned}$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{Звідки } \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини отриманого рівняння

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2ca^2x + a^4$$

та виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2ca^2x + c^2a^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 - 2ca^2x + a^4; \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Так як $a < c$, то $c^2 - a^2 = b^2$, тоді $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Поділивши обидві частини рівняння на a^2b^2 , отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{рівняння гіперболи.}$$

б) Ми довели, що коли точка M пробігає по гіперболі, то її координати задовольняють рівняння (4.7). А чи не існують точки, координати яких задовольняють (4.7), але гіперболі не належать.? Доведемо, що це не так.

Візьмемо довільну точку $N(x_1; y_1)$ і нехай координати точки N задовольняють (4.7), тобто

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Доведемо, що точка N лежить на гіперболі, тобто виконується умова $|NF_1 - NF_2| = 2a$.

Введемо позначення $NF_1 = r_1, NF_2 = r_2$.

Ці відстані називаються *фокальними радіусами* точки N . Обчислимо $r_1 = NF_1 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$.

З формули (4.7) $y_1^2 = b^2(\frac{x_1^2}{a^2} - 1)$ знайдемо y_1^2

і підставимо у вираз для r_1 . Отримаємо

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + 2cx_1 + c^2 + \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - b^2} = \sqrt{(\frac{a^2 + b^2}{a^2})x_1^2 + 2cx_1 + a^2} = \\ &= \sqrt{(\frac{c}{a})^2 x_1^2 + 2cx_1 + a^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x_1)^2} = \left| a + \frac{c}{a}x_1 \right| \end{aligned}$$

Отже,

$$r_1 = \left| a + \frac{c}{a}x_1 \right|$$

Аналогічно

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x_1 \right|$$

Розкриємо модулі.

Оскільки, очевидно, $x_1^2 \geq a^2, |x_1| \geq a$. Тоді:

1) якщо $x_1 > 0$, то $r_1 = a + \frac{c}{a}x_1$

2) якщо $x_1 < 0$, то $r_2 = \frac{c}{a}x_1 - a$. Звідки $r_1 - r_2 = 2a$. Отже, довільно взята точка

$N(x_1; y_1)$ координати якої задовольняють рівняння гіперболи належить їй.

Спряжені гіперболи

Гіпербола, задана рівнянням $\gamma: -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається спряженою з гіперболою $\gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Обидві ці гіперболи мають ті ж самі асимптоти, однакове значення c . Їх фокуси лежать на колі, описаному навколо прямокутника із сторонами $2a$ і $2b$ (рис.4.8)

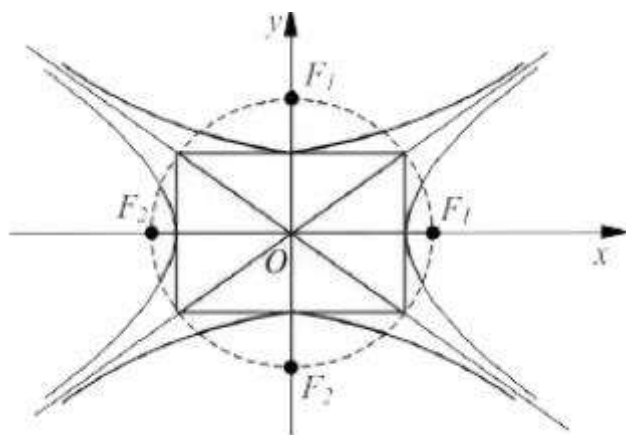


Рис.4.8

Зауваження. Якщо дійсна піввісь гіперболи рівна уявній, тобто $a = b$, то $x^2 - y^2 = a^2$ гіпербола називається **рівносторонньою**.

4.1.4 Властивості гіперболи

1. Гіпербола лінія другого порядку.
2. Для дослідження форми гіперболи розв'яжемо її рівняння у вигляді

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (***)$$

Як бачимо, гіпербола визначена лише для тих значень x , для яких $|x| \geq a$. Для $|x| < a$ значення y уявні. Отже: $-\infty < x < -a; a \leq x < +\infty$

Відносно ж x маємо:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$$

Тобто, гіпербола означена для всіх y .

3. Симетрія

Гіпербола має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії: ox та oy .

Дійсно, кожному значенню x відповідає два значення y , які відрізняються лише знаком, що очевидно з рівняння (***). Так як x в другому степені, то всі точки гіперболи симетричні відносно осі oy . Вісь ox перетинає гіперболу у двох симетричних відносно oy точках $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$. Ці точки, в яких $|x|$ досягає свого мінімуму, називаються *вершинами гіперболи*.

Відрізок A_1A_2 називається *дійсною віссю* гіперболи, параметр a - *дійсна піввісь*. oy - *уявна вісь*, параметр b - *уявна піввісь*. Точки $B_1(0;b)$ і $B_2(0;-b)$ називають *уявними вершинами* еліпса. Осі симетрії перетинаються в *центрі симетрії*. Отже, початок координат є центром симетрії, або просто *центром гіперболи*.

4. Асимптоти

У смугі $-a < x < a$ точок гіперболи не існує, тобто ця смуга розбиває гіперболу на дві частини: ліву і праву, які нескінченні і симетричні відносно осі oy . Якщо $x = \pm a$, то $y = 0$. Коли $|x|$ збільшується, то й $|y|$ необмежено збільшується.

Кожна вітка перетинає ox у вершині гіперболи, яка поділяє вітку на дві симетричні частини відносно осі ox , які при збільшенні $|x|$ необмежено відхиляються від Ox , простягаючись у нескінченність.

При цьому точки гіперболи максимально близько наближаються до точок прямої $y = \pm \frac{b}{a}x$. Такі прямі, до яких необмежено близько наближаються точки кривої при прямуванні x до нескінченності, називаються *асимптотами* кривої, тобто $|y_{\text{гіперболи}} - y_{\text{асимптоти}}| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 4.3. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ має дві асимптоти (рис. 4.9)

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (4.8)$$

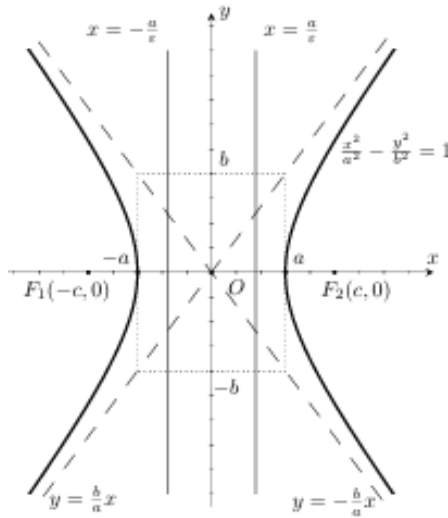


Рис.4.9

Доведення. Оскільки гіпербола симетрична відносно координатних осей, достатньо розглянути тільки першу координатну чверть, коли $x > 0, y > 0$. Через довільну точку $M(x; y)$ гіперболи проведемо пряму, паралельну осі Oy до перетину з прямою $y = \frac{b}{a}x$ в точці $N(x; y_N)$. Нам потрібно показати, що при прямуванні до нескінченності точки гіперболи необмежено близько наближаються до асимптоти, тобто відстань між точками M та N прямує до нуля. Ця відстань визначається ординатами точок M та N .

Для гіперболи, заданої рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, маємо $y_{zin} = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

і для асимптоти $y_{асим} = \frac{b}{a}x$. Легко бачити, що $y_{асим} > y_{zin}$ при одному й тому ж значенні x , і різниця $y_{асим} - y_{zin} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$ є відстанню між точками M і N .

Перейдемо до границі, коли $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \left(\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \rightarrow 0.$$

Отже, відстань між точками гіперболи і прямої $y = \frac{b}{a}x$ прямує до нуля, тобто пряма є асимптотою.

5. Ексцентриситет

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між її фокусами до довжини її дійсної осі.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (4.9)$$

Зауваження: для гіперболи $\varepsilon > 1$, так як $c > a$.

Відношення параметрів $\frac{b}{a}$ гіперболи можна виразити через їх ε за формулою.

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{-(1 - \varepsilon^2)}.$$

Дійсно для гіперболи $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи.

Дійсно, для гіперболи $\varepsilon > 1$. Чим менше ε , тобто чим ближче до 1, тим

менше відношення $\frac{b}{a}$, отже, тим менший той кут між асимптотами гіперболи, всередині якого лежить крива, тобто тим повільніше вона відхиляється від Ох. Для рівносторонньої гіперболи $\varepsilon = \sqrt{2}$. При збільшенні ε швидкість відхилення гіперболи від Ох зростає.

6. Директрисами гіперболи називаються прямі, які перпендикулярні до

дійсної осі гіперболи і знаходяться на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від початку координат (рис.4.10).

Рівняння директрис гіперболи $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ або $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

Директриси гіперболу не перетинають (рис.4.10).

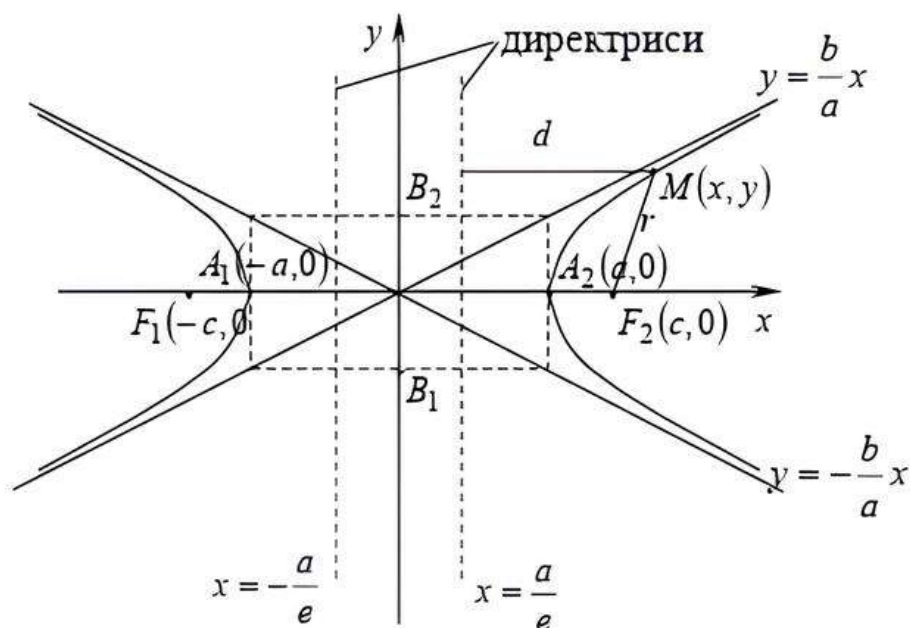


Рис.4.10

Дійсно, гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ відтинає на осі ox відрізки, що дорівнюють

a , ексцентриситет гіперболи більше одиниці, отже, $\frac{a}{\varepsilon} < a$.

Аналогічно $\frac{b}{\varepsilon} < b$.

Теорема 4.5. Відношення довжин фокальних радіусів кожної точки гіперболи до відстаней цієї самої точки гіперболи від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \quad (4.10)$$

7. Фокальні радіуси точок гіперболи

За означенням гіперболи $r_1 - r_2 = 2a$. Крім того $r_1^2 = (x - c)^2 + y^2$,

$r_2^2 = (x + c)^2 + y^2$. Звідки $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$. Отже, $r_1 + r_2 = 2\frac{c}{a}x = 2\varepsilon x$.

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} r_1 - r_2 = 2a, \\ r_1 + r_2 = 2\varepsilon x, \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} r_1 = \varepsilon x - a, \\ r_2 = \varepsilon x + a. \end{cases}$

для тих точок гіперболи, для яких $x > 0$, тобто для правої вітки та для $x < 0$ - лівої вітки $r_1 = -(\varepsilon x - a)$ і $r_2 = -(\varepsilon x + a)$

8. Дотичні до гіперболи

Теорема 4.6. Дотична до гіперболи $\gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0; y_0)$,

яка належить γ , має рівняння.

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \quad (4.11)$$

Доведення. Будемо шукати рівняння дотичної у вигляді пучка прямих

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

де $k = \lim_{M \rightarrow M_0} k_{\text{січної}}$. Рівняння січної запишемо через дві точки M, M_0 :

$$MM_0: \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow (x - x_0)(y_1 - y_0) =$$

$$= (y - y_0)(x_1 - x_0).$$

Запишемо це рівняння з кутовим коефіцієнтом, звідки $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$.

Виходячи з означення дотичної до кривої в точці, знайдемо $k_{\text{дотичної}}$ як границю

$$k_{\text{січної}}, \text{ якщо } M \rightarrow M_0, \text{ тобто } k = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Скористаємося тим, що точка M прямує до точки M_0 вздовж гіперболи, тобто при кожному її положенні координати задовольняють рівняння гіперболи.

$$\text{Отримаємо } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{Віднявши рівняння системи будемо мати:}$$

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} = 0, \text{ тобто } b^2(x_1^2 - x_0^2) = a^2(y_1^2 - y_0^2);$$

$$b^2(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = a^2(y_1 - y_0)(y_1 + y_0),$$

$$\text{або } \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0}.$$

$$\text{Звідки } \kappa = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_0 \\ y_1 \rightarrow y_0}} \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_2 + y_0} \right) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

Підставивши це значення у рівняння пучка, отримаємо:

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0) \quad \text{або} \quad y_0 a^2 (y - y_0) = b^2 x_0 (x - x_0); \quad a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = b^2 x_0 x - b^2 x_0^2;$$

$$a^2 y_0 y - b^2 x_0 x = a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2,$$

поділивши обидві частини на $a^2 b^2$, матимемо

$$\frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2}, \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Оскільки $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, то отримаємо $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Що і треба було довести.

9. Оптичні властивості гіперболи

Теорема 4.7. Дотична, проведена в точці M_0 гіперболи утворює рівні кути з фокальними радіусами, проведеними в цю точку (рис.4.11).

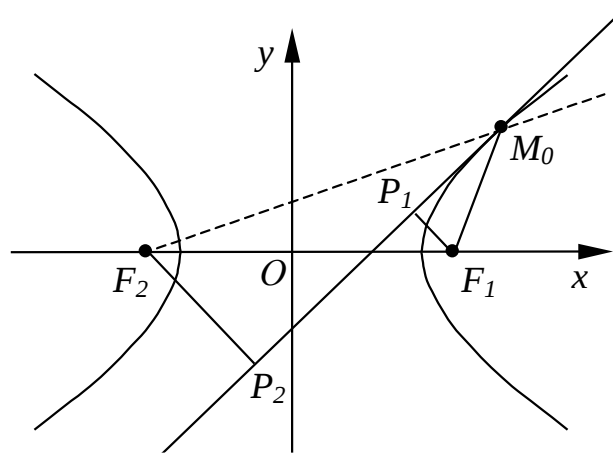


Рис.4.11

Теорема 4.4. Якщо джерело світла помістити у фокусі гіперболічного дзеркала, то після відбиття його промені будуть мати такий напрям ніби вони виходять з другого фокуса (рис.4.11).

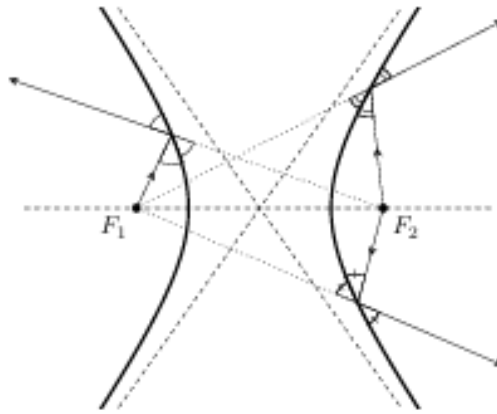


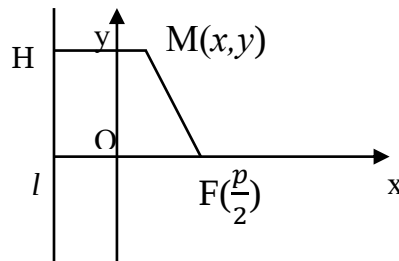
Рис.4.12

4.1.5 Парабола

Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки - фокуса і фіксованої прямої – директриси.

Виведемо рівняння параболи

Виберемо доцільно систему координат (рис. 4.13).



$$MF = MH$$

Рис. 4.13

Задані фокус (точка F) і пряма l – директриса. Отже, відома між ними відстань. Нехай це буде $p = \rho(F; l)$. Проведемо вісь абсцис через фокус перпендикулярно до директриси. Вісь ординат – перпендикулярно Oх, так щоб ділила відстань між директрисою і фокусом навпіл. Візьмемо біжучу точку $M(x; y)$ гіперболи. Відстань від точки M до директриси позначимо d . За

означенням $FM = d = MH$. Але $FM = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$; $d : x + \frac{p}{2} = 0$ (рис.4.14).

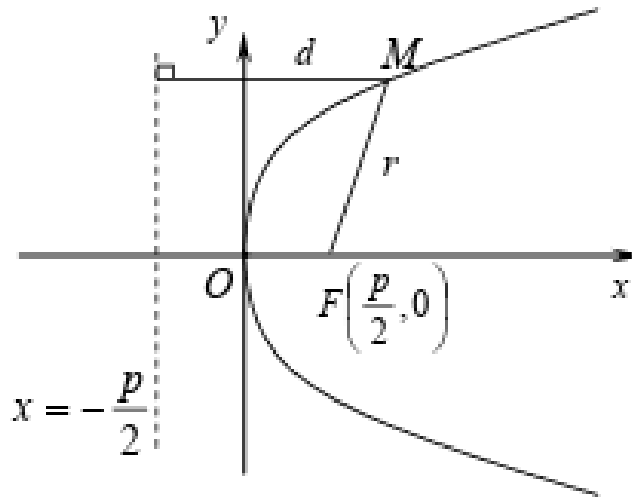


Рис.4.14

Отже, $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \pm y^2} = x + \frac{p}{2}$, піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, $x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$;

Нехай $N(x_0; y_0)$ задовольняє рівняння $2xp = y^2$, тобто $2x_0p = y_0^2$. Доведемо, що

$$NF = NH_1, \quad NF = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + 2px_0} =$$

$$\sqrt{x_0^2 + px_0 + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right| = NH_1.$$

Отже, $2xp = y^2$ - рівняння параболи. (4.12)

4.1.6 Властивості параболи

1. Лінія другого порядку

2. Областю визначення параболи є $x \geq 0$. Крім того, точка $O(0;0) \in \gamma$. Вона називається *вершиною* параболи. Вся парабола розміщена в правій півплощині відносно осі ординат.

3.Симетрія

У рівнянні параболи одна змінна у квадраті, а друга - у першому степені.

Так як разом з точкою $M_0(x_0; y_0)$

Оскільки, точка $M_0(-x_0; -y_0)$ не належить параболі, якщо точка $M_0(x_0; y_0)$ їй належить, то парабола не має центра.

Але їй належить точка $M_0(x_0; -y_0)$. Отже, вона має одну вісь симетрії. Для розглядуваного випадку - це вісь ox .

3. Ексцентриситет параболі

Парабола має лише один фокус, а довжина її осі необмежена. Отже, означення ексцентриситету параболі не має смислу. Але, за домовленістю, вважають $\varepsilon = 1$.

4. *Фокальні радіуси.* Парабола має лише один фокус. Нехай точка $M(x; y)$ довільна її точка (рис. 3.8). За означенням параболі $r = MF = MN$, де MN – відстань від точки M до директриси. Але $MN = x + \frac{p}{2}$.

Отже, $r = x + \frac{p}{2}$.

5. Дотична до параболі

Теорема 4.7. Дотична до параболі $\gamma: y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0; y_0)$, яка належить γ , має рівняння

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad (4.13)$$

Доведення. Міркуємо повністю аналогічно доведенню відповідних теорем для еліпса і гіперболи.

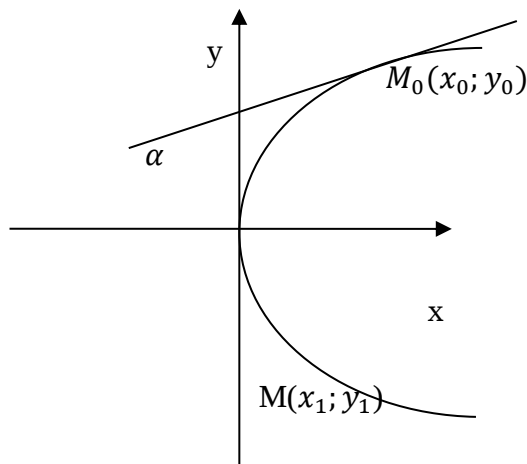


Рис. 4. 15

Рівняння дотичної шукатимемо у вигляді пучка прямих $y - y_0 = K(x - x_0)$, де

$$K = \lim_{M \rightarrow M_0} K_{ci4}.$$

Рівняння січної запишемо через дві точки MM_0 : $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$;

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0). \quad K = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Так як точки M та M_0 належать параболі, то запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1^2 = 2px_1, \\ y_0^2 = 2px_0. \end{cases}$$

Віднявши ці рівняння матимемо:

$$y_1^2 - y_0^2 = 2p(x_1 - x_0);$$

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) = 2p(x_1 - x_0).$$

Звідки $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}.$

Тоді $K = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{2p}{y_1 + y_0} = \frac{2p}{2y_0} = \frac{p}{y_0}$

Підставивши це значення у рівняння пучка, отримаємо $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$;

$$y_0(y - y_0) = p(x - x_0); \quad y_0 \cdot y - y_0^2 = px - px_0;$$

Звідки $y_0 \cdot y = p(x + x_0)$.

Теорема доведена.

6. Оптична властивість

Теорема 4.8. Коли джерело світла помістити у фокусі параболічного дзеркала, то після відбиття його промені будуть паралельними осі параболі (рис.4.16).

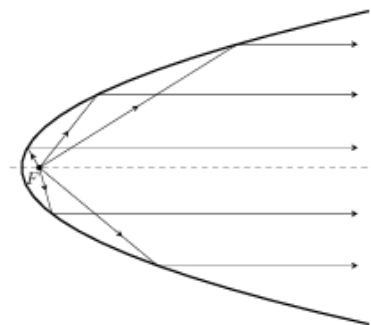


Рис.4.16

Лема 4.2. Дотична, проведена у точці M_0 до параболи утворює рівні кути з фокальними радіусами, проведеними у цю точку, і прямою, паралельною до осі (рис.4.17)

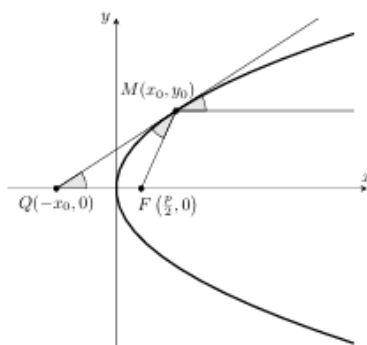


Рис.4.17

Зауважимо, що на відміну від еліпса і гіперболи, парабола має чотири канонічні рівняння (рис.4.18).

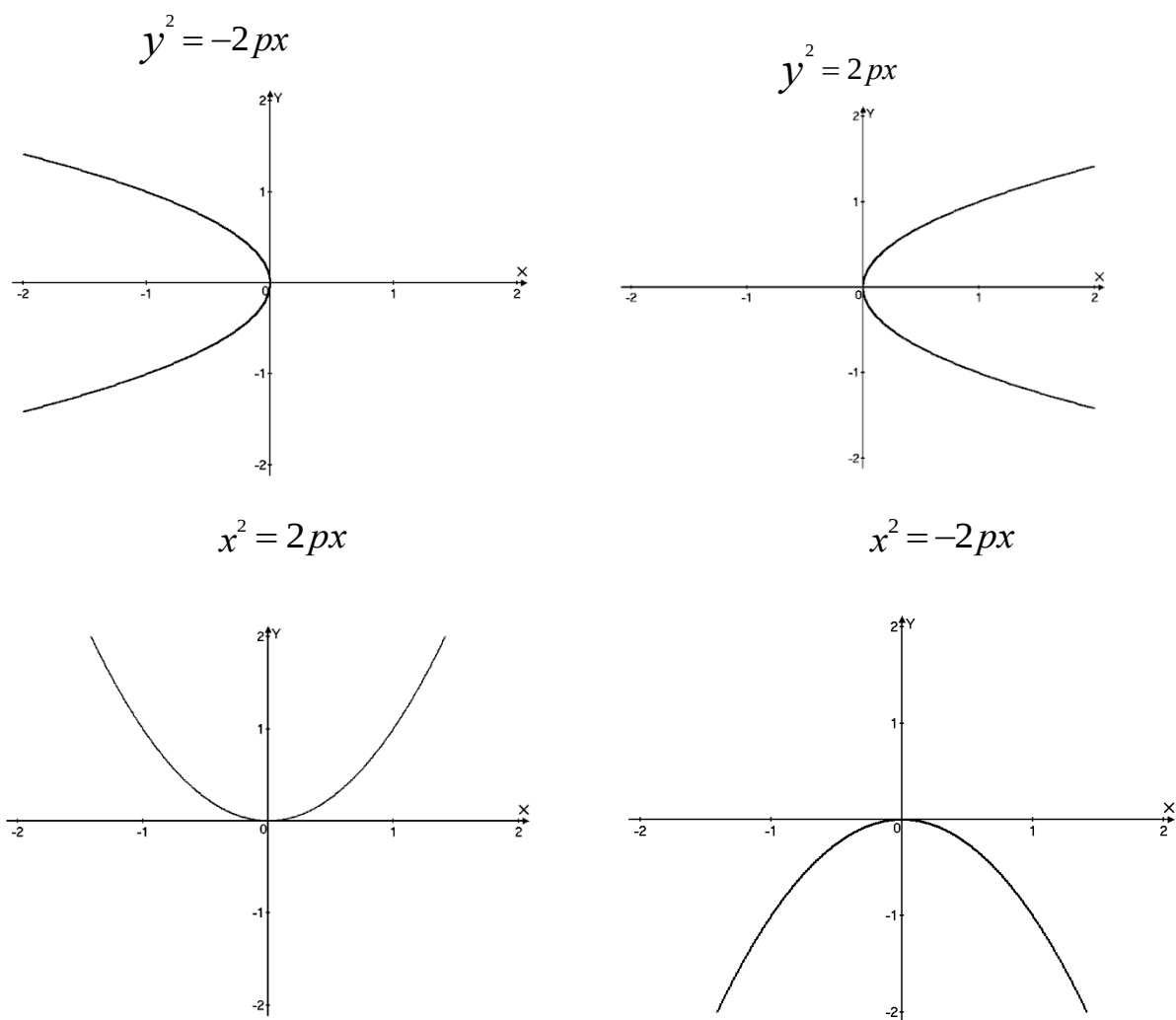


Рис. 4.18.

4.1.7 Спільне означення кривої другого порядку

Фокальні (директоріальні) властивості кривих другого порядку

Теорема 4.9. Відношення відстаней від будь-якої точки кривої до фокуса і відповідної директриси є величина стала рівна ексцентриситету кривої.

Доведення. Доведемо для випадку лівого фокуса лівої директриси еліпса та правої директриси і правого фокуса гіперболи.

Для еліпса

$$\frac{MF_1}{MH_1} = \frac{r_1}{MH_1} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Для гіперболи

$$\frac{MF_2}{MH_2} = \frac{r_2}{MH_2} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon x - a}{\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Теорема доведена.

Наслідок. Для еліпса $\varepsilon < 1$, для гіперболи $\varepsilon > 1$.

Враховуючи означення параболі, цілком природно ввести означення ексцентриситету, а саме, що $\frac{MF_1}{MH} = 1$ дорівнює ексцентриситету і для параболі $\varepsilon = 1$. Враховуючи розглянуті властивості кривих другого порядку, природно сформулювати спільне означення кривої другого порядку.

Кривою другого порядку називається геометричне місце точок площини відношення відстаней яких до фіксованої точки (фокуса) і фіксованої прямої (директриси) є величина стала, рівна ексцентриситету кривої ε .

$MF = MH = \varepsilon$, якщо $\varepsilon < 1$ еліпс, $\varepsilon > 1$ гіпербола, $\varepsilon = 1$ парабола.

Маючи спільне означення кривої другого порядку, цілком природно мати і *спільне рівняння*, яке ми виведемо у полярній системі координат.

Виберемо полюс полярної системи координат: для еліпса – лівий фокус (рис.4.19а); для гіперболи – правий (рис.4.19б); для параболі – просто фокус (рис.4.19в).

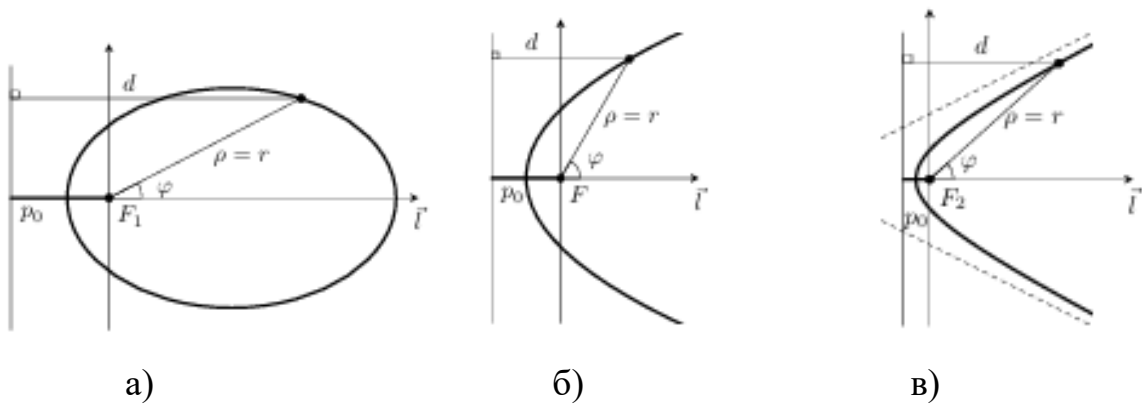


Рис.4.19

Полярну вісь проведемо через фокус перпендикулярно до директриси (рис.4.20).

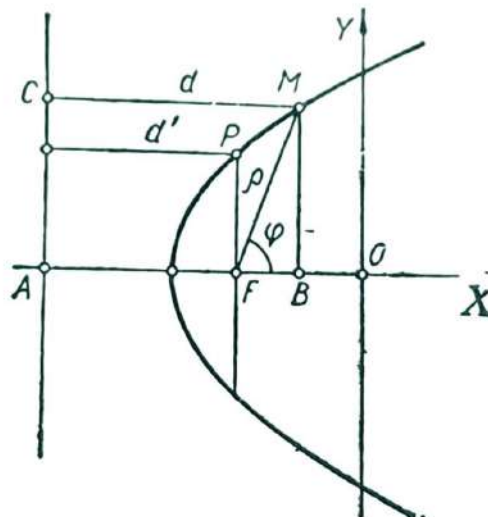


Рис.4.20

Задана відстань p – довжина перпендикуляра, проведеного у фокусі до полярної осі до перетину з кривою: – відома величина. $p = FR$ – відома величина.

Нехай $M(\rho; \varphi)$ – біжуча точка кривої. Запишемо основне співвідношення:

$$\frac{MF}{MH_1} = \varepsilon$$

За означенням кривої $MF = \rho$, тоді $\rho = \varepsilon \cdot MH_1$. (а)

Знайдемо

$$MH_1 = MK + KH_1 = \rho(90^\circ - \varphi) + KH_1 = \rho \cos \varphi + KH_1 \quad (\beta)$$

$$KH_1 = RH$$

Так як точка R належить кривій γ , то за означенням $\frac{p}{RH} = \varepsilon$, тобто $RH = \frac{p}{\varepsilon}$.

Підставивши у (β) , матимемо

$$MH_1 = \rho \cos \varphi + \frac{p}{\varepsilon}$$

Враховуючи (α) , отримаємо: $\rho = \varepsilon \cdot \rho \cos \varphi + p$, $\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) = p$.

$$\text{Звідки} \quad \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (4.14)$$

Отримали **полярне рівняння** кривої другого порядку.

Це рівняння задає еліпс, якщо $\varepsilon < 1$, гіперболу, якщо $\varepsilon > 1$, параболу, якщо $\varepsilon = 1$.

Приклад. Яку криву задає рівняння: $\rho = \frac{4}{7 - 3 \cos \varphi}$?

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді (4.14), тобто

$$\rho = \frac{\frac{4}{7}}{1 - \frac{3}{7} \cos \varphi}$$

Так як $\varepsilon = \frac{3}{7} < 1$, то дане рівняння задає еліпс.

4.2 Загальна теорія ліній другого порядку

Ми вивчили лінію першого порядку – пряму; розглянули частинні випадки рівнянь ліній другого порядку, канонічні рівняння та властивості ліній другого порядку (коло, еліпс, гіпербола, парабола).

Наприклад: рівняння $x^2 - 4y^2 = 0$ задає криву, яка розпадається на дві прямі: $\alpha_1: x - 2y = 0$ та $\alpha_2: x + 2y = 0$.

Виникає питання, чи існують ще якісь лінії другого порядку.

Наприклад: яку лінію задає рівняння

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0? \quad (\theta).$$

Побудувати цю криву і визначити її властивості. На ці запитання відповіді дає загальна теорія ліній другого порядку: існує дев'ять ліній другого порядку, з них п'ять дійсних.

4.2.1. Основні позначення

Лінією другого порядку *називається геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня загального виду*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4.15),$$

де $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ і $a_{23} = a_{32}$.

Рівняння (4.15) будемо коротко записувати

$$2F(x, y) = 0 \quad (4.16)$$

Позначимо

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \text{дискримінант старших членів}; \quad (4.17)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{дискримінант усіх членів}. \quad (4.18),$$

F_x , F_y – половини похідних відповідно по x та по y .

$$\begin{cases} F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Для лінії (θ)

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -64;$$

$$F_x = 3x - y + 2,$$

$$F_y = -x + 3y + 2.$$

4.2.2. Перетин лінії другого порядку з прямою

Нехай задана лінія другого порядку $\gamma: 2F(x, y) = 0$ і пряма $\alpha: Ax + By + C = 0$.

Знайти точки перетину цих ліній. Для цього потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} 2F(x, y) = 0, \\ Ax + By + C = 0; \end{cases} \quad (4.20)$$

Цю систему розв'язуємо, записавши рівняння у параметричному вигляді, тобто матимемо:

$$\begin{cases} 2F(x, y) = 0 \\ x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$$

У перше рівняння підставимо вирази для x, y і отримаємо:

$$\begin{aligned} & a_{11}(x_0 + \ell t)^2 + 2a_{12}(x_0 + \ell t)(y_0 + mt) + a_{22}(y_0 + mt)^2 + 2a_{13}(x_0 + \ell t) + 2a_{23}(y_0 + mt) + a_{33} = \\ & = 0 \Leftrightarrow (a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2) \cdot t^2 + 2(\ell(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + m(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}))t + \\ & + 2F(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\begin{cases} \alpha = a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 \\ M = \ell F_x + m F_y \\ N = 2F(x_0, y_0) \end{cases} \quad (4.21)$$

Отримаємо квадратне рівняння відносно t

$$\alpha t^2 + 2Mt + N = 0 \quad (4.22)$$

Розв'яжемо його, знайдемо t і, підставивши його значення в параметричне рівняння прямої, визначимо точки перетину.

Дослідження. Тут можливі такі випадки.

I. $\alpha \neq 0, M \neq 0, N \neq 0$.

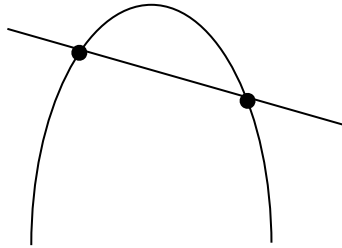


Рис. 4.20

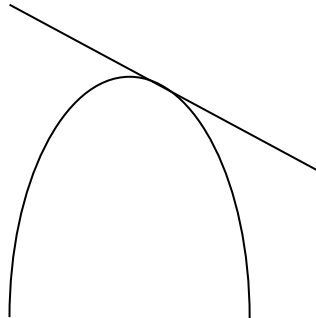


Рис. 4.21

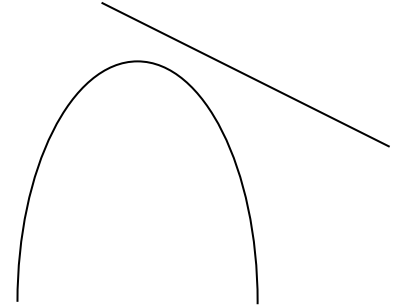
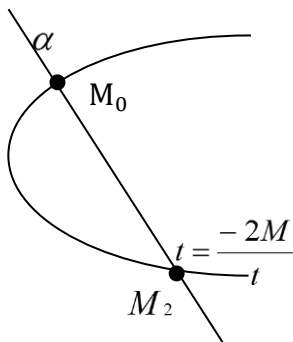


Рис. 4.22

Так як рівняння (4.22) *повне* квадратне, то воно може мати два, один або жодного розв'язку. Відповідно пряма перетинає криву у двох точках (рис. 4.20), в одній – дотикається (рис. 4.21), пряма не має з кривою спільних точок (рис. 4.22).

II. Якщо рівняння (4.22) – *неповне*, тоді можливі такі і тільки такі випадки.

1) $N = 0$, тоді $\alpha t^2 + 2Mt = 0$. Звідси $t_1 = 0, t_2 = -\frac{2M}{\alpha}$.



Це означає, що *початок* на *прямій*, точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 4.23), лежить на γ , тобто є однією з точок перетину прямої з кривою: $M_1 = M(t_1) = M_0$.

Рис. 4.23 Друга точка перетину визначається параметром t_2 , тобто $M_2 = M(t_2)$.

2) Якщо $M=0$, то рівняння (4.19) матиме вигляд $\alpha t^2 + N = 0$. Його

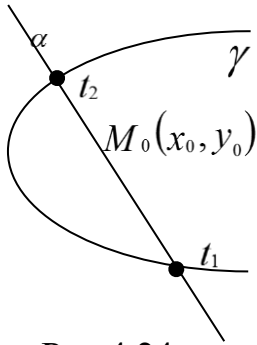


Рис.4.24

розв'язки $t_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{N}{\alpha}}$, тобто $t_1 + t_2 = 0$ або $t_1 = -t_2$.

Це означає, що точки перетину $M_1 = M(t_1)$ та $M_2 = M(t_2)$ симетричні відносно точки M_0 (рис.4.24).

Отже, для того, щоб точки перетину γ і α

були симетричні відносно початку на прямій точки $M_0(x_0, y_0)$, необхідно і достатньо, щоб у рівнянні (4.19) $M=0$, тобто

$$\ell F_{x_0} + m F_{y_0} = 0 \quad (4.23)$$

3) Якщо $M = N = 0$, то рівняння (4.19) записуємо у вигляді $\alpha t^2 = 0$, його розв'язками є $t_1 = t_2 = 0$, тобто дві спільні точки прямої і кривої співпадають з точкою M_0 (рис.4.25).

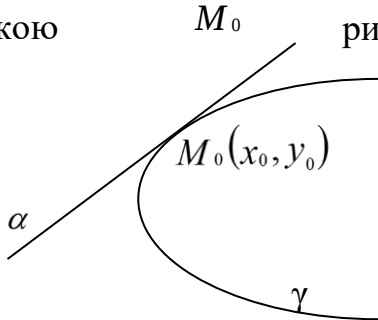


Рис.4.25

Отже, для того, щоб пряма α дотикалася до кривої γ у точці M_0 , необхідно і достатньо, щоб виконувалась система (4.24):

$$\begin{cases} M = 0, \\ N = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \ell F_x + m F_y = 0 \\ 2F(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

4) Якщо $\alpha = 0$, то рівняння (4.22) набуває вигляду $2Mt + N = 0$.

Звідки $t = -\frac{N}{2M}$. Де ж друга точка перетину? Щоб відповісти на це запитання, розв'яжемо рівняння (4.22),

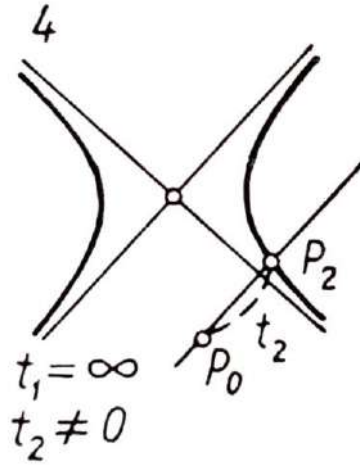


Рис.4.26

Звідки

$$t = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - \alpha N}}{\alpha}, \text{ і знайдемо границю при } \alpha \rightarrow 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M^2 - M^2 + \alpha N}{\alpha(-M \pm \sqrt{M^2 - \alpha N})} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{N}{-M \pm \sqrt{M^2 - \alpha N}}$$

$$\text{Тоді } t_2 = \frac{N}{0} = \infty; t_1 = -\frac{N}{2M}.$$

Це означає, що пряма перетинає криву в одній точці $M_1 = M(t_1)$, а в другій – у нескінченності (рис.4.26).

Така пряма називається *прямою асимптотичного напрямку* відносно кривої. Отже, для того, щоб пряма

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

мала *асимптотичний напрям* відносно лінії γ , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\alpha = 0$, тобто

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0 \quad (4.25)$$

– умова асимптотичності.

4) Якщо у рівнянні (4.19) $\alpha = M = 0, N \neq 0$, то це означає, що $t_1 = \infty$ і

$$t_2 = \lim_{M \rightarrow 0} \left(-\frac{N}{2M} \right) = \infty, \text{ тобто } t_1 = t_2 = \infty.$$

5) Пряма дотикається до кривої γ у нескінченності – це асимптота.

Отже, для того, щоб пряма α була асимптотою для кривої γ , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\alpha = M = 0$ у рівнянні (4.19), тобто

$$\begin{cases} \alpha = a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 \\ M = \ell F_x + m F_y \end{cases} \quad (4.26)$$

6) Якщо $\alpha = M = N = 0$, то рівняння (4.22) набере вигляду $0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0 = 0$. Це рівняння задовольняє будь-яке значення параметра t , тобто пряма повністю належить лінії другого порядку.

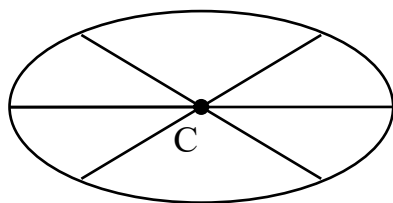
Приклад. Якщо крива задана рівнянням $\gamma: x^2 - y^2 = 0$, то пряма $\alpha: x - y = 0$, очевидно, повністю належить їй.

Розглянуті нами випадки вичерпують всі можливі, щодо розміщення прямої і кривої на площині.

Проведене дослідження допоможе у вивченні багатьох питань загальної теорії кривих другого порядку.

4.2.3. Центр кривої

Центром кривої називається центр її симетрії, тобто точка, у якій всі



хорди, що через неї проходять діляться навпіл.

Ми знаємо, що еліпс і гіпербола мають центр.

Такі криві називають *центральними*.

Рис.4.27

Розглянемо криву, задану рівнянням $2F(x, y) = 0$.

Вияснимо, чи ця крива центральна і, якщо так, то як знайти центр.

Теорема 4.10. Центр кривої $2F(x, y) = 0$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} F_{x_0} = 0 \\ F_{y_0} = 0 \end{cases}, \quad (4.27)$$

або у розгорнутому вигляді

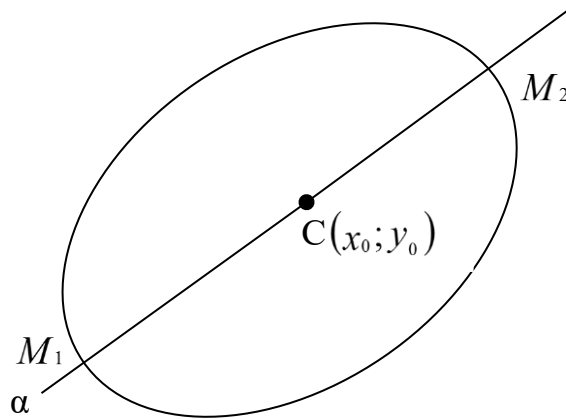
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (4.27')$$

Доведення. Нехай крива має центр в точці $C(x_0, y_0)$ (рис.4.28).

Через центр C проведемо довільну пряму

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Ця пряма перетне криву γ у двох точках $M(t_1)$ і $M(t_2)$, які є симетричними відносно C , тобто $t_1 + t_2 = 0$. За умовою симетричності точок перетину запишемо $\ell F_{x_0} + m F_{y_0} = 0$. Пряма α – довільна, отже, – довільні ℓ, m , тобто отримана рівність справедлива при будь-яких ℓ, m .



А це можливо, тоді і тільки тоді, коли

Рис.4.28

$$\begin{cases} F_{x_0} = 0 \\ F_{y_0} = 0 \end{cases}.$$

Очевидно і навпаки.

Теорема доведена.

Дослідження.

1) Легко бачити, що система (4.27') є системою двох лінійних рівнянь, і, отже, точкою перетину двох прямих, а вони *або* перетинаються, *або* паралельні, *або* співпадають.

Маємо випадки:

а) $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ — коефіцієнти при змінних у системі (4.27')

не пропорційні, тоді прямі перетинаються в єдиній точці, тобто крива має *єдиний центр*. Така крива називається *центральною*.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб крива була центральною є умова

$$\delta \neq 0 \quad (4.28)$$

Приклад. Крива $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

є центральною, оскільки $\delta \neq 0$. Для неї $\delta = 8$.

б) Якщо $\delta = 0$, тоді $x = \frac{\delta_x}{\delta}$ (чисельник $\neq 0$, бо $\delta_x \neq 0$). Отже, прямі паралельні, бо вільні члени системи (4.27') не пропорційні. Крива *не має жодного центру*. Наприклад, парабола.

в) $\delta = \delta_x = \delta_y = 0$. Значить, всі відповідні коефіцієнти системи (4.27') пропорційні, тобто прямі співпадають. Тоді лінія має *безліч центрів*. (Наприклад: $x^2 - a^2 = 0$)

Інших випадків не існує.

Приклад: Знайти центр кривої $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Розв'язання. Запишемо систему (4.27'):

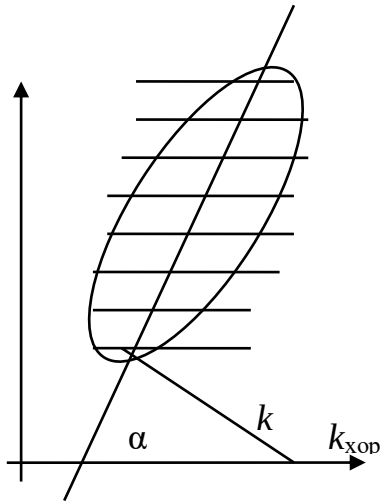
$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ -x + 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком є $x = -1$; $y = -1$. Отже, центром кривої є точка $C(-1; -1)$.

4.2.4. Діаметри

Нехай задана крива $\gamma: 2F(x, y) = 0$ і нехай заданий напрям $\vec{p}(\ell, m)$ системи паралельних хорд.

Теорема 4.11. Геометричне місце середин системи паралельних хорд



одного напрямку є пряма, яка називається діаметром, спряженим з хордами даного напрямку $\vec{P}$.

Доведення. Проведемо паралельні хорди кривої γ (рис.4.29), напрям яких заданий вектором $\vec{P}$. Візьмемо середину будь-якої хорди – точку $M_0(x_0, y_0)$. Запишемо параметричне рівняння

прямої $M_1M_2: \begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt. \end{cases}$

Рис. 4.29

Вона перетинає криву γ в двох точках M_1 і M_2 , симетричних відносно M_0 .

Для параметрів t_1 і t_2 (точок M_1 і M_2) рівняння $\alpha^2 + 2Ut + N = 0$ виконується співвідношення $t_1 + t_2 = 0$, а це означає, що $M = 0$ у рівнянні (4.22).

Тобто отримаємо (4.23): $\ell \cdot F_{x_0} + m \cdot F_{y_0} = 0$.

Нехай тепер точка M_0 пробігає середини всіх паралельних хорд, тоді вона стане біжучою точкою $M(x, y)$; при кожному положенні точки M_0 виконується (4.23). Отримаємо

$\ell \cdot F_x + m \cdot F_y = 0$ або $F_x + k F_y = 0$, де $k = \frac{m}{\ell}$ – кутовий коефіцієнт хорд.

Запишемо у розгорнутому вигляді отримане рівняння:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

$$(a_{11} + k a_{21})x + (a_{12} + k a_{22})y + c = 0 \quad (\beta)$$

Це рівняння лінійне і задає пряму лінію для довільного k , крім випадку, коли коефіцієнти при змінних одночасно рівні нулю, тобто

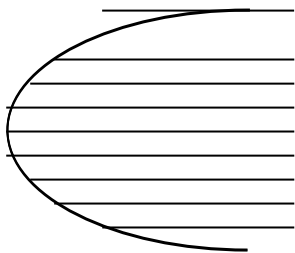


Рис.4.30

$$\begin{cases} a_{11} + k a_{21} = 0 \\ a_{12} + k a_{22} = 0 \end{cases}.$$

Звідки
$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \dots \quad (\gamma)$$

або
$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow \delta = 0.$$

Отже, рівняння (β) завжди задає пряму, крім випадку, коли k обчислюється за формулою (γ), тобто у випадку нецентральної кривої. Ми знаємо, що парабола нецентральна крива.

Бачимо, що в параболі, якщо система хорд буде паралельною до осі параболі (рис.4.30), то не існує діаметра спряженого з цим напрямком, у всіх інших випадках для будь-якої кривої другого порядку існує діаметр, спряжений з даним напрямком k .

Теорема доведена.

В ході доведення ми отримали рівняння діаметра кривої:

$$F_x + k F_y = 0 \quad (4.24)$$

Наслідки

1. Діаметр кривої проходить через центр.

Дійсно, центр є розв'язком системи
$$\begin{cases} F_{x_0} = 0 \\ F_{y_0} = 0 \end{cases}, \text{ тобто } F_{x_0} = F_{y_0} = 0.$$

2. У рівнянні (4.24) k – кутовий коефіцієнт хорд, спряжених з діаметром.

Нехай тепер хорди паралельні осі Ox , тобто $k = 0$, тоді рівняння діаметра, спряженого з хордами, паралельними осі Ox має вигляд:

$$d_1 : F_x = 0.$$

Очевидно, що рівняння діаметра, спряженого з хордами, паралельними осі Oy :

$$d_2 : F_y = 0.$$

Звідси ми відразу отримуємо, що точка перетину цих двох діаметрів d_1

і d_2 , тобто розв'язок системи $\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0, \end{cases}$ є центром лінії.

Отже, центром центральної лінії є точка перетину діаметрів, спряжених з координатними осями.

3. Кутовий коефіцієнт діаметра параболи обчислюється за формулою

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \quad (\gamma).$$

Приклад. Записати рівняння діаметра кривої $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, перпендикулярного прямій $\alpha: x + 2y + 5 = 0$.

Розв'язання. Потрібно знати кутовий коефіцієнт діаметра k_d . Так як діаметр перпендикулярний даній прямій $\alpha: x + 2y + 5 = 0$, а для прямої

$$k = -\frac{1}{2}, \text{ то } k_d \cdot k = -1, \text{ тобто } k_d \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \text{ звідси } k_d = 2.$$

Знаємо, що діаметр проходить через центр, тому можемо записати його у вигляді пучка прямих:

$$y - y_0 = k_d(x - x_0), \text{ тобто}$$

$$y + 1 = 2(x + 1). \text{ Звідси}$$

$$d: 2x - y + 1 = 0.$$

Проте, якщо центр не знайдено, то можна скористатись рівнянням (4.24), записавши його в розгорнутому вигляді.

$$(a_{11} + k a_{21})x + (a_{12} + k a_{22})y + c = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad k_d = -\frac{a_{11} + k a_{12}}{a_{21} + k a_{22}} \quad (4.25)$$

$$\text{бо } k_x \cdot k_d = -1 \text{ або } k_d = -\frac{1}{k_x}.$$

Тоді $2 = -\frac{5+4k}{4+5k}$. Звідси знайдемо k і скористаємось рівнянням (4.24).

Отримаємо те ж саме рівняння діаметра.

4.2.5. Спряжені діаметри

Нехай задана крива $\gamma: 2F(x, y) = 0$ і система паралельних хорд напрямку k . Запишемо рівняння діаметра d_1 , спряженого з цим напрямом. Рівняння $F_x + k F_y = 0$ запишемо у розгорнутому вигляді і знайдемо $k_d = k_1$:

$$k_d = -\frac{a_{11} + k a_{12}}{a_{21} + k a_{22}} \text{ звідки } (a_{12} + k a_{22})k_1 \pm a_{11} + k a_{12} = 0.$$

$$\text{Отримуємо} \quad a_{11} + a_{12}(k_1 + k) + a_{22} \cdot k_1 \cdot k = 0 \quad (4.26)$$

– рівняння спряженого діаметра.

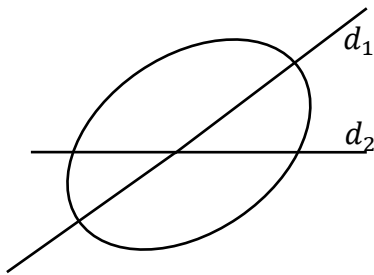


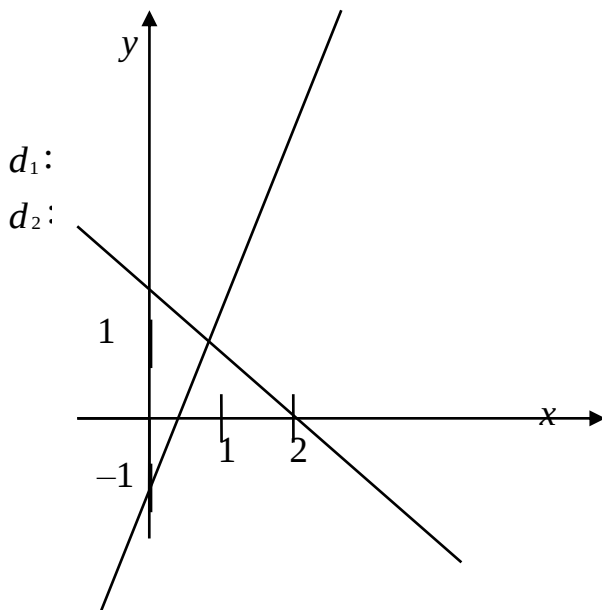
Рис.4.31

Бачимо, що у рівнянні (3.29) кутові коефіцієнти діаметра і спряжених хорд входять симетрично, якщо k – кутовий коефіцієнт діаметра, то k_1 – кутовий коефіцієнт спряжених хорд і навпаки.

Два діаметри називаються *спряженими*, якщо один з них ділить навпіл хорди, паралельні другому і навпаки (рис.4.31). Умова (4.26) називається умовою *спряженості* двох напрямів.

Приклад. Записати рівняння діаметра кривої $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$, спряженого з діаметром $d: 2x - y + 1 = 0$.

Для $k_d = 2$. Для спряженого буде $k_{хорд} = 2$, тому рівняння d_2 за формулою (4.24), маємо $F_x + k F_y = 0$,
тобто $3x - y + 2 + 2(-x + 3y + 2) = 0$, або $x + 5y + 6 = 0$ (рис. 4.32).



Отже, рівняння спряжених діаметрів:

Рис. 4.32

4.2.6 Діаметри нецентральных ліній

Теорема 4.12 Всі діаметри нецентральных ліній паралельні між собою.

Доведення. Нехай $\gamma: 2F(x, y) = 0$ – нецентральна, тобто

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \text{ звідси } a_{12} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}.$$

Запишемо рівняння діаметра цієї кривої, спряженого з хордами напрямку k – рівняння $F_x + k F_y = 0$. Розпишемо і знайдемо k_d за (4.25).

Для нецентральної кривої $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12}^2$, $a_{12} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}$, тобто

$$k_d = -\frac{a_{11} + k a_{12}}{a_{21} + k a_{22}}, \text{ де } k \text{ – кутовий коефіцієнт хорд. Тоді}$$

$$k_d = -\frac{a_{11} + k \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{22}} + k a_{22}} = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{11}} + k \sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}} + k \sqrt{a_{22}}} = -\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = \text{const.}$$

Отже, кутовий коефіцієнт діаметра нецентральної лінії залежить від напрямку хорд, тобто всі діаметри паралельні між собою.

Теорема доведена.

Кутовий коефіцієнт нецентральної лінії обчислюється за формулою:

$$k = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}} = -\frac{\sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}} \cdot \sqrt{a_{11}}} = -\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (4.27)$$

Приклад. Через початок координат провести діаметр кривої

$$\gamma: 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0.$$

Розв'язання. Вияснимо, чи крива центральна. Обчислимо

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

– крива нецентральна, тому всі діаметри мають кутовий

коефіцієнт $k = -\frac{4}{-2} = 2$. Шуканий діаметр проходить через початок координат точку $O(0, 0)$.

Отже, рівняння діаметра $d: y - 0 = 2(x - 0)$ або $2x - y = 0$.

4.2.7 Асимптотичні напрями. Асимптоти

Нехай задана крива $\gamma: 2F(x, y) = 0$ і задана пряма $\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ і нехай відомо, що ця пряма має асимптотичний напрям відносно кривої γ , тоді, у рівнянні (4.24), $\alpha = 0$, звідси $a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0$.

Поділивши обидві частини на ℓ^2 , отримаємо

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \quad (4.28)$$

Формула (4.28) називається умовою асимптотичності α прямої відносно γ .

Ми довели, що пряма α є асимптотою, якщо виконуються дві умови:

$$\text{умова (4.28)} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \ell \cdot F_{x_0} + m \cdot F_{y_0} = 0.$$

Друга умова може бути записана у вигляді $F_x + k F_y = 0$, тобто асимптота – це пряма, що має асимптотичний напрям і проходить через центр кривої, отже є діаметром кривої.

Приклад. Записати рівняння асимптот кривої

$$2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0.$$

Розв'язання.

1) Вияснимо чи крива центральна. Обчислимо δ :. Так як $\delta \neq 0$

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0,$$

то крива центральна.

2) Знайдемо центр, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0, \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є $x = 1, y = 1$. Отже, центр кривої – точка $C(1; 1)$.

3) Знайдемо кутові коефіцієнти асимптотичних напрямів з рівняння (4.28)

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0:$$

$$2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)k = 0; \quad k_1 = \frac{2}{3}.$$

Рівняння (4.28) квадратне. Ми отримали одне значення k . Як ми вже знаємо, $k_2 = \infty$. Тоді рівняння асимптот

$$\alpha_1: y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \text{або} \quad 3y - 3 - 2x + 2 = 0, \quad \text{тобто} \quad 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$\alpha_2: k_2 = \frac{y - 1}{x - 1} = \infty, \quad \text{тому} \quad x - 1 = 0.$$

4.2.8 Класифікація кривих

Розглянемо криву $\gamma: 2F(x, y) = 0$. Знайдемо кутові коефіцієнти асимптотичних напрямів з рівняння

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Так як рівняння квадратне, то криві другого порядку мають не більше двох асимптотичних напрямів. Розв'яжемо це рівняння:

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{+a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{22}}.$$

Можливі випадки:

1) $\delta < 0$ крива має два асимптотичні напрями і називається *гіперболічного типу*.

2) $\delta = 0$, $k = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$, – крива нецентральна і має один асимптотичний напрям, такий же, як у рівнянні діаметра – *параболічний тип*.

3) $\delta > 0$, – крива не має асимптотичних напрямів – *еліптичний тип*.

4.2.9 Дотична

Задана крива $\gamma: 2F(x, y) = 0$. Вияснимо, як записати рівняння дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$. Як результат дослідження у п.4.2.2., необхідною

і достатньою умовою того, щоб пряма $\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ дотикалася до кривої γ в точці M_0 є умови:

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \ell \cdot F_{x_0} + m \cdot F_{y_0} = 0, \\ 2F(x; y) = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} F_{x_0} + k F_{y_0} = 0, \\ 2F(x; y) = 0, \end{cases} \text{ тобто} \quad \begin{cases} k = -\frac{F_{x_0}}{F_{y_0}}, \\ 2F(x; y) = 0, \end{cases} \quad (\delta).$$

Отже, дотична проходить через точку M_0 і має кутовий коефіцієнт k . Її

рівняння: $y - y_0 = k(x - x_0)$ або $y - y_0 = -\frac{F_{x_0}}{F_{y_0}}(x - x_0)$.

Остаточно рівняння дотичної у точці M_0 :

$$F_{x_0}(x - x_0) + F_{y_0}(y - y_0) = 0. \quad (4.28)$$

Пряма n , перпендикулярна до дотичної до кривої в точці дотику називається *нормаллю до кривої*. Так як $n \perp \alpha$, то рівняння n отримаємо з (4.28)

$$F_{y_0}(x - x_0) - F_{x_0}(y - y_0) = 0 \quad (4.29)$$

Приклад: Записати рівняння дотичної до кривої

$$x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0,$$

паралельної прямій $2x + 3y - 1 = 0$.

Щоб написати рівняння (4.29), достатньо знайти точку дотику, а це можна зробити з умови (δ) , підставивши замість k кутовий коефіцієнт заданої прямої:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = \frac{-x_0 - \frac{1}{2}y_0 - 1}{-\frac{1}{2}x_0 - y_0 + 1}, \\ x_0^2 - x_0 \cdot y_0 - y_0^2 - 2x_0 + 2y_0 + 1 = 0. \end{cases}$$

4.3 Спрощення рівняння кривої другого порядку за допомогою перетворень прямокутних координат

Якщо крива γ розміщена відносно системи координат, яка не є канонічною, то ця крива відносно цієї системи координат не матиме канонічного рівняння, а матиме загальне. Завдання полягає в тому, щоб від загального рівняння перейти до канонічного, і вияснити, яка це крива.

Основна ідея – виконати перетворення координат, тобто або спочатку перенести початок координат, а потім повернути осі; або спочатку повернути осі, а потім перенести початок в залежності від типу кривої.

4.3.1 Рівняння кривої при перенесенні початку координат

Нехай $\gamma: 2F(x, y) = 0$ задана відносно деякої прямокутної декартової системи координат.

Нехай нова система координат отримується з даної перенесенням початку координат в деяку точку (x_0, y_0) , тоді формули перенесення

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases}$$

Щоб отримати рівняння кривої γ у новій системі координат, потрібно у рівняння замість x, y підставити їх значення за формулами перенесення:

$$\begin{aligned} & a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = \\ & = 0 \text{ або } a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x' \cdot y' + a_{22}(y')^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x' + 2F_{y_0} \cdot y' + \\ & + 2F(x_0; y_0) = 0; \end{aligned} \quad (4.30)$$

Отже, при перенесенні початку, без зміни напрямку осей нове рівняння (4.30) кривої γ має такі властивості:

- 1) група старших членів інваріантна (не змінюється);
- 2) коефіцієнти при лінійних змінних x та y є вирази $2F_{y_0}$ та $2F_{x_0}$ відповідно;
- 3) вільний член є результатом підстановки в задане рівняння координат нового початку.

4.3.2 Рівняння центральної кривої відносно її центра

Нехай $\gamma: 2F(x, y) = 0$ – центральна і нехай $O'(x_0; y_0)$ – її центр.

Запишемо рівняння перенісши початок координат в центр. Так як (x_0, y_0) –

центр, то
$$\begin{cases} F_{x_0} = 0 \\ F_{y_0} = 0 \end{cases}$$
.

Тому рівняння (4.30) набере вигляду

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x' \cdot y' + a_{22}(y')^2 + 2F(x_0; y_0) = 0 \quad (4.31)$$

Приклад. Розглянемо задану вище криву

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

Запишемо її рівняння відносно системи координат, початок якої знаходиться у центрі кривої – точці $C = O'(-1;-1)$.

Рівняння кривої набирає вигляду (4.31)

$$3(x')^2 - 2x'y' + 3(y')^2 + 2F(-1;-1) = 0.$$

Обчислимо

$$2F(-1;-1) = 3(-1)^2 - 2(-1)(-1) + 3(-1)^2 + 4(-1) + 4(-1) - 4 = -8.$$

Отже, рівняння має вигляд:

$$3(x')^2 - 2x'y' + 3(y')^2 - 8 = 0.$$

4.3.3 Спрощення рівняння кривої шляхом повороту осей

Задана $\gamma: 2F(x, y) = 0$ загальним рівнянням.

Теорема 4.13 Для кожної кривої другого порядку існує система координат, відносно якої у рівнянні кривої відсутній член з добутком $xу$.

Доведення. Виконаємо поворот системи координат на поки що невідомий кут α і покажемо, як його знайти, щоб $a'_{12} = 0$.

Запишемо формули повороту осей без зміни початку

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha, \\ y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Підставимо ці формули у загальне рівняння кривої, розкриємо дужки і зберемо члени при добутку $x'y'$.

$$\begin{aligned} & a_{11}(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha)(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha) + \\ & a_{22}(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha)^2 + 2a_{13}(x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha) + 2a_{23}(x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha) + \\ & + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Прирівняємо отриманий тригонометричний вираз при a_{12} до нуля. Отримали тригонометричне рівняння, розв'яжемо його і знайдемо кут α , на який потрібно повернути систему координат, щоб у рівнянні був відсутній добуток $x'y'$:

$$\begin{aligned}
& -2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}\cos^2\alpha - 2a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0; \\
& -a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha + a_{22}\sin 2\alpha = 0; \\
& 2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha \quad | \div \cos 2\alpha; \\
& 2a_{12} = (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg} 2\alpha;
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (4.32)$$

Отже, систему координат потрібно повернути на такий кут α , для якого $\operatorname{tg} 2\alpha$ обчислюється за формулою (4.32).

Очевидно, при будь-яких значеннях коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{12} кут α існує, тобто для кривої можна знайти кут, на який слід повернути систему координат, щоб був відсутній $x'y'$. Теорема доведена.

Зауваження. Задача спрощення рівняння кривої шляхом повороту осей буде розв'язуватися за схемою:

1) Знайдемо $\operatorname{tg} 2\alpha$ за формулою (4.32).

. Нехай $\operatorname{tg} 2\alpha = a$.

2) Знаємо, що $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = a$, тоді $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = a$.

3) Записуємо квадратне рівняння $a(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2\operatorname{tg} \alpha$.

4) Розв'язуємо його і знаходимо $\operatorname{tg} \alpha = b$

5) Записуємо $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = a_1$; $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = a_2$.

6) Підставимо a_1, a_2 у формули повороту осей.

7) Отримані формули повороту підставляємо у дане рівняння кривої. В новому не буде $x'y'$.

Приклад. Звести рівняння кривої до канонічного виду і виконати побудову у системі координат $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Розв'язання. Після перенесення початку координат у центр кривої отримали рівняння $3(x')^2 - 2x'y' + 3(y')^2 - 8 = 0$.

Знайдемо $\operatorname{tg} 2\alpha$ за формулою (4.32):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2}{3-3} = \infty. \text{ Отже, } \alpha = 45^\circ.$$

Виконаємо поворот осей координат (рис.4.33) і запишемо відповідні формули:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y''); \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y''). \end{cases}$$

Підставимо ці значення x' та y' в отримане рівняння кривої:

$$3 \cdot \frac{1}{2}((x'')^2 - 2x'' \cdot y'' + (y'')^2) - ((x'')^2 - (y'')^2) + \frac{3}{2}((x'')^2 + 2x'' \cdot y'' + (y'')^2) - 8 = 0.$$

Виконавши спрощення, отримаємо:

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 - 8 = 0 \text{ або } (x'')^2 + 2(y'')^2 = 4.$$

Отже, канонічне рівняння кривої

$$\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{2} = 1.$$

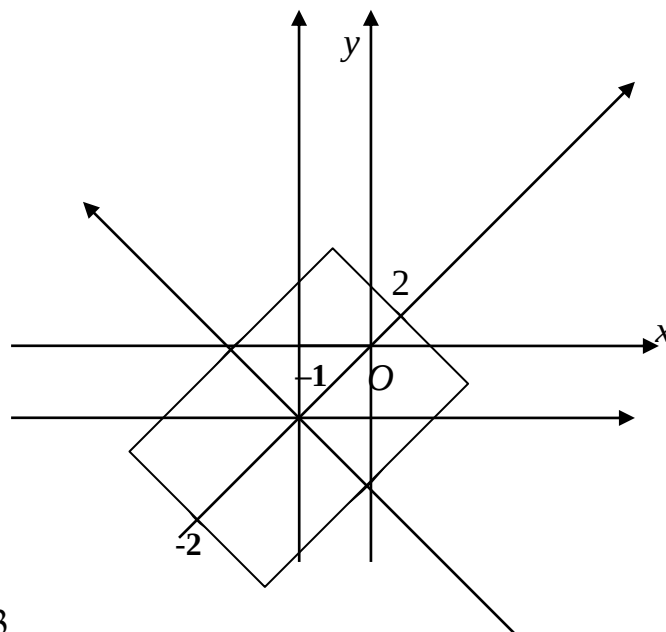


Рис.4.33

Висновок: рівняння центральної кривої спрощується до канонічного виду за таким планом:

- 1) Знайдемо центр кривої.
- 2) Виконаємо перенесення початку координат в центр, отримаємо рівняння (4.31).
- 3) Знайдемо $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, виконаємо поворот осей і запишемо нове рівняння.

4.3.4 Спрощення рівняння нецентральної лінії

1. Обчислимо $\delta = 0$.

2. Виконаємо поворот осей. Підставляємо формули повороту в дане рівняння.

Виявляється (далі ми доводимо це строго), що у випадку нецентральної лінії разом з тим, що зникає член з добутком x на y пропадає квадрат однієї змінної. Отже, в результаті повороту осей нове рівняння кривої може набути вигляду:

$$1) \quad a'_{11}(x')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0,$$

2) або якщо $2a'_{23}y'$ буде відсутній, тоді

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{13}x' + a_{33} = 0.$$

У першому випадку, щоб звести рівняння до канонічного виду скористаємось перенесенням початку системи координат. Щоб встановити, куди необхідно переносити початок поступаємо так:

виділимо повний квадрат змінної;

всі останні члени перенесемо вправо:

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 = \frac{(a'_{13})^2}{a'_{11}} - 2a'_{23}y' - a_{33};$$

винесемо за дужки (справа) коефіцієнт при змінній:

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 = -2a'_{23}\left(y' - \frac{(a'_{13})^2}{a'_{11} - 2a'_{23}} + \frac{a_{33}}{2a'_{23}}\right);$$

Отримаємо координати нового початку. Перенесемо початок:

$$x' = x'' - \frac{a'_{13}}{a'_{11}}; \quad y' = y'' - c.$$

В новій системі координат крива буде мати рівняння

$$a'_{11}(x'')^2 = 2a'_{23}y'' \Leftrightarrow (x'')^2 = 2\frac{a'_{23}}{a'_{11}}y'' \quad \text{— парабола.}$$

У випадку 2) виділимо повний квадрат.

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 = \frac{(a'_{13})^2}{a'_{11}} - a_{33}.$$

Виконаємо перетворення системи координат:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a'_{13}}{a'_{11}}; \\ y' = y''. \end{cases}$$

У новій системі координат рівняння кривої має вигляд $a'_{11}(x'')^2 = c$.

Приклад: Звести до канонічного виду рівняння кривої

$$\gamma_2: 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y - 7 = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо δ і Δ :

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -36.$$

Крива нецентральна, виконуємо поворот осей на кут α , для якого

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-4}{4-1} = \frac{-4}{3}. \quad \text{Тоді} \quad \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{4}{3}. \quad \text{Розв'яжемо рівняння}$$

$$2\operatorname{tg}^2 \alpha - 3\operatorname{tg} \alpha - 2 = 0, \text{ звідки } \operatorname{tg} \alpha = 2. \text{ Тоді } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Запишемо формули повороту:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'). \end{cases}$$

Підставимо ці значення x та y в рівняння кривої:

$$\frac{4}{5}(x' - 2y')^2 - \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + \frac{1}{5}(2x' + y')^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{4}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 7 = 0$$

Отримаємо

$$5(y')^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0$$

Другий крок. Виконуємо перенесення початку. Для цього виділяємо повний квадрат у лівій частині, а в правій частині – виносимо за дужки коефіцієнт при x' :

$$5\left(y' + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{12}{\sqrt{5}}\left(x' + \frac{4\sqrt{5}}{25 \cdot 12} + \frac{7\sqrt{5}}{12}\right)$$

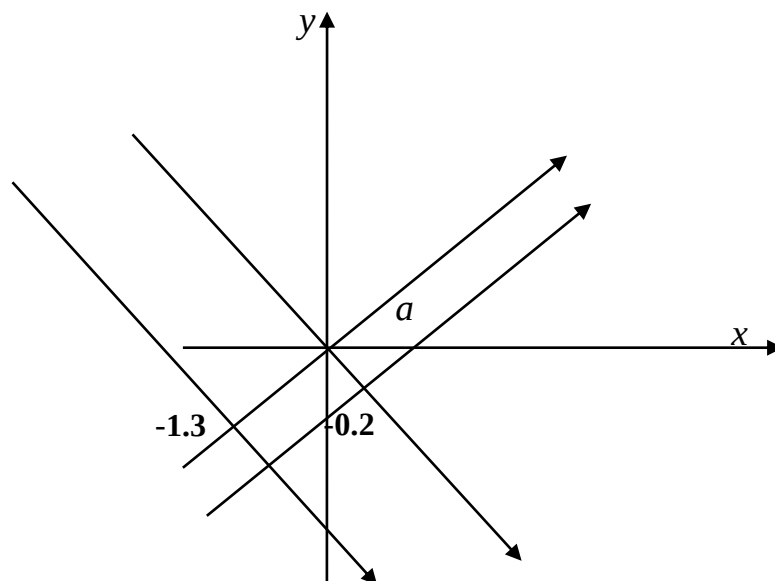
Виконаємо перенесення початку за формулами:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{179}{60\sqrt{5}} \\ y' = y'' - \frac{2}{5\sqrt{5}} \end{cases} \quad \left(\frac{179}{60\sqrt{5}} \approx 1,3; \frac{2}{5\sqrt{5}} \approx 0,2 \right)$$

У новій системі координат $O'x''y''$ парабола має рівняння

$$5(y'')^2 = \frac{12}{\sqrt{5}}x''$$

Виконаємо побудову параболи у вихідній системі координат (рис. 4.34):



4.3.5 Розпад лінії

Теорема 4.14 Якщо $\Delta = 0$ для кривої $\gamma: 2F(x, y) = 0$, то крива розпадається на дві дійсні чи уявні прямі.

Доведення. Алгоритм:

1) Дане рівняння кривої $2F(x, y) = 0$ подамо як квадратне відносно однієї змінної (наприклад y).

$$a_{22}y^2 + 2(a_{12}x + a_{23})y + a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

2) Розв'яжемо це рівняння відносно y

$$y = \frac{-(a_{12}x + a_{23}) \pm \sqrt{(a_{12}x + a_{23})^2 - a_{22}(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33})}}{a_{22}}.$$

Для того, щоб крива розпадалася достатньо, щоб дискримінант (вираз під радикалом) був повним квадратом (для виразу $(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$, щоб його $D = 0$), а це буде тоді і тільки тоді, коли $\Delta = 0$. Теорема доведена.

Хід доведення теореми дає спосіб розв'язання задач на спрощення рівнянь кривої у випадку, якщо $\Delta = 0$, а саме

- 1) Обчислюємо δ : $\delta = 0$, або $\delta \neq 0$.
- 2) Обчислюємо Δ . Якщо $\Delta = 0$, тоді немає потреби виконувати перетворення координат, а відразу
- 3) запишемо рівняння, як квадратне, розв'яжемо його і знайдемо дві прямі.

Приклад: $\gamma_3: 2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2 = 0$.

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} < 0$$

1) — крива гіперболічного типу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2) – крива розпадається на дві дійсні прямі.

3) Розглянемо рівняння як квадратне відносно y :

$$-1y^2 + (x-1)y + 2x^2 + 5x + 2 = 0;$$

$$y^2 - (x-1)y - 2x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$y = \frac{x-1 \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (2x^2 + 5x + 2)}}{2}; \quad y = \frac{x-1 \pm (3x+3)}{2};$$

$$2y = 4x + 2; \quad 2y = -2x - 4$$

$$4x - 2y + 2 = 0; \quad 2x + 2y + 4 = 0;$$

Звідси: $\alpha_1: 2x - y + 1 = 0; \quad \alpha_2: x + y + 2 = 0.$

Отже, дана крива розпадається на дві прямі $\alpha_1: 2x - y + 1 = 0$; та $\alpha_2: x + y + 2 = 0$. (рис.4.35)

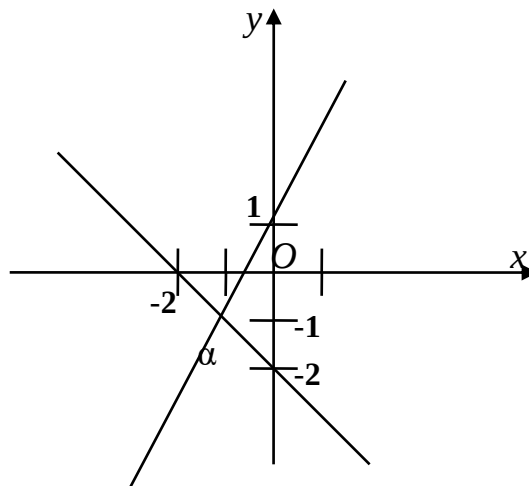


Рис.4.35

4.3.6 Головні напрями і головні осі кривих другого порядку

Напряма $\vec{p}(l, m)$ або $\vec{p}(1, k)$ називається головною відносно кривої $\gamma: 2F(x, y) = 0$, якщо він перпендикулярний до спряжених з ним хорд. Два напрями $\vec{p}(1, k_1)$ і $\vec{p}(1, k_2)$ називаються головними відносно γ , якщо вони спряжені і взаємно перпендикулярні. Виведемо формулу для обчислення головних напрямів кривої γ .

Нехай $\vec{p}(1, k_1)$ і $\vec{p}(1, k_2)$ – головні, тоді вони спряжені і виконується умова спряженості (4.26):

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k) + a_{22} \cdot k_1 \cdot k = 0.$$

Так як ці напрями взаємно перпендикулярні, то $k_1 \cdot k = -1$. Тоді будемо мати

$$a_{11} + a_{12}\left(k - \frac{1}{k_1}\right) + a_{22}k\left(-\frac{1}{k_1}\right) = 0 \quad \text{або} \quad a_{11}k + a_{12}(k^2 - 1) - a_{22}k = 0. \quad \text{Звідси}$$

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \quad (4.33)$$

З (4.33) знаходять головні напрями кривої другого порядку.

Теорема 4.15. Кожна крива другого порядку має принаймні два головні напрями.

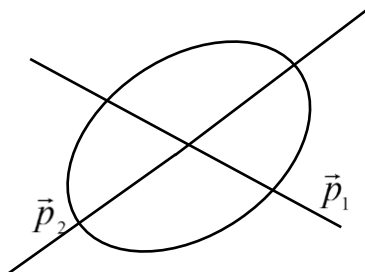
Доведення. Дійсно, розв'яжемо рівняння (4.23):

$$k = \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.$$

Очевидно, $D \geq 0$. Отже, кожна крива має два головні напрями, крім випадку, коли $D = 0$. А це тоді і тільки тоді, коли $a_{11} = a_{22}$ і $a_{12} = 0$. У цьому випадку маємо коло.

Отже, коло має безліч головних напрямків – це будь-які два взаємно перпендикулярні діаметри. Теорема доведена.

Наслідки:



Через будь-яку точку площини можна провести два головні напрями для даної кривої.

Два діаметри кривої другого порядку, що мають головні напрями (рис.4.36),

Рис. 4.36 називаються *головними діаметрами* або *головними осями* для центральної кривої.

Парабола має одну головну вісь, але два напрями (рис.4.37).

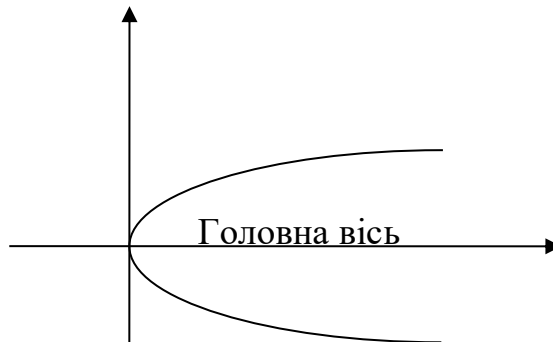


Рис. 4.37

Головні напрями нецентральної лінії

Ми бачимо, що всі діаметри нецентральної лінії паралельні між собою і кутовий коефіцієнт діаметра $k_d = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$. Так як головна вісь перпендикулярна

до спряжених з головним напрямом хорд, то $k_{хорд} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$. (4.34)

Отже, головна вісь нецентральної лінії матиме рівняння:

$$d: F_x + k_{хорд} F_y = 0;$$

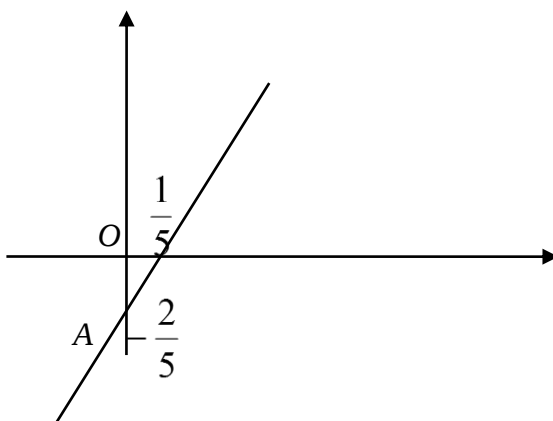
$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \frac{a_{12}}{a_{11}}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \quad (*)$$

Приклад. Знайти головну вісь кривої

$$\gamma_2: 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y - 7 = 0.$$

Розв'язання. Вияснимо, яка це

крива, обчисливши δ : $\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.



Так як $\delta = 0$, то це парабола. Тоді рівняння головної осі (*) запишемо для даної кривої

$$\text{Рис.4.38} \quad d: 4x - 2y - 2 + \frac{-2}{4}(-2x + y - 2) = 0.$$

$$\text{Звідки} \quad 10x - 5y - 2 = 0 \quad (\text{рис.4.38}).$$

Щоб знайти вершину параболи потрібно знайти точки перетину кривої γ з головною віссю, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2F(x; y) = 0; \\ 10x - 5y - 2 = 0; \end{cases}$$

Теорема 4.16. Якщо осі координат повернути так, щоб вони мали головний напрям, то в новому рівнянні буде відсутній добуток xu .

Доведення. Ми знаємо, що в рівнянні буде відсутній $x'y'$, якщо осі координат повернути на кут α , такий, що

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2k}{1 - k^2}, \text{ тоді}$$

$$a_{12}(1 - k^2) - (a_{11} - a_{22})k = 0 \quad \text{або}$$

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

Це означає, що осі нової системи координат мають головний напрям.

Теорема доведена.

Наслідок. Ми вміємо шукати головні напрями двома способами:

1. Знайти кут, на який потрібно повернути систему координат:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

розписувати і знаходити $\operatorname{tg} \alpha$.

2. Розв'язавши квадратне рівняння:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

4.3.7 Головні осі центральної лінії

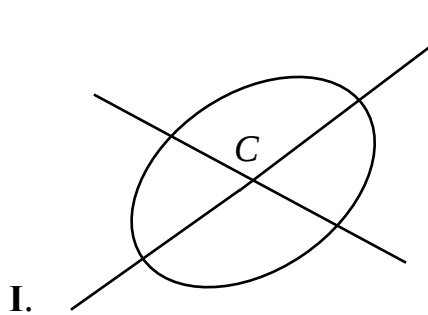


Рис.4.39

Головна вісь – головний діаметр, який проходить через центр кривої, тому, щоб записати рівняння головних осей, можна піти двома шляхами:

I.

1. Знайдемо центр кривої – точку $C(x_0, y_0)$ (рис. 4.39).

2. Розв'язавши рівняння $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$ знайдемо k_1, k_2 , які підставимо у рівняння головного діаметра:

$$d_1: y - y_0 = k_1(x - x_0) \quad d_2: y - y_0 = k_2(x - x_0)$$

II. Якщо центр не знайдено, то головні осі будуть мати рівняння:

$$d_1: F_x + k_1 F_y = 0;$$

$$d_2: F_x + k_2 F_y = 0,$$

де k_1, k_2 – розв'язки рівняння (4.34).

Приклад: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Розв'язання: Центр кривої в точці $C(-1; -1)$, $\Delta = -64$, $\alpha = 45^\circ$ – кут повороту системи координат, $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$. Запишемо рівняння головних осей, знайшовши спочатку k : $k^2 - 1 = 0$, звідки $k = \pm 1$. Тоді

$$d_1: y + 1 = x + 1; \quad d_2: y + 1 = -x - 1; \quad \text{або}$$

$$d_1: x - y = 0; \quad d_2: x + y - 2 = 0.$$

4.3.8 Характеристичне рівняння кривої другого порядку

Відшукування головних напрямів

Головний діаметр має рівняння

$$\ell F_x + m F_y = 0,$$

де $\vec{p}(\ell; m)$ – головний напрям перпендикулярний до головного діаметра.

Запишемо це рівняння в розгорнутому вигляді:

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{21}\ell + a_{22}m)y + c = 0.$$

Це загальне рівняння прямої виду $Ax + By + C = 0$. Звідси

$$k_d = -\frac{a_{11}\ell + a_{12}m}{a_{21}\ell + a_{22}m} \quad (4.35):$$

Нормальний вектор до діаметра $\vec{n}$ матиме координати $(A;B)$. Так як $\vec{n} \parallel \vec{p}$, то координати пропорційні

$$\lambda = \frac{a_{11}\ell + a_{12}m}{\ell} = \frac{a_{21}\ell + a_{22}m}{m}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\ell + a_{12}m &= 0, \\ (a_{22} - \lambda)m + a_{21}\ell &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Для відшукування ℓ ; m розв'яжемо систему (α) двох однорідних рівнянь з двома невідомими ℓ ; m . Щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $\det = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Це характеристичне рівняння.

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0 \quad (4.37')$$

Розв'язавши його, ми знайдемо два значення λ .

Теорема 4.17. Корені характеристичного рівняння дійсні для будь-якої кривої другого порядку.

Доведення. Дійсно,

$$D = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4(a_{11}a_{22}) + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Теорема доведена.

Щоб знайти ℓ і m , скористаємося системою (α) . Поділимо кожне рівняння на ℓ , отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) + ak_{12} = 0, \\ a_{12} + (a_{22} - \lambda)k = 0. \end{cases}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт головного напрямку $k = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}$ або $k = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}$.
 Знайшовши два значення λ з рівняння (4.37') ми отримаємо два головні напрями кривої.

4.3.9 Інваріанти лінії другого порядку

Ми неодноразово бачили, що одна і та ж крива в залежності від вибору системи координат буде мати різні рівняння, тобто різні коефіцієнти в квадратному рівнянні. Виникає питання: як же ці коефіцієнти задають криву? Виявляється, що хоч самі коефіцієнти різні відносно різних систем координат, значення окремих виразів, складених з цих коефіцієнтів, не залежать від вибору системи координат, тобто є *інваріантами* кривої при перетворенні прямокутної системи координат.

I. Інваріанти перенесення початку

Нехай відносно XOY задана крива $2F(x, y) = 0$ своїм загальним рівнянням. Виконаємо перенесення початку в точку (x_0, y_0) за формулами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0; \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$

Як ми вже знаємо, тоді рівняння цієї кривої матиме вигляд:

$$a_{11}(x')^2 + 2a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a_{22}(y')^2 + 2F_{x_0}x' + 2F_{y_0}y' + 2F(x_0; y_0) = 0$$

Легко бачити, що тут інваріантами є коефіцієнти при старших членах і, отже, вирази I_1, I_2 – інваріанти:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; \quad I_2 = \delta. \quad (4.38)$$

Доведемо, що $I_3 = \Delta$ – третій інваріант.

Дійсно,
$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_{x_0} \\ a_{21} & a_{22} & F_{y_0} \\ F_{x_0} & F_{y_0} & 2F(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Перший стовпець домножимо на x_0 , другий – на y_0 і віднімаємо від третього. Одержимо:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ F_{x_0} & F_{y_0} & 2F(x_0; y_0) - F_{x_0} - F_{y_0} \end{vmatrix} = \\ & = 2F(x_0; y_0) = x_0 F_{x_0} + y_0 F_{y_0} + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = \\ & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ F_{x_0} & F_{y_0} & a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \end{aligned}$$

Перший рядок домножимо на x_0 , другий на y_0 і віднімемо від третього рядка.

II. Інваріанти повороту осей

Нехай відносно системи координат XOY задана $\gamma: 2F(x, y) = 0$. Повернемо осі на кут α за формулами:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Підставимо значення x, y в загальне рівняння. Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \gamma: a_{11}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ & + a_{22}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2a_{13}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2a_{23}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Запишемо нові коефіцієнти отриманого рівняння:

$$a'_{11} = a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha;$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha.$$

Звідси $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$.

Отже, $I_1 = a_{11} + a_{22}$.

Легко показати, що $I_2 = \delta$ – інваріант.

$$\begin{aligned} & \text{Оскільки, } a'_{12} = -2a_{11} \cos \alpha \sin \alpha + 2a_{12} \cos^2 \alpha - 2a_{12} \sin^2 \alpha + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = \\ & = -a_{11} \sin 2\alpha + 2a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + a_{22} \sin 2\alpha = \sin 2\alpha (a_{22} - a_{11}) + 2a_{12} \cos 2\alpha; \end{aligned}$$

$$a'_{11} \cdot a'_{22} = a_{11}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{22}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - a_{12}^2 \sin^2 2\alpha - a_{11} a_{12} \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \\ + a_{11} a_{22} + a_{22} a_{12} \sin 2\alpha \cos 2\alpha,$$

то простим обчисленням доводимо також, що $I_3 = \Delta$.

Отже, інваріанти повороту осей

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \delta, \quad I_3 = \Delta, \quad I_4 = a_{33}. \quad (4.39)$$

III. *Інваріанти перетворення координат* (спільні для I і II випадків):

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \delta, \quad I_3 = \Delta.$$

$$I_4 = \lambda_1, \quad I_5 = \lambda_2.$$

Зауваження. В характеристичному рівнянні

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0$$

коефіцієнти є інваріантами:

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \quad (4.40)$$

а, отже, інваріантами є і корені цього квадратного рівняння.

Теорема 4.18. Якщо осі координат повернути так, щоб вони мали головний напрям, то в новому рівнянні лінії при квадратах змінних будуть корені характеристичного рівняння.

Доведення. Повернемо осі, щоб вони мали головний напрям, тоді

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a'_{11} - \lambda)(a'_{22} - \lambda) = 0 \Rightarrow a'_{11} = \lambda, a'_{22} = \lambda.$$

Теорема доведена.

Як наслідок можна сформулювати такі твердження.

1. *Теорема.* Якщо осі координат мають головний напрям відносно центральної кривої, то в її рівнянні обов'язково є квадрати обох змінних.

Дійсно, нехай $\mathcal{V}$ – центральна, тоді

$$\delta' = \delta \neq 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \delta = 0.$$

Так як $\delta \neq 0$, то рівняння має точно два розв'язки.

2. Якщо лінія *нецентральна*, то її рівняння відносно головних напрямів має квадрат тільки однієї змінної.

Дійсно, так як $\delta = 0$, то характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda = 0$$

має один корінь, рівний нулю:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

4.3.10 Зведення до канонічного виду рівняння ліній другого порядку за допомогою інваріантів. Класифікація ліній

Центральні криві

Теорема 4.19. Існує п'ять і тільки п'ять центральних ліній другого порядку.

Доведення. Нехай дана крива $\gamma: 2F(x, y) = 0$ – центральна, тобто $\delta' = \delta \neq 0$. Перенесемо початок координат в її центр. Як ми вже знаємо, отримаємо рівняння $\gamma: a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a'_{22}(y')^2 + 2F(x_0; y_0) = 0$ лінії.

Повернемо осі так, щоб вони мали головний напрям:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2F(x_0; y_0) = 0.$$

Покажемо як, користуючись інваріантом Δ , обчислити вільний член:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2F \end{vmatrix} = \Delta, \quad \text{тобто } \lambda_1 \lambda_2 2F = \Delta. \quad \text{Звідси} \quad 2F = \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \text{де} \quad \delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \delta.$$

Остаточно, вільний член

$$2F(x_0; y_0) = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (4.41)$$

Канонічне рівняння центральної кривої γ :

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (4.42)$$

Дослідження:

I. $\Delta \neq 0$, тоді рівняння (4.42) можемо записати у вигляді:

$$\frac{\frac{x^2}{-\Delta}}{\lambda_1 \delta} + \frac{\frac{y^2}{-\Delta}}{\lambda_2 \delta} = 1 \quad (4.42')$$

Можливі такі і тільки такі випадки:

1) обидва знаменники додатні, тоді рівняння (4.42') має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ тобто задає еліпс.}$$

2) обидва знаменники від'ємні, тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{— це порожня множина або уявний еліпс.}$$

3) один знаменник “+” інший “-”, тоді не порушуючи загальності отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{— гіпербола.}$$

Очевидно, інших випадків тут не існує.

II. $\Delta = 0$.

Тоді рівняння (4.42) записуємо:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = 0 \quad (4.43)$$

Тут можливі такі і тільки такі два випадки:

4) корені характеристичного рівняння різних знаків, тоді

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2}x + \sqrt{b^2}y)(\sqrt{a^2}x - \sqrt{b^2}y) = 0.$$

Крива розпадається на дві дійсні прямі, що перетинаються.

5) корені характеристичного рівняння одного знаку.

Нехай для означеності додатні, тоді

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0.$$

Цьому рівнянню задовольняє тільки одна точка — центр кривої.

Прийнято вважати, що це дві уявні прямі, які перетинаються в дійсній точці.

Інших випадків не існує. *Теорема доведена.*

Нецентральні криві

Теорема 4.20. Існує чотири і тільки чотири види нецентральних ліній другого порядку.

Доведення. Нехай $\gamma: 2F(x, y) = 0$ – нецентральна, тобто $\delta = 0$.

а) Повернемо осі координат так, щоб вони мали головний напрям; тоді, так як

$$\delta = \delta' = 0 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \text{ то } \lambda_1 \lambda_2 = 0 \text{ і, отже, } \lambda_1 = 0 \text{ або } \lambda_2 = 0.$$

І, нехай $\Delta \neq 0$. Тоді легко бачити, що в отриманому рівнянні крім того, що відсутній квадрат однієї із змінних, буде присутній лінійний член другої змінної, відмінної від присутньої. Нехай, для означеності, після повороту осей маємо

$$\lambda(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \text{ причому } \lambda \neq 0.$$

Доведемо, що $a'_{13} \neq 0$, так як $\Delta \neq 0$. Дійсно,

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -\lambda(a'_{13})^2 \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \text{ тоді } a'_{13} \neq 0.$$

б) Виділимо повний квадрат при y , все інше перенесемо вправо і винесемо за дужки $2a'_{13}$:

$$\lambda \left(y' + 2 \frac{a'_{13}}{\lambda} \right)^2 = 2a'_{13}(x' + c) \quad . \text{ Остаточню}$$

$$\lambda(y'')^2 = 2a'_{13}x'' \tag{4.44}$$

Очевидно, це парабола і інших випадків не існує.

в) $\Delta = 0$, тоді $a'_{13} = 0$. Рівняння після повороту осей набере вигляду

$$\lambda(y')^2 + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Виділимо повний квадрат

$$\lambda \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda} \right)^2 = \frac{a'_{23}}{\lambda} - a_{33}.$$

Виконаємо перенесення початку за формулами

$$\begin{cases} x = x'' + 0 \\ y = y'' - \frac{a'_{23}}{\lambda} \end{cases}$$

в новій системі координат $\gamma: \lambda(y'')^2 = a$.

Тут можливі такі три випадки:

1) $\frac{a}{\lambda} > 0$, тоді $\frac{a}{\lambda} = y^2$, тоді якщо $\frac{a}{\lambda} > 0$, то $\frac{a}{\lambda} = c^2$. Звідси $y^2 - c^2 = 0$, тобто $(y - c)(y + c) = 0$ – дві паралельні прямі.

2) $\frac{a}{\lambda} < 0$, тоді $y^2 + c^2 = 0$ – немає дійсних точок, які б задовольняли це рівняння, дві уявні прямі.

3) $\frac{a}{\lambda} = 0$ ($a = 0$), тоді $y^2 = 0$, тобто $y = 0$, $y = 0$. Дві прямі співпадають.

Інших випадків, очевидно, не існує.

Теорема доведена.

Покажемо, як за допомогою інваріантів записати канонічне рівняння параболи, тобто як знайти a'_{13} . Обчислимо Δ :

$$\Delta = \Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a'_{13})^2 \lambda.$$

Отже, $a'_{13} = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda}}$. Остаточно, канонічне рівняння параболи:

$$\lambda y^2 = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda}} x \quad (4.45)$$

Наслідок. Існує дев'ять і тільки дев'ять ліній другого порядку.

Розділ V. ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ

5.1 Метод координат у просторі

5.1.1 Афінна система координат у просторі

В розглянутих двовимірному та тривимірному векторних просторах положення вектора визначалося його координатами однозначно, якщо вектор – елемент фактор-множини. Зараз переходимо до вивчення звичайного, так званого евклідового, тривимірного простору, в якому крім векторів будуть і точки. І положення точки в просторі(на площині) визначається її координатами відносно системи координат $oxuz$ (oxy).

Афінною системою координат у просторі $oxuz$ називається упорядкована трійка некомпланарних осей, які перетинаються в одній точці. Точка O – початок координат, вісь ox - абсцис, oy - ординат, oz - аплікат. Масштаб вздовж осей, взагалі кажучи, різний.

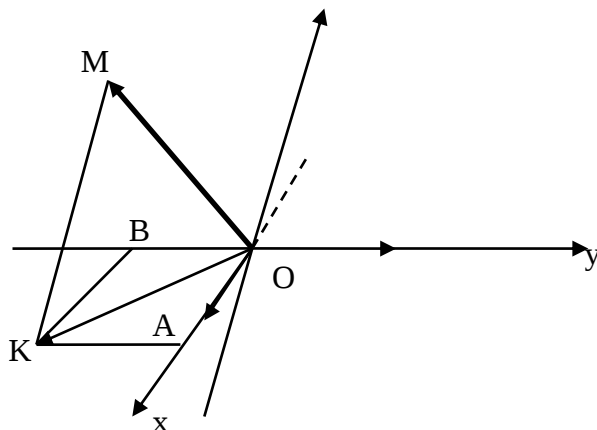


Рис. 5.1

Координати вектора відносно $oxuz$

Координатами вектора $\vec{a}$ відносно $oxuz$ будемо називати його координати відносно відповідного векторного базису, яким задається система координат $oxuz$. Тобто

$$\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (5.1)$$

Нехай M - довільна точка простору, відмінна від точки O . Вектор $\overrightarrow{OM}$ будемо називати *радіус-вектором* точки M .

Координатами довільної точки M називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

$$\text{Тобто точка } M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3. \quad (5.2)$$

Координати вектора через координати його кінців

Нехай $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Доведемо, що $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Дійсно,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

де $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{OA}(x_1, y_1, z_1)$,

Запишемо різницю цих векторів у координатах і отримаємо

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \quad (5.3)$$

тобто координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходимо як координати різниці векторів

$$\overrightarrow{OB}(x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{OA}(x_1, y_1, z_1),$$

Координатні осі ox , oy і oz розбивають простір на 8 частин – **октантів** (рис.5.2) .

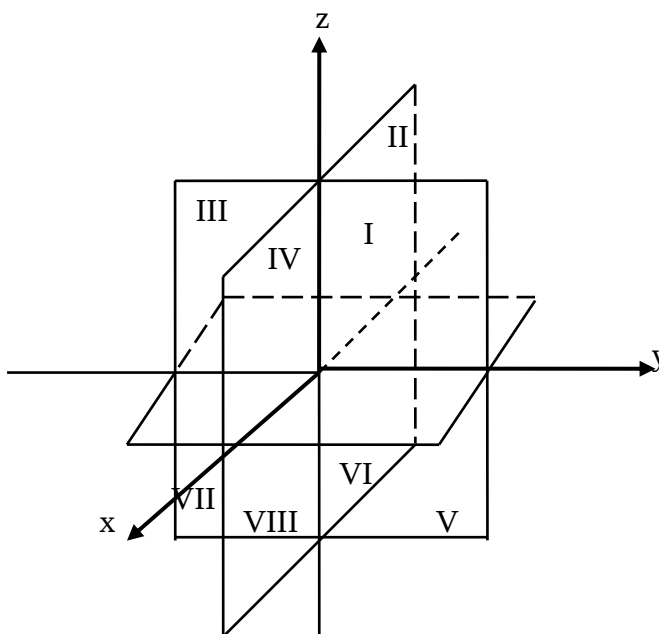


Рис.5.2

Координати точок, в залежності від октантів, будуть мати відповідні знаки.

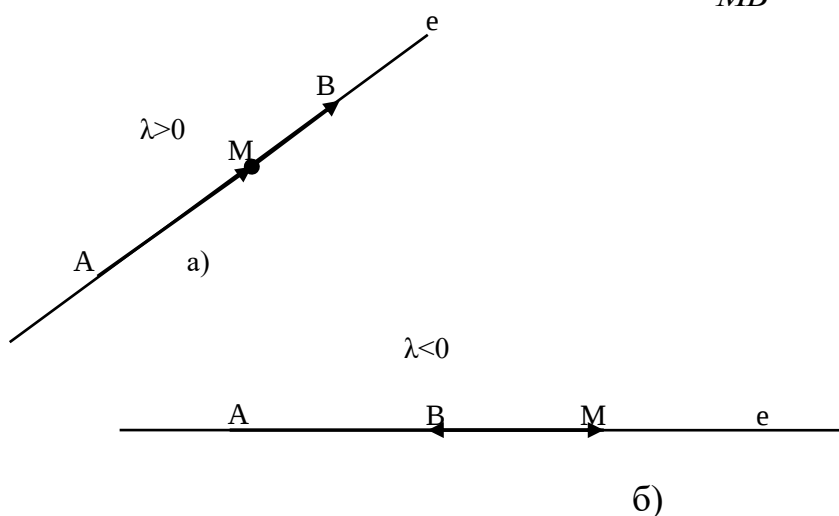
Октанти координат	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

5.1.2 Основні задачі афінної системи координат. Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай на прямій α задано відрізок AB і точку M на цій прямій.

Ми будемо говорити, що точка ділить відрізок у відношенні λ , якщо виконується умова

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$



а) Якщо точка M лежить між точками A і B , то

$$\overrightarrow{AM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \lambda > 0.$$

(рис.5.3, а). Будемо говорити, що точка M ділить відрізок AB

Рис.5.3

у відношенні λ внутрішнім способом.

б) $\overrightarrow{AM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \lambda < 0$ – зовнішнім способом. (рис.5.3, б)

Нехай точки A і B мають координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, а точка $M(x, y, z)$ ділить відрізок AB у відношенні λ .

Доведемо, що координати точки M обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (5.4)$$

Дійсно, за означенням $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

Тоді $\overrightarrow{AM}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$,

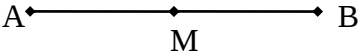
$\overrightarrow{MB}(x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$,

Рівні вектори $\lambda \overrightarrow{MB}(\lambda(x_2 - x); \lambda(y_2 - y); \lambda(z_2 - z))$.
мають рівні

відповідні координати, тобто

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1). \end{cases} \quad \text{звідки отримуємо формули (5.4).}$$

Координати середини відрізка

А  В Координати середини відрізка - точки М (рис.

5.4) знайдемо з формули (4.4), підставивши ,

Рис. 5.4

$\lambda = 1$. Так як

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = 1,$$

то отримаємо $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (5.5)$

Отже, координати середини відрізка є середнім арифметичним координат кінців.

Задачі на паралельність векторів, прямих, площин

Розв'язання такого типу задач ґрунтується на необхідній і достатній умовах колінеарності векторів:

(5.6)

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \parallel \vec{b}(x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Задачі на компланарність векторів

Такого типу задачі розв'язуються, використавши необхідну і достатню умови компланарності векторів.

У застосуваннях аналітичної геометрії в переважній більшості використовується афінна та прямокутна декартова системи координат.

5.1.3 Прямокутна декартова система координат

У афінній системі координат ми не розв'язували метричних задач, так як масштаб вздовж осей різний. Такі задачі можна розв'язувати у декартовій системі.

Прямокутною декартовою системою координат називається така афінна система $oxyz$, в якій осі взаємно перпендикулярні і масштаб вздовж осей один і той же.

Репер прямокутної декартової системи координат позначається $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Так як ця система є одночасно і афінною, то в ній розв'язуються всі афінні задачі і, крім того, всі метричні, а саме:

Довжина відрізка (відстань між точками)

За означенням будемо вважати, що відстань між двома точками

$$\rho(A, B) = AB = |\overrightarrow{AB}| \quad (5.7)$$

Нехай дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

За формулою довжини вектора матимемо

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5.8)$$

Площа фігури. Площа трикутника

Нехай задано ΔABC координатами своїх вершин $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ (рис.4.5). Площу трикутника можемо знайти

за формулою $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$.

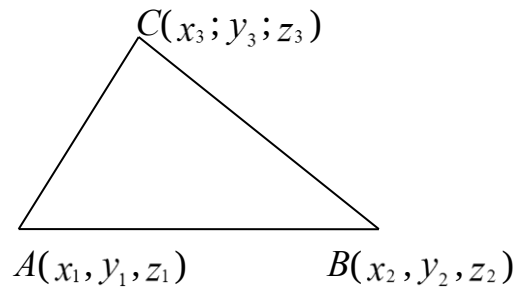


Рис.5.5

Знайдемо координати векторів

$$\begin{aligned}\vec{AB} & (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \\ \vec{AC} & (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).\end{aligned}$$

і за формулою обчислення векторного добутку отримаємо

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

Розклавши визначник (5.9) за елементами першого рядка $\vec{i}$, користуючись тим, що довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат, отримаємо

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} \quad (5.10)$$

Об'єм

Об'єм тетраедра $A_1A_2A_3A_4$, якщо задані координати його вершин $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3), A_4(x_4; y_4; z_4)$, обчислюємо за формулою

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

5.2. Площина у афінній системі координат

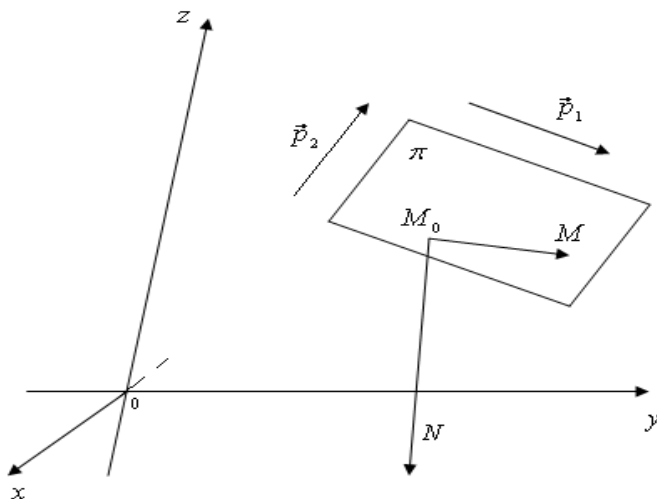
У курсі геометрії поняття «площина» є основним, воно не означається, але аксіома стверджує, що три точки, які не лежать на одній прямій, єдиним способом визначають площину, або пряма і точка, що не лежить на ній. Площину можна задавати й іншими способами. Так, як ми це робили для випадку прямої на площині. І в залежності від того, як задана площина ми отримуватимемо різні її рівняння.

5.2.1 Канонічне рівняння площини

Площина задана двома не нульовими не колінеарними напрямними векторами $\vec{p}_1\{e_1; m_1; n_1\}$ і $\vec{p}_2\{e_2; m_2; n_2\}$. ($\vec{p}_1$ не паралельний $\vec{p}_2$) і точкою

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис.5.6). Скласти

її рівняння .



1. –

2. $M(x; y; z)$ - біжуча

3. Вектори

$\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ $\vec{p}_1, \vec{p}_2$
компланарні

Рис.5.6

4. За необхідною і достатньою умовою компланарності векторів

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ e_1 & m_1 & n_1 \\ e_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

Очевидно, це рівняння першого степеня.

6. Нехай точка $N(x_1; y_1; z_1) \in \pi$, то тоді $\overrightarrow{M_0 N}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ - не компланарні і не виконується (5.12). Отже, (5.12) є рівнянням площини, яке називають канонічним.

Приклад. Через точки $A(1;1;2), B(-1;0;1)$ провести площину $\pi \parallel OX$.

Розв'язання. За точку M_0 візьмемо точку B , за напрямні вектори

$$\vec{p}_1 = \overrightarrow{AB} \{-2; -1; -1\}; \text{ або } \{-2; -1; -1\} \parallel \{2; 1; 1\} \text{ та } \vec{p}_2 = \vec{e}_1 \{1; 0; 0\}$$

Скористаємося (4.12):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{y - z + 1 = 0};$$

5.2.2 Площина задана трьома точками

Дано точки $A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2); C(x_3; y_3; z_3)$. Записати рівняння площини, яка визначається цими точками.

Скористаємося канонічним рівнянням площини (5.12), покладаючи

$$M_0 = A; \quad \vec{p}_1 = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{p}_2 = \overrightarrow{AC}.$$

Отримаємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

5.2.3 Параметричне рівняння площини

1. Як і в п.5.2.1 площина задана точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і двома напрямними векторами $\vec{p}_1 \{l_1; m_1; n_1\}; \vec{p}_2 \{l_2; m_2; n_2\}$; причому $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ не

паралельні.

2. Візьмемо біжучу точку $M(x; y; z)$.

3. $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$; вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ - компланарні, а отже вони лінійно залежні, тобто $\exists \alpha, \beta, \gamma$ серед яких хоча б одне відмінне від 0, так що виконується рівність $\alpha \cdot \overrightarrow{M_0M} + \beta \cdot \vec{p}_1 + \gamma \cdot \vec{p}_2 = 0$.

Стверджуємо, що $\alpha \neq 0$, бо в супротивному випадку вектори $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$ - лінійно залежні

Отже, на α можна ділити обидві частини рівності:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M} &= -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \vec{p}_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \\ \overrightarrow{M_0M} &= t_1 \cdot \vec{p}_1 + t_2 \cdot \vec{p}_2\end{aligned}$$

Запишемо у координатах:

$$\begin{aligned}t_1 \vec{p}_1 &\{t_1 \cdot l_1; \quad t_1 \cdot m_1; \quad t_1 \cdot n_1\} \\ t_2 \vec{p}_2 &\{t_2 \cdot l_2; \quad t_2 \cdot m_2; \quad t_2 \cdot n_2\}\end{aligned}$$

Координати суми векторів дорівнюють сумі відповідних координат, а рівні вектори мають рівні координати, тоді

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t_1 \cdot l_1 + t_2 \cdot l_2; \\ y &= y_0 + t_1 \cdot m_1 + t_2 \cdot m_2; \\ z &= z_0 + t_1 \cdot n_1 + t_2 \cdot n_2.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Рівняння (5.14) - параметричне і з нього бачимо, що площина є двопараметричним геометричним об'єктом.

5.2.4 Загальне рівняння площини

Теорема 5.1. Множина точок простору, координати яких задовольняють

загальне рівняння виду

$$S: Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5.15)$$

у якому хоча б один із коефіцієнтів при змінних відмінний від нуля, є площина з напрямними векторами.

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 \{-B; A; 0\} \\ \vec{p}_2 \{-C; 0; A\} \\ \vec{p}_3 \{0; -C; B\} \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Доведення. Рівняння (5.15) задає деяку поверхню S . Доведемо, що це площина π . Для цього скористаємося коефіцієнтами рівняння (5.15) і побудуємо точку та два не колінеарні вектори. Нехай для означеності $A \neq 0$,

тоді побудуємо точку $M_0\left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$ і напрямні вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ за формулами (α) і запишемо канонічне рівняння площини π з точкою M_0 і векторами $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$$

Обчислимо визначник, розклавши за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \cdot \left(x + \frac{D}{A}\right) + \begin{vmatrix} 0 & -B \\ A & -C \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} -B & A \\ -C & 0 \end{vmatrix} \cdot z = 0;$$

Отримуємо

$$A^2 \cdot x + AD + AB \cdot y + AC \cdot z = 0;$$

Поділимо обидві частини рівняння на A і будемо мати

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0: S$$

Доведемо, що і $\vec{P}_3$ також є напрямним для π . А для цього досить переконатися в тому що всі ці три вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ - компланарні, тобто виконується умова компланарності:

$$\begin{vmatrix} -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \\ 0 & -C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ -C & B \end{vmatrix} \cdot (-B) + \begin{vmatrix} A-C \\ B & 0 \end{vmatrix} \cdot A + \begin{vmatrix} -C & 0 \\ 0 & -C \end{vmatrix} \cdot 0 = -ABC + ABC = 0$$

5.2.5 Рівняння площини у «відрізках» на осях

Нехай площина π перетинає всі три координатні осі і відтинає від них, рахуючи від початку координат, «відрізки» a, b, c (рис.5.7). Скласти рівняння площини.

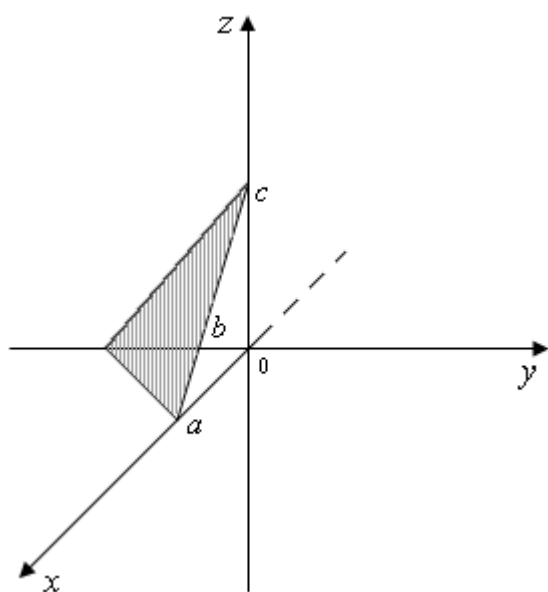


Рис. 5.7

Тоді ця площина проходить через точки :

$$A(a; 0; 0)$$

$$B(0; b; 0)$$

$$C(0; 0; c)$$

Скористаємося (5.12):

$$M_0 = A(a; 0; 0)$$

$$\vec{p}_1 = \overrightarrow{AB} = \{-a; b; 0\}$$

$$\vec{p}_2 = \overrightarrow{AC} = \{-a; 0; c\}.$$

Рівняння набере вигляду

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \cdot (x-a) + \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \cdot z = 0;$$

або

$$bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z = abc;$$

Поділимо обидві частини рівняння на abc :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5.16)$$

Цим рівнянням зручно користуватися при зображенні площини в системі координат.

Приклад. Зобразити у системі координат площину, задану рівнянням $3x + 2y - z + 6 = 0$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у «відрізках» на осях:

$$3x + 2y - z = -6$$

$$\frac{3x}{-6} + \frac{2y}{-6} - \frac{z}{-6} = 1;$$

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{-6} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{-1} = 1;$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{6} = 1.$$

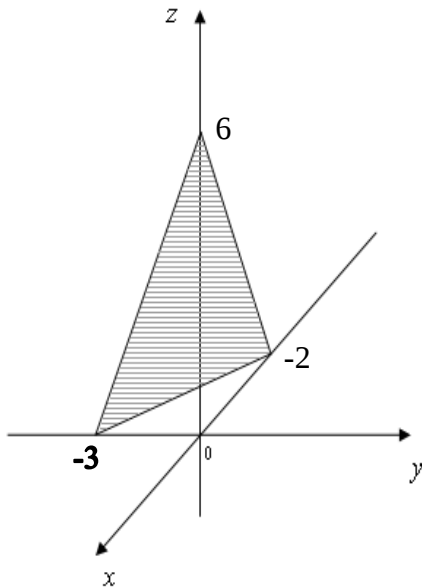


Рис. 5.8

Позначаємо на осі ox «відрізок» $a = -2$, на осі oy $b = -3$, на осі oz $c = 6$ (рис.5.8). Ці три точки на осях координат однозначно визначають задану площину.

5.2.6 Необхідні і достатні умови паралельності вектора і площини

Теорема 5.2. Для того, щоб вектор $\vec{P}$ з координатами $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ був паралельний площині $\pi: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0 \quad (5.17)$$

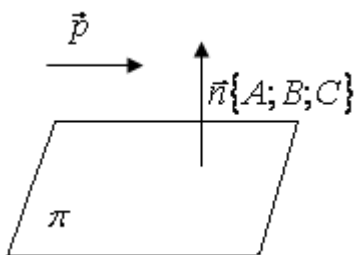


Рис.5.9

Доведення. Нехай вектор $\vec{P} \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ паралельний площині $\pi: A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$

Для прямокутної декартової системи координат (рис.5.9).

для афінної системи координат (рис.5.10)

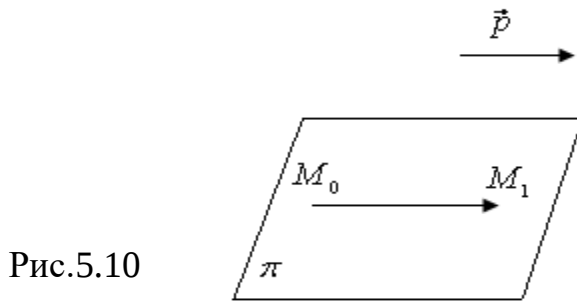


Рис.5.10

Необхідність. Нехай $\vec{P} \parallel \pi$. У

площині π візьмемо точку M_0 і побудуємо $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{P}$. Так як $\vec{P} \parallel \pi$, то $M_1 \in \pi$. Отже, координати точки M_1 задовольняють рівнянню π .

З того, що $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{P} \quad (\overrightarrow{M_0M_1} \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\} \quad \vec{P} \{\alpha, \beta, \gamma\})$

а рівні вектори мають рівні відповідні координати, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha \\ y_1 = y_0 + \beta \\ z_1 = z_0 + \gamma \end{cases} \quad (\beta)$$

$(x_1; y_1; z_1)$ задовольняють рівнянню π , тобто

$$A(x_0 + \alpha) + B(y_0 + \beta) + C(z_0 + \gamma) + D = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_0 + A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Отже, виконується (5.17).

Достатність. Виконується (5.17). Доведемо, що $\vec{P} \parallel \pi$.

Побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{P}$. Покажемо, що $M_1 \in \pi$, тобто доведемо, що

$(x_1; y_1; z_1)$ задовольняють рівнянню π , якщо справедливо (5.17).

$$\text{Дійсно:} \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A(x_0 + \alpha) + B(y_0 + \beta) + C(z_0 + \gamma) + D =$$

$$\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_0 + \underbrace{A\alpha + B\beta + C\gamma}_0 = 0 + 0 = 0.$$

Що й треба було довести.

5.2.7 Розміщення площини відносно системи координат

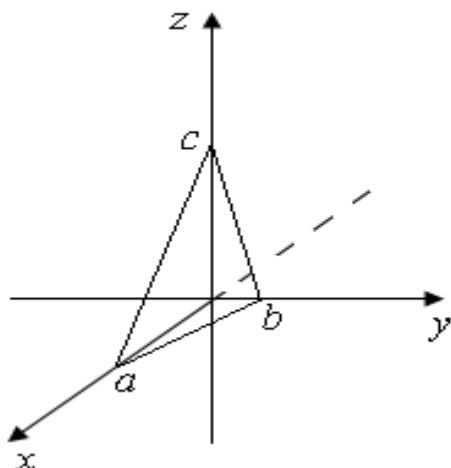
Як і для випадку прямої на площині, залежно від коефіцієнтів загального рівняння площина може бути по-різному розміщена відносно системи координат. Розглянемо можливі випадки такого розміщення.

- 1) Нехай всі коефіцієнти у загальному рівнянні площини відмінні від нуля

$$A \neq 0, C \neq 0, B \neq 0, D \neq 0,$$

тоді, записавши рівняння площини у

«відрізках» на осях, переконуємося у тому, що площина перетинає всі координатні осі, оскільки жоден із «відрізків» не дорівнює нулю:



$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

Введемо для зручності позначення :

$$\frac{-D}{A} = a; \frac{-D}{B} = b; \frac{-D}{C} = c \quad (\text{рис.5.11}).$$

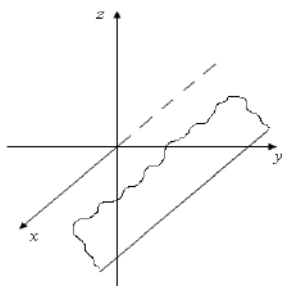
Рис. 5.11

Площина перетинає всі

координатні осі

- 2) **Теорема 5.3.** Для того, щоб площина π була паралельна осі ox

(рис.5.12) необхідно і достатньо, щоб $A = 0$.



Доведення . Якщо $D \neq 0$, то у формулі (α)

покладемо $A \rightarrow 0$, тоді $a \rightarrow \infty$ і очевидно, що π паралельна $0x$. Але якщо $D = 0$, то такі міркування не придатні.

Рис.5.12

Необхідність. Нехай π паралельна $0x \Leftrightarrow \pi$ паралельна $\vec{l}_1(1,0,0)$ і отже виконується (5.17) $A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Достатність. Нехай $A = 0$, тоді $\pi: 0 \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$

Запишемо умову (5.17) для $\pi \perp \vec{l}_1$: $0 \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$; (5.17) виконується.

Аналогічно: 3) $\pi \parallel 0y \Leftrightarrow B = 0$ (рис.5.13). 4) $\pi \parallel 0z \Leftrightarrow C = 0$ (рис.5.14)

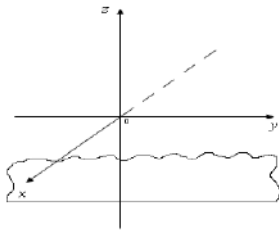


Рис.5.13

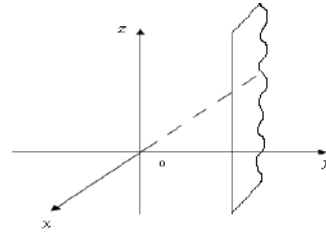


Рис.5.14

5) $\pi \parallel x0y \Leftrightarrow \pi$ паралельна $0x$ і паралельна $0y \Leftrightarrow A = B = 0$ (рис.5.15).

6) $\pi \parallel x0z \Leftrightarrow A = C = 0$. (рис.5.16),

7) $\pi \parallel y0z \Leftrightarrow B = C = 0$ (рис.5.17),

8) $D = 0, Ax + By + Cz = 0$ - площина проходить через початок координат,

9) $A = B = D = 0; Cz = 0, z = 0$ - площина паралельна $x0y$ і проходить через початок, це площина $x0y$,

10) $A = C = D = 0; y = 0$ - площина $x0z$,

11) $B = C = D = 0; x = 0$ - площина $y0z$.

Інших випадків не існує, бо $A = B = C = 0$ не може бути.

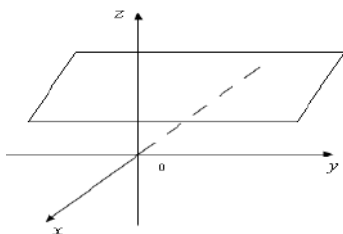


Рис. 5.15

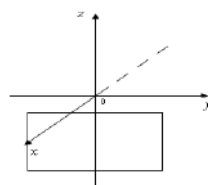


Рис. 5.16

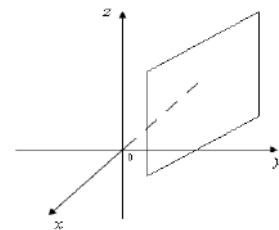


Рис. 5.15

5.2.8 Взаємне розташування двох площин у просторі

Приклад. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x - 7y + z = 0 \\ x + 2y - 14z = 0 \end{cases}$$

Пряма розв'язків, що проходить через початок координат, і є прямою перетину двох площин.

У взаємному розміщенні двох площин простору можливі такі і тільки такі три випадки.

Теорема 5.4. Площина $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ паралельна площині $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (5.18)$$

Доведення. Система координат афінна.

Необхідність. Нехай π_1 паралельна π_2 . Так як площини паралельні, то будь – який напрямний вектор однієї площини буде напрямним і для другої. Для означеності, нехай $A_1 \neq 0$, тоді $\vec{p}_1 \{-B_1, A_1, 0\}, \vec{p}_2 \{-C_1, 0, A_1\}$ – напрямні вектори площини π_1 , а значить $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ паралельні π_2 , бо π_1 паралельна π_2 .

Отже, виконується умова (5.17) для π_2 .

$$\begin{aligned} -A_2 \cdot B_1 + B_2 \cdot A_1 + C_2 \cdot 0 &= 0 & A_2 B_1 &= B_2 A_1 & \Leftrightarrow & \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \\ -A_2 \cdot C_1 + B_2 \cdot 0 + C_2 \cdot A_1 &= 0 & A_2 C_1 &= C_2 A_1 & \Leftrightarrow & \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

і $\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}$, значить виконується (5.18)

Достатність. Нехай виконується (5.18). Доведемо, що π_1 паралельна π_2 . Введемо коефіцієнт пропорційності λ . Із (5.18) матимемо:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda \cdot A_2 \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} &\Leftrightarrow B_1 = \lambda \cdot B_2 \\ C_1 &= \lambda \cdot C_2 \end{aligned}$$

Тоді
$$\pi_1 : \lambda(A_2x + B_2y + C_2z) + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Будь – який $\vec{p}(\alpha, \beta, \gamma)$, який задовольняє (5.17) для однієї площини, буде задовольняти (5.17) і для другої площини. А це рівносильне тому, що π_1

паралельна π_2 .

Теорема доведена.

Теорема 5.5. Для того, щоб дві площини π_1 та π_2 співпадали ($\pi_1 = \pi_2$), необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (5.19)$$

Доведення. Необхідність. Нехай π_1 дорівнює π_2 , то тоді π_1 паралельна π_2 і виконується (5.18). І, крім того, будь-яка точка M однієї площини буде точкою і другої площини.

Нехай для означеності $A_1 \neq 0$. Тоді точка $M\left(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0\right) \in \pi_2 \Leftrightarrow$

$$A_2 \cdot \frac{-D_1}{A_1} + B_2 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + D_2 = 0; \Leftrightarrow -A_2 \cdot D_1 + A_1 \cdot D_2 = 0; \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Враховуючи (5.18) отримаємо (5.19).

Достатність. Нехай виконується (5.19). Доведемо, що площини співпадають. У (4.19) введемо коефіцієнт пропорційності λ . Отримаємо

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda \cdot A_2 \\ B_1 &= \lambda \cdot B_2 \\ C_1 &= \lambda \cdot C_2 \\ D_1 &= \lambda \cdot D_2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\pi_1 : \lambda(A_2x + B_2y + C_2z) + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Будь – яка точка, координати якої задовольняють одному із рівнянь, будуть задовольняти і другому рівнянню. Отже, площини співпадають.

Теорема доведена.

Теорема 5.6. Якщо π_1 не паралельна π_2 , то вони перетинаються по прямій з напрямним вектором.

$$\vec{p} \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (5.20)$$

Доведення . Розглянемо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Так як площини не паралельні, то не виконується (5.18) і, отже, хоча б один із детермінантів другого порядку відмінний від нуля.

Нехай для означеності $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

У системі покладемо $z = 0$. Отримаємо систему двох рівнянь з двома

невідомими $\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$ і так як відповідні площини не паралельні, то існує єдина точка - розв'язок системи.

Нехай це точка $M_0(x_0, y_0, 0) \in \pi_1$ і належить π_2 , тобто спільна точка двох площин. Через цю точку проведемо пряму, паралельну вектору $\vec{p}$:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Легко переконатися, що $\vec{p}$ паралельний π_1 і $\vec{p}$ паралельний π_2 . Дійсно, виконується умова паралельності (5.17):

$\vec{p}$ паралельний π_1

$$\begin{aligned} & (B_1C_2 - B_2C_1) \cdot A_1 + (A_2C_1 - A_1C_2) \cdot B_1 + (A_1B_2 - A_2B_1) \cdot C_1 = \\ & = A_1B_1C_2 - A_1B_2C_1 + A_2B_1C_1 - A_1B_1C_2 + A_1B_2C_1 - A_2B_1C_1 = 0 \end{aligned}$$

Аналогічно для π_2 .

Отже, вектор $\vec{P}$ паралельний кожній із площин і проходить через точку цієї площини, то він належить площині. І, отже, пряма, якій належить $\vec{P}$, належить обом площинам. Отже, ця пряма є лінією перетину площин.

Зауваження. Послідовність міркувань при доведенні теореми 3 визначає спосіб розв'язання задач типу: звести рівняння прямої, заданої як перетин двох площин, до канонічного виду.

5.2.9 Пучок площин

Пучком площин називається сукупність площин, які проходять через одну і ту ж пряму простору. Спільна пряма називається *віссю* пучка.

Пучок, як правило, задається двома непаралельними площинами. Для означеності нехай це будуть площини

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тоді рівняння пучка: (4.21)

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (5.21)$$

або $\alpha_1 \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \alpha_2 \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$ (5.21)

Легко бачити, що при будь-якому $\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$ ми отримаємо площину, яка проходить через вісь пучка. В тому числі й площини, що задають вісь пучка.

Приклад. Через лінію перетину площин провести площину,

$$4x - y + 3z - 1 = 0$$

$$x + 5y - z = 2 = 0$$

паралельну oz .

Будемо шукати рівняння площини у вигляді пучка

$$\pi : 4x - y + 3z - 1 + \lambda \cdot (x + 5y - z + 2) = 0. \text{ Звідки}$$

$$\pi : (4 + \lambda)x + (5\lambda - 1)y + (3 - \lambda)z - 1 + 2\lambda = 0.$$

$$\pi \text{ паралельна } oz \Leftrightarrow C = 0, \text{ тоді } 3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Рівняння шуканої площини матиме вигляд

$$\pi : 7x + 14y + 5 = 0.$$

5.2.10 Геометричний зміст лінійної нерівності

Теорема 5.7. Множина точок простору, координати яких задовольняють лінійну нерівність $Ax + By + Cz + D > 0$ (< 0), є одним із півпросторів, на які відповідна площина $Ax + By + Cz + D = 0$ розділяє простір.

Доведення цілком аналогічне відповідному доведенню геометричного змісту лінійної нерівності на площині.

Наслідки

1. Для того півпростору, у якому лежить початок координат знак нерівності співпадає із знаком вільного члена. Дійсно $\delta_{(0,0,0)} = D$.
2. Щоб виявити, який з двох півпросторів задає дана лінійна нерівність у випадку якщо $D = 0$, потрібно у фіксованому півпросторі Ω_1 взяти фіксовану точку, для прикладу, $(1,0,0)$ і обчислити $\delta_{(1,0,0)}$. Який знак буде у цього числа, нерівність того сенсу задає даний півпростір Ω_1 .

Приклад. Вияснити геометричний зміст нерівності $x + y - z > 0$.

Розв'язання. Обчислимо $\delta_{(1,0,0)} = 1 > 0$. Нерівність задає той із півпросторів, що містить точку $(1;0;0)$.

5.2.11 Взаємне розміщення трьох площин у просторі

Теорема 5.8. Залежно від коефіцієнтів загального рівняння площин π_1, π_2 і π_3 можливі вісім і тільки вісім взаємних положень їх між собою.

Доведення : Нехай площини π_1, π_2, π_3

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ \pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

задані загальними рівняннями. Розглянемо систему (α) , складену із цих рівнянь.

Можливі такі випадки:

I. Ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної

$$\text{rang}A = \text{rang}B.$$

Тоді система має розв'язки.

II. Ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної

$$\text{rang}A \neq \text{rang}B.$$

Тоді система розв'язків не має.

У першому випадку площини мають спільні точки, у другому випадку ні.

Дослідження.

I. Такі і тільки такі випадки

1. $\text{rang}A = \text{rang}B = 3.$

У системі (α) рівняння лінійно незалежні. Система має єдиний розв'язок, а площини єдину спільну точку.

2. $\text{rang}A = \text{rang}B = 2.$

У системі два лінійно незалежних рівня, тобто дві площини перетинаються по прямій, а третя, або також проходить через цю пряму, або співпадає з однією із площин. Тобто всі три площини мають спільну пряму.

3. $\text{rang}A = \text{rang}B = 1.$

Одне лінійно незалежне рівняння і всі площини мають спільні точки. Всі три площини співпадають $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3.$

Інших випадків не існує.

II. Якщо $\text{rang}A \neq \text{rang}B$, то можливі такі випадки:

$$1. \text{rang} A = 2, \text{rang} B = 3.$$

Система не має розв'язку, площини не мають спільних точок, але так як $\text{rang} A = 2$, то серед цих рівнянь є дві лінійно незалежні і, отже, дві площини з трьох перетинаються по прямій, через яку не проходить третя площина. Тут можливі *два* випадки: або вони перетинаються попарно, або дві площини паралельні, а третя їх перетинає.

$$2. \text{rang} A = 1, \text{rang} B = 2.$$

Одне рівняння лінійно незалежне. Тоді можливі такі *два* випадки: три площини паралельні, або дві співпали, а третя паралельна. Інших випадків не існує.

5.2.12 В'язка площин

В'язкою площин називаються сукупність площин, які проходять через одну і ту ж точку простору, яка називається *центром* в'язки.

I. В'язку можна задавати *координатами центра*.

Наприклад, центром пучка є точка $C(x_0, y_0, z_0)$, тоді рівняння в'язки матиме вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.22)$$

Дійсно, шукаємо рівняння в'язки у вигляді загального рівняння площини

$$\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ \hline A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

Отримаємо рівняння, так як всі площини в'язки проходять через її центр (x_0, y_0, z_0) .

II. В'язку можна задати, як *перетин трьох площин* (система (α)) π_1, π_2 і π_3 . Тоді рівняння в'язки запишемо так

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \alpha \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \beta \cdot (A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \quad (5.23)$$

Приклади. Якщо площина задана точкою і своїми двома елементами, то шукаємо рівняння цієї площини у вигляді в'язки (5.22).

1. Через точку $K(1,2,3)$ провести площину, що належить пучку $3x - 2y + 7z + 11 = 0$.

Розв'язання. Як і у випадку прямої на площині, рівняння шуканої площини записуємо у вигляді $\pi: 3(x-1) - 2(y-2) + 7(z-3) = 0$.

2. Через точку перетину площин $\pi_1: x + 3z = 0$, $\pi_2: x + 7y - 1 = 0$, $\pi_3: z + 4 = 0$ провести площину, паралельну осі oz і, яка проходить через $O(0,0,0)$

Розв'язання. Скористаємося рівнянням (5.23):

$$x + 3z + \alpha \cdot (x + 7y - 1) + \beta \cdot (z + 4) = 0.$$

З умови паралельності осі oz маємо $3 + \beta = 0$; $\beta = -3$.

Оскільки площина проходить через початок координат $O(0;0;0)$, то отримаємо $-\alpha + 4\beta = 0$. Звідси $\alpha = -12$.

Знайдені значення підставляємо у шукане рівняння і отримаємо $x + 7y = 0$.

5.3 Площина у прямокутній декартовій системі координат

5.3.1 Площина задана нормальним вектором і точкою

Задано нормальний вектор $\vec{n}$ площини і деяка її точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Записати рівняння цієї площини.

Нехай $M(x, y, z)$ – біжуча точка площини. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{n}(\alpha, \beta, \gamma) \perp \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Якщо $N \notin \pi$, то $\overrightarrow{M_0N} \perp \vec{n}$ і N не задовольняє (5.24) і воно є рівнянням шуканої площини π .

5.3.2 Геометричний зміст коефіцієнтів при змінних у рівнянні площини

Теорема 5.9. Коефіцієнти A, B, C у загальному рівнянні площини є координатами вектора нормалі цієї площини

$$\vec{n}\{A, B, C\} \perp \pi. \quad (5.25)$$

Доведення. Візьмемо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - дві довільні точки площини, тоді

$$\begin{aligned} & -Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ & \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \vec{n}\{A, B, C\} \perp \overrightarrow{M_1 M_2} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \end{aligned}$$

Так як точки M_1, M_2 довільні, то це означає, що вектор $\vec{n}\{A, B, C\}$ перпендикулярний до будь-якої прямої площини, а значить, вектор перпендикулярний до площини

$$\vec{n}\{A, B, C\} \perp \pi.$$

Теорема доведена.

5.3.3 Нормальне рівняння площини

Площина π задана відстанню від початку координат $p = \rho(0; \pi)$ і кутами α, β, γ які утворюють перпендикуляри, опущені з початку координат на площину, з додатними напрямками координатних осей $OQ \perp \pi$. Записати рівняння площини π .

Візьмемо на перпендикулярі OQ орт $\vec{n} = \vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, причому

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Тоді точка $Q = (p \cdot \cos \alpha; p \cdot \cos \beta; p \cdot \cos \gamma)$. Так як вектор $\overrightarrow{OQ} = p \cdot \vec{l}$.

Скористаємося рівнянням (5.24). Отримаємо

$$\begin{aligned} \cos \alpha (x - p \cdot \cos \alpha) + \cos \beta (y - p \cdot \cos \beta) + \cos \gamma (z - p \cdot \cos \gamma) &= 0 \Leftrightarrow \\ x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

(5.26) називають **нормальним** рівнянням площини.

Зауважимо, що коефіцієнти нормального рівняння площини мають властивості:

$$\begin{aligned} - \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \\ - p &< 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.3.4 Нормування загального рівняння площини

Міркуючи аналогічно як для прямої на площині, помножимо обидві частини загального рівняння площини на нормуючий множник і отримаємо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \quad (5.28)$$

де знак перед радикалом протилежний знаку вільного члена.

Рівняння (5.28) називається **нормованим** рівнянням площини.

5.3.5 Відстань від точки до площини

Нехай площина задана загальним рівнянням $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ їй не належить. Знайдемо відстань від цієї точки до площини, тобто довжину перпендикуляра, проведеного з точки до площини.

Тоді, з одного боку:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_0} \parallel \vec{n} &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) + D - D = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \end{aligned}$$

і, з другого боку: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0} = |\vec{n}| \cdot \rho(M_0, \pi) \cdot \cos 0^\circ$ (або π)

Із цих двох рівностей отримуємо, що відстань від точки до площини знаходимо за формулою

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5.29)$$

Приклад. Тетраедр заданий координатами своїх вершин $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$. Знайти висоту AH .

Розв'язання. Запишемо рівняння площини BCD , заданої трьома точками. $BCD: z - 1 = 0$.

Знайдемо відстань від точки A до площини BCD за формулою (5.29):

$$h = \frac{|z - 1|}{\sqrt{1}} = \frac{3 - 1}{1} = 2.$$

5.3.6 Кут між двома площинами

Теорема 5.10. Якщо площини задані своїми загальними рівняннями, то косинус кута між цими площинами обчислюється за формулою

$$\cos(\pi_1 \wedge \pi_2) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (5.30)$$

Доведення. Під кутом між двома площинами розуміють кут між нормаллями цих площин.

$$\cos(\pi_1 \wedge \pi_2) = \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \text{ що рівносильно (5.30).}$$

Необхідні і достатні умови перпендикулярності площин

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \quad (5.31)$$

Приклад. Через дві точки $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$ провести площину π перпендикулярну до площини $\pi_1: 2x - 3y + 3z + 9 = 0$.

Розв'язання. І спосіб.

Запишемо рівняння площини у вигляді канонічного рівняння:

$$M_0 = B(0;-1;2), \vec{p}_1 = \vec{n}(2;-3;3), \vec{p}_2 = \overrightarrow{AB}\{-1;-2;1\}.$$

Тоді

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \Leftrightarrow 3x - 5y - 7z + 9 = 0$$

ІІ спосіб. Шукаємо рівняння π у вигляді в'язки.

$$A \cdot x + B \cdot (y+1) + C \cdot (z-2) = 0;$$

Знайдемо $A:B:C$. Потрібно дві умови: точки

$$A \cdot 1 + B \cdot (1+1) + C \cdot (1-2) = 0;$$

$$A + 2B - C = 0;$$

умова перпендикулярності

$$2A - 3B + 3C = 0$$

$$B = \frac{5}{7}C; A = -\frac{3}{7}C$$

$$-\frac{3}{7}C \cdot x + \frac{5}{7}C \cdot (y+1) + C(z-2) = 0;$$

$$3x - 5y - 7z + 9 = 0.$$

5.4 Пряма лінія у просторі

5.4.1 Пряма задана напрямним вектором і точкою

Запишемо рівняння прямої у просторі, заданої напрямним вектором

$\vec{p}(l;m;n)$ і точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Скористаємося алгоритмом розв'язування

задач на складання рівнянь. Візьмемо на прямій біжучу точку $M(x, y, z)$

Запишемо основне співвідношення $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, яке у координатах

виражається так:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (5.32)$$

Виявляється, що коли точка M пробігає пряму, то її координати задовольняють (5.32) при кожному своєму положенні.

Виникає питання чи не існують точки, координати яких задовольняють (5.32), але не належать прямій.

Нехай $N_1(x_1; y_1; z_1) \notin \alpha$. Доведемо, що її координати не задовольняють (5.32).

Дійсно, $\overrightarrow{M_0 N_1} \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ не паралельний $\vec{P}$, тобто їх координати не пропорційні.

Отже, координати точка $N_1(x_1; y_1; z_1)$ не задовольняють (5.32), бо не виконується (5.32).

Геометричний зміст рівняння (5.32).

Легко бачити, що (5.32) - це система трьох лінійних рівнянь, кожне з яких задає площину:

$$\alpha; \begin{cases} (x - x_0)m - l(y - y_0) = 0 \\ l(z - z_0) - n(x - x_0) = 0 \\ n(y - y_0) - m(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Кожна з площин паралельна певній координатній осі і проходить через пряму, що визначається рівнянням (5.32).

Іншими словами: кожна з площин проектує дану пряму на відповідну координатну площину.

5.4.2 Параметричне рівняння прямої

Як і в попередньому пункті 5.5.2, пряма задана напрямним вектором і точкою. Запишемо її параметричне рівняння. Можемо так, як для випадку прямої на площині, але можна простіше: у рівнянні (5.32) ввести коефіцієнт пропорційності t :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

і звідси отримати

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases} \quad (5.33).$$

параметричне рівняння прямої.

5.4.3 Пряма задана двома точками

Дано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Запишемо її рівняння.

Скористаємося рівнянням (5.32), взявши в ролі точки M_0 будь-яку із двох даних точок, а напрямного вектора $\vec{p} = \overrightarrow{M_1 M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Тоді будемо мати

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (5.34)$$

5.4.4 Пряма, як перетин двох площин

Якщо дві площини π_1, π_2 , не паралельні, то вони перетинаються по прямій. Рівняння цієї прямої можемо записати у вигляді

$$\alpha: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 : \pi_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 : \pi_2 \end{cases} \quad (5.35)$$

(π_1 не паралельна π_2 – коефіцієнти при змінних не пропорційні).

У багатьох задачах, як в аналітичній геометрії, так і її застосуваннях, треба вміти переходити від (5.35) до канонічного або параметричного, тобто потрібно вміти вибрати фіксовану точку $M_0 \in \alpha$ і напрямний вектор.

Із пункту 5.2.8 напрямний вектор такої прямої визначається за формулою

$$\vec{p} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Покажемо, як взяти фіксовану точку на цій прямій. Так як коефіцієнти при змінних не пропорційні, то хоча б один з визначників другого порядку відмінний від нуля.

Нехай для означеності $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Покладемо в системі (5.35) $x=0$, тоді отримаємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими y і z та розв'яжемо її. Якщо y_0, z_0 – розв'язок, тоді $M_0(0; y_0; z_0)$.

Приклад. Записати канонічне рівняння прямої, заданої як перетин двох площин

$$\alpha: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо координати напрямного вектора цієї прямої за формулою (5.20):

$$\vec{p} = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{9; 5; 1\}$$

Для означеності покладемо у системі рівнянь $y = 0$.

Розв'язавши систему $\begin{cases} 2x - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$, отримаємо точку прямої $M(0; 0; -3)$.

Тепер можемо записати канонічне рівняння даної прямої

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z + 3}{1}.$$

5.4.5 Взаємне розташування двох прямих у просторі

Теорема 5.11. Між двома прямими простору α_1, α_2 можливі чотири і тільки чотири випадки взаємного розміщення.

I. Для того, щоб $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (5.36)

$$\text{Дійсно } \alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow (5.36)$$

(5.36) називають умовою паралельності двох прямих.

$$\text{II. } \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow (5.36) \text{ та } M_1 \in \alpha_2, \text{ або } M_2 \in \alpha_1$$

III. Для того, щоб прямі α_1 і α_2 перетиналися, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.37)$$

причому вважається, що α_1 не паралельна α_2 .

Доведення . Необхідність. Нехай α_1 перетинається з α_2 , тоді дві прямі, що перетинаються єдиним способом визначають площину π .

Розглянемо вектори

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{M_1 M_2} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \\ &\vec{p}_1 \{l_1, m_1, n_1\} \\ &\vec{p}_2 \{l_2, m_2, n_2\} \end{aligned}$$

Вони лежать в одній площині і компланарні, тобто вже виконується (5.37).

Достатність. Нехай виконується (5.37), тоді $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ компланарні. За умовою $\vec{p}_1$ не паралельний $\vec{p}_2$, тому вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ лежать в одній площині і так як $\vec{p}_1$ не паралельний $\vec{p}_2$, то прямі перетинаються.

IV. Існують у просторі прямі, які не паралельні і не перетинаються, Вони називаються **мимобіжними**.

Доведення. Нехай задано дві прямі, кожна як перетин двох площин. Щоб знайти їх спільну точку, треба розв'язати систему чотирьох рівнянь з трьома не відомими x, y, z . А така система, взагалі кажучи, розв'язків не має, бо якщо з цієї системи взяти три рівняння, то можна знайти спільну точку, але вона не задовольняє четверте рівняння. Задовольняти буде лише тоді, коли виконана умова (5.36).

5.4.6 Кут між двома прямими. Умова перпендикулярності двох прямих

Під кутом між двома прямими у просторі розуміють кут між їх напрямними векторами і тому

$$\cos(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (5.38)$$

Із формули (5.38) отримуємо умову перпендикулярності двох прямих

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0 \quad (5.39)$$

5.5 . Пряма і площина у просторі

5.5.1 Взаємне розміщення прямої і площини

Теорема 5.12. Між прямою і площиною можливі три і тільки три випадки взаємного розміщення.

Доведення. Нехай пряма задана канонічним рівнянням, а площина – загальним. Щоб знайти спільну їх точку треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \end{cases}.$$

Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді і підставимо знайдені вирази для x, y, z у рівняння площини

$$A(x_0 + l \cdot t) + B(y_0 + m \cdot t) + C(z_0 + n \cdot t) + D = 0.$$

Маємо рівняння з одним невідомим параметром t , розв'язком якого є

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n} \quad (\beta) \quad (5.40)$$

Дослідження.

I. Знаменник формули $(\beta) \neq 0$, тоді знайдемо одне і тільки одне значення

t , підставимо в параметричне рівняння прямої і знайдемо одну лише точку перетину.

$$\text{II. } A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0, \text{ а } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \text{ тобто}$$

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (5.40)$$

$t = \infty$, не існує спільної точки, α паралельна π .

Умова (5.40) називається умовою паралельності прямої і площини.

$$\text{III. } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \text{ а } Al + Bm + Cn = 0$$

Пряма паралельна площині π і точка прямої $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить у площині. У цьому випадку пряма повністю належить площині.

5.5.2 Кут між прямою і площиною

Під кутом між прямою і площиною розуміють кут між прямою та її проекцією на площину.

Ми можемо знайти кут α між відомими нам векторами за умовою - вектором нормалі площини та напрямним вектором прямої. Цей кут є доповняльним кутом до прямого для шуканого кута. Тому матимемо

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$$

або

$$\sin \alpha = \frac{A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (5.41)$$

Пряма і площина перпендикулярні, тоді і лише тоді, коли $\vec{n}$ і $\vec{p}$, колінеарні,

$$\text{тобто} \quad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad (5.42)$$

5.5.3 Відстань від точки до прямої

$$\text{Нехай } \alpha: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \text{ і } M_1(x_1, y_1, z_1)$$

Відстань ρ від точки M_1 до прямої α є довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму. Покажемо, як обчислити цю довжину. Це можна зробити не однозначно. Познайомимося із двома способами обчислення ρ .

I спосіб. Через точку M_1 , від якої шукаємо відстань до α проведемо площину π , перпендикулярну α . Скористуємося рівнянням (5.23) взявши в ролі нормального вектора вектор $\vec{p}$, отримаємо

$$\pi: l \cdot (x - x_1) + m \cdot (y - y_1) + n \cdot (z - z_1) = 0$$

Знайдемо точку перетину α і π . $M_2 = \alpha \cap \pi$, розв'язавши систему

$$\begin{cases} l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0 \\ x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$$

Нехай $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тоді $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

II спосіб.

Взявши задану на прямій точку M_0 побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0 N} = \vec{p}$ і побудуємо паралелограм $M_0 M K N$.

$$S_{\text{парал}} = M_0 N \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{|\overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{p}|}{|\vec{p}|}. \quad S_{\text{парал}} = |\overrightarrow{M_0 N} \cdot \overrightarrow{M_0 M}|, \text{ або в координатах}$$

$$\rho = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{array} \right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{array} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Приклад. Обчислити відстань від точки $M_0(7;9;7)$ до прямої

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} = t.$$

Розв'язання. I спосіб.

$$1) \pi: 4(x-7) + 3(y-9) + 2(z-7) = 0$$

$$2) \begin{cases} 4x + 3y + 2z - 69 = 0 \\ x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$29t = 58; t = 2.$$

$$3) x = 10; y = 7; z = 4.$$

$$\rho = \sqrt{(10-7)^2 + (7-9)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}.$$

II спосіб.

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{25 + 324 + 289}}{\sqrt{29}} = \sqrt{22}.$$

5.5.4 Відстань між мимобіжними прямими. Рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих

Нехай дано дві мимобіжні прямі канонічними рівняннями

$$\alpha_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \alpha_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Під відстанню між двома мимобіжними прямими розуміють довжину спільного перпендикуляра до цих прямих.

I. Знайдемо спільний перпендикуляр.

1) Через α_1 проведемо площину π_1 паралельну α_2 її канонічне рівняння

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\alpha)$$

2) Через α_2 проведемо площину π_2 паралельну α_1 її канонічне рівняння аналогічне до (α) .

3) Через α_1 проведемо площину π_3 перпендикулярну до площин π_1 і π_2

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

4) Через α_2 проведемо площину π_4 перпендикулярну до площин π_1 і π_2

$$\pi_4: \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Площини π_3 і π_4 проєктують прямі ортогонально відповідно: α_1 на π_2 і α_2 на π_1 . Ці дві площини π_3 і π_4 перетнуться по прямій PQ , яка й буде перпендикулярна, як до π_1 , так і до π_2 . Тобто $PQ \perp \alpha_1$ і $PQ \perp \alpha_2$.

Отже, PQ спільний перпендикуляр до двох прямих. Його рівняння

$$PQ: \begin{cases} \pi_3 & \alpha_1 \perp \pi_4 \Rightarrow \alpha_1 \perp PQ \\ \pi_4 & \alpha_2 \perp \pi_3 \Rightarrow \alpha_2 \perp PQ \end{cases}$$

PQ – спільний перпендикуляр .

II. Знайдемо довжину спільного перпендикуляра PQ :

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = PQ = \rho(M_2, \pi_1)$$

Дійсно, $M_2H = PQ$. А відстань від точки до площини знаходимо за

формулою
$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

У нашому випадку рівняння площини (α), а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тому

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Розділ VI. ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ У ПРОСТОРІ

Ми вже розглянули афінну і прямокутну декартову системи координат у просторі і основні задачі у цих системах координат. На площині положення точки визначається двома координатами відносно деякої системи координат. І, як ми бачили, рівняння з двома (однією) змінними на площині задає дійсну чи уявну криву або лінію, яка розпадається. За винятком виключення особливих випадків. Аналогічно, у просторі: кожне рівняння з трьома (двома, однією) змінними задає вже не криву, а дійсну чи уявну поверхню.

6.1 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

6.1.1 Поверхня у просторі. Частинні випадки рівнянь поверхні

Поверхнею, заданою рівнянням $F(x;y;z)=0$, називається геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють це рівняння, і ця множина не містить жодної точки, координати яких цьому рівнянню не задовольняють.

Іншими словами: поверхня $S: F(x; y; z)=0$ це ті і тільки ті точки, координати яких задовольняють рівняння.

Розглянемо спочатку частинні випадки:

1. Рівняння не задовольняє жодна дійсна точка

$$\text{Наприклад : } x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

У такому випадку будемо говорити про порожню множину або уявну поверхню.

2. Рівняння задовольняє скінченне число точок

$$\text{Наприклад: } (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 5)^2 = 0. \text{ А } (1; 3; -5).$$

У цьому випадку маємо уявну поверхню з дійсною точкою.

3. Рівняння задовольняє деяка лінія

$$\text{Для прикладу, розглянемо рівняння } x^2 + y^2 = 0.$$

Це - рівняння осі oz , так як його задовольняють всі точки простору, які мають абсцису і ординату рівні нулю. Будемо говорити, що це уявна поверхня з дійсною прямою.

4. Розпад поверхні

Теорема 6.1. Якщо ліву частину рівняння $S: F(x; y; z) = 0$ можна подати, як добуток двох (або більше) функцій, то це рівняння задає дві (або більше) поверхні, дійсні або уявні, тоді кажуть, що поверхня S розпадається на дві(або більше) поверхонь.

Доведення. Нехай поверхня задана рівнянням

$$S: F(x; y; z) = \varphi(x; y; z) \cdot \psi(x; y; z) = 0. \quad (6.1)$$

Розглянемо два рівняння $S_1: \varphi(x; y; z) = 0$ та $S_2: \psi(x; y; z) = 0$.

Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in S$, тоді, за означенням, $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ і, отже, $F(x_0; y_0; z_0) = \varphi(x_0; y_0; z_0) \cdot \psi(x_0; y_0; z_0) = 0$.

Значить, $\varphi(x_0; y_0; z_0) \cdot \psi(x_0; y_0; z_0) = 0$;

Отже, або $\varphi(x_0; y_0; z_0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \in S_1$, або $\psi(x_0; y_0; z_0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \in S_2$

Навпаки, нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить принаймні одній із поверхонь S_1, S_2 . Для означеності, нехай $M_0 \in S_1$. Тоді $\varphi(x_0; y_0; z_0) = 0$.

Обчислимо $F(x_0; y_0; z_0)$:

$$F(x_0; y_0; z_0) = \varphi(x_0; y_0; z_0) \cdot \psi(x_0; y_0; z_0) = 0 \Leftrightarrow \text{точка } M_0(x_0; y_0; z_0) \in S.$$

Теорема доведена.

5. Рівняння з однією змінною

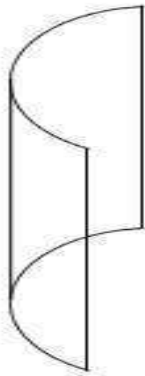
Теорема 6.2 Рівняння з однією змінною в просторі задає систему дійсних або уявних площин, паралельних тій координатній площині, що відповідає відсутнім змінним.

Доведення. Нехай для означеності $S: F(x) = 0$. Це рівняння з однією змінною і воно має дійсні чи уявні розв'язки. Для означеності позначимо їх x_1, x_2, x_3 . Тоді $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Ми подали дану функцію як добуток трьох функцій. Тоді, за попередньою теоремою, відбувається розпад поверхні на три поверхні:

$$S_1: x-x_1=0; S_2: x-x_2=0; S_3: x-x_3=0.$$

Кожне із трьох рівнянь визначає площину, паралельну координатній площині uoz . **Що і потрібно було довести.**



6.1.2 Циліндричні та конічні поверхні

Поверхня S називається **циліндричною**, якщо вона утворена рухом прямої у просторі, що переміщається паралельно заданій прямій L , перетинаючи дану криву γ , яка називається **напрямною**, а пряма, яка рухається, називається **твірною** (рис 6.1).

Рис.6.1

Теорема 6.3. Рівняння з двома змінними у просторі задає дійсну або уявну циліндричну поверхню з твірною, паралельною тій координатній осі, що відповідає відсутній змінній.

Доведення. Нехай для означеності $S: F(x; y; 0)=0$. Розглянемо координатну площину xoy , у якій рівняння $F(x; y)=0$ задає криву γ - дійсну або уявну.

Вважатимемо дійсну.

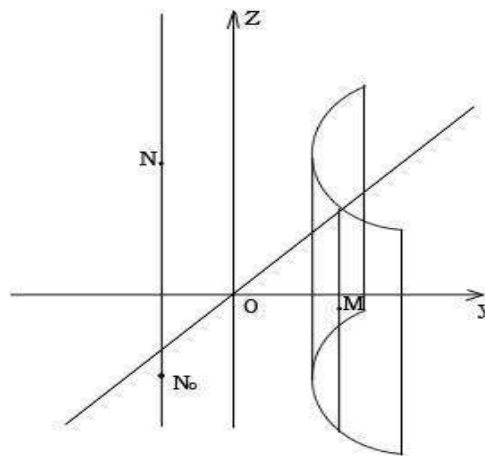


Рис.6.2

На цій кривій візьмемо фіксовану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Через цю точку проведемо пряму паралельну oz . Кожна точка M цієї прямої буде мати координати $(x_0; y_0; z)$, тобто всі точки побудованої прямої мають абсцису і

ординату так, як точка M_0 . Отже, координати всіх точок прямої задовольняють рівняння $F(x; y)=0$. Змусимо точку M_0 пробігти всю криву γ , тоді відповідна пряма M_0M опише циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Oz , і навпаки. Якщо точка $N_0(x_1; y_1; 0)$ не належить γ , то точка $N_0(x_1; y_1; 0)$ не належить циліндру, бо її координати не задовольняють рівняння.

Канонічне рівняння циліндрів другого порядку

Рівняння цих поверхонь з двома змінними. Ми вже знаємо, що дійсними кривими другого порядку є такі і тільки такі криві:

$$1) \quad \text{Коло} - \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (6.2)$$

$$2) \quad \text{Еліпс} - \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.3)$$

$$3) \quad \text{Гіпербола} - \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.4)$$

$$4) \quad \text{Парабола} - \quad y^2 = \pm 2px \quad (6.5)$$

$$5) \quad \text{Пара прямих, що перетинаються} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad (6.6)$$

$$6) \quad \text{Пара паралельних прямих} \quad x^2 - a^2 = 0 \quad (6.7)$$

Відповідно отримаємо у просторі:

1) Круговий циліндр (рис. 6.3)

2) Еліптичний циліндр (рис. 6.3)

3) Гіперболічний циліндр (рис. 6.4)

4) Параболічний циліндр (рис. 6.5)

5) Пара площин що перетинаються (рис. 6.6)

6) Пара паралельних площин (рис. 6.7)

Зауважимо, що площини також можна розглядати, як циліндричні поверхні, з напрямною γ - прямою.

Висновок. Рівняння з трьома(двома, однією) змінними в просторі задає дійсну або уявну поверхню; або ця поверхня розпадається на декілька поверхонь.

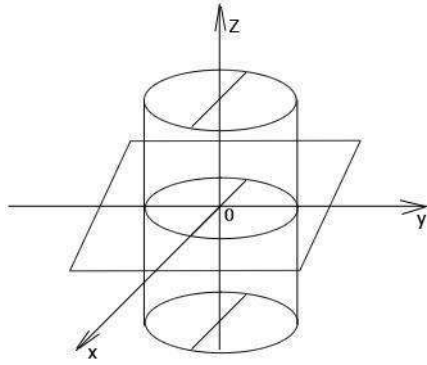


Рис. 6.3

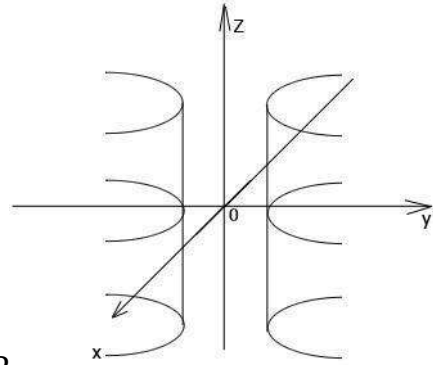


Рис. 6.4

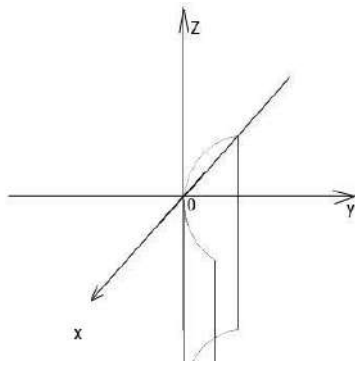


Рис. 6.5

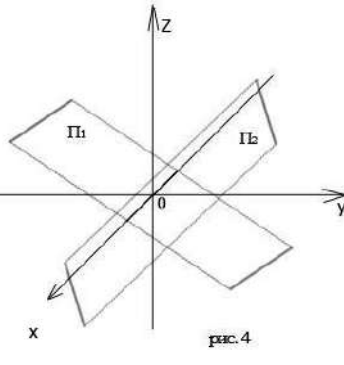


Рис. 6.6

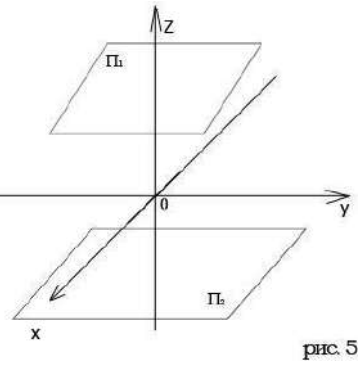


Рис. 6.7

6.1.3 Лінія (крива) у просторі

Лінія (крива) у просторі задається як перетин двох поверхонь, тобто системою двох рівнянь

$$\gamma: \begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Дійсно, нехай точка M_0 належить двом поверхням, тоді її координати задовольняють систему рівнянь, і навпаки, якщо її координати задовольняють систему, то вона належить обом поверхням

Приклад. Система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0, \\ z - 3 = 0 \end{cases}$ задає коло.

Зауважимо, що крива у просторі задається неоднозначно, адже коло можна задати як переріз сфери площиною, переріз конуса чи циліндра площиною.

6.2. Геометричний зміст нерівностей і системи нерівностей у просторі

Задача розв'язується так само, як для випадку площини. Розглянемо

поверхню $S : F(x; y; z) = 0$. Якщо точка $M \in S$, то її координати задовольняють рівняння. Якщо точка $N \notin S$, то $\delta_{N(x_0; y_0; z_0)} = F(x_0; y_0; z_0) \neq 0$, тоді виконується одна з нерівностей $F(x_0; y_0; z_0) > 0$ або $F(x_0; y_0; z_0) < 0$.

Виникає питання: який геометричний образ задає ця нерівність? Як і у випадку площини, розглянемо поверхню $S : F(x; y; z) = 0$. Вона розбиває простір на дві області: внутрішню і зовнішню. Можна довести, що для кожної із областей має сенс одна з нерівностей. Щоб вияснити, яка з нерівностей яку область задає, потрібно у фіксованій області взяти фіксовану точку і обчислити δ цієї точки. Знак числа δ визначає відповідну нерівність, що задає цю область.

Система нерівностей задає переріз областей, що визначаються кожною із її нерівностей.

6.3. Метод перерізів при вивченні форм поверхонь

Щоб зобразити поверхню у системі координат, будемо користуватися методом перерізів. Суть його полягає в наступному.

Нехай поверхня S задана рівнянням $S : F(x; y; z) = 0$.

1) Перетнемо поверхню координатою площиною $x=0$. Отримаємо фронтальну проекцію поверхні - криву $\varphi_1 : F(0; y; z) = 0$ у координатній площині $хоу$. Ця крива зображається в натуральну величину.

2) Перетнемо поверхню горизонтальною площиною $z = 0$. Отримаємо $\gamma_2 : F(x; y; 0) = 0$.

3) Перетнемо поверхню профільною площиною $y=0$. Отримаємо $\gamma_3 : F(x; 0; z) = 0$.

Часто цих кривих достатньо, щоб зобразити каркас поверхні і мати уявлення про її форму. Якщо ж цього не достатньо, то потрібно перетинати поверхню площинами, паралельними відповідним координатним площинам доки не складеться уявлення про поверхню.

Приклад 1. Зобразити поверхню, задану рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Розв'язання.

Перетнемо поверхню площиною $x = 0$ (рис. 6.8).

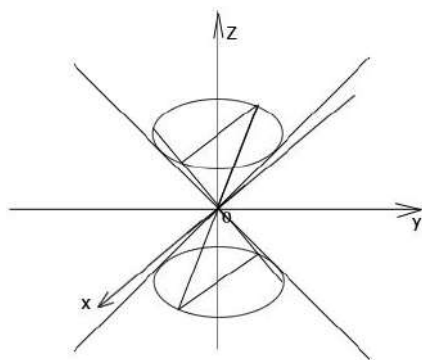


Рис.6.8

Матимемо $\gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$

У площині Oyz отримали $(y-z)(y+z)=0$, що визначає дві прямі, які перетинаються (бісектриси координатних кутів).

У площині Oxy матимемо $\gamma_2 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

початок координат.

Точка не дає уявлення про поверхню, тому будемо перетинати поверхню площинами, паралельними площині Oxy .

Матимемо $\begin{cases} z = \pm h \\ x^2 + y^2 = h^2 \end{cases}$, тобто кола.

Перетнемо профільною площиною $y = 0$,

тоді $\gamma_3 : \begin{cases} y = 0, \\ x^2 - z^2 = 0 \end{cases}$.

Отримуємо $\gamma_3 : x^2 - z^2 = 0$; $(x-z)(x+z)=0$.

Це дві прямі – бісектриси координатних кутів площини Oxz .

Сформувалося уявлення про форму поверхні – конічна поверхня.

Приклад 2. Зобразити поверхню, задану рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу, перетинаючи

почергово поверхню координатними площинами, отримаємо (рис.6.9):

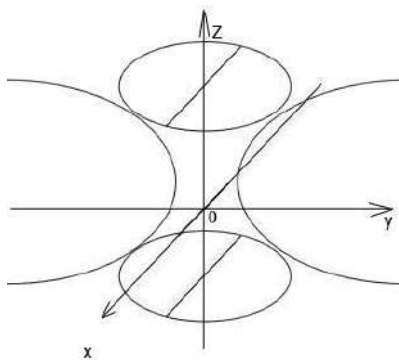


Рис.6.9

$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$ - гіпербола

$\gamma_2 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ - коло

$\gamma_3 : z = \pm h$ - прямі.

6.4 Дві основні задачі аналітичної геометрії простору

I основна задача. Задано рівняння, система рівнянь, нерівність або системи нерівностей. Вияснити, який геометричний образ визначається відповідним аналітичним виразом і які його властивості. Зобразити у вихідній системі координат. Цю задачу надалі будемо розв'язувати для поверхонь другого порядку.

II основна задача. Задана геометрична фігура своїми геометричними властивостями. Записати її аналітичне задання. Що стосується поверхонь, то задача складання рівнянь розв'язується за тим же алгоритмом, що і задачі на складання рівнянь ліній на площині:

1) Доцільно вибираємо систему координат

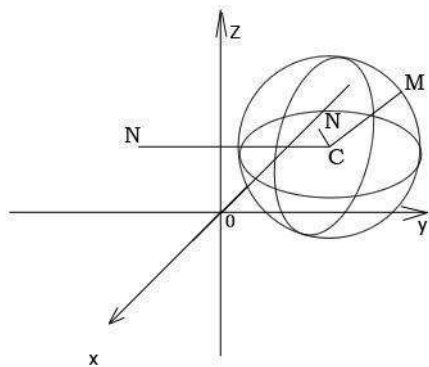


Рис.6.10

2) Точка $M(x; y; z)$ - біжуча

3) Основне співвідношення

4) Основне співвідношення у

координатах

5) Спрощення

6) Доведення: точка $N(x; y; z)$ - не належить поверхні S , покажемо, що її

координати не задовольняють рівняння.

Приклад. Записати рівняння сфери з центром у точці $C(a; b; c)$ радіуса R .

Розв'язання виконуємо за алгоритмом.

1. Система координат прямокутна декартова (рис.6.10).

2. $M(x; y; z)$ - біжуча точка.

3. Основне співвідношення: для будь-якої точки M сфери $CM = R$.

4. Запишемо у координатах

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

5. Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (6.9)$$

Отримали рівняння сфери, центр якої міститься у точці $C(a;b;c)$, а радіус рівний R .

6. Доведемо, що отримане рівняння задає ті і лише ті точки, що лежать на сфері.

Дійсно, нехай точка $N(x_1; y_1; z_1)$ не належить сфері, тоді $CN > R$ (або $CN < R$) і, значить, $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - R^2 \neq 0$.

Отже, рівняння (6.9) є рівнянням сфери.

Рівняння сфери з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (6.10)$$

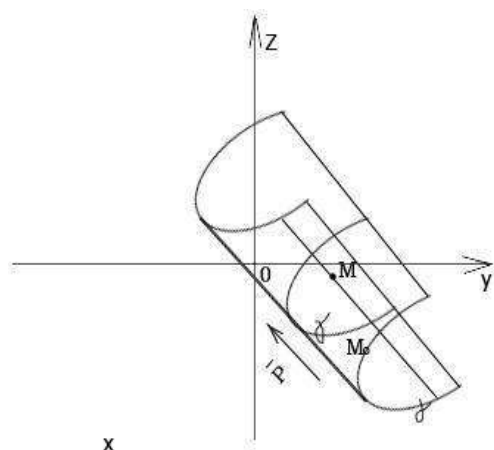
6.5. Неканонічне рівняння циліндричної поверхні

Вище ми познайомилися з еліптичним, круговим, параболічним гіперболічним циліндром за канонічними рівняннями, коли твірна паралельна координатній осі, а рівняння з двома змінними. Проте, якщо циліндр розміщений так, що його твірна не паралельна жодній із координатних осей, то рівняння не буде канонічним і міститиме три змінні.

Розглянемо загальний випадок.

Циліндрична поверхня S задана рівнянням напрямної

$$\gamma : \begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0; \end{cases} \quad (\alpha)$$



і напрямним вектором

$\vec{p}(l; t; n)$. Записати рівняння поверхні S .

Розв'язання. Будемо працювати за розглянутим вище алгоритмом:

1) На поверхні візьмемо довільну

точку $M(x; y; z)$ (рис.6.11) і через неї

проведемо твірну MM_0 до перетину з γ у точці M_0 , а, так як точка

$M_0 \in \gamma$, то її координати задовольняють систему (α) .

2) Таким чином, ми отримуємо систему

Рис.6.11

$$\text{рівнянь} \quad \gamma : \begin{cases} F_1(x_0; y_0; z_0) = 0, \\ F_2(x_0; y_0; z_0) = 0, \\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t; \end{cases} \quad (\beta)$$

де третє рівняння є рівнянням твірної, що проходить через точку M_0 .

3) З третього рівняння системи (β) визначимо x_0, y_0, z_0 через параметр t .

$$\begin{cases} x_0 = x - lt, \\ y_0 = y - mt, \\ z_0 = z - nt. \end{cases} \quad (*)$$

Підставивши значення x_0, y_0, z_0 в одне із простіших рівнянь системи (β) , отримаємо рівняння відносно t . Розв'яжемо це рівняння - знайдемо параметр t через x, y, z .

4) Підставимо значення t в систему (γ) . Знайдемо x_0, y_0, z_0 через x, y, z .

5) Підставимо ці значення x_0, y_0, z_0 в те рівняння системи (β) , що залишилося.

Отримаємо рівняння поверхні S , яке пов'язує змінні x, y, z .

Отже, виведення рівняння циліндричної поверхні полягає в тому, що із систем (β) потрібно вилучити x_0, y_0, z_0 і пов'язати змінні x, y, z одним рівнянням.

Приклад. Напрямна циліндричної поверхні задана рівнянням

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2y - z = 0; \end{cases}$$

а її твірна перпендикулярна до площини напрямної. Записати рівняння поверхні.

Розв'язання. Точка $(0; 2; 4)$ — задовольняє рівняння напрямної γ (рис. 6.12). Через цю точку проведемо твірну, напрямним вектором якої є $\vec{p}(0; 2; -1)$. Отримаємо систему рівнянь:

$$\gamma : \begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2 \\ 2y_0 - z_0 = 0, \\ \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{-1} = t. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо

$$x_0 = x; y_0 = y - 2t - 1; z_0 = t + z.$$

Підставимо ці значення x_0, y_0, z_0 у простіше із двох рівнянь, що залишилися – в друге, матимемо

$$2y - 4t - z - t = 0$$

Звідси $5t = 2y - z,$

$$t = \frac{2y - z}{5}.$$

Підставивши це значення у вирази для x_0, y_0, z_0 , отримаємо:

$$y_0 = y - \frac{4y - 2z}{5}, \text{ тобто}$$

$$y_0 = \frac{y + 2z}{5}; x_0 = \frac{y + 2z - 5}{5}; z_0 = z + \frac{2y - z}{5},$$

або

$$z_0 = \frac{4z + 2y}{5}.$$

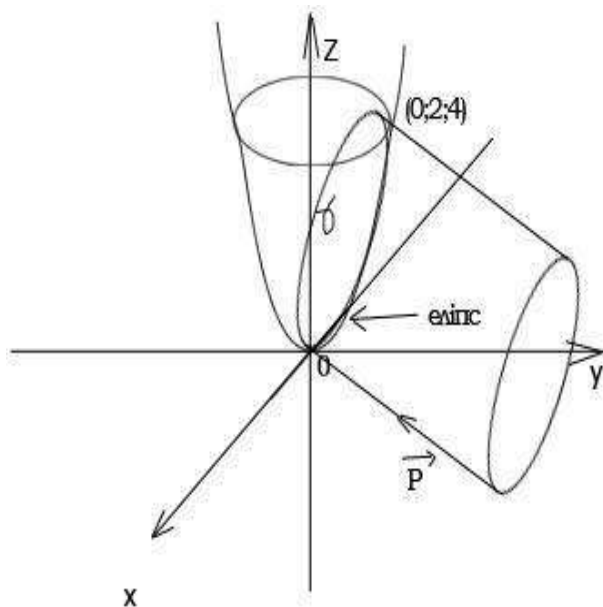


Рис.6.12

Знайдені значення z_0, y_0

підставимо у перше рівняння вихідної системи. Матимемо:

$$\frac{4z + 2y}{5} = x^2 + \left(\frac{y + 2z}{5} \right)^2,$$

звідки

$$20z + 10y - 25x^2 - y^2 - 4yz - 4z^2 = 0.$$

Отже, рівняння шуканої циліндричної поверхні

$$25x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz - 10y - 20z = 0.$$

6.6 Конічні поверхні

Конічною називається **поверхня**, утворена рухом прямої в просторі, що увесь час проходить через одну і ту ж в просторі точку - **вершину**, перетинаючи криву γ – **напряму**.

Вище ми розглянули канонічне рівняння конічної поверхні

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (6.11)$$

Аналогічно, як для циліндричних поверхонь, конічна поверхня у загальному випадку задається рівнянням прямої

$$\gamma : \begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0; \end{cases} \quad (\alpha)$$

і координатами вершини $C(a; b; c)$. Запишемо рівняння конічної поверхні.

В повній аналогії, повторюючи міркування попереднього параграфа, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x_0; y_0; z_0) = 0, \\ F_2(x_0; y_0; z_0) = 0, \\ \frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} = t. \end{cases},$$

яка відрізняється від системи (β) лише третім рівнянням – рівнянням твірної, заданої двома точками. Далі виконуємо все за схемою, як для циліндричних поверхонь, і отримуємо рівняння конічної поверхні.

6.7 Лінії другого порядку як конічні перерізи

Еліпс, гіперболу і параболу можна отримати як лінії перетину кругового конуса з площиною. При цьому поняття фокусів і директрис цих ліній стають особливо конкретними.

Круговим конусом, або **конусом обертання**, називається поверхня, утворена обертанням прямої навколо осі, якщо ця пряма перетинає вісь

обертання. Пряма, від обертання якої утворився конус, називається **твірною** конуса, а точка перетину твірних з віссю **вершиною** конуса.

У елементарній геометрії під конусом звичайно розуміють лише одну його порожнину, тобто поверхню, утворену від обертання півпрямой навколо осі. Ми розглянемо обидві порожнини конуса.

Теорема 6.4 *Лінія перетину конуса з площиною, яка не проходить через його вершину і перетинає всі твірні конуса, є еліпс.*

Доведення. Позначимо площину, яка перетинає конус, через P , а лінію перетину конуса з площиною через L (рис.6.13). Впишемо у конус дві кулі O_1 і O_2 так, щоб вони дотикались до поверхні конуса і до площини P . Кола, по яких кулі O_1 і O_2 , дотикаються до поверхні конуса, позначимо через m_1 і m_2 , а паралельні площини, в яких лежать ці кола, через P_1 і P_2 . Точки дотику обох куль з площиною P позначимо через F_1 і F_2 .

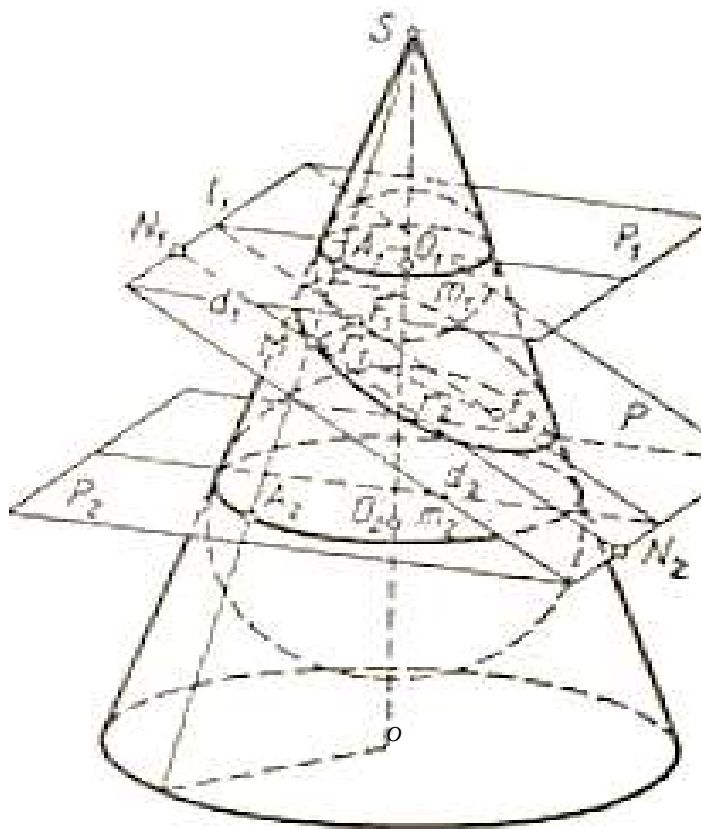


Рис. 6.13

Нехай M є довільна точка лінії L а, A_1 і A_2 - точки перетину з колами m_1 і m_2 твірної конуса, яка проходить через точку M . Відрізки MF_1 і MA_1 між собою рівні, як дві дотичні до кулі O_1 у точці M . Відрізки MF_2 і MA_2 рівні як дві дотичні до кулі O_2 .

Отже,

$$MF_1 + MF_2 = MA_1 + MA_2 = A_1A_2$$

Але, A_1A_2 є величина стала. Дійсно, відрізки, які відтинаються паралельними площинами P_1 і P_2 від твірних конуса, між собою рівні.

Отже, лінія L є еліпс. Точки F_1 і F_2 є фокуси еліпса.

Теорему доведено.

Покажемо тепер, що прямі l_1 і l_2 , по яких площина P перетинає паралельні площини P_1 і P_2 є директриси еліпса. Проведемо перпендикуляри $MN_1 = d_1$ і $MN_2 = d_2$ з точки M на прямі l_1 і l_2 . Позначимо кут між твірною конуса і його віссю через α , а кут між площиною P і віссю конуса – через β . Спроектувавши відрізки MN_1 і MA_1 на вісь конуса, отримаємо :

$$\text{пр. } MN_1 = d_1 \cos \beta ; \text{ пр. } MA_1 = r \cos \alpha ,$$

де $MN_1 = d_1$ а $MA_1 = MF_1 = r_1$. Але кінці відрізків MN_1 і MA_1 лежать у площині P_1 ортогональній до осі конуса, отже, проекції їх на вісь конуса рівні:

$$d_1 \cos \beta = r_1 \cos \alpha ; \frac{r_1}{d_1} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \text{const}$$

Ця величина є стала для всіх точок еліпса, r_1 є фокальний радіус, d_1 – відстань від точки M від директриси, а пряма l_1 – директриса еліпса.

Відношення $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e$ тобто дорівнює ексцентриситету еліпса.

Через те, що $e < 1$, то $\beta > \alpha$. Але, це очевидно також із того, що площина перетинає всі твірні конуса.

Аналогічно можна показати, що пряма l_2 є другою директрисою еліпса

Теорема 6.5 Лінія перетину конуса з площиною, яка не проходить через його

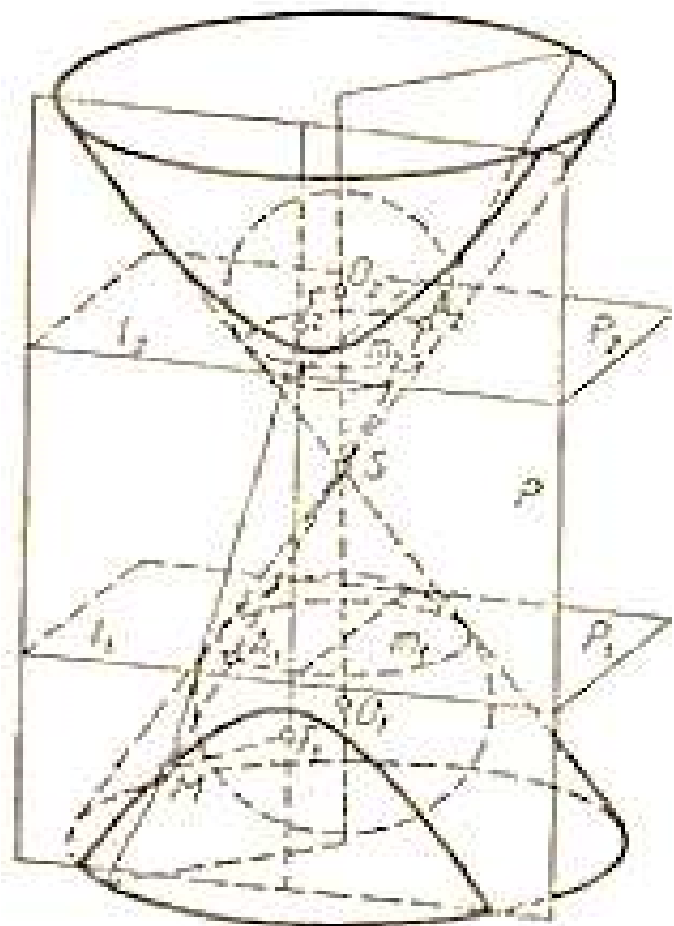


Рис. 6.14

вершину і перетинає обидві порожнини конуса, є гіпербола.

Доведення. Позначимо через Р площину, яка перетинає конус, а через L - лінію перетину обох порожнин конуса з площиною Р. Впишемо в одну порожнину конуса кулю O_1 , а в другу - кулю O_2 , так, щоб обидві кулі дотикалися до поверхні конуса і до площини Р. Кола, по яких кулі O_1 , і O_2 , дотикаються до поверхні конуса, позначимо через m_1 і m_2 , а паралельні площини, в яких лежать кола m_1 і m_2 - через P_1 і P_2 .; через F_1 і F_2 , позначимо точки дотику куль O_1 і O_2 , з площиною Р. Нехай М є довільна точка лінії L, а A_1 і A_2 , - точки перетину твірної, яка проходить через М, з колами m_1 і m_2 . Відрізки MF_1 , і MA_1 , рівні як дві дотичні з точки М до кулі O_1 . Відрізки MF_2 і MA_2 рівні як дотичні до кулі O_2 отже маємо:

$$MF_2 - MF_1 = MA_2 - MA_1 = \pm A_1A_2$$

Знак плюс або мінус треба брати залежно від того, на тій чи на іншій порожнині конуса лежить точка М. Величина A_1A_2 , є стала.

Дійсно, довжини відрізків твірних конуса між паралельними площинами P_1 і P_2 . рівні. Отже, лінія є гіпербола (рис.6.14). Аналогічно до того, як це було зроблено для еліпса, можна показати, що прямі перетину площини Р з паралельними площинами P_1 і P_2 є директриси гіперболи; відношення $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ дорівнює ексцентриситету гіперболи.

Для гіперболи $e > 1$, отже, $\cos \beta > \cos \alpha$, тобто $\beta < \alpha$

Теорема 6.6 *Площина, яка не проходить через вершину конуса і паралельна одній з його твірних, перетинає конус по параболі.*

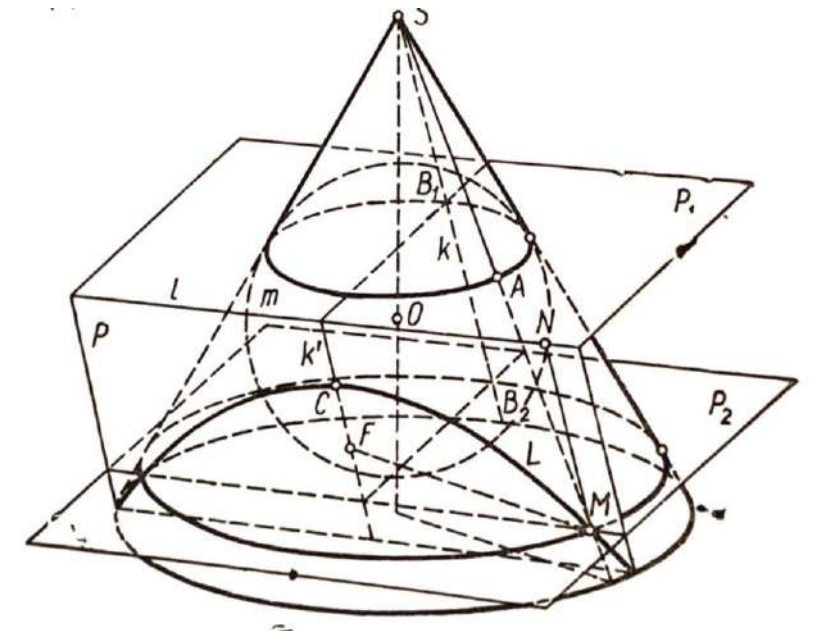


Рис.6.15

Очевидно також, що площина γ у перпендикулярна до площини P . Пряма k' має з конусом лише одну спільну точку C .

Отже, площина P перетинає лише одну порожнину конуса, а лінія L є незамкнена крива.

Впишемо у конус кулю O так, щоб вона дотикалась до поверхні конуса і до площини P . Позначимо через T коло, вздовж якого куля O дотикається до конуса, а через F точку дотику кулі O з площиною P .

Нехай M є довільна точка лінії L . Позначимо точку перетину твірної SM з колом t через A і проведемо через M площину P_2 паралельну площині P_1 , в якій лежить коло T . Точки перетину твірної k з площинами P_1 і P_2 позначимо через B_1 і B_2 а відстань точки M від лінії l перетину площини P в площині P_1 позначимо через d . Нехай N буде точка перетину перпендикуляра MN до прямої l з цією прямою. Тоді $MN=d$. Легко бачити, що $MF = MA$, оскільки MF і MA є дві дотичні, проведені з точки M до кулі O . Але $MA=B_1B_2$, як відрізки твірних конуса між двома паралельними площинами $B_1B_2 = MN$ як відрізки паралельних прямих між двома паралельними площинами ($MN \parallel k' \parallel k$).

Отже, $MN = MF=d$. Через те що M є довільна точка лінії L , умова $MF=MN$ має місце для всіх її точок.

Значить, L є параболою. Точка F – фокус параболи, а пряма l – її директриса. Внаслідок паралельності прямих k і k' кути α і β рівні.

$$\text{Ексцентриситет параболи } e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 1.$$

Зауваження 1. Ми розглядали лінії перетину конуса площинами, які не проходять через його вершину. Через α ми позначали кут між твірними конуса та його віссю, а через β – кут нахилу площин, які перетинають конус, до осі конуса. Отже, виявилось, що при $\beta > \alpha$ лінія перетину конуса з площиною є еліпс, при $\beta < \alpha$ – гіпербола, а при $\beta = \alpha$ параболою. Якщо перетинати конус площинами, які проходять через його вершину S , то при $\beta > \alpha$ площина матиме з конусом лише одну спільну точку – вершину S конуса; при $\beta < \alpha$ вона перетинатиме конус по двох прямих – твірних конуса, а при $\beta = \alpha$ вона дотикатиметься до конуса вздовж однієї твірної конуса.

Зауваження 2. Круговий циліндр можна розглядати як конус з нескінченно віддаленою вершиною. Отже, лінія перетину циліндра площиною, не паралельною його твірним, є еліпс. Площина, паралельна твірним циліндра, перетинає його по двох паралельних прямих або дотикається до нього вздовж однієї твірної, або зовсім не має з ним спільних точок.

6.8 Загальне рівняння конічної поверхні

Теорема 6.7 Якщо загальне однорідне рівняння другого степеня задає дійсну поверхню, яка не розпадається, то це конічна поверхня з вершиною у початку координат.

Доведення. Нехай поверхня задана рівнянням

$$S: Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \quad (\alpha)$$

Так як за умовою поверхня дійсна, то існує точка $M_0 (x_0, y_0, z_0)$, тобто її координати задовольняють рівняння

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \quad (\beta)$$

Через початок координат і точку M_0 проведемо пряму

$$l: \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = t,$$

параметричне рівняння якої має вигляд:

$$\begin{aligned}x &= x_0 t, \\y &= y_0 t, \\z &= z_0 t,\end{aligned}\tag{\gamma}$$

Стверджуємо, що вся пряма належить поверхні S . Дійсно, підставимо у рівняння (α) значення змінних (x,y,z) із системи (γ) і отримаємо

$$S: t^2 (Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dx_0y_0 + Ex_0z_0 + Fz_0y_0) = 0$$

Отже, на поверхні S лежать всі прямі, які проходять через початок координат і будь-яку точку поверхні, тобто поверхня утворена рухом прямої - конічна поверхня.

Теорема доведена.

Зауваження. Кожна пряма, яка проходить через початок координат довільну точку поверхні, повністю лежить на поверхні. Така поверхня є конічною.

Приклад. Вияснити яку поверхню задає рівняння $3x^2 + z^2 - 8xy + 4yz = 0$

Розв'язання. Якщо поверхня дійсна і не розпадається, то це конічна поверхня.

$$\text{Знайдемо } \delta: \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то ця поверхня не розпадається. це дійсний або уявний конус. Щоб вияснити який, потрібно розв'язати характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 & 0 \\ -4 & 0 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

і все залежить від знаків λ . Якщо знаки однакові, то це уявний конус, якщо різні - то дійсний конус: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$.

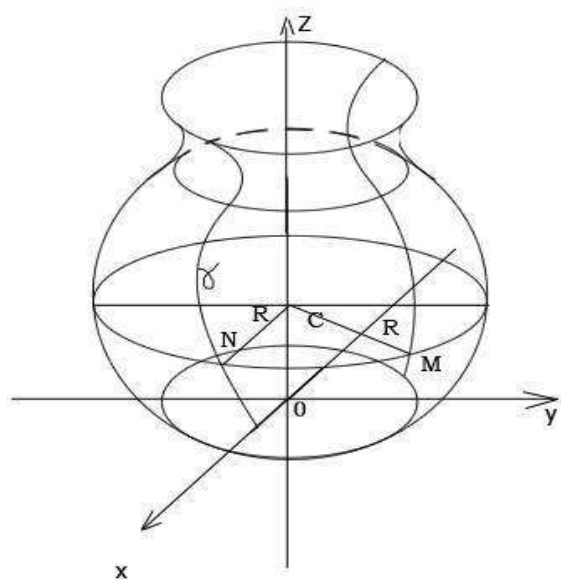
6.9 Поверхні обертання

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням кривої γ навколо прямої l , що знаходяться в одній площині з γ .

Нехай $\gamma \in xOz$, так як крива γ і пряма l лежать в одній площині, то матимемо

рівняння кривої $\gamma: \begin{cases} F(x; y; z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$. Виберемо систему координат так:

площина, у якій лежить крива взята за координатну площину xOz ; пряма l – за вісь Oz ; відповідно вісь Oy перпендикулярна до цієї площини; початок координат – в будь-якій точці осі Oz . Складемо рівняння поверхні обертання.



Для цього на поверхні візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ (рис. 6.16), через неї проведемо паралель, що отримається у перерізі поверхні перпендикулярною до осі площиною (кожна точка поверхні при обертанні γ описує коло – **паралель**).

Початкове положення кривої γ називається **початковим меридіаном**.

Знайдемо точку перетину початкового меридіану і побудованої паралелі - точки $N(x = Nc; y = 0; z = z_{0.l})$.

Оскільки $NC = CM$ і $C(0; 0; z)$, то $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$ $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$, отже, координати точки $N(\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$.

Так як $N \in \gamma$, то її координати задовольняють рівняння γ .

Отримаємо $F(\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0$.

Ми пов'язали змінні координати точки в одне рівняння, яке і є рівнянням поверхні обертання.

Висновок. Якщо відомо, що поверхня обертання утворюється обертанням кривої, що лежить в координатній площині, навколо осі координат цієї площини, то в цій площині буде задане рівняння γ як рівняння з двома змінними. Щоб отримати рівняння

що не відповідає осі обертання, підставити корінь квадратний із суми квадратів тих змінних, що відмінні від осі обертання.

6.10 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

6.10.1 Еліпсоїди

I. Еліпсоїд обертання

Еліпсоїдом обертання називається поверхня утворена обертанням еліпса навколо однієї із своїх осей (рис.6.17).

Нехай еліпс знаходиться в площині xOy , тоді його рівняння в цій площині буде таке: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Якщо еліпс обертається навколо Oz , тоді рівняння поверхні обертання має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6.12)$$

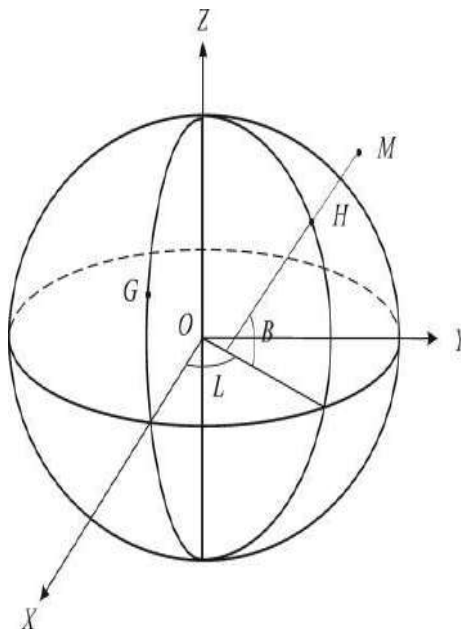


Рис. 6.17

II. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, утворена з еліпсоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку перпендикулярному до площини початкового меридіану (рис. 6.19).

Виведення рівняння.

Рівняння еліпсоїда отримаємо з (6.12) шляхом подібного перетворення (6.13)

$$Z = z \Leftrightarrow \begin{cases} x = X, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}Y, \\ z = Z. \end{cases}$$

з коефіцієнтом K за функціями $X = x; Y = Ky, , Z = z$ – стискуємо; (6.13) підставимо у (6.12). Отримаємо (рис.6.18):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ де } k^2 a^2 > 0 \text{ і тому } k^2 a^2 = b^2.$$

Остаточно будемо мати:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6.14)$$

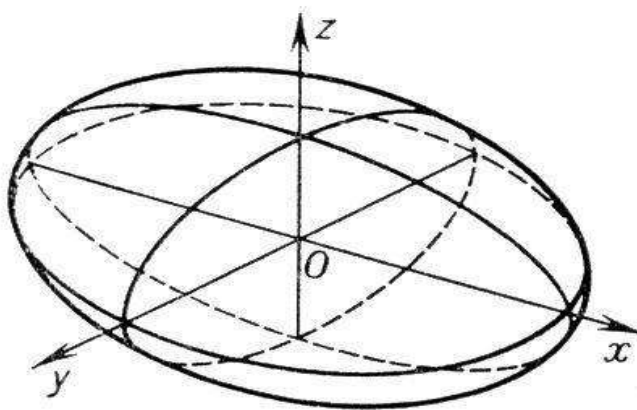


Рис.6.18

Властивості еліпсоїда

1. Еліпсоїд – *поверхня другого порядку*, всі змінні у рівнянні у другому степені.

2. Еліпсоїд весь знаходиться у середині паралелепіпеда з вимірами $2a$, $2b$, $2c$ і з центром у початку координат. Дійсно

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \rightarrow \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a$$

Аналогічно, $|y| \leq b$; $|z| \leq c$.

Точки $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$, $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$, які належать еліпсоїду, називаються його **вершинами**, або **точками заокруглення**.

3. Симетрія.

Еліпсоїд має один центр симетрії, три осі симетрії і три площини симетрії.

Нехай точка $M(x; y; z) \in S$ задовольняє рівняння (6.14). Тоді і точка

$M_1(-x; -y; -z)$ також $\in S$, бо змінні в квадратах і, отже, початок координат є центром симетрії. Точка $M_2(x; y; -z) \in S$, площина XOY -площина симетрії, точка $M_3(x; -y; z) \in S$ - симетрична точці M відносно площини xoz ; точка $M_4(-x; y; z) \in S$ - симетрична відносно YOZ ; точка $M_5(-x; -y; z) \in S$ - симетрична відносно осі OZ ; точка

$M_6(-x; y; -z) \in S$ - симетрична відносно OY ; точка $M_7(x; -y; -z) \in S$ - симетрична відносно OX .

Це все справджується, бо змінні у рівнянні (6.14) у квадратах.

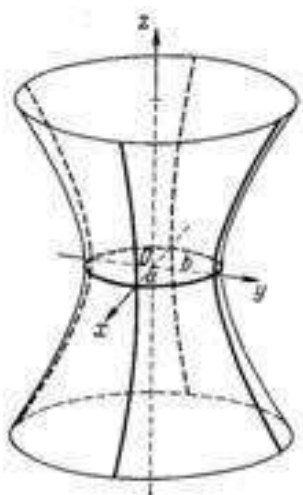
4. Форма еліпсоїда.

Встановимо її методом перерізів:

$$1) \quad \gamma_1 : x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$2) \quad \gamma_2 : z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad z = 0 \quad \gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \quad \gamma_3 : y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



6.10.2 Гіперболоїди

I. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Однопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, що утворилася внаслідок обертання гіперболи навколо її уявної осі.

Візьмемо гіперболу у площині xOz , задану рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

і будемо обертати її навколо осі oz (рис.6.19)

Рис.6.19

Візьмемо гіперболу у площині xOz , задану рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

і будемо обертати її навколо осі oz .

Отримаємо рівняння поверхні обертання:

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6,15)$$

II. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з однопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку перпендикулярної площини початкового меридіана.

Виведемо рівняння поверхні шляхом підстановки формул (6.13) у формулу (6.15). Отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6.16)$$

Властивості

1. Однопорожнинний гіперболоїд - поверхня другого порядку.
2. Симетрія.

Однопорожнинний гіперболоїд має один центр симетрії, три осі симетрії, три площини симетрії (рис.5.20).

3. Форма еліпсоїда. Встановимо її методом перерізів:

$$1) \gamma_1 : x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$2) \gamma_2 : z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \gamma_3 : z = \pm h \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} > 0 \quad z = 0 \quad \gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4) \gamma_4 : y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Поверхня необмежена.

III. Двопорожнинний гіперболоїд обертання

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертання гіперболи навколо дійсної осі (рис.6.20).

Якщо початковий меридіан задано у площині xOz , то його рівняння таке:

$$\gamma : \begin{cases} y = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \end{cases}$$

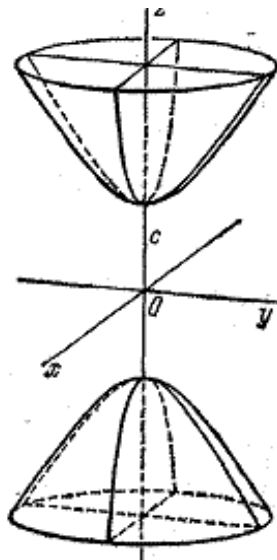


Рис. 6.20

Обертаючи гіперболу навколо осі oz , отримаємо рівняння поверхні

обертання:

$$S : \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

$$\text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (6.17)$$

IV. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з двопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана.

Рівняння поверхні двопорожнинного гіперболоїда отримаємо з рівняння (6.17) шляхом підстановки замість x, y, z їх значень із формул (6.13), у результаті отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Остаточно будемо мати:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (6.18)$$

Властивості

1. Поверхня другого порядку.
2. Симетрія.

Як і у випадку еліпсоїда, так як у рівнянні (6.18) змінні тільки у квадратах, то це означає, що разом з точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхні належать і точки

$$M_1(-x_0; -y_0; -z_0), M_2(-x_0; y_0; z_0), M_3(x_0; -y_0; z_0), M_4(x_0; y_0; -z_0), \\ M_5(-x_0; -y_0; z_0), M_6(-x_0; y_0; -z_0), M_7(x_0; -y_0; -z_0)$$

Звідси **висновок**: двопорожнинний гіперболоїд має:

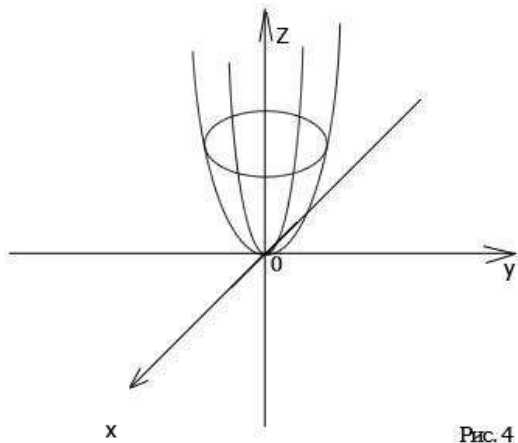
- а) один центр симетрії,
- б) три площини симетрії(координатні) ,
- в) три осі симетрії (для даного випадку осі координат).

3. Форма поверхні (методом перерізів):

$$\gamma_1 : x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\gamma_2 : z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{уявна}$$

$$\gamma_3 : z = \pm h \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \quad \frac{h^2}{c^2} - 1 \geq 0, \quad h \geq c$$



$$\begin{cases} z = \pm h, \\ \frac{x^2}{a^2 m^2} + \frac{y^2}{b^2 m^2} = 1. \end{cases}$$

$$\gamma_4 : y = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Поверхня складається з двох нескінченних чашоподібних поверхонь, розділених смугою між площинами $z = c$, $z = -c$. Якщо це двопорожнинний

гіперболоїд обертання, то горизонтальними

перерізами будуть не еліпси, а кола, а зображення - рисунок 6.17.

6.10.3 Параболоїди

I. Параболоїд обертання

Параболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням параболу навколо її осі (рис.6.21).

Якщо початковий меридіан розміщений у площині xOz і його вісь - oz , то він задається рівнянням: $\gamma: \{x^2 = 2pz, y = 0\}$

Рівняння поверхні обертання матиме вигляд:

Рис. 6.21

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z \quad (6.19)$$

II. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, утворена з параболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу, або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана (рис.6.22)

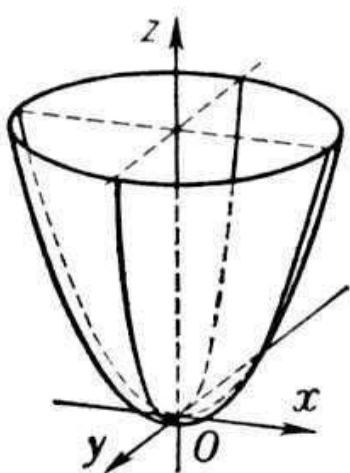


Рис. 6.22

Властивості

1. Рівняння параболоїда отримаємо з формули (6.19) шляхом заміни x, y, z їх значеннями із формул (6.13):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{k^2 q} = 2z,$$

при чому p і q – однакового знаку.

Остаточно будемо мати:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (6.20)$$

Нехай для означеності $p > 0 \Rightarrow q > 0$

1. *Форма поверхні* (досліджуємо методом перерізів):

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 2pz. \end{cases} \text{ - параболоїда у площині } yoz,$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} z = 0, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0. \end{cases} \text{ - точка, початок координат,}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} z = h > 0, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \text{ - еліпс у площині } z=h.$$

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \text{ - еліпс у площині } xoy.$$

Зображення параболоїда обертання - на рисунку 6.19.

3. *Симетрія.*

Так як у рівнянні (6.20) змінна z входить у першому степені, то поверхня не має центра.

Оскільки змінні x, y - у квадратах, то разом з точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхні належать точки $M_1(-x_0; y_0; z_0)$, $M_2(x_0; -y_0; z_0)$, $M_3(-x_0; -y_0; z_0)$. Це означає, що дві площини симетрії zOy , xOz , які перетинаються по прямої, визначають вісь симетрії – oz .

Отже, еліптичний параболоїд має дві площини симетрії (zOy , xOz), вісь симетрії, не має центра і знаходиться в одному із підпросторів, на який ділить простір, у даному випадку, площина xOy .

III. Гіперболічний параболоїд

Цю поверхню не можна отримати з поверхні обертання.

Гіперболічним параболоїдом (сідлом) називається поверхня, утворена рухом параболи в просторі, яка переміщається паралельно площині, і вершина якої, весь час ковзає по іншій нерухомій параболі, яка знаходиться в площині, перпендикулярній руху параболи (рис.6.23).

Осі рухомої і нерухомої параболи протилежно напрямлені.

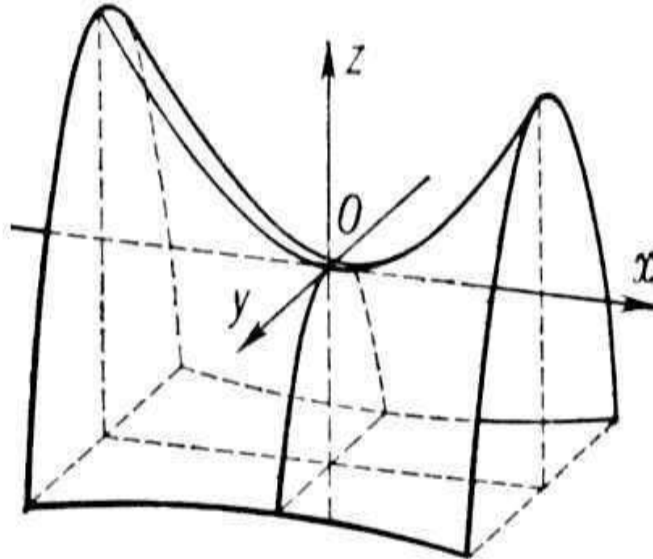


Рис.6.23

Виведемо рівняння гіперболічного параболоїда.

Нехай нерухома парабола розміщена у площині xOz і її рівняння

$$\gamma : \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 2pz. \end{cases}$$

Рухома параболола – у площині $zoу$ задана рівнянням

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = d, \\ y^2 = 2q(h - z). \end{cases}$$

де p і q однакового знаку, для означеності, візьмемо додатні (рис.6.20).

Щоб вивести рівняння, скористаємося тим, що довільна точка M поверхні належить обом парабололам і, отже, її координати задовольняють рівняння γ_1 і γ_2 , тоді

$$\gamma_1 : d^2 = 2pz \Rightarrow z = \frac{d^2}{2p}.$$

Підставимо у друге рівняння значення z , а замість d значення x , і отримаємо

$$y^2 = 2q\left(\frac{d^2}{2p} - z\right) \Leftrightarrow \frac{y^2}{q} = \frac{x^2}{p} - 2z \Leftrightarrow \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (6.21)$$

де p і q однакових знаків.

Властивості

Як і у випадку еліптичного параболоїда, поверхня не має центру, має дві площини симетрії (у даному випадку це $zoу$, xoz), одну вісь симетрії (у даному випадку Oz), по якій перетинаються площини симетрії.

Форму поверхні дослідимо методом перерізів.

Отримаємо перерізи:

$$\gamma_1 : \begin{cases} z = 0, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0. \end{cases} \quad \text{— дві прямі}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} z = h > 0, \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h > 0. \end{cases} \quad \text{— гіпербола з дійсною віссю } x$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} z = -h, \\ -\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h. \end{cases} \quad - \text{ з дійсною віссю } y \text{ гіпербола.}$$

6.11 Лінійчаті поверхні

Поверхня називається *лінійчатою*, якщо через кожну її точку можна провести пряму, яка повністю лежить на поверхні.

Іншими словами: лінійчасту поверхню можна отримати рухом прямої у просторі.

Ми розглянули ряд поверхонь другого порядку, заданих канонічними рівняннями. Цілком очевидно, що серед них циліндри і конуси – лінійчаті поверхні. Виникає питання: які ще поверхні другого порядку є лінійчастими? Очевидно, що еліпсоїди, еліптичний параболоїд, двопорожнинний гіперболоїд. Не можуть бути лінійчастими, бо на них повністю не лежить ніяка пряма. Сумнівними є дві поверхні:

- Однопорожнинний гіперболоїд;
- Сідло.

6.11.1 Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

Теорема 6.8. *Однопорожнинний гіперболоїд має дві серії прямолінійних твірних, кожна з яких залежить від одного змінного параметру.*

Доведення. Нехай задано однопорожнинний гіперболоїд рівнянням

$$s: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Запишемо його так, щоб обидві частини можна було розкласти на множники:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Цей вираз подамо у вигляді пропорції. Тут можливі лише два випадки:

$$1) \quad \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = u,$$

$$2) \quad \frac{\frac{x-z}{a-c}}{1+\frac{y}{b}} = \frac{1-\frac{1}{b}}{\frac{x-z}{a+c}} = v.$$

Далі ці рівності розпишемо у системи

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = u \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{u} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}, \quad (6.22)$$

де $-\infty < u < +\infty$, та

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = v \left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases} \quad (6.23)$$

де $-\infty < v < +\infty$.

Очевидно, при кожному фіксованому значенні параметрів u і v обидві системи (6.22) і (6.23) визначають пряму, як перетин двох площин (лінійні рівняння відносно x, y, z). І при цьому кожна з цих прямих, при кожному значенні u і v повністю лежить на гіперболоїді, бо задовольняє рівняння, у чому легко переконатись перемноживши почленно рівняння системи.

Отже, ми отримали дві серії прямолінійних прямих.

Що й потрібно було довести.

Наслідок 1. *Через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходить дві прямі різних серій.*

Дійсно, нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Тоді її координати задовольняють обидві системи. Підставимо координати точки в ці системи і знайдемо значення u та v .

Теорема 6.9. *Кожні дві прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда однієї серії мимобіжні, а різних серій перетинаються.*

Доведення проведемо методом від супротивного. Розглянемо дві різні прямолінійні твірні першої серії(другої серії аналогічно).

Нехай $L_1: u_1$, $L_2: \Leftrightarrow u_2$ і $L_1 \cap L_2 = M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нехай $u_1 \neq u_2$ – різні прямі L_1 та L_2 . Тоді отримаємо, що ця точка належить обом прямим:

$$L_1 : \begin{cases} \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = u_1 \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \\ \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = \frac{1}{u_1} \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \end{cases}$$

та

$$L_2: \begin{cases} \frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = u_2 \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \\ \frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = \frac{1}{u_2} \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) \end{cases}$$

Звідки $u_1 = u_2$ та $\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_2} \Leftrightarrow \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$.

Ми прийшли до суперечності, бо за умовою $u_1 \neq u_2$.

Отже, кожні дві прямі однієї серії мимобіжні. І, як було показано у наслідку попередньої теореми, через кожну точку гіперболоїда проходять дві прямі різних серій.

Наслідок 2.

Однопорожнинний гіперболоїд - лінійчата поверхня.

Тобто може бути утвореним рухом певним способом прямої в просторі.

6.11.2 Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда

Теорема 6.10. *Гіперболічний параболоїд має дві серії прямолінійних твірних, кожна з яких залежить від одного параметра.*

Доведення. Нехай задано $S: \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ і, для означеності, $p, q > 0$.

Розкладемо обидві частини цього рівняння на множники.

Тоді $\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$.

Звідси

$$1) \frac{\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}}{2} = \frac{z}{\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}} = u,$$

$$2) \frac{\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}}{z} = \frac{2}{\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}} = v$$

Отримаємо дві серії прямолінійних твірних:

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2u, \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{u}z \right. \quad (6.24)$$

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = zv, \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{v} \cdot 2 \right. \quad (6.25)$$

Змінюючи $u : -\infty < u < +\infty$, матимемо одну серію прямолінійних гіперболічного параболоїда. Змінюючи $v : -\infty < v < +\infty$, другу серію.

Теорема 6.11. *Будь-які дві прямолінійні твірні однієї серії гіперболічного параболоїда мимобіжні, дві прямолінійні твірні різних серій - перетинаються.*

Доведення проведемо методом від супротивного. Розглянемо дві різні прямолінійні твірні першої серії (другої серії аналогічно).

Нехай $L_1: u_1$, $L_2: \Leftrightarrow u_2$ та $L_1 \cap L_2 = M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Тоді отримаємо, що ця точка належить обом прямим:

$$L_1: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2u_1 \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{u_1}z \end{cases}$$

та

$$L_2: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 2u_2 \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{u_2}z \end{cases}$$

Звідки очевидно, що $u_1 = u_2$ та $\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_2} \Leftrightarrow \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

Ми прийшли до суперечності, бо за умовою $u_1 \neq u_2$.

Отже, кожні дві прямі однієї серії мимобіжні. І як було показано в наслідку попередньої теореми через кожну точку гіперболічного параболоїда проходять дві прямі різних серій.

Теорема доведена.

Теорема 6.12. *Всі твірні гіперболічного параболоїда, які належать до однієї серії, паралельні певній площині.*

Доведення. Нехай задано твірні гіперболічного параболоїда серії, що характеризується змінним параметром $v : \left\{ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = zv, \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{v} \cdot 2 \right.$.

Ці твірні паралельні площині. $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

Дійсно, всі площини $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{2}{v}$ (v - параметр) паралельні площині $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$, а тому і прямі їх перетину з площинами $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = uz$ паралельні площині $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$.

Так само твірні другої серії паралельні площині $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{p}} = 0$.

Теорема доведена.

Висновок. Гіперболічний параболоїд можна отримати рухом прямої у просторі, адже це лінійчата поверхня.

6.2 Загальна теорія поверхонь другого порядку

Ми вивчили канонічні рівняння поверхонь другого порядку: циліндри, конуси, еліпсоїди, гіперболоїди. Виникає питання, як вияснити зміст неканонічного, загального рівняння другого степеня.

Наприклад, яку поверхню задає рівняння.

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0 ?$$

6.2.1 Основні означення і позначення

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють загальне рівняння виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (6.26)$$

Іншими словами: це ті, і тільки ті точки простору, координати яких задовольняють (6.26)

Коефіцієнт рівняння дійсні числа і, як в теорії кривих,

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (ij = 1, 2, 3, 4)$$

Основні позначення

Скорочено позначають $2F(x; y; z) = 0$ – це рівняння (6.26):

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta=0$, то поверхня розпадається.

$$\begin{cases} Fx = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ Fy = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ Fz = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} -$$

половини частинних похідних по x, y, z лівої частини рівняння (6.26)

Для даного прикладу

$$\delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -64; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

$$F_x = 6x + 2z + 4,$$

$$F_y = -2y - 2$$

$$F_z = 2x + 6z - 4.$$

6.2.2 Перетин поверхні з прямою

Теорема 6.13. *Пряма перетинає поверхню не більше, ніж у двох точках або повністю лежить на поверхні.*

Доведення. Щоб визначити точки перетину прямої $\lambda: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$

і поверхні $S: 2F(x; y; z) = 0$ сумісно потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2F(x; y; z) = 0, \\ x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Для цього підставимо значення x, y, z у перше рівняння системи

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) +$$

$$2a_{23}(y_0 + mt)(z_0 + nt) + 2a_{14}(x_0 + lt) + 2a_{24}(y_0 + mt) + 2a_{34}(z_0 + nt) + a_{44} = 0$$

Зведемо подібні доданки: зберемо коефіцієнт при t^2 , при t і вільний член.

В результаті отримаємо квадратне рівняння

$$Kt^2 + 2Mt + N = 0, \tag{6.27}$$

$$\text{де } \begin{cases} K = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}em + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn, \\ M = lFx_0 + mFy_0 + nFz_0, \\ N = 2F(x_0; y_0; z_0). \end{cases}$$

(6.28)

Рівняння (6.27) – квадратне, тому воно може мати два, один або жодного розв'язку

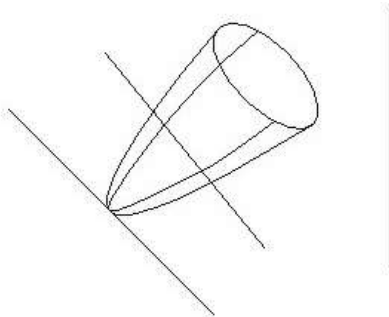


Рис. 6.21

I. 1. Якщо $N=0$, то $2F(x_0; y_0; z_0)=0$, тобто точка

$M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка є початком на прямій, належить поверхні. (рис. 6.21)

1. Якщо $M=0$, то (5.27) набере вигляду

$$Kt^2 = N=0 \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{-\frac{N}{K}}, \text{ тобто, точки перетину}$$

прямой і поверхні $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, симетричні відносно точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$,

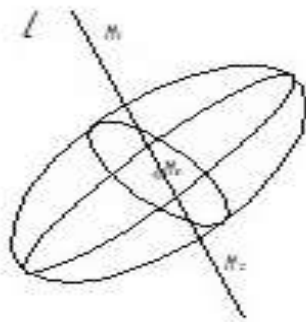


Рис. 6.22

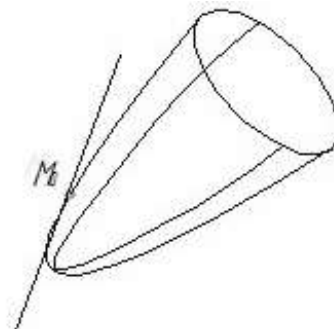


Рис.6.23

що є початком на прямій (рис. 6.22)

3. Якщо $M=N=0$, то $Kt^2 = 0$ і $t_1 = t_2 = 0$ тобто, пряма дотикається до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що є початком на прямій (рис.6.23)

$$4. \text{ Якщо } K=0, \text{ тоді } 2Mt = -N, \quad t = -\frac{N}{M}$$

Як і для випадку кривих, виникає питання, де друга точка перетину?

Щоб дати відповідь на це питання, розв'яжемо рівняння (6.27) і перейдемо до границі за умови, що $K \Rightarrow 0$

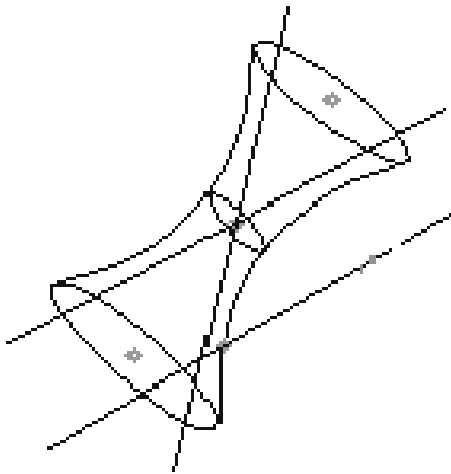


Рис.6.24

Отримаємо $t_2 = \infty$. Це означає, що пряма перетинає поверхню у одній точці скінченній, а в другій - у нескінченності (рис.6.24). Така пряма має **асимптотичний напрям**.

4. Якщо $K = M = 0$, тоді $t_1 = t_2 = \infty$

пряма є **асимптотою**, вона дотинається до поверхні у нескінченності.

5. Якщо $K = M = N = 0$, тоді рівняння набере

вигляду: $0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^2 + 0 = 0$

Це рівняння задовольняє будь-яке значення t , тобто пряма повністю лежить на поверхні.

6.2.3 Дотична площина до поверхні другого порядку

Теорема 6.14. Сукупність прямих, які дотикаються до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що їй належить, утворюють площину, яка називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0 і має рівняння

$$Fx_0(x-x_0) + Fy_0(y-y_0) + Fz_0(z-z_0) = 0 \quad (6.29)$$

Доведення. Розглянемо поверхню задану рівнянням (6.26) і пучок прямих

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

які проходять через точку M_0 і дотикаються до поверхні в цій точці.

Умова того, що пряма дотикається до поверхні у точці M_0 - це $M=N=0$ у рівнянні (6.27) для всіх прямих пучка, тобто

$$lFx_0 + mFy_0 + nFz_0 = 0 \quad (6.30)$$

Значення l, m, n знайдемо з рівняння пучка. Отримаємо:

$$\begin{cases} l = \frac{x-x_0}{t}, \\ m = \frac{y-y_0}{t}, \\ n = \frac{z-z_0}{t}, \end{cases}$$

Підставимо ці значення у (6.30) і отримаємо (6.29):

$$Fx_0(x-x_0)+Fy_0(y-y_0)+Fz_0(z-z_0)=0$$

Рівняння (6.29) задовольняють координати усіх точок фігури, яка є геометричним місцем прямих, що дотикаються до поверхні в точці $(x_0; y_0; z_0)$. Оскільки це рівняння лінійне відносно $(x; y; z)$, то це площина, правда, крім того випадку, коли одночасно $Fx_0 + Fy_0 + Fz_0 = 0$. Але, як ми вяснимо далі, тоді точка M_0 є центром поверхні, а ніяка пряма не може дотикатися до поверхні у її центрі. А якщо центра не існує, то тим більше не існує точки M_0 , яка б задовольняла цю умову. Рівняння (6.29) є рівнянням **дотичної площини** до поверхні у точці M_0 .

Теорема доведена.

Пряма, перпендикулярна до дотичної площини і в точці дотику називається **нормаллю до поверхні** в точці M_0 , її напрямний вектор $\vec{n}(Fx_0; Fy_0; Fz_0)$.

Рівняння нормалі до поверхні в точці M_0 має вигляд

$$\frac{x-x_0}{Fx_0} = \frac{y-y_0}{Fy_0} = \frac{z-z_0}{Fz_0} \quad (6.31)$$

Зауваження. Якщо задана поверхня і задана точка дотику на цій поверхні, то записати рівняння дотичної тривіально, треба просто у формулу (6.29) підставити значення. Якщо точка дотику не задана, то щоб записати рівняння дотичної площини, цю точку потрібно знайти. Для цього необхідно знати три умови, щоб знайти $x_0; y_0; z_0$. Одна умова завжди є - координати точки задовольняють рівняння поверхні, дві інші умови можна записати, виходячи із даних в умові задачі.

Приклад. Знайти дотичні до поверхні $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z = 0$, які паралельні площині $\pi: x + 2y + z = 0$

Розв'язання. Знайдемо Δ , щоб вяснити чи поверхня не розпадається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Шукаємо рівняння площини у вигляді (6.29) :

$$(4x_0 + 2z_0)(x - x_0) + (6y_0 - 4)(y - y_0) + (2x_0 + 4z_0 - z)(z - z_0) = 0$$

Так як ця площина паралельна π , то коефіцієнти при змінних пропорційні. Отримаємо:

$$\frac{4x_0 + 2z_0}{1} = \frac{6y_0 - 4}{2} = \frac{2x_0 + 4z_0 - z}{1} = t$$

Ввівши параметр t , виразимо x_0, y_0, z_0 з цього рівняння

$$\begin{cases} 4x_0 + 2z_0 = t, \\ 6y_0 - 4 = t, \\ 2x_0 + 4z_0 - z = t. \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{t-2}{6}, \\ y_0 = \frac{2t+4}{6}, \\ z_0 = \frac{t+4}{6}. \end{cases}$$

Підставимо отримані значення у дане рівняння поверхні, отримаємо квадратне рівняння відносно t , звідки $t = \pm 1$. Точка $M_{01}\left(-\frac{1}{6}; 1; \frac{5}{6}\right)$ $M_{02}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

Підставимо ці значення точок дотику, отримаємо дві дотичні площини:

$$\begin{aligned} \pi_1: 3x + 6y + 3z - 8 &= 0 \\ \pi_2: 3x + 6y + 3z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

6.2.4 Конус асимптотичних напрямів. Конус асимптот

Теорема 6.15. Геометричне місце прямих, що проходить через дану точку простору і мають асимптотичний напрям відносно поверхні є дійсний або наявний конус з вершиною у цій точці.

Доведення. Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - деяка точка простору і прями, які проходять через цю точку, мають асимптотичний напрям, відносно заданої поверхні (6.26). Запишемо рівняння пучка цих прямих:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (*)$$

Умова асимптотичності – п 6.2.2 в рівнянні (6.27)

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0$$

Значення l, m, n знайдемо з рівняння (*) пучка:

$$l = \frac{x - x_0}{t}, \quad m = \frac{y - y_0}{t}, \quad n = \frac{z - z_0}{t}.$$

Підставимо ці значення в умову асимптотичності. Отримаємо:

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0 \quad (6.32)$$

Рівняння (6.32) є однорідним другого степеня відносно $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ і, тобто, є рівнянням дійсної або уявної конічної поверхні з вершиною у точці $(x_0; y_0; z_0)$

Якщо у точці $(x_0; y_0; z_0)$ є центр поверхні, то тоді цей конус буде *конусом асимптот* поверхні.

Теорема доведена.

6.2.5 Центр поверхні

Центром поверхні другого порядку називають точку, в якій хорди, перетинаючись, діляться навпіл.

Аналогічними міркуваннями, які були проведені для центра кривих другого порядку, ми доведемо теорему.

Теорема 6.16. Координати центра поверхні $2F(x_0; y_0; z_0) = 0$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0, \\ F_z = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Доведення. Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - центр поверхні S . Візьмемо цю точку за початком на прямій і запишемо рівняння цієї прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Знайдемо точки перетину її з поверхнею S . Так як M_0 - центр, то точки перетину $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$, будуть симетричні відносно M_0 тому у рівнянні (*) $M=0$, тобто

$$Fx_0 + mFy_0 + nFz_0 = 0 \quad (\alpha)$$

Рівність (α) буде справедливою для будь-якої прямої, яка проходить через точку M_0 . Отже, для довільних l, m, n це можливо тоді і тільки тоді, коли одночасно $Fx_0 + Fy_0 + Fz_0 = 0$

Тобто точка M_0 - розв'язок системи (6.33).

Теорема доведена.

Дослідження

Запишемо кожне рівняння системи (6.33) у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \quad (6.33')$$

Дослідимо систему однорідних рівнянь з трьома змінними

Можливі випадки:

1. $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$. Площини мають єдину спільну точку, поверхня має єдиний центр. Тоді $\delta \neq 0$ і навпаки. Такі поверхні називаються центральними. Отже, для того, щоб поверхня була

$\delta \neq 0, \Delta \neq 0$ - поверхня центральна.

2. $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$. Серед трьох площин системи тільки дві перетинаються, так як два рівняння системи лінійно незалежні. Площини перетинаються по прямій. Поверхня має пряму центрів. Приклади таких поверхонь є еліптичні і гіперболічні циліндри.

$\delta = 0, \Delta \neq 0$ - поверхня має пряму центрів.

3. $\text{rang } A = \text{rang } B = 1$. Одне рівняння системи лінійно незалежне і площини співпадають, тобто поверхня має площину центрів. Наприклад, якщо поверхня розпадається на дві паралельні площини.

$\delta = 0, \Delta = 0$ - поверхня має площину центрів.

4. $\text{rang } A = 2, \text{rang } B = 3$. Система не сумісна, але так як $\text{rang } A = 2$, то площини попарно перетинаються по паралельних прямих, які перетинаються у нескінченності. Це, наприклад, параболоїди.

$\delta = 0, \Delta \neq 0$ - поверхня не має жодного центра

5. $\text{rang } A = 1, \text{rang } B = 2$. Площини паралельні, вони в нескінченності по прямій. Поверхня має пряму центрів у нескінченності. Прикладом такої поверхні є параболічний циліндр.

$\delta = \Delta = 0$ - поверхня має лінію центрів у нескінченності

Наслідки

Класифікуємо поверхні так:

1. Центральні поверхні ($\delta \neq 0$) (еліпсоїди, гіперболоїди);
2. Нецентральні поверхні з безліччю центрів:
 - прямою центрів (еліптичні, гіперболічні циліндри),
 - площиною центрів (дві паралельні площини).
3. Нецентральні поверхні без жодного центра:
 - центр в нескінченності (параболоїди);
 - ліній в центрів нескінченності (параболічний циліндр).

6.2.6 Діаметральні площини

Теорема 6.17 Геометричне місце середин системи паралельних хорд даного напрямку $\vec{p}(l; m; n)$ поверхні другого порядку $S: 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$ є площина, яка називається діаметральною площиною, спряженою з хордами даного напрямку $\vec{p}$ (рис.6.26)

Доведення. Проведемо довільну пряму l , паралельну даному напрямку $\vec{p}$, яка перетинає S у точках M_1 і M_2 . Нехай M_0 середини хорди (рис.6.25).

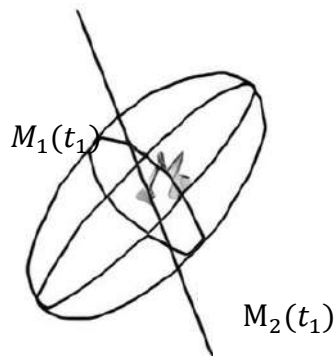


Рис.6.25

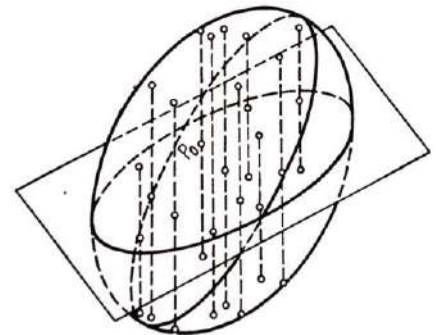


Рис.6.26

Тоді взявши точку M_0 за початок на прямій, запишемо параметричні рівняння цієї прямої. У рівнянні (*) $M=0$, тобто $lFx_0 + mFy_0 + nFz_0 = 0$, $(x_0; y_0; z_0)$ - середина хорди M_1, M_2 . Нехай тепер точка M_0 пробігатиме середини всіх хорд даного напрямку. Тоді вона буде біжучою точкою $M(x; y; z)$ і для довільного її положення виконується (а), де замість $x_0; y_0; z_0$ підставимо $x; y; z$. Отримаємо

$$lFx + mFy + nFz = 0 \quad (6.34)$$

Рівняння (6.34) є геометричним місцем середин системи хорд даного напрямку $\vec{p}$. Це рівняння лінійне відносно x, y, z . У розгорнутому вигляді

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)y + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)z + c = 0$$

Це рівняння завжди задає площину при будь-яких l, m, n крім одного випадку, коли всі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю. А це означає, що поверхня не має центру, тобто $\delta = 0$ і, більш детально, що діаметральна площина спряжена з напрямком l, m, n паралельна осі нецентральної поверхні без жодного центру.

Теорема доведена.

Рівняння діаметральної площини, спряженої з напрямком $\vec{p} (l, m, n)$, має вигляд (6.34) $lFx + mFy + nFz = 0$.

Наслідки

1. Нехай $\vec{p} = (1; 0; 0)$, то рівняння діаметральної площини $\pi_1: F_x = 0$ є спряжене з віссю ox .

Аналогічно, якщо $\vec{p} = (0; 1; 0)$, то діаметральна площина $\pi_2: F_y = 0$, спряжена з віссю oy та, якщо $\vec{p} = (0; 0; 1)$, то діаметральна площина $\pi_3: F_z = 0$, спряжена з віссю oz .

Отже, центр поверхні є точкою перетину трьох діаметральних площин, спряжених з напрямками координат осей.

2. Кожна діаметральна площина проходить через центр, бо координати центра задовольняють рівняння (6.34).

3. Діаметральні площини параболоїдів перетикаються по паралельних прямих, так як проходять через центр, а центр в нескінченості (центр параболоїда).

4. Діаметральні площини параболічного циліндра паралельні між собою, так як вони перетинаються в нескінченності по прямій.

Приклад: Для поверхні $6x^2 + 9y^2 + z^2 + 4xz + 6yz - 2y - 4z - 3 = 0$

знайти діаметральну площину, паралельну $\pi: x + 3y - z + 5 = 0$

Розв'язання. Вияснимо, чи поверхня центральна і чи не розпадається обчисливши δ і Δ .

$$\delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 > 0 \quad - \text{поверхня центральна.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -29 - \text{дійсний еліпсоїд.}$$

Щоб записати рівняння площини, нам потрібно l, m, n . Скористаємось тим, що діаметральна площина (6.34) $\parallel \pi$ (коефіцієнти при змінних пропорційні). Рівняння шуканої площини має вигляд

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad (6l + 3m - 2n)x + (3l + 9m)y + (-2l + n)z &= 0 \\ \frac{6l + 3m - 2n}{1} &= \frac{3l + 9m}{3} = \frac{-2l + n}{-1}, \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{cases} 3(6l + 3m - 2n) = 3l + 9m; \\ -3l - 9m = -6l + 3n. \end{cases} \quad \begin{cases} 15l - n = 0 \\ l - 3n - n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m = \frac{5}{2}l \\ m = -\frac{2}{2}l \end{cases}$$

Запишемо відношення координат вектора $\vec{p}$

$$l : m : n = 2 : (-1) : 5.$$

Підставивши у (6.34), отримаємо $\pi_1: x+3y-z-1=0$.

Хорда, яка проходить через центр поверхні називається **діаметром поверхні**. Іншими словами, діаметром поверхні є лінія перетину діаметральних площин.

Два діаметри d_1 і d_2 називаються *спряженими*, якщо кожен із них лежить у діаметральній площині, спряженій з другим діаметром.

Приклад. Скласти рівняння діаметра, спряженого із діаметральною площиною попереднього прикладу.

Розв'язання. Знаємо відношення

$$l : m : n = 2 : (-1) : 5$$

Залишилось знайти центр поверхні, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}, \text{ звідки } O^1\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{5}\right).$$

Отрисуємо рівняння діаметра, спряженого з даною площиною:

$$\frac{x + \frac{1}{3}}{2} = \frac{y - \frac{2}{9}}{-1} = \frac{z - \frac{2}{5}}{5},$$

6.2.7. Рівняння поверхні відносно нового початку координат. Рівняння центральної поверхні відносно її центра

Нехай поверхня задана рівнянням $S: 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$ відносно системи $хоуz$. Виконаємо перенесення початок координат за формулами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases}$$

Нове рівняння поверхні $S: 2F(x'; y'; z')$ отримаємо підставивши в задане рівняння замість x, y, z формулами перенесення початку:

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + a_{22}(y' + y_0)^2 + a_{33}(z' + z_0)^2 + 2a_{12}(x' - x_0)(y' - y_0) + 2a_{13}(x' - x_0)(z' - z_0) + 2a_{23}(y' - y_0)(z' - z_0) + 2a_{14}(x' + x_0) + 2a_{24}(y' + y_0) + 2a_{34}(z' + z_0) + a_{44} = 0$$

Остаточно:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2F_{x_0}x' + 2F_{y_0}y' + 2F_{z_0}z' + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$$

Висновки.

1. При перенесенні початку група старших членів залишається незмінною. Кажуть, що незмінною є квадратична форма поверхні. А отже, перший інваріант перенесення початку

$$I_1 = \delta$$

1. Коефіцієнтами при лінійних членах в новому рівнянні є вирази

$$F_{x_0}, F_{y_0}, F_{z_0}$$

2. Вільний член є результат підстановки в задане рівняння квадратики координат нового початку.

3. Можна довести, як і для випадку кривих, що другим інваріантом перенесення початку є Δ , тобто $I_2 = \Delta$

А також, $I_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

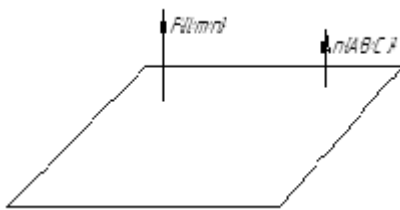
Нехай $S: 2F(x;y;z)=0$ - центральна. Тоді її центр є розв'язком рівня

$$\text{системи } \begin{cases} Fx = 0 \\ Fy = 0 \\ Fz = 0 \end{cases} \text{ тобто } Fx_0 = Fy_0 = Fz_0 = 0.$$

Очевидно, рівняння центральної поверхні відносно центра не має лінійних членів, тобто набирає вигляду

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2F_{x_0}x' + 2F_{y_0}y' + 2F_{z_0}z' + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0.$$

6.2.8 Головні осі поверхонь другого порядку. Характеристичне рівняння



Напрямок $\vec{p}(l;m;n)$ називається *головним*, якщо він перпендикулярний до спряженої з ним діаметральної площини (рис.6.26).

Рівняння діаметральної площини

Рис. 6.26 $lFx + mFy + nFz = 0$ запишемо в розгорнутому вигляді

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0$$

Запишемо рівняння площини виділивши коефіцієнти при змінних x, y, z :

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)y + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)z + c = 0$$

Так як $\vec{p} \perp \pi$, $\vec{n}(A;B;C) \perp \pi$, $\vec{n} \parallel \vec{p}$. Отримаємо, за необхідною і достатньою умовою паралельності векторів:

$$\frac{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n}{l} = \frac{a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n}{n} = \lambda.$$

Прирівнявши кожен дріб до λ , отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n = l\lambda, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n = m\lambda, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n = n\lambda. \end{cases} \quad (6.35)$$

або

$$\begin{cases} (\dot{a}_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n = 0 \end{cases} \quad (6.35')$$

Координати головного напрямку $\vec{p}(l;m;n)$ знайдемо, розв'язавши систему(6.35'). Вона однорідна відносно невідомих $l;m;n$ тому $\det=0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6.36)$$

Рівняння (6.36) називається **характеристичним рівнянням** поверхні.

Розв'язавши це рівняння, ми знайдемо три значення λ : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і підставивши їх по черзі в рівняння (6.35'), знайдемо координати головного напрямку поверхні.

6.2.9 Властивості

Теорема 6.18. Головні напрями $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ що відповідають кореням характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ відповідно, взаємно перпендикулярні.

Доведення. Розглянемо за два головні напрямки $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$, що відповідають $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Нехай $\vec{p}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{p}_2(l_2, m_2, n_2)$. Тоді координати кожного із них вони задовольняють (6.35).

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 : & \begin{cases} \dot{a}_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1 = \lambda_1l_1, \\ \dot{a}_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1 = \lambda_1m_1, \\ \dot{a}_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1 = \lambda_1n_1. \end{cases} \\ \vec{p}_2 : & \begin{cases} \dot{a}_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 = \lambda_2l_2 \\ \dot{a}_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2 = \lambda_2m_2, \\ \dot{a}_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2 = \lambda_2n_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Кожне рівняння першої системи домножимо відповідно на l_2, m_2, n_2 , а другої на l_1, m_1, n_1 і додамо. Отримаємо для першої системи $a_{11}l_1l_2 + a_{12}m_1m_2 + a_{13}n_1n_2 + a_{12}(l_2m_1 + l_1m_2) + a_{13}(l_1n_2 + n_1l_2) + a_{23}(m_1n_2 + m_2n_1) = \lambda_1(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$
Для другої системи $a_{11}l_1l_2 + a_{12}m_1m_2 + a_{13}n_1n_2 + a_{12}(l_2m_1 + l_1m_2) + a_{13}(l_1n_2 + n_1l_2) + a_{23}(m_1n_2 + m_2n_1) = \lambda_2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$
Порівняємо обидві суми. Вирази у лівих частинах рівні. Отже, будуть рівні і праві частини. Отримаємо: $(\lambda_1 - \lambda_2)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0$

Так як $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \text{ тобто } \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \perp \vec{p}_2.$$

Аналогічно доведемо, що $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_3$, $\vec{p}_2 \perp \vec{p}_3$.

Теорема доведена.

Теорема 6.19. Для кожної поверхні корені характеристичного рівняння (6.36) завжди дійсні.

Доведення. Кубічне рівняння (6.36) має обов'язково один з розв'язків дійсний. Нехай для означеності λ_3 - дійсний розв'язок, і нехай тоді λ_2 і λ_3 комплексно спряжені, тобто можемо подати їх у вигляді $\lambda_2 = u + r_i$ і $\lambda_3 = u - r_i$

Знайдемо головні напрями для λ_2 із системи (6.35') :

$$\begin{cases} ((a_{11} - u) - r_i)l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2 = 0, \\ a_{21}l_2 + ((a_{22} - u) - r_i)m_2 + a_{23}n_2 = 0, \\ a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + (a_{33} - u) - r_i)n_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки система має тільки два незалежні рівняння, то для головного напрямку знайдемо відношення $l_2:m_2:n_2$. Для цього візьмемо перші два рівняння системи, з яких матимемо

$$\begin{aligned} l_2:m_2:n_2 &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ (a_{22} - u) - r_i & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & (a_{11} - u) - r_i \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a_{11} - u) - r_i & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - u) - r_i \end{vmatrix} = \\ &= (a_{12}a_{23} - a_{13}(a_{22} - u) - a_{13}r_i) : (a_{13}a_{21} - a_{23}(a_{11} - u) - a_{23}r_i) : ((a_{11} - u)(a_{22} - u) - r^2 - a_{12}^2 \pm \\ & (a_{11} + a_{22} - 2u)r_i). \end{aligned}$$

Для λ_3 , тобто для третього головного напрямку, аналогічно знайдемо $l_3:m_3:n_3$, використавши два рівняння системи, отриманої із (6.35') підстановкою замість λ значення $\lambda_3 = u - r_i$. Звідки матимемо $l_3:m_3:n_3 =$

$$\begin{aligned} &= (a_{12}a_{23} - a_{13}(a_{22} - u) - a_{13}r_i) : (a_{13}a_{21} - a_{23}(a_{11} - u) - a_{23}r_i) : ((a_{11} - u)(a_{22} - u) - r^2 - a_{12}^2 \\ & + (a_{11} + a_{22} - 2u)r_i). \end{aligned}$$

Бачимо, що координати головних напрямів $\vec{p}_2$ і $\vec{p}_3$, що відповідають комплексно спряженим, якщо $\vec{p}_2 (l_2, m_2, n_2)$, то $\vec{p}_3 (l_3, m_3, n_3)$, l_2 і l_3 , m_2 і m_3 , n_2 і n_3 , комплексно спряжені. Якщо введемо позначення, то скорочено можемо записати

$$l_2 = s_1 + iv_1, \quad l_3 = s_1 - iv_1$$

$$m_2 = s_2 + iv_2, \quad m_3 = s_2 - iv_2$$

$$n_2 = s_3 + iv_3, \quad n_1 = s_3 - iv_3,$$

Так як у теоремі 6.17 було доведено, що $\vec{p}_2 \perp \vec{p}_3$ тому $\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = 0$ і нашому випадку:

$$\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = s_1^2 + v_1^2 + s_2^2 + v_2^2 + s_3^2 + v_3^2 = 0$$

Сума додатних чисел рівна нулю тоді і тільки тоді, коли:

$$u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

Що неможливо. Ми прийшли до суперечності. Отже, комплексно спряженими λ_2 і λ_3 бути не можуть, тому вони дійсні.

Теорема доведена.

Наслідки

1. Кожна поверхня має три головні напрями.
2. Головні осі проходять через центр поверхні.
3. В нецентральных поверхнях мають менше головних осей, але все ж таки три головні напрями. Наприклад, рис.6.27.

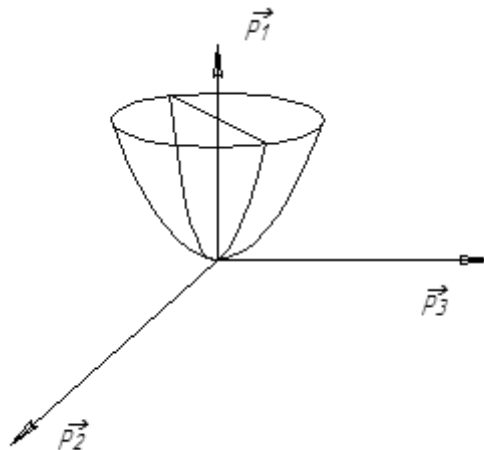


Рис. 6.27

Діаметри, які мають головні напрямки називається *головними діаметрами* або *головними осями*.

Теорема 6.20. Якщо осі прямокутної системи координат повернути так, щоб вони мали головні напрями, то відносно нової системи координат у рівнянні поверхні будуть відсутні добутки різнойменних змінних і навпаки,

якщо у рівнянні поверхні відсутні добутки різнойменних змінних, то це означає, що всі осі координат мають головні напрями відносно цієї квадрики.

Іншими словами: Для того, щоб $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \Leftrightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мали головний напрям.

Доведення. Необхідність. Нехай $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, доведемо, що $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мають головний напрям.

Запишемо характеристичне рівняння (6.36) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Його розв'язки: $\lambda_1 = a_{11} \quad \lambda_2 = a_{22} \quad \lambda_3 = a_{33}$

Система (6.35') набере вигляду для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ відповідно :

$$\lambda_1 : \begin{cases} (a_{11} - a_{11})l + 0 = 0, \\ (a_{22} - a_{11})m = 0, \\ (a_{33} - a_{11})n = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\vec{i}(1;0;0)$ задовольняє цю систему і, отже, вектор $\vec{i}$ має головний напрям відносно поверхні.

$$\lambda_2 : \begin{cases} (a_{11} - a_{22})l + 0 = 0, \\ (a_{22} - a_{22})m = 0, \\ (a_{33} - a_{22})n = 0. \end{cases}$$

$\vec{j}(0;1;0)$ задовольняє цю систему. Аналогічно для λ_3 вектор $\vec{k}(0;0;1)$ задовольняє відповідну систему і, отже, має головний напрям відносно поверхні.

Достатність. Нехай $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мають головні напрями відносно поверхні, тобто вони задовольняють систему (6.35'). Доведемо що $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Отже, нехай $\vec{i}(1;0;0)$ задовольняє (6.35'). Підставимо координати $\vec{i}$ в (6.35').

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 = 0 \\ a_{21} \cdot 0 + (a_{22} - \lambda) \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 = 0 \\ a_{31} \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 + (a_{33} - \lambda) \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Звідси матимемо:

$$\begin{cases} a_{11} - \lambda = 0, \\ a_{12} = 0, a_{13} = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a_{11} = \lambda_1, \\ a_{12} = a_{13} = 0. \end{cases}$$

Аналогічно, так як $\vec{j}(0;1;0)$ задовольняє (6.35'), то $a_{22} = \lambda_2, a_{23} = 0$.

І також $\vec{k}(0;0;1)$ задовольняє систему, то $a_{33} = \lambda_3$, $a_{31}=a_{32}=0$.

Теорема доведена

Наслідки

Якщо осі координат повернуті так, щоб вони мали головні напрями, то в новому рівнянні поверхні будуть відсутні добутки іменних змінних і коефіцієнтами при квадратах змінних будуть характеристичного рівняння.

1. Рівняння поверхні відносно головних напрямів має вигляд:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0$$

Приклад. Записати рівняння головних осей поверхні, заданої рівнянням

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0. \text{ Знайти головні напрями.}$$

Розв'язання. Обчислимо δ і Δ

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 30 \end{vmatrix} = -6 \cdot 162 \neq 0 - \text{поверхня не розпадається}$$

Знайдемо центр поверхні, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 6 = 0, \\ -2x + 6y - 2z - 12 = 0, \\ -2y + 5z + 9 = 0. \end{cases} \text{ звідси, } O'(1; 2; -1) - \text{центр поверхні.}$$

Перейдемо до відшукування головних напрямів. Для цього спочатку складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це кубічне рівняння $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda 162 = 0$, розв'язками якого є $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Підставимо по черзі ці значення λ в систему (6.35'), яка для нашого випадку набирає вигляду.

$$\begin{cases} (7-\lambda)l - 2m = 0, \\ -2l + (6-\lambda)n = 0, \\ -2m + (5-\lambda)n = 0; \end{cases}$$

Для $\lambda_1=3$ матимемо
$$\begin{cases} 4l - 2m = 0, \\ -2l + 3m - 2n = 0, \\ -2m + 2n = 0. \end{cases}$$

звідки $\vec{p}_1 (1;2;2)$ – головний напрям, що визначається коренем характеристичного рівняння λ_1 .

Аналогічно, для $\lambda_2=6$:
$$\begin{cases} l - 2m = 0, \\ -2l - 2n = 0, \\ -2m - n = 0, \end{cases}$$

Тоді $\vec{p}_2 (2;1;-2)$ і $\vec{p}_3 (2;-2;1)$ отримаємо із системи для $\lambda_3=9$.

Запишемо рівняння головних осей, що визначаються відповідно головними напрямками $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$:

$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

$$l_3 : \frac{x-1}{2} - \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

6.2.10 Зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду за допомогою перетворення координат

I. Центральні поверхні

Алгоритм розв'язання

1. Знайдемо δ

$$\delta \neq 0$$

Ми знаємо, що якщо повернути осі так, щоб вони мали головні напрямки, то коефіцієнт при квадратах змінних в новому рівнянні квадрики будуть корені характеристичного рівняння і так як δ -інваріант, то

$$\delta = \delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

Для центральної поверхні жоден корінь характеристичного рівняння не рівний нулю, тобто канонічному рівнянні центральної квадрики присутні квадрати трьох змінних.

2. Знайдемо Δ .
3. Знайдемо центр поверхні, розв'язавши відповідну систему.
4. Перенесемо початки координат у центр поверхні

Отримаємо рівняння:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + \dots + 2a_{32}x'y' + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$$

де $x_0; y_0; z_0$ - центр поверхні.

Покажемо як користуючись інваріантом Δ .

Знайти $2F(x_0; y_0; z_0)$, якщо повернути осі так, щоб вони мали головний напрям.

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 2F = \delta 2F$$

$$2F = \frac{\Delta}{\delta}$$

Остаточно при перенесенні початку у центр поверхні рівняння набере вигляду $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + \dots + 2a_{32}x'y' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

5. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння.
6. Знайдемо корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
7. Знайдемо головні напрямки $\vec{p}_1; \vec{p}_2; \vec{p}_3$.
8. Користуючись головними напрямками, знайдемо орти нової системи координат. Вище ми довели, що $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2 \parallel \vec{p}_3$ система прямокутна.

Нові орти:

$$\vec{i}' \left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{m_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{j}' & \left(\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} \right) \\ \vec{k}' & \left(\frac{l_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{m_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}; \frac{n_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} \right) \end{aligned} \quad (**)$$

Знаючи координати нових ортів, запишемо формули повороту осей.

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} x'' + \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} y'' + \frac{l_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} z'' \right), \\ y' &= \left(\frac{m_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} x'' + \frac{m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} y'' + \frac{m_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} z'' \right), \\ z' &= \left(\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} x'' + \frac{n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} y'' + \frac{n_3}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} z'' \right) \end{aligned}$$

Ці формули підставимо у рівняння поверхні відносно центра. Отримаємо канонічне рівняння

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Такий спосіб зведення до канонічного до канонічного рівняння поверхні дає можливість зобразити поверхню відносно системи координат. А саме:

- 1) перенесемо початок координат в центр поверхні,
- 2) повернемо осі так, щоб вони мали головні напрями,
- 3) за отриманим канонічним рівнянням поверхні виконаємо побудову.

Приклад. Записати канонічне рівняння поверхні другого порядку, заданої рівнянням $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$, і зобразити її в системі координат.

Розв'язання. Виконаємо спрощення за розглянутим планом. Ми вже обчислили вище: $\delta = 162$, $\Delta = -6 \cdot 162$, знайшли центр $O'(1; 2; -1)$. Перенесемо початок координат у точку O' - центр поверхні. Рівняння матиме вигляд

Підставимо ці формули в рівняння відносно центра, виконавши перетворення отримаємо рівняння: $7x'^2 + 6y'^2 + 5z'^2 - 4y'z' - 4x'z' + 2F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Обчислимо $2F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-6 \cdot 162}{162} = -6$.

Тоді рівняння поверхні $7x'^2 + 6y'^2 + 5z'^2 - 4y'z' - 4x'z' - 6 = 0$

Головні напрями вже визначили

$$\vec{p}_1(1;2;2), \vec{p}_2(2;1;-2), \vec{p}_3(2;-2;1).$$

Знайдемо орти нової системи координат за формулами (**):

$$\vec{i} = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}), \vec{k} = (\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}), \vec{j} = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}).$$

Запишемо формули повороту осей координат:

$$x' = \frac{1}{3}(x'' + 2y'' + 2z''),$$

$$y' = \frac{1}{3}(2x'' + y'' - 2z''),$$

$$z' = \frac{1}{3}(2x'' - 2y'' + z'').$$

Підставимо ці формули в рівняння поверхні відносно центра. Виконавши перетворення, спрощення, отримаємо рівняння:

$$3x''^2 + 6y''^2 + 9z''^2 - 6 = 0.$$

Отже, канонічне рівняння поверхні $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} + \frac{z''^2}{\frac{2}{3}} = 1$, визначає

еліпсоїд.

II Поверхня з безліччю центрів

$$\text{Система} \begin{cases} Fx = 0, \\ Fy = 0, \\ Fz = 0. \end{cases} \quad (\delta = 0)$$

має безліч розв'язків. Тут можливі два випадки:

а) пряма центрів

б) площина центрів.

1. На прямій чи площині центрів візьмемо довільну точку M_0 :

$M_0(0; y_0; z_0)$ – на прямій, $M_0(0; 0; z_0)$ – на площині.

Перенесемо початок координат в цю точку. Отримаємо рівняння:

$$a_{11}x'^2 + \dots + 2a_{23}y'z' + 2F(M_0) = 0$$

2. Як і в попередньому випадку: знаходимо головні напрями, нові орти, формули повороту.

III. Поверхня без жодного центра

$$\delta = 0, \text{rang } A \neq \text{rang } B \text{ системи } \begin{cases} Fx = 0, \\ Fy = 0, \\ Fz = 0. \end{cases}$$

Перший крок: заходимо головні напрями, координати нових ортів, виконуємо поворот системи координат.

Другий крок: виділяємо повні квадрати і знаходимо точку, у яку треба перенести початок координат, щоб позбутися лінійних членів, яких можна, так як це робили при зведенні до канонічного виду рівняння параболи.

Зауваження. Головний напрям поверхні, який відповідає нульовому розв'язку характеристичного рівняння ($\lambda=0$) є асимптотичним.

Дійсно, якщо головний напрям $\vec{p}$, що відповідає розв'язку характеристичного рівняння $\lambda=0$, має координати l, m, n , то вони задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n = \lambda l, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n = \lambda m, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n = \lambda n. \end{cases}$$

Якщо цей напрям є асимптотичним, то коефіцієнт L у квадратному рівнянні має бути рівним нулю.

Обчислимо його значення:

$$L = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = l(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + m(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + n(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) = l\lambda l + m\lambda m + n\lambda n = \lambda(l^2 + m^2 + n^2) = 0.$$

Отже, цей головний напрям є асимптотичним напрямом.

6.3 Класифікація поверхонь другого порядку

6.3.1 Інваріанти повороту осей

Як у випадку загальної теорії кривих, другого порядку одна і та ж поверхня другого порядку відносно різних систем координат має різні рівняння другого степеня. Як же коефіцієнти рівняння характеризують поверхню?

Виявляється, що незалежно від того, яку прямокутну декартову систему координат в просторі вибрати, існують вирази, складені із коефіцієнтів

рівняння, які залишаються незмінними у всіх цих системах координат для заданої поверхні. Такі вирази називають *інваріантами*.

При повороті прямокутно декартової системи координат існують такі інваріанти:

$$I_1 = \delta, \quad I_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_3 = \Delta,$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_5 = a_{44}.$$

Враховуючи інваріанти перенесення початку координат, можемо записати інваріанти перетворення прямокутних координат:

$$I_1 = \delta, \quad I_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_3 = \Delta, \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Перепозначимо нумерацію інваріантів.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_3 = \delta, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Характеристичне рівняння набере вигляду $\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$

6.3.2 Класифікація центральних поверхонь

Як ми вже знаємо, для центральної поверхні жоден корінь характеристичного рівняння не дорівнює нулю і канонічне рівняння після перенесення початку і повороту осей має вигляд:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (6.37)$$

Теорема 6.21. Існує шість і тільки шість видів центральних поверхонь.

Доведення. Полягає в дослідженні рівняння (6.37). Тут принципово можливі два випадки. $\Delta \neq 0$ та $\Delta = 0$

Розглянемо кожен з випадків.

I. $\Delta \neq 0$

Рівняння (6.37) перепишемо у вигляді.

$$\frac{x^2}{\frac{-\Delta}{\lambda_1 \delta}} + \frac{y^2}{\frac{-\Delta}{\lambda_2 \delta}} + \frac{z^2}{\frac{-\Delta}{\lambda_3 \delta}} = 1 \quad (\alpha)$$

Можливі такі і тільки такі випадки:

1. Всі знаменники додатні, тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{дійсний еліпсоїд.}$$

2. Всі значення від'ємні, тобто

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 - \text{уявний еліпсоїд.}$$

3. Два знаменники додатні, один від'ємний. Не порушуючи загальності, можна вважати, що

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Тоді маємо однопорожнинний гіперболоїд.}$$

4. Два знаменники від'ємні, один додатний. Не порушуючи загальності:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \text{двопорожнинний гіперболоїд.}$$

Інших випадків тут не існує.

II. Якщо $\Delta = 0$, то

Рівняння (44) набере вигляду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

Тут можливі такі і тільки такі два випадки.

5. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ різних знаків.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що два додатні і один від'ємний. Тоді рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ задає дійсну конічну поверхню.

6. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ однакових знаків.

Не порушуючи загальності, можна вважати їх додатними:

$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 0$ – уявна конічна поверхня з однією дійсною точкою – центром поверхні у початку координат $O(0;0;0)$.

Теорема 6.22. *Існує вісім і тільки вісім поверхонь з безліччю центрів.*

Доведення. Нехай поверхня $S: 2F(x;y;z)=0$ має безліч центрів, це означає що система

$$\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0, \\ F_z = 0. \end{cases}$$

має безліч розв'язків. Якщо $\delta = 0$ і $I_3 = \Delta$, то

характеристичне рівняння має вигляд $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda = 0$

Принципово можливі два випадки:

I. $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$.

Два корені характеристичного рівняння відмінні від нуля. Нехай, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Поверхня має лінію центрів – перетин двох діаметральних площин поверхні. Візьмемо на лінії центрів довільну точку $M_0(x_0; y_0; 0)$. Перенесемо туди початок координат. У отриманому рівнянні вільний член буде $2F(x_0; y_0; 0) = a_{44}'$. Повернемо осі так, щоб вони мали головні напрями. Рівняння в новій системі набере вигляду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2F(x_0; y_0; 0) = 0$$

Тут, у свою чергу, можливі такі випадки:

a) $2F(x_0; y_0; 0) \neq 0$, тоді

$$\frac{x^2}{\frac{2F}{\lambda_1 \delta}} + \frac{y^2}{\frac{2F}{\lambda_2 \delta}} = 1$$

Можливі такі і тільки такі випадки.

1. Обидва знаменники додатні, тобто

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{еліптичний циліндр.}$$

2. Обидва знаменники від'ємні.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 - \text{уявний еліптичний циліндр.}$$

3. Матимемо $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо знаменники різних знаків. Тоді це

рівняння гіперболічного циліндра.

б) Якщо $2F = 0$. Тоді $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$. Можливі випадки:

4. λ_1, λ_2 різних знаків. Для означеності:

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0 - \text{дві дійсні площини, які перетинаються по прямій,}$$

що є лінією центрів.

5. λ_1, λ_2 однакових знаків:

$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$ – це рівняння прямої, яка проходить через точку $O(0; 0; 0)$ і його задовольняють довільні значення z . Отже, це нова вісь oz , яка є перетином двох уявних площин, які перетинаються по дійсній прямій, що є лінією центрів.

Інших випадків тут, очевидно, не існує.

II. Якщо $\text{rang } A = \text{rang } B = 1$ -

два корені характеристичного рівняння рівні нулю. Нехай, для означеності, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Поверхня має площину центрів.

На цій площині візьмемо довільну точку $M_0(x_0; 0; 0)$ і перенесемо туди початки координат. В отриманому рівнянні вільний член $a_{44}' = 2F(x_0; y_0; 0)$.

Повернемо осі так, щоб вони мали головні напрями. Рівняння набере вигляду $\lambda x^2 + 2F = 0$.

Принципово можливі два випадки:

а) $2F \neq 0$, тоді

$$x^2 + \frac{2F}{\lambda} = 0$$

Тут можливі два випадки:

6. $\frac{2F}{\lambda} < 0$, тоді матимемо

$x^2 - a^2 = 0$ – дві паралельні площини. Площина центрів між ними.

7. $\frac{2F}{\lambda} > 0$

$x^2 - a^2 = 0$ – дві уявні паралельні площини.

б) $2F = 0$, тоді

8. $\lambda x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ – дві площини, що співпадають.

Теорема доведена.

6.3.4 Класифікація поверхонь без жодного центру

Теорема 6.23. Існує три і тільки три види поверхонь без жодного центру.

Доведення. Нехай поверхня задана рівнянням:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + r = 0$$

Тут можливі такі і тільки такі випадки.

I. $\delta \neq 0, \Delta \neq 0$.

Такий випадок можливий, коли $\text{rang } A = 2, \text{rang } B = 3$

Поверхня має центр у нескінченності, тому спочатку повернемо осі так, щоб вони мали головні напрями. В отриманому рівнянні поверхні будуть присутні квадрати двох змінних. Адже характеристичне рівняння має два корені, відмінні від нуля: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Повернемо осі так, щоб вони мали головні напрями, тоді рівняння набере вигляду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0$

Виділимо повні квадрати при x та y , всі решту членів перенесемо у праву частину рівняння. Отримаємо:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{24}'}{\lambda_2}\right)^2 = -2a_{34}'(z' + C), \text{ де } C = \frac{a_{44}'}{2a_{34}'}$$

Виконаємо перенесення початку координат за формулами:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1}, \\ y' = y'' - \frac{a_{24}'}{\lambda_2}, \\ z' = z'' + C \end{cases}$$

У новій системі координат рівняння поверхня набере вигляду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = -2a_{34}'z.$$

Покажемо, як користаючись інваріантами, знайти a_{34}' .

$$\text{Обчислимо } \Delta: \Delta = \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34}' \\ 0 & 0 & a_{34}' & 0 \end{vmatrix} = -a_{34}'\lambda_1\lambda_2.$$

$$\text{Звідси } a_{34}' = \sqrt{\frac{\Delta}{x_1 x_2}}$$

Остаточно рівняння поверхні матиме вигляд:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} z$$

Очевидно тут можливі два і тільки два випадки:

1. λ_1, λ_2 однакових знаків. Отримаємо еліптичний параболоїд.
2. λ_1, λ_2 різних знаків - гіперболічний параболоїд.

II. $\delta = \Delta = 0$

Два корені характеристичного рівняння рівні 0. Тоді після повороту осей отримаємо рівняння $\lambda_1 x'^2 + 2a_{14}'x' + a_{24}'y' + a_{34}'z' + a_{44}' = 0$

Виділимо повний квадрат при x, всі останні члени, перенесемо вправу частину рівняння. Матимемо

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a_{14}'}{\lambda_1}\right)^2 = -a_{24}'y' - a_{34}'z' - a_{44}' + \frac{a_{14}'^2}{\lambda_1} = 0$$

Це єдина поверхня, канонічне рівняння якої не можна записати відразу за допомогою інваріантів. Більше того, ми отримаємо рівняння уже не прямокутної системи координат. Перетворення координат, яке слід виконувати, щоб спростити рівняння поверхні, набувають вигляду:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a_{14}'}{\lambda_1}, \\ y' = \frac{a_{24}'}{\lambda_2} y'' + \underbrace{\frac{a_{34}'}{a_{24}'} + \frac{a_{44}'}{2a_{24}'}}_C - \frac{a_{14}'^2}{2a_{24}'\lambda}, \\ z' = z'' + C \end{cases}$$

Це означає, що необхідно:

1. Виконати перенесення початку в точку $O'(-\frac{a_{14}'}{\lambda}; C; 0)$
2. Перейти до базису $\vec{e}_1'(1; 0; 0), \vec{e}_2'(0; \frac{1}{a_{24}'}; 0), \vec{e}_3'(0; \frac{a_{34}'}{a_{24}'}; 1)$

У цій новій системі координат поверхня матиме рівняння $\lambda x^2 = y$. Це параболічний циліндр. Інших випадків не існує.

Теорема доведена.

Зауваження. Звести до канонічного виду параболічний циліндр можна було не змінюючи прямокутну систему координат, але довгим шляхом.

Висновок. Існує 17 і тільки 17 видів поверхонь другого порядку.

Предметний покажчик

А

Алгебра векторна 11
Аналітична геометрія 8
Асимптоти гіперболи 127
Асимптотичні напрями 155
Асоціативна властивість 16
Алгебраїчні властивості 46, 52
Афінна система координат 180

Б

Базис
- простору 35
- афінний 37
- ортонормований 38

В

Відрізок напрямлений 7
Відстань між двома точками 68
- від точки до прямої 208
- від точки до площини 211
Вектор
- вільний 9
- прикладений 10
- зв'язаний 10
- ковзний 10
- нормальний площини 161
- нульовий 11
- паралельний площині 179
- перенесення 147
- різниця 20
Вектори взаємно ортогональні 52
- колінеарні 15
- компланарні 15
- координатні (базисні) 40
- лінійно залежні 19
- незалежні 19
Векторний добуток 51
Векторний простір 54

Величини

- векторні 11
- скалярні 11
Вершина
- еліпса 103
- гіперболи 114
- параболи 110
- параболоїда еліптичного 240
- еліпсоїда 234

Відстань

- від точки до площини 204
- між мимобіжними прямими 214

Вісь

- лінії другого порядку 103
- обертання 226
- полярна 69
- симетрії 103

Взаємне розташування

- двох прямих на площині 98
- двох прямих у просторі 209
- двох площин у просторі 194
- прямої і площини 211
- трьох площин у просторі 199

В'язка площин 201

Властивості

- операції додавання векторів 16
- добутку вектора на число 22
- проекції вектора на вісь 42
- скалярного добутку 46
- еліпса 115
- гіперболи 125
- параболи 134
- фокальні 139

Г

Геометрія 7

Геометричні властивості 47, 52, 57

- Гіпербола 110
Гіперболоїд 238
- обертання 238
- двопорожнинний 236
- однопорожнинний 235
Головні напрями 168, 262, 269
Головні осі 169, 171, 261
Головні діаметри 264
- Д**
Двopopожнинний гіперболоїд 239
- обертання 240
Дистрибутивна 50
Діаметр лінії другого порядку 137
Діаметральні площини 257
Діаметри спряжені 150
Діаметри головні 264
Директриса
- гіперболи 129
- параболы 135
- еліпса 122
Добуток
- вектора на число 22
- векторний 50
- мішаний 62
- скалярний 49
Довжина вектора 48
Дотична до
- еліпса 118
- гіперболи 131
- параболы 135
- лінії другого порядку 157
Дотична до поверхні 254
- Е**
Ексцентриситет
- еліпса 117
- гіперболи 129
- параболы 135
Еліпс 113
Еліпсоїд 235
- обертання 235
- З**
Загальне рівняння
- прямої 97
- кривої другого порядку 139
- площини 188
- поверхні другого порядку 249
- конічної поверхні 233
Задачі
- основні афінної системи координат 182
- дві основні аналітичної геометрії 86
- перетворення координат 70
- І**
Інваріант 163, 271
Інваріанти
- повороту осей 272
- перенесення початку координат 173, 272
- К**
Канонічне рівняння
- прямої 91
- циліндричної поверхні
- еліпса 118
- гіперболи 123
- площини 186
- поверхні 235
Квадратична форма поверхні 260
Класифікація
- ліній 82
- ліній другого порядку
Колінеарність векторів 32
Коло 216

Компланарність 32
 Конічні перерізи 225
 Конус 226
 –асимптот 254
 –уявний 231
 Координати
 - вектора 61, 181
 –точки 173
 –полярні 71
 Коефіцієнт
 - лінійної комбінації 30
 - розкладу вектора 61
 Коефіцієнти
 - кутовий прямої
 - кутовий діаметра
 Корені x -го рівняння 173, 262
 Криві другого порядку 126
 Круговий циліндр 233
 Кут між двома векторами 49
 –між двома площинами 205
 –прямими 206
 –прямою і площиною 212
 –полярний 64

Л

Лема про рівність векторів 57
 Лінійна
 –залежність 30
 - комбінація 30
 –незалежність 31
 –Лінійчаті поверхні 245
 Лінія
 –на площині 73
 –у просторі
 –другого порядку 98

М

Матриця
 –ортогональна 78

–переходу 75
 Метод
 –координат 180
 –перерізів 219
 Мимобіжні прямі 210
 Міжфокусна відстань 113
 Мішаний добуток векторів 51

Н

Напрямок
 –асимптотичний 142
 –головний 156
 –напрявлені відрізки
 –співнапрявлені 12
 –рівні 12
 Нецентральні криві 178
 Нормальне рівняння 203
 Нормаль еліпса 120
 Нормоване рівняння 204

О

Обертання поверхні
 - еліпсоїд 235
 - гіперболоїд 239
 - двопорожнинний 238
 Об'єм
 - тетраедра 185
 - паралелепіпеда 58
 Оптична властивість
 - еліпса 120
 - гіперболи 132
 - параболі 136
 Орієнтація
 –простору 51
 Орт 24
 Орт вектора 24
 Ортогональна проекція 44
 Осі координат 159

П

Парабола 133

Параболоїд 242

—гіперболічний 243

—еліптичний 242

—обертання 242

Паралельні площини 226

Параметричне рівняння

- прямої 93, 207

- кола 88

- еліпса 89

- кривої 87

- площини 187

Простір

- додатно орієнтований 51

- від'ємно орієнтований 51

Пряма

—пряма на площині 97

—пряма у просторі 200

—площина 181

—пряма і площина 205

Перенесення паралельне 147

Переріз поверхні площиною 220 238

Перетворення систем координат

—афінних 67

—прямокутних декартових 70

Площа

— трикутника 53, 184

- паралелограма 53

Поверхня

- обертання 234

—конічна 214

—циліндрична 215

—лінійчаста 245

—центральна 259

Проекція

- точки 41

- вектора 41

- на площину 41

- на пряму 41

- на вісь 42

Промені,

- співнапрямлені 10

—протилежно напрямлені 10

Простір 55

Прямолінійні твірні

- однопорожнинного гіперболоїда 246

- гіперболічного параболоїда 247

Пучок

—площин 198

—прямих 100

Р

Радіус-вектор 173

Радіуси фокальні 112

Репер афінний 54

- ортонормований 54

Рівняння канонічне

- гіперболоїда двопорожнинного

- прямої 93, 201

- еліпса 114

—однопорожнинного 236

—гіперболи 112

—циліндра другого порядку 230

—конуса другого порядку 225

параболоїда

—гіперболічного 241

—еліптичного 240

—параболи 121

—еліпса 101

—еліпсоїда 233

—площини 178

—поверхні 232

—сфери 222

Рівняння прямої 201

–загальне 201	Фокальні властивості кривих 139
–з кутовим коефіцієнтом 219	
–нормальне 97	Х
–лінії другого порядку загальне 230	Характеристичне рівняння 172, 261
–характеристичне 161	
–полярне 92	Ц
Різниця векторів 19	Центр
Розпад лінії 155	–кривої 147
	–поверхні 252
С	–симетрії 134
Симетрія фігури 121	Центральна крива 147
–еліпса 116	Циліндр другого порядку
–гіперболи 126	–гіперболічний 114
Система координат	–еліптичний 110
- афінна 60,180	–параболічний 215
–прямокутна 61, 184	–уявний 277
–полярна 64	
–узагальнена полярна 65	
Скалярний добуток 46	
Спряжені гіперболи 123	
Спряжені діаметри 153	
Сума векторів 15	
Сфера 221	
Т	
Твірна	
- поверхні обертання 210	
- конічної поверхні 212	
- циліндричної поверхні 214	
Тетраедр 64	
Ф	
Фактор-множина 13	
Фокус 100	
Фокальні радіуси	
- еліпса 118	
- гіперболи 130	
- параболи 135	

ЛІТЕРАТУРА

1. Л.С.Атанасян. Геометрія. Ч. I. Навч. Посібник. К.: Вища школа, 1976. 456 с.
 2. Білоусова В.П. Аналітична геометрія: Навч. пос. для студ. ун-тів і пед.ін-ів. 3-є вид. К.: Вища школа, 1973. 327 с.
 3. Борисенко О. А., Ушакова Л. М. Аналітична геометрія (Навчальний посібник для університетів). Х.: Вид-во «Освіта» при Харк. ун-ті, 1993. 192 с.
 4. В.Н.Боровик, І.В.Зайченко, М.М.Мурач, В.П.Яковець. Геометричні перетворення площини. Навч.пос. для студ. ф-мат.ф-тів вищ. пед.навч.закл. Суми: Університ. Книга, 2003. 504 с.
 5. Деякі історико-філософські аспекти геометрії. Методична розробка. Ч. I. Луцьк, 1982. 94 с.
 6. Кравчук О.М, Практикум з аналітичної геометрії: навч.посіб. для вищ. навч. закл. У 2 ч. Ч1.Луцьк., Волин. нац. ун-т ім..Лесі Українки, 2012. 223с.
 7. Кравчук О.М, Практикум з аналітичної геометрії: навч.посіб. для вищ. навч. закл. У 2 ч. Ч2 .Луцьк., Волин. нац. ун-т ім..Лесі Українки, 2014. 199с.
 8. Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська. Лінійна алгебра та аналітична геометрія Навч. підручник . Л.: Бескид Біт, 2002. 261 с.
 9. А.А.Томусяк, В. С. Трохименко, Н. М. Шунда, Геометрія, ч. 1: Аналітична геометрія, Вінниця: ВДПУ, 2002.
 10. В. П. Яковець, В. Н. Боровик, Л. В. Ваврикович, Аналітична геометрія, Суми: Університетська книга, 2004. 296 с.
- Ю.К. Рудавський. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Л.: Бескид Біт, 2002. 256 с.