

**Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики**

ОЛЬГА ШВАЙ

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ
(РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ ГРАФІВ»)**

Луцьк-2025

УДК 519.17(075.8)

Ш 33

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського
національного університету імені Лесі Українки
(Протокол № 8 від 16 квітня 2025р.)

Рецензенти:

Гембарська С.Б. – кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри теорії функцій та методики навчання математики,
Волинський національний університет імені Лесі Українки;

Кальчук І.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри теорії функцій та методики навчання математики,
Волинський національний університет імені Лесі Українки.

Швай О. Л.

Ш 33 Теорія графів: конспект лекцій/ *Ольга Леонідівна Швай*. Луцьк,
2025. 54с.

Розглянуто розділ «Теорія графів» освітньої компоненти «Дискретна математика», який має широке теоретичне і практичне застосування. Матеріал подано у зрозумілій формі з великою кількістю прикладів. Кожна лекція містить питання та завдання для самоконтролю.

Рекомендовано здобувачам освіти першого курсу, спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика).

УДК 519.17(075.8)

© Швай О. Л., 2025

© Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2025

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Лекція 1. Основні поняття теорії графів.....	6
Лекція 2. Матричне задання графів. Ізоморфізм графів.....	15
Лекція 3. Частини графа, суграфи та підграфи. Операції над графами	22
Лекція 4. Зв'язність графів. Мости.....	27
Лекція 5. Задачі пошуку маршрутів у графі.....	33
Лекція 6. Дерева. Ліс. Каркасні дерева.....	41
Лекція 7. Розфарбування графів.....	46
Рекомендована література.....	55

ПЕРЕДМОВА

Теорія графів розпочала свій розвиток з праць Леонарда Ейлера, який у 1736 році не тільки розв'язав задачу про Кенігсберзькі мости, але й знайшов критерій існування спеціального маршруту (ейлерового циклу).

Задача про Кенігсберзькі мости

Місто Кенігсберг розміщене на обох берегах річки і двох островах. Сім мостів сполучають береги та острови між собою. Чи можна, вийшовши з довільної частини міста, пройти по кожному мосту рівно один раз і повернутись у початкове місце?

Схему сполучення частин міста мостами (Рис. 1) можна зобразити за допомогою системи точок і ліній на площині.

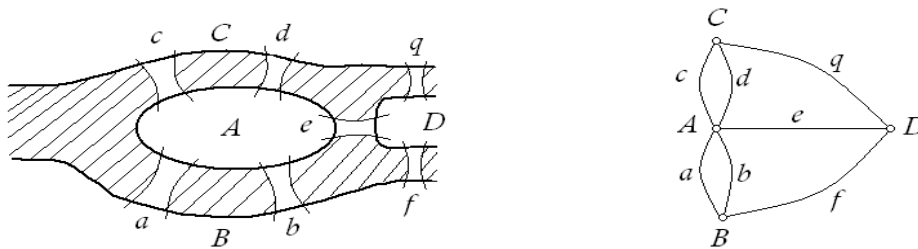


Рис.1

Тоді задача формулюється так: чи можна, починаючи з довільної точки, пройти через кожну лінію лише один раз і повернутися у цю саму точку.

Леонард Ейлер довів, що такого маршруту не існує. Довгий час дослідження Леонарда Ейлера були єдиними результатами теорії графів. Лише у середині 19 століття зусиллями інженера-електрика Густава Кірхгофа (*Kirchhoff*, 1824-1887) і математика Артура Келі (*Coylly*, 1821-1895) було отримано нові результати цієї теорії.

Інтенсивний розвиток теорія графів отримала 50 - 60 років тому. Цей розвиток пов'язаний із широким застосуванням теорії графів. У теоретико-графових термінах формулюється багато задач, які пов'язані з дискретними об'єктами. Такі задачі виникають при проектуванні схем управління,

досліджені автоматів, логічних ланцюгів, блок-схем програм тощо. Теорія графів стала мовою дискретної математики.

Термін “граф” уперше з'явився в працях видатного угорського математика Д.Кеніга (*König*) у 1936 році .

За змістом та обсягом пропонований конспект лекцій відповідає навчальному плану ОК "Дискретна математики" (розділ «Теорія графів») для здобувачів спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика).

У конспекті лекцій детально розглянуто теоретичний матеріал розділу. Всі основні теореми наведені з повним доведенням. Особливістю пропонованого лекційного курсу є більший акцент на методичній стороні подачі навчального матеріалу. Теоретичний матеріал супроводжується наведенням достатньої кількості вправ, які показують практичне застосування матеріалу. Це полегшить розуміння і сприятиме міцнішому засвоєнню знань студентами, передусім, при самостійному опрацюванні.

Запитання і завдання для самоперевірки, запропоновані після кожної лекції, дають можливість акцентувати увагу на головному під час вивчення кожної теми. Відповіді на них допоможуть студентам встановити логічні зв'язки курсу, систематизувати та узагальнити знання.

ЛЕКЦІЯ 1

Основні поняття теорії графів

Означення. Граф – це система, яка складається з непорожньої множини V і множини U деяких неупорядкованих пар з V .

Множина V містить елементи, які називаються вершинами, елементи множини U – ребрами.

Записують $G=(V,U)$.

Вершини зображають малими кружечками на площині (точками), а ребра лініями, які їх з'єднують. При цьому малюнок, який отримується, також називається графом.

При зображенні графів довжини відрізків і розміри кружечків довільні. На рис. 2 зображено три різні фігури, але вони зображають один і той же граф.

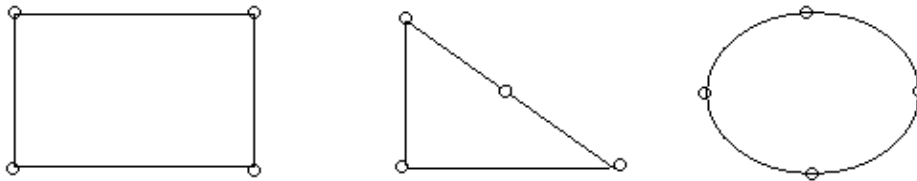


Рис. 2

Вершини графа позначаються великими (малими) буквами латинського або українського алфавітів, інколи числами; ребра - малими буквами або двома великими.

Число вершин графа називають *порядком* графа і позначають $|G|=n$.

Вершини A та B називають *суміжними*, якщо існує ребро, кінцями якого є ці вершини. Говорять, вершини A та B *інцидентні* ребру AB . Ці вершини називають також *кінцями* ребра AB .

Цілком аналогічно: два різні ребра – *суміжні*, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину.

Приклад

На рис 3 зображений граф $G=(V,U)$, у якого множина вершин $V=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, а множина ребер $U = \{V_1V_2, V_1V_3, V_3V_4, V_2V_3\}$.

Порядок графа $|G|=4$

Вершини V_1 та V_2 – суміжні, бо у графа існує ребро V_1V_2 , кінцями якого є ці вершини. Вершини V_1 та V_4 – несуміжні, бо у графа відсутнє ребро V_1V_4 . Ребра V_1V_3 і V_1V_2 мають спільну вершину V_1 , тому вони суміжні. . Ребра V_1V_2 і V_3V_4 не мають жодної спільної вершини, отже, вони несуміжні.

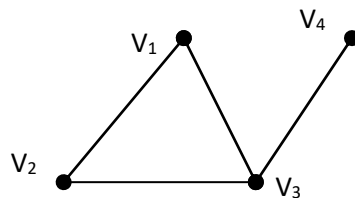


Рис.3

Означення. *Степенем вершини називається кількість ребер інцидентних цій вершині. Позначається $\rho(A)$.*

Вершина називається непарною, якщо її степінь непарний, парною, якщо степінь парний.

Приклад

Для графа, зображеного на рис.3, степені вершин такі:

$$\rho(V_1)=2, \rho(V_2)=2, \rho(V_3)=3, \rho(V_4)=1.$$

Нехай граф G має n вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$, степені яких відповідно $\rho(A_1), \rho(A_2), \dots, \rho(A_n)$.

Тоді число ребер N даного графа можна визначити за формулою:

$$N = \frac{\rho(A_1) + \rho(A_2) + \dots + \rho(A_n)}{2}$$

Лема (про рукостискання). *Сума степенів всіх вершин графа є парним числом.*

Доведення леми випливає з того, що кожне ребро вносить у суму степенів усіх вершин графа число 2.

Якщо інтерпретувати кожне ребро графа як рукостискання двох людей, то матимемо: при довільному числі рукостискань загальна кількість потиснутих рук – число парне.

Наслідок. У будь-якому графі число вершин непарного степеня – число парне.

Дійсно, якби це було не так, то сума степенів усіх вершин графа не могла б бути парною, що суперечить лемі про рукостискання.

Якщо граф має декілька однакових ребер, то вони називаються *кратними*.

Означення. Граф, який має кратні ребра, називається *мультиграфом*.

Означення. Ребро, яке з'єднує вершину саму з собою, називається *петлею*.

Означення. Граф, який містить кратні ребра і петлі називається *псевдографом*.

Приклад

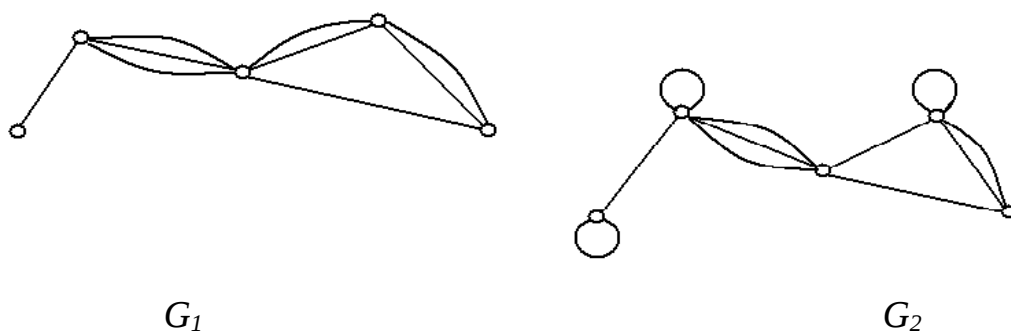


Рис. 4

На рис. 4 зображено мультиграф G_1 та псевдограф G_2 .

Різновиди графів

1. Повні графи.

Означення. Граф називається *повним*, якщо кожні дві його різні вершини сполучені одним і лише одним ребром.

Такі графи позначаються K_n , де n – кількість вершин графа.

Приклад

На рис. 5 зображено повні графи K_4 та K_5

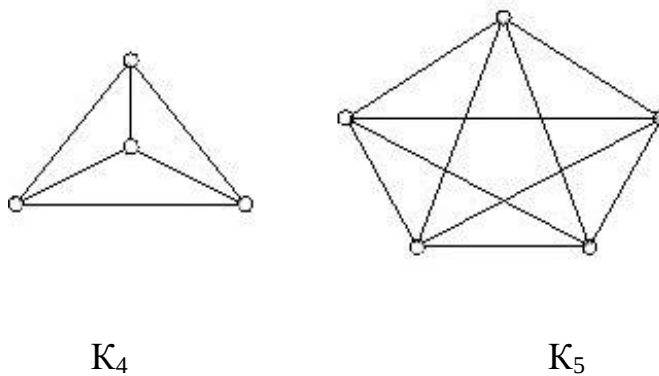


Рис.5

Кількість дво-елементних підмножин n -елементної множини дорівнює C_n^2 , тому повний граф має $C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ребер.

Граф G , який є неповним, легко перетворити у повний. Для цього досить додати ребра, яких не вистачає. Вершини графа G та ребра, що додані, теж утворюють граф, який називають *доповненням* графа G і позначають $\bar{G}$.

Приклад

На рисунку 6 зображено граф G та його доповнення $\bar{G}$

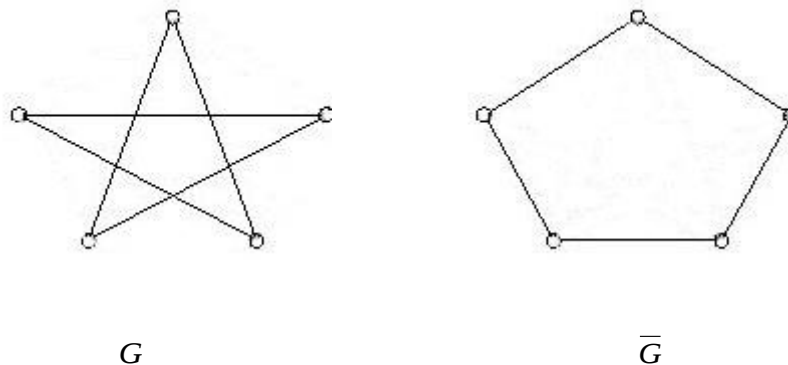


Рис.6

2. Регулярні (однорідні) графи.

Означення. Граф називається *регулярним (однорідним)*, якщо всі його вершини мають один і той же степінь.

Якщо степінь кожної вершини регулярного графа k , то граф називається *k -регулярним*. Регулярний граф 3-ого степеня називається *тривалентним (кубічним)*.

Приклад

На рис. 7 зображено тривалентний граф, який називають графом Петерсена.

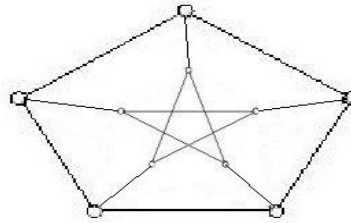


Рис.7

3. Порожні графи (нуль-графи).

Означення. Порожнім (нуль-графом) називається граф, який має вершини, але немає ребер.

Позначається N_n , де n - кількість вершин графа

Приклад

На рис. 8 зображено порожній граф N_4 .



Рис.8

4. Платонові графи.

Означення. Платоновими графами називаються графи, які утворені вершинами і ребрами n -яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра, ікосаедра.

Приклад

На рис. 9 зображено три регулярні графи, які відповідають правильним многогранникам: тетраедру, кубу, октаедру.

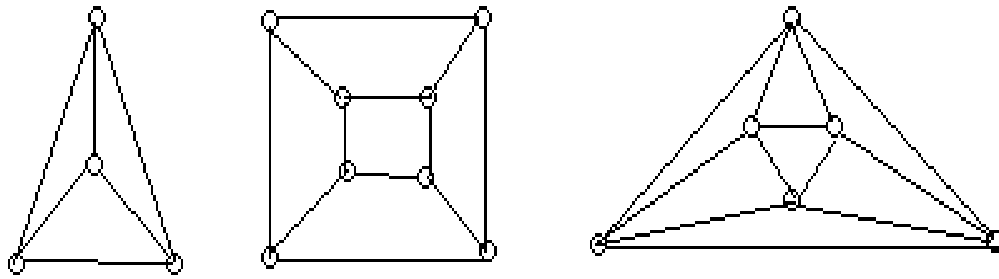


Рис.9

5. Двочастинні графи.

Означення. Граф називають двочастинним, якщо існує таке розбиття множини його вершин на два класи, при якому кінці кожного ребра лежать у різних класах.

Означення двочастинного графа можна подати у термінах розфарбовування його вершин двома кольорами, наприклад червоним і синім. Якщо вершини графа можна розфарбувати двома кольорами так, що кожне ребро графа має один кінець червоний, а інший – синій, то граф називається двочастинним.

Якщо ж у двочастинному графі довільні дві вершини з різних класів – суміжні, то граф називається *повним двочастинним*.

Позначається повний двочастинний граф $K_{n,m}$, де n, m – відповідно кількість вершин графа першого і другого класів.

Повний двочастинний граф $K_{1,5}$ називають *зірковим*.

Граф $K_{n,m}$ має $n+m$ вершин та nm ребер.

Приклад

На рис. 10 зображено повні двочастинні графи $K_{1,3}$ та $K_{2,3}$

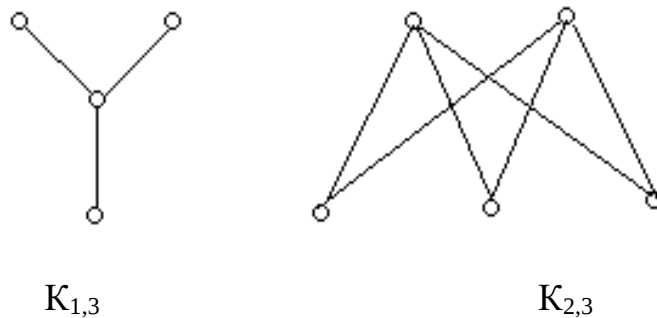


Рис.10

Означення. Скінченна послідовність суміжних ребер (необов'язково різних) графа називається маршрутом.

Кожне ребро графа є маршрутом.

Маршрут прийнято позначати як послідовність суміжних вершин, через які він проходить.

Означення. Маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра різні.

Число ребер у маршруті називається довжиною маршруту та позначається l .

Ланцюг, у якого кінцеві вершини співпадають, називається циклом.

Ланцюг (цикл), у якого всі вершини різні, називається простим або елементарним ланцюгом (циклом).

Легко бачити, що для псевдографа мінімальна довжина простого циклу – 1, для мультиграфа – 2, графа – 3.

Означення. Довжина найкоротшого простого ланцюга, який з'єднує вершини A та B називається відстанню між A та B і позначається $S(AB)$.

Приклад

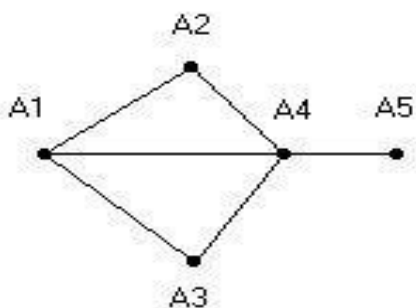


Рис.11

Виділимо на даному графі, наприклад, наступні маршрути :

$A_1 - A_4 - A_5$ – простий ланцюг, його довжина $l = 2$;

$A_1 - A_2 - A_4 - A_5$ – простий ланцюг, його довжина $l = 3$; $S(A_1A_5)=2$.

$A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_4$ – ланцюг, але непростий; його довжина $l = 5$;

$A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1$ – простий цикл, його довжина $l = 4$;

$A_1 - A_2 - A_4 - A_3 - A_1 - A_2 - A_4 - A_5$ – маршрут, який не є ні ланцюгом, ні циклом; його довжина $l = 7$.

Означення. *Орієнтованим графом (орграфом) називається система, що складається з непорожньої множини V і непорожньої множини U впорядкованих пар елементів з V .*

Множина V містить елементи, які називаються *вершинами*, U – *орієнтованими ребрами* чи *дугами*.

Якщо дуга $AB \in U$, то вершину A називають *початковою*, а B – *кінцевою* вершиною дуги.

Зображення орграфа відрізняється від зображення звичайного графа тим, що дуги орграфа зображаються напрямленими лініями (відрізками або кривими), які йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок лінії позначається стрілкою.

Значна частина властивостей та тверджень стосовно звичайних графів може бути без змін сформульована і для орграфів. Зокрема, це стосується цілих розділів, у яких наявність орієнтації ребер не є суттєвою. Певні особливості в означеннях, постановках задач та методах їх розв'язання виникають при дослідженні проблем, пов'язаних з маршрутами, обходами графів тощо.

Означення. *Орієнтованим маршрутом (ормаршрутом) називається скінченна послідовність суміжних дуг, у яких в кожну вершину, починаючи з другої, заходить дуга з попередньої вершини.*

Довжиною ормаршруту називається кількість дуг у ньому.

Означення. *Довжина найкоротшого простого ланцюга, який з'єднує вершини A та B , називається відстанню між A та B і позначається $S(AB)$.*

Означення. *Якщо існує маршрут із вершини B до вершини A , то вершина A називається досяжною з вершини B .*

Означення. *Степенем входу вершини A називається кількість дуг, які входять у цю вершину; степенем виходу – кількість дуг, які виходять з вершини A .*

Позначається $\rho^+(A)$ – степінь виходу вершини A ,

$\rho^-(A)$ – степінь входу вершини A .

Означення. Якщо $\rho^+(A) = \rho^-(A) = 0$, то вершина A називається ізольованою;

Якщо $\rho^+(A) > 0$, а $\rho^-(A) = 0$, то вершина A називається джерелом;

Якщо $\rho^+(A) = 0$, а $\rho^-(A) > 0$, то вершина A називається стоком.

Приклад

Знайти джерело, стік, ізольовану вершину у графа (рис.12). Чи є вершина B досяжною з вершини A , і, навпаки, вершина A досяжною з вершини B ?

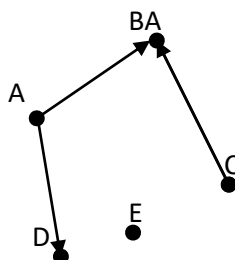


Рис.12

Розв'язання

$\rho^+(A)=2, \rho^-(A)=0$, тому вершина A – джерело;

$\rho^+(B)=0, \rho^-(B)=2$, тому вершина B – стік;

$\rho^+(C)=1, \rho^-(C)=0$, тому вершина C – джерело;

$\rho^+(D)=0, \rho^-(D)=1$, тому вершина D – стік;

$\rho^+(E)=\rho^-(E)=0$, тому вершина E – ізольована .

У цьому графі вершина B є досяжною з вершини A , проте вершина A не є досяжною з вершини B .

Відповідь: Джерела – вершини A, C ; стоки – вершини B, D ; ізольована вершина – E . Вершина B є досяжною з A , а вершина A не є досяжною з B .

Запитання та завдання для самоперевірки

Дайте відповідь і наведіть приклади.

1. Що називається графом, мультиграфом і псевдографом?
2. Яка різниця між графом і орграфом?

3. Що таке ребро, дуга, порядок графа?
4. Яка різниця між графом і псевдографом?
5. Які бувають різновиди графів?
6. Який граф називається повним?
7. Який граф називається однорідним?
8. Чи є: а) повний граф однорідним; б) однорідний граф повним?
9. Що таке степінь вершини графа, степінь входу й виходу вершин орграфа?
10. Дайте визначення джерела, стоку та ізольованої вершини орграфа.
11. Що таке маршрут, ланцюг і цикл графа?

ЛЕКЦІЯ 2

Матричне задання графів. Ізоморфізм графів

За великої кількості вершин і ребер граф втрачає наочність. У такому разі для задання графів і роботи з ними використовуються таблиці, які називають матрицями.

Означення. Матрицею суміжності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро } A_i A_j \in U; \\ 0, \text{ якщо ребро } A_i A_j \notin U. \end{cases} \quad (1)$$

Означення. Матрицею суміжності орієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо дуга } A_i A_j \in U; \\ 0, \text{ якщо дуга } A_i A_j \notin U. \end{cases} \quad (2)$$

Матриці суміжності неорієнтованого графа й орграфа розрізняються тим, що перша завжди симетрична, а друга не обов'язково симетрична.

Для псевдографів у матриці суміжності нулі й одиниці замінюють кратностями ребер. Це дає опис графа матрицею із цілими невід'ємними елементами. І, навпаки, довільна матриця із цілими невід'ємними елементами може інтерпретуватися як граф.

Означення. Матрицею інцидентності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин і t ребер, називається матриця розмірності $n \times t$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } A_i \in e_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } A_i \notin e_j. \end{cases} \quad (3)$$

Означення. Матрицею інцидентності орієнтованого графа $G=(V,U)$, який має n вершин і t ребер, називається матриця розмірності $n \times t$, елементи якої обчислюються за правилом :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } A_i \text{ початок дуги } e_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } A_i \text{ неінцидентна дузі } e_j; \\ -1, & \text{якщо вершина } A_i \text{ кінець дуги } e_j. \end{cases} \quad (4)$$

Приклади

1. Побудувати матрицю суміжності для неорієнтованого графа G (рис. 13).

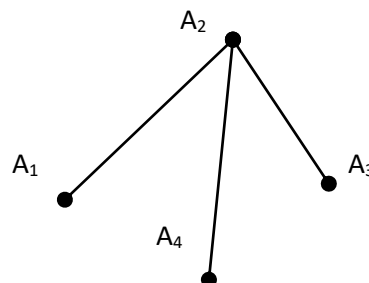


Рис. 13.

Розв'язання

Граф G має чотири вершини, тому матриця суміжності матиме розмірність 4×4 . Будуємо її, користуючись правилом (1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Побудувати матрицю суміжності для орієнтованого графа G (рис. 14).

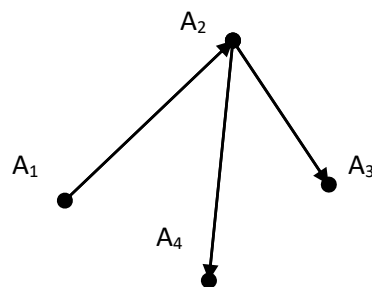


Рис. 14.

Розв'язання

Граф G має чотири вершини, тому матриця суміжності матиме розмірність 4×4 . Будуємо її, користуючись правилом (2):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Побудувати граф, який заданий матрицею суміжності

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки матриця четвертого порядку, то граф матиме чотири вершини, які позначимо A_1, A_2, A_3, A_4 . Матриця несиметрична, тому будуємо оргграф.

Оскільки елементи матриці цілі невід'ємні числа, то оргграф буде містити кратні дуги й петлі (рис. 15).

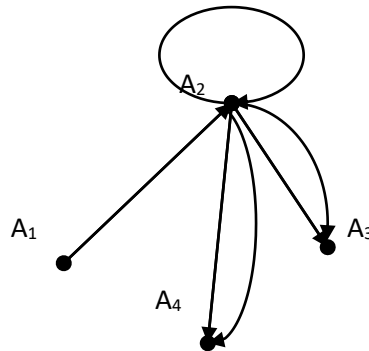


Рис. 15

4. Побудувати матрицю інцидентності графа G (рис. 16).

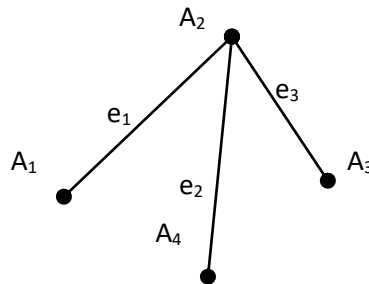


Рис. 16

Розв'язання

Граф G має чотири вершини і три ребра, тому матриця інцидентності графа матиме розмірність 4×3 . Будуємо її, користуючись правилом (3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Побудувати матрицю інцидентності для орієнтованого графа G (рис. 17).

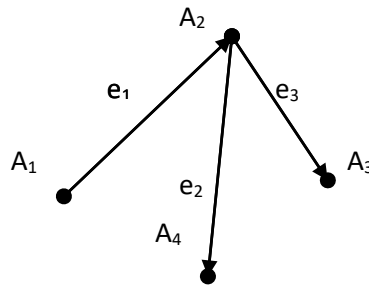


Рис. 17

Розв'язання

Граф G орієнтований, він має чотири вершини і три ребра. Тому матриця інцидентності графа матиме розмірність 4×3 . Будуємо її, користуючись правилом (4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевага способу задання графів у комп'ютерах матрицею суміжності – швидкий доступ до інформації. При цьому способі задання лише за один крок можна отримати відповідь на запитання: «Чи існує у графа ребро (дуга) $A_i A_j$?» Недолік способу задання – незалежно від кількості ребер (дуг) графа, об'єм пам'яті становить n^2 комірок.

Спосіб задання графа у комп'ютері матрицею інцидентності вимагає nm комірок пам'яті, причому більшість з цих комірок зайнята нулями. Незручним також є доступ до інформації. Відповідь на запитання: «Чи існує у графа ребро (дуга) $A_i A_j$?» – вимагає, у гіршому випадку, перебору всіх стовпців матриці, тобто m кроків.

Властивості матриць

1. Для неорієнтованих графів сума елементів в i -тому рядку (стовпці) матриці суміжності дорівнює степеню вершини V_i .

2. Степені входу і виходу вершин орграфа визначаються через елементи матриці суміжності за формулами:

$$\rho^+(V_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ - сума по рядку.}$$

$$\rho^-(V_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ - сума по стовпцю.}$$

Означення. Два графи $G_1=(V_1, U_1)$, $G_2=(V_2, U_2)$ називаються ізоморфними, якщо між множинами V_1 та V_2 можна встановити бієктивну відповідність φ , таку що довільній парі вершин A та B графа G_1 , які є суміжними, відповідає пара суміжних вершин $\varphi(A)$ та $\varphi(B)$ графа G_2 .

Властивості ізоморфних графів

- 1) Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин.
- 2) Ізоморфні графи мають однакову кількість ребер.
- 3) Для неорієнтованих графів степені відповідних вершин співпадають; для орієнтованих – степені входу та виходу співпадають.

Ці властивості ізоморфних графів не є достатніми.

Теорема. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого графа за допомогою відповідних перестановок рядків та стовпчиків.

Доведення.

Ізоморфні графи G_1 і G_2 , які мають n вершин, відрізняються між собою лише порядком нумерації вершин, тобто існує бієкція φ , задана на множині вершин $\{1, 2, \dots, n\}$, яка зберігає суміжність вершин.

Отже, кожен елемент a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n$) матриці суміжності A_1 графа G_1 збігається з елементом $a_{\varphi(i)\varphi(j)}$ (тобто елементом, який знаходиться в рядку з номером $\varphi(i)$ і стовпчику з номером $\varphi(j)$) матриці суміжності A_2 графа G_2 .

Таким чином, методом послідовного одночасного обміну місцями (перестановок) рядків і стовпчиків згідно відповідності φ :

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ \varphi(1), & \varphi(2), & \dots, & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

матрицю суміжності A_1 можна перетворити у матрицю суміжності A_2 і, навпаки.

Для матриць інцидентності графів G_1 і G_2 справедливі аналогічні міркування. Відмінність полягає лише у тому, що коли графи G_1 і G_2 ізоморфні, то для їх множин вершин існує бієкція φ , а для множин ребер - інша бієкція ψ .

Теорему доведено. ■

При перевірці за допомогою матриць суміжності ізоморфізму двох заданих графів з n вершинами кожний, необхідно здійснити різноманітні одночасні перестановки рядків і стовпчиків однієї з матриць. Якщо після чергової з таких перестановок дістанемо матрицю, яка повністю збігається з іншою, то графи ізоморфні.

Однак, щоб у такий спосіб з'ясувати, що задані графи не є ізоморфними, потрібно виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпчиків. Уже для порівняно невеликих значень n здійснити такий перебір важко навіть за допомогою обчислювальної машини. Тому у теорії алгоритмів розроблено різноманітні алгоритми перевірки ізоморфізму графів, які для певних типів графів дозволяють суттєво скоротити обсяг необхідних перевірок.

Загальна кількість необхідних кроків для перевірки ізоморфізму графів G_1 і G_2 за матрицями інцидентності не перевищує добутку $n!m!$.

Очевидно, що відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх графів розбивається на класи ізоморфних графів. Про графи, що належать до одного класу говорять, що вони *розрізняються з точністю до ізоморфізму*, або вживають термін *абстрактний граф*.

Отже, *абстрактний граф – це клас ізоморфних графів*.

Означення. Ізоморфне відображення графа G на себе називається *автоморфізмом графа G* .

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Дайте означення матриці суміжності графа.
2. Дайте означення матриці суміжності орграфа.
3. Чим відрізняються матриці суміжності графа та орграфа?
4. Дайте означення матриці інцидентності графа.
5. Дайте означення матриці інцидентності орграфа.
6. Які переваги та недоліки задання графів у комп'ютерах матрицями суміжності та матрицями інцидентності?
7. Які графи називаються ізоморфними?
8. Сформулюйте властивості ізоморфних графів.
9. Чому відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності?
10. Що таке абстрактний граф?

ЛЕКЦІЯ 3

Частини графа, суграфи та підграфи. Операції над графами

Означення. Граф H називається частиною графа G , якщо множина вершин графа H є підмножиною множини вершин графа G і усі ребра графа H є ребрами графа G .

Означення. Частина H_1 графа G , множина вершин якої співпадає з множиною вершин графа G , називається суграфом.

Означення. Частина H_2 графа G називається підграфом графа G , якщо множина ребер графа H_2 є всі ребра графа G , обидва кінці якого належать частині H_2 .

Приклад

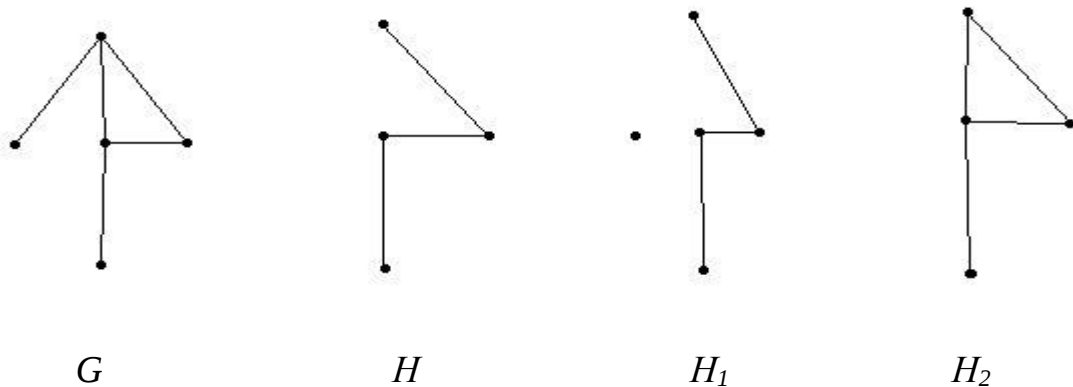


Рис.18

На рисунку 18 зображено граф G . Графи H , H_1 , H_2 є частинами графа G , адже множини вершин та ребер цих графів є відповідно підмножинами множин вершин і ребер графа G .

Множина вершин графа H_1 співпадає з множиною вершин графа G . Тому H_1 є суграфом графа G .

Множина ребер графа H_2 є всі ребра графа G , обидва кінці якого належать частині H_2 . Отже, H_2 – підграф графа G .

Операції над графами

Нехай дано граф $G=(V,U)$ і ребро $e \in U$.

1. Вилучення ребра.

Говорять, що граф G_1 одержали з графа G внаслідок операції вилучення ребра e , якщо $G_1=(V,U\setminus\{e\})$.

Приклад

Граф G_1 (рис.19) одержали з графа G внаслідок операції вилучення ребра e :

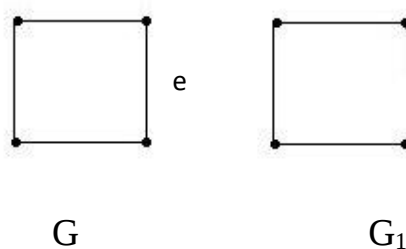


Рис.19

2. Вилучення вершин.

Говорять, що граф G_2 одержали з графа G внаслідок операції вилучення вершини B , якщо вершина B вилучається з множини V , а з множини U вилучаються всі ребра, інцидентні цій вершині.

Приклад

Граф G_2 (рис.20) одержали з графа G внаслідок операції вилучення вершини B .

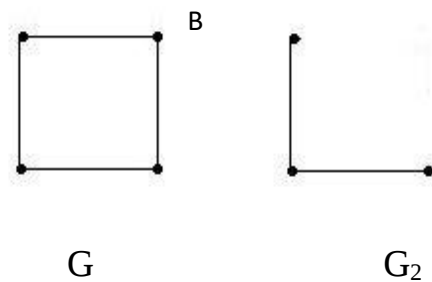


Рис.20

Можна показати, що при виконанні підряд кількох операцій вилучення ребра (вилучення вершини), результат не залежить від порядку вилучення ребра (вершини) з графа.

3. Введення ребра.

Нехай A та D – дві вершини графа G , причому ребро $AD \notin U$.

Говорять, що граф G_3 – одержаний із графа G внаслідок введення ребра AD , якщо $G_3 = (V, U \cup \{AD\})$

Приклад

Граф G_3 (рис.21) – одержаний із графа G внаслідок введення ребра AD .

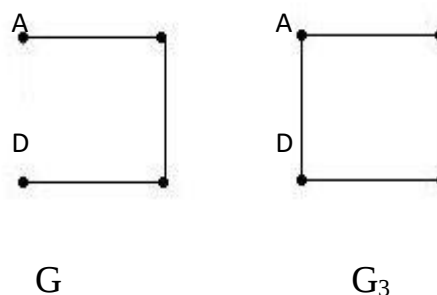


Рис.21

4. Введення вершини.

Нехай AB – деяке ребро графа G . Введенням вершини M у ребро AB називається операція, внаслідок якої отримується два ребра AM та MB , а ребро AB при цьому вилючається з графа G .

Приклад

Граф G_4 (рис.21) – одержаний із графа G внаслідок введення вершини M у ребро AB .

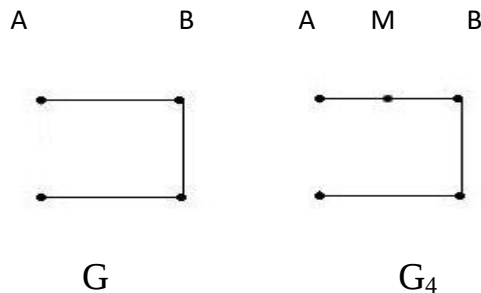


Рис.21

5. Об'єднання та переріз графів.

Нехай H_1 та H_2 – два довільні графи, які можна розглядати як частини деякого складнішого графа.

Означення. Об'єднанням графів H_1 та H_2 називається граф, який складається із усіх ребер, що належать як H_1 , так і H_2 .

Приклад

На рис.22 показано об'єднання двох графів H_1 та H_2 . У результаті виконання операції об'єднання графів H_1 та H_2 одержано граф G :

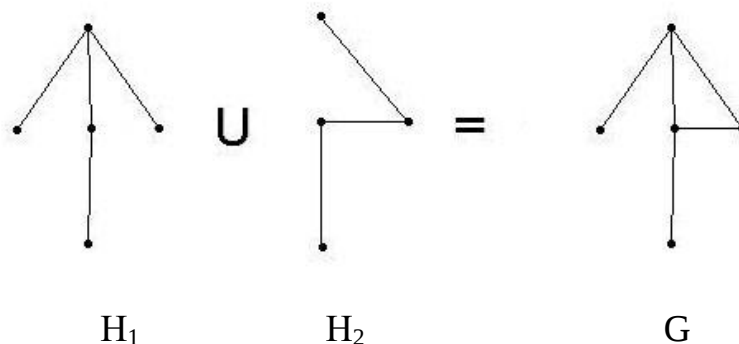


Рис.22

Означення. Перерізом графів H_1 та H_2 називається граф, множина вершин якого є перерізом множин вершин графів H_1 та H_2 , множина ребер – переріз множини ребер H_1 та H_2 .

Приклад

На рис.23 показано переріз двох графів H_1 та H_2 , які можна розглядати як частини деякого складнішого графа. У результаті виконання операції перерізу графів H_1 та H_2 одержано граф G :

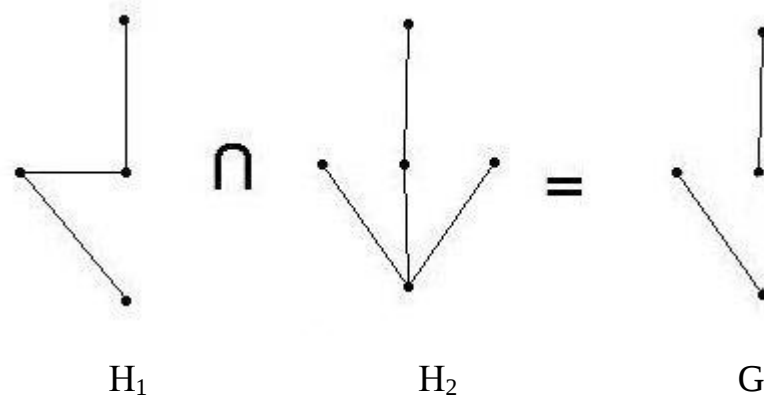


Рис.23

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що таке частина графа?
2. Дайте означення суграфа.
3. Що таке підграф графа?
4. Які операції можна виконувати над графами?
5. Чи впливає порядок вилучення ребра з графа на кінцевий результат, якщо підряд виконуються кілька операцій вилучення ребра?
6. Дайте означення перерізу двох графів.
7. Як знайти об'єднання двох графів?
8. Чи можна знаходити переріз та об'єднання довільних двох графів?

ЛЕКЦІЯ 4

Зв'язність графів. Мости

Означення. Неорієнтований граф називається *зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Приклад

Граф G_1 (рис. 24) зв'язний, бо для довільних двох його вершин існує маршрут, який з'єднує ці вершини. Граф G_2 не є зв'язним.

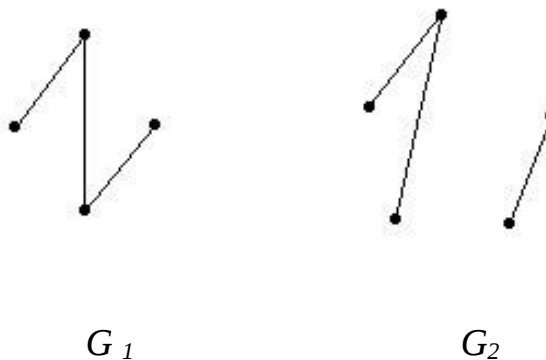


Рис.24

Означення. Орграф називається *сильно зв'язним*, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Приклад

На рис. 25 зображено сильно зв'язний орієнтований граф, бо для довільних двох його вершин існує маршрут, який з'єднує ці вершини..



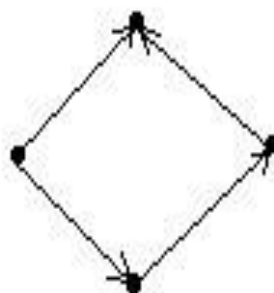
Рис.25

Якщо в орграфі кожному дугу замінити ребром, то отримаємо неорієнтований граф, який називається асоційованим із даним графом.

Означення. Орграф називається *слабко зв'язним*, якщо асоційований із ним граф – зв'язний.

Приклад

На рис. 26 зображено слабко зв'язний орграф G , бо хоча сам граф G незв'язний, але асоційований з ним граф – зв'язний.



G

Рис.26

Означення. *Компонентою зв'язності* (сильної) графа G називається зв'язний (сильно зв'язний) підграф, який не є власним підграфом довільного іншого зв'язного (сильно зв'язного) підграфа графа G .

Приклад

На рис. 27 зображено незв'язний граф, який має три компоненти зв'язності.

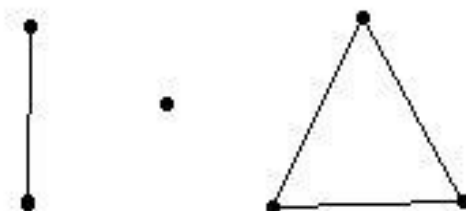


Рис.27

Означення. *Вершина графа називається точкою зчленування (точкою з'єднання), якщо її видалення збільшує число компонент зв'язності.*

Неподільний граф – це зв'язний граф без точок зчленування. Усі інші графи – подільні.

Теорема. Для будь-якого графа $G=(V,E)$ або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

Доведення.

Якщо G зв'язний граф, то твердження теореми виконується.

Нехай $G=(V,E)$ – незв'язний граф і $G_1=(V_1,E_1)$ одна з його компонент зв'язності. Розглянемо графи G_1 і $G'=(V',E')$, де $V'=V\setminus V_1$ і $E'=E\setminus E_1$.

Для будь-якої пари вершин $A\in V_1$ і $B\in V'$ у графі $\bar{G}$ існує ребро AB , бо ці вершини є несуміжні в графі G . Оскільки для кожної пари вершин $A_1, B_2\in V_1$ графа G_1 і довільної вершини $C\in V'$ існують ребра (A_1, C) і (B_2, C) , які належать множині ребер графа $\bar{G}$, то у графі $\bar{G}$ такі вершини A_1 і B_2 є зв'язаними.

Аналогічно встановлюємо зв'язність у графі $\bar{G}$ будь-якої пари вершин C_1 і C_2 з множини V' .

Отже, всі пари вершин графа $\bar{G}$ зв'язані між собою.

Теорему доведено. ■

Наслідок. Якщо G незв'язний граф, то граф $\bar{G}$ зв'язний.

Розглянемо два поняття, які характеризують міру зв'язності графа.

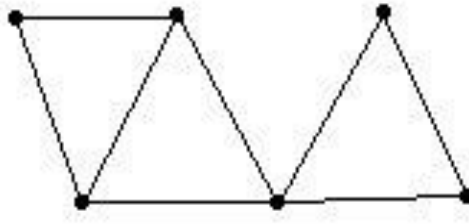
Означення. Числом вершин зв'язності $k(G)$ графа G (числом зв'язності) називається найменше число вершин, вилучення яких приводить до незв'язного графа або графа, який складається з однієї вершини.

Означення. Числом реберної зв'язності $\lambda(G)$ графа G називається найменше число ребер, вилучення яких приводить до незв'язного графа.

Число реберної зв'язності одновершинного графа вважатимемо таким, що дорівнює нулю.

Приклад

Для графа G (рис. 28) число вершин зв'язності – $k(G)=1$, число реберної зв'язності – $\lambda(G)=2$.



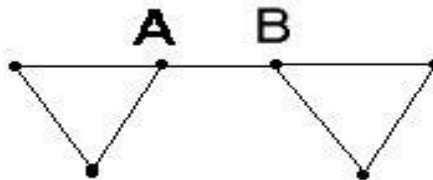
G

Рис.28

Ребро AB графа називається *мостом*, якщо у графі, який отримується після вилучення ребра AB , вершини A та B стають незв'язними.

Приклад

Ребро AB (рис.29) – міст графа G .



G

Рис.29

Ознаки мостів

- 1) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли AB – єдиний ланцюг, який з'єднує ці вершини;
- 2) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли знайдуться дві вершини даного графа C_1 та C_2 такі, що кожний ланцюг, який їх з'єднує, містить A та B ;
- 3) ребро AB – міст тоді й тільки тоді, коли воно не належить жодному циклу.

Нехай дано граф $G = (V, U)$. На множині його вершин означимо відношення досяжності d за правилом: дві довільні вершини V_j, V_i графа G перебувають у відношенні досяжності d тоді й тільки тоді, коли вони збігаються або існує маршрут, який їх з'єднує.

Означення. Матрицею зв'язності неорієнтованого графа $G = (V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ досяжна з } A_j; \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, що матриця зв'язності неорієнтованого графа є симетричною і має по головній діагоналі завжди одиниці.

Приклад

Побудувати матрицю зв'язності графа (рис.30).

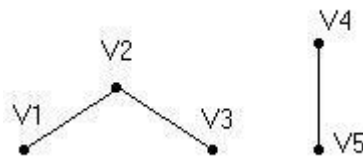


Рис.30

Розв'язання

Граф має 5 вершин, тому матриця зв'язності для даного неорієнтованого графа матиме розмірність 5×5 . Будуємо її, користуючись правилом (1) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Довільні вершини V_j та V_i орграфа G перебувають у відношенні односторонньої досяжності d_1 тоді й тільки тоді, коли вони збігаються або існує маршрут із вершини V_j у вершину V_i .

Довільні вершини V_j та V_i орграфа G перебувають у відношенні двосторонньої досяжності d_2 тоді й тільки тоді, коли вони збігаються чи існує маршрут із вершини V_j у вершину V_i та навпаки.

Для орграфів вводиться дві матриці – слабкої зв'язності та сильної зв'язності. Матриця слабкої зв'язності орграфа означається аналогічно матриці зв'язності неорієнтованого графа.

Означення. Матрицею сильної зв'язності орієнтованого графа $G(V, U)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої обчислюються за правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } A_i \text{ досяжна з } A_j, \text{ і, навпаки;} \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases} \quad (2)$$

Така матриця не є симетричною.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Дайте визначення зв'язного графа.
2. Що таке сильно зв'язний оргграф?
3. Що таке компонента зв'язності графа?
4. Що таке число вершин зв'язності графа?
5. Що таке число реберної зв'язності графа?
6. Дайте визначення мосту.
7. Сформулюйте ознаки мостів.
8. Який граф називається неподільним?
9. Дайте визначення матриці зв'язності графа.
10. Коли дві довільні вершини графа перебувають у відношенні односторонньої досяжності?
11. Коли дві довільні вершини графа перебувають у відношенні двосторонньої досяжності?
12. Дайте визначення матриці сильної зв'язності орієнтованого графа
13. Чи є симетричною матриця сильної зв'язності орієнтованого графа?

ЛЕКЦІЯ 5

Задачі пошуку маршрутів у графі

У багатьох задачах, математичні моделі яких описуються графами, треба відшукати маршрут, який з'єднує задані вершини графа V_p (початкову) та V_k (кінцеву). Для зв'язного графа такий маршрут завжди існує. Його можна знайти, користуючись, наприклад алгоритмом Террі.

Алгоритм Террі

Для відшукування одного з маршрутів, який сполучає дві вершини графа V_p і V_k , користуються правилами:

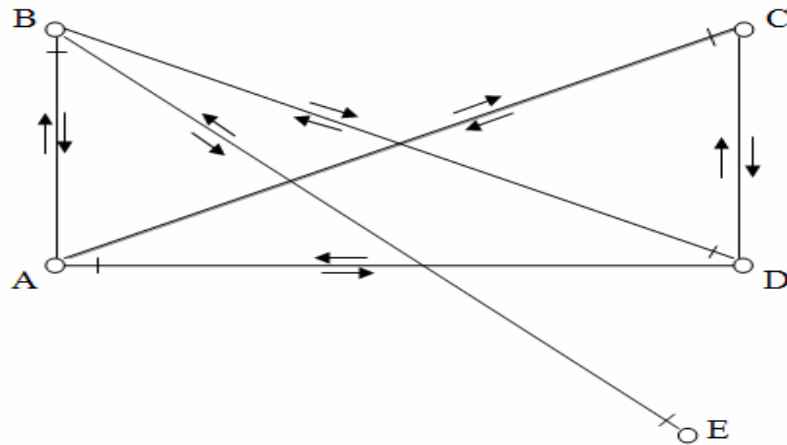
1. Пошук маршруту починають із вершини V_p і йдуть по довільному ребру, інцидентному цій вершині, відмічаючи напрям руху;
2. Виходячи з вершини V_i , вибирають те ребро, яке не було пройдено жодного разу. Якщо таких ребер немає, то вибирають ребро, яке було пройдено у протилежному напрямку.
3. Для кожної вершини відмічають засічкою ребро, по якому в цю вершину прийшли перший раз. По ребру із засічкою рухаються у протилежному напрямку лише тоді, коли інших можливостей немає.

Алгоритм Террі результативний для довільного зв'язного графа. Якщо граф незв'язний, то цей алгоритм дає змогу виділити компоненту зв'язності.

Теорема (Террі). *Якщо граф зв'язний, то можна побудувати циклічний маршрут, який містить усі ребра графа рівно два рази, по одному в кожному напрямку.*

Приклад

Знайти циклічний маршрут у графі (рис. 31), який починається у вершині A та проходить по кожному ребру графа рівно по два рази (по одному у кожному напрямку).



Розв'язання

Оскільки цей граф зв'язний, то для відшукування циклічного маршруту, який задовольняє умову задачі, користуємося алгоритмом Террі.

Пошук маршруту починаємо з вершини A . Можемо рухатися по довільному ребру, інцидентному цій вершині, відмічаючи напрям руху стрілкою.

Вибираємо ребро AB . У вершину B зайшли перший раз, тому біля вершини ставимо засічку.

Із вершини B можна рухатися до вершини D або E . Вибираємо ребро BE . У вершину E прийшли перший раз, тому відмічаємо її засічкою.

Інших можливостей, крім руху назад у вершину B , немає. Рухаємося у протилежному напрямку по ребру EB . Оскільки біля вершини B уже стоїть засічка, то нової не ставимо.

Із вершини B рухаємося до вершини D і т. д. Один із можливих маршрутів $A - B - E - B - D - C - A - D - A - C - D - B - A$.

Рис. 31

Відповідь: один із можливих маршрутів: $A - B - E - B - D - C - A - D - A - C - D - B - A$.

Нехай задано неорієнтований зв'язний граф $G = (V, U)$, V_p, V_k – дві довільні його вершини.

Маршрут із вершини V_p у вершину V_k називається *мінімальним*, якщо він з'єднує ці вершини й має найменшу довжину з усіх маршрутів, які з'єднують ці вершини.

Будемо вважати, що всі ребра графа мають однакову довжину, рівну одиниці, тобто ребра рівноправні. Такий граф називається *ненавантаженим*.

За допомогою ненавантажених графів описуються системи, які можуть переходити з одного стану в інший, і всі стани однаково ймовірні.

Мінімальний маршрут у ненавантаженому графі можна знайти за допомогою алгоритму Беллмана.

Алгоритм Беллмана

Кожній вершині графа приписують індекс так, щоб він дорівнював довжині найкоротшого маршруту, який з'єднує цю вершину з кінцевою.

При цьому користуються правилами:

1. Індексуювання вершин графа починають із кінцевої вершини V_k . Їй приписують індекс 0, усім суміжним із нею вершинам приписують індекс 1.

2. Якщо вершині V_i приписано індекс λ_i , то суміжним із нею вершинам, яким ще не приписано індекси, приписують індекс $\lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$. Якщо вершині можна приписати декілька індексів, то вибирають найменший.

3. Процес приписування індексів продовжують доти, поки всі вершини не будуть проіндексовані.

Пошук мінімального маршруту починають із початкової вершини, рухаються по ребру до вершини, індекс якої найменший.

Нехай задано граф $G = (V, U)$ і кожному його ребру $V_i V_j$ приписана довжина $l(V_i V_j)$ – вага ребра.

Потрібно знайти маршрут, який з'єднує вершини V_p і V_k , такий, щоб сума довжин усіх його ребер була мінімальною. Алгоритм Беллмана для розв'язання цієї задачі не підходить, оскільки може існувати маршрут, який має більшу кількість ребер, але сумарно вони мають меншу довжину.

Алгоритм пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі

1. Кінцевій вершині V_k приписують індекс 0. Усім іншим вершинам – нескінченність.

2. Для вершини V_j шукають ребро (V_i, V_j) , для якого виконується умова: $\lambda_j - \lambda_i > l(V_i, V_j)$ (різниця індексів більша довжини ребра). Вершині V_j приписують індекс $\lambda_j = \lambda_i + l(V_i, V_j)$. Якщо вершині можна приписати декілька індексів, то вибирають найменший.

3. Процес приписування індексів продовжують доти, поки не будуть проіндексовані всі вершини графа.

4. Пошук мінімального маршруту починають із початкової вершини. Рухаються по ребру, для якого довжина ребра дорівнює різниці індексів.

Приклад

1. Знайти мінімальний маршрут у графі G із вершини V_p у вершину V_k (рис. 32).

Розв'язання

Мінімальний маршрут із вершини V_p у вершину V_k знаходимо, користуючись алгоритмом Беллмана (індекси вершин записані у кружечках біля вершин). Довжина маршруту $l = 3$.

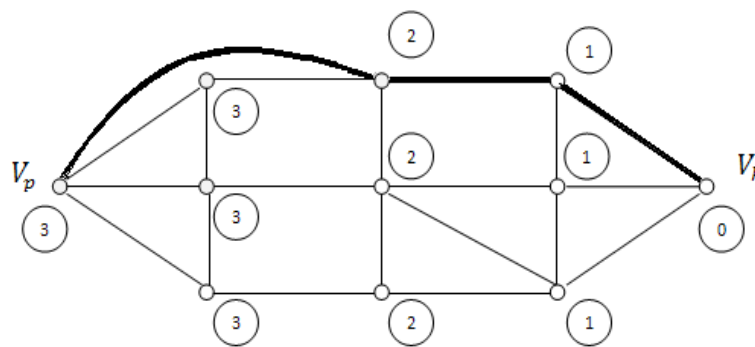


Рис. 32

Відповідь: один із мінімальних маршрутів виділено потовщеною лінією, довжина маршруту $l = 3$.

2. Знайти мінімальний маршрут у навантаженому графі G із вершини V_p у вершину V_k (рис. 33).

Розв'язання

Мінімальний маршрут із вершини V_p у вершину V_k на графі G знаходимо, користуючись алгоритмом відшукування мінімального маршруту в навантаженому графі (індекси вершин записані у кружечках біля вершин).

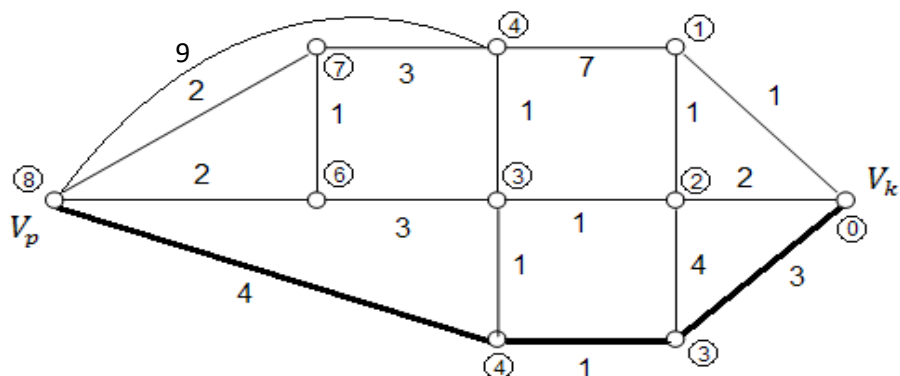


Рис. 33

Довжина мінімального маршруту $l = 3 + 1 + 4 = 8$.

Відповідь: один із мінімальних маршрутів виділено потовщеною лінією, довжина найкоротшого маршруту $l = 8$.

Цикл, який містить усі ребра графа рівно один раз, називається *ейлеровим*. Граф, який має ейлеровий цикл, також називається *ейлеровим*.

Теорема (Л. Ейлер, 1736 р.). Для того, щоб скінченний зв'язний граф мав ейлеровий цикл, необхідно й достатньо, щоб усі його вершини мали парний степінь.

Теорема. Для того, щоб скінченний орграф мав ейлеровий цикл, необхідно й достатньо, щоб степені входу та виходу кожної вершини були рівні.

Ланцюг називається *ейлеровим*, якщо він має різний початок і кінець та включає усі ребра графа рівно один раз.

Теорема (про ейлерові ланцюги). Для того, щоб скінченний ланцюг зв'язного графа був ейлеровим з кінцями A та B ($A \neq B$), необхідно й достатньо, щоб вершини A та B були єдиними непарними його вершинами.

Існує простий та зручний алгоритм побудови ейлерового циклу – алгоритм Флері.

Алгоритм Флері

1. Вибираємо довільну вершину V_0 . Ідемо по ребру, інцидентному цій вершині. Прийшли у вершину V_1 і викреслили пройдене ребро.

2. Якщо на k -му кроці прийшли у вершину V_k , то для наступного ходу вибирають будь-яке ребро, інцидентне цій вершині. При цьому ребро-міст вибирають лише тоді, коли інших можливостей немає.

Приклад

Знайти ейлеровий цикл у графі G (рис 34).

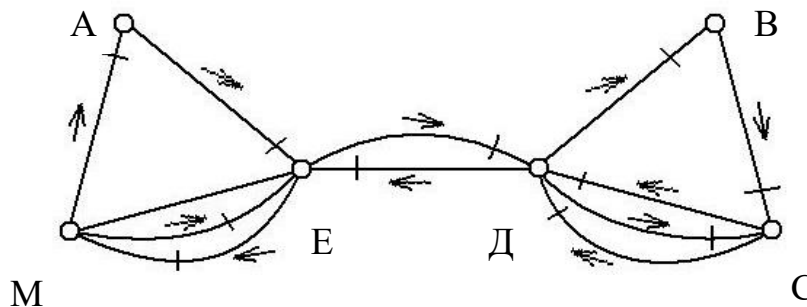


Рис. 34

Розв'язання

Оскільки усі вершини даного графа парні, то граф має ейлерів цикл. Застосовуючи алгоритм Флері, отримуємо один із можливих ейлеревих циклів: $A - E - D - C - D - B - C - D - E - M - E - M - A$.

Відповідь: $A - E - D - C - D - B - C - D - E - M - E - M - A$.

Цикл, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз, називається *гамільтоновим*. Граф, який має гамільтоновий цикл, також називається *гамільтоновим*.

Гамільтонові та ейлерові цикли подібні за способом задання. Проте за складністю відшукування ці задачі дуже різняться. Пошук критерію існування гамільтонового графа – одна з невирішених проблем теорії графів. Відомі лише достатні умови існування гамільтонових графів.

Теорема (О. Оре, 1960 р.). Якщо для довільної пари несуміжних вершин V_i та V_j графа G , який має не менше трьох вершин, виконується умова $\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n$, де n – кількість вершин графа, то граф гамільтоновий.

Теорема (Г. Дірака, 1957 р.). Якщо число вершин графа не менше трьох і для кожної вершини графа $\rho(V_i) \geq \frac{n}{2}$, то граф гамільтоновий.

Задача комівояжера. Нехай є n міст, відстані між якими відомі. Комівояжер (роз'їзний агент по збуту товарів) повинен відвідати всі ці n міст по одному разу і повернутися до пункту початку подорожі. Знайти маршрут його руху, щоб пройдений шлях був мінімальним.

Очевидно, що задача комівояжера – це задача пошуку гамільтонового циклу. Один із методів пошуку – метод перебору. Для цього нумерують вершини графа, розглядають усі можливі перестановки, перевіряють, чи утворюють вони гамільтоновий цикл, і вибирають гамільтоновий цикл мінімальної довжини. Досі немає алгоритму для швидкісного вирішення цієї задачі.

Приклад

1. Визначити, чи є у графів G_1, G_2, G_3, G_4 гамільтонові та ейлерові цикли (рис. 35)?

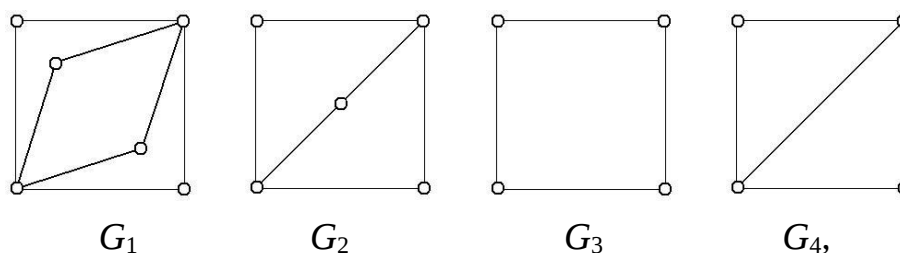


Рис. 35

Розв'язання

Граф G_1 має усі вершини парні, тому він ейлеровий, але граф не є гамільтоновим.

Граф G_2 має непарні вершини, тому він не є ейлеровим. Цей граф також не є гамільтоновим.

Граф G_3 має усі вершини парні, тому він є ейлеровим. Цей граф також є гамільтоновим.

Граф G_4 має непарні вершини, тому він не є ейлеровим, але він є гамільтоновим.

Відповідь: гамільтонові цикли мають графи G_3 та G_4 , ейлерові цикли – граfi G_1 та G_3 .

2. Навести контрприклад, який показує, що умови теореми Дірака не є необхідними для гамільтоновості графів.

Розв'язання

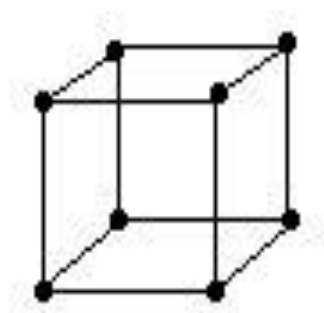


Рис. 36

Граф, зображений на рисунку 36, має вісім вершин, степінь кожної вершини 3. Умови теореми Дірака не виконуються, бо $3 < \frac{8}{2}$. Проте граф гамільтоновий.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Як формулюється задача пошуку маршруту в графі?
2. Як формулюється задача пошуку мінімального маршруту в графі?
3. Сформулюйте алгоритм пошуку мінімального маршруту в графі?
4. Як формулюється задача пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі?
5. Сформулюйте алгоритм пошуку мінімального маршруту в навантаженому графі?
6. Дайте визначення ейлерового графа.

7. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування у графа ейлерового циклу.
8. Дайте визначення ейлерового ланцюга.
9. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування у графа ейлерового ланцюга.
10. Сформулюйте алгоритм пошуку ейлерового циклу у графі?
11. Дайте означення гамільтонового графа.
12. Сформулюйте достатні умови існування у графа гамільтонового циклу.

Лекція 6

Дерева. Ліс. Каркасні дерева. Орієнтовані дерева

Означення. *Дерево* – це зв’язний граф, який не містить циклів. Граф із однієї вершини також є деревом.

Якщо граф незв’язний, не містить циклів, то кожна його зв’язна компонента – дерево. Такий граф називається *лісом* (ациклічним).

Теорема. Для графа $G = (V, U)$, $|V| = n$, $|U| = m$ такі твердження рівносильні:

- 1) G – дерево (ациклічний зв’язний граф);
- 2) G – зв’язний граф і $m = n - 1$;
- 3) G – ациклічний граф і $m = n - 1$;
- 4) для будь-яких вершин A та B графа G існує лише один простий ланцюг, який з’єднує вершини A та B ;
- 5) G – ациклічний граф, але, додаючи до нього будь-яке нове ребро, дістаємо рівно один і при тому простий цикл.

Як приклад, доведемо таке твердження :

Дерево з n вершин має $n-1$ ребро.

Доведення

Дійсно, щоб з одного дерева, що не є ізольованою вершиною, отримати два дерева з тими ж вершинами, потрібно вилучити 1 ребро.

Щоб утворити 3 дерева потрібно вилучити 2 ребра і т.д.

Найбільшу кількість дерев можна отримати тоді, коли кожне з утворених дерев – ізольована вершина. Тому треба вилучити $n-1$ ребро.

Теорему доведено. ■

Визначимо найбільшу з відстаней від кожної вершини графа G , зображеного на рис. 37, до інших вершин цього графа і запишемо її біля вершин.

G :

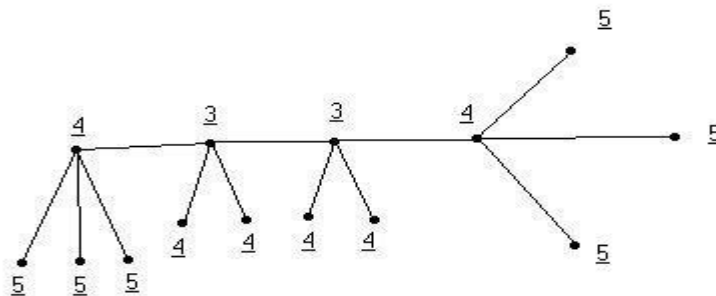


Рис.37

Найбільше з даних чисел називається діаметром *дерева* (позначається d). Найменше число – *радіусом* (позначається r).

Отже, для графа G маємо: $d = 5$, $r = 3$.

Означення. Вершина дерева, для якої максимальна з відстаней до інших вершин є мінімальною, називається *кореневою*.

Можна показати, що дерево має одну чи дві кореневі вершини. Кореневі вершини завжди суміжні.

Якщо $G = (V, U)$ – граф, то граф $G_1 = (V, U_1)$, де $U_1 \subset U$ називають *каркасом* графа G .

Означення. Каркасним деревом (*остовним деревом, кістяком*) зв'язного графа G називається довільна його частина, яка містить усі вершини графа і є деревом.

Говорять, що вершина й ребро *покривають* одне одного, якщо вони інциденті.

Для довільного зв'язного графа існує каркасне дерево, яке можна побудувати за таким *алгоритмом*:

1. Беремо довільну вершину V_1 графа G . Оскільки граф G зв'язний, то існує вершина, яка не збігається з V_1 і суміжна з нею. Позначимо її V_2 . Вершини V_1 і V_2 та ребро V_1V_2 утворюють граф. Цей граф – дерево.

2. Якщо побудоване дерево не покриває всіх вершин графа G , то існує вершина, яка не належить побудованому дереву й суміжна з деякою іншою його вершиною. Вибирають ребро суміжності так, щоб воно не утворювало циклу з ребрами вже побудованого дерева й т. д.

Через скінченне число кроків отримаємо дерево, яке покриває всі вершини графа.

Відшукування в навантаженому графі каркасного дерева з найменшою вагою (*мінімального каркасного дерева*) є змістом багатьох практичних задач. Один із алгоритмів розв'язання цієї задачі – алгоритм Краскала.

Алгоритм Краскала

1. У графі G вибирають ребро мінімальної довжини з інцидентними йому вершинами. Побудували дерево.

2. До побудованого дерева приєднують нове ребро мінімальної довжини. Це ребро вибирають із множини ребер графа G так, щоб:

- а) один з кінців ребра належав уже побудованій частині дерева;
- б) вибране ребро суміжності не утворювало б циклу з ребрами вже побудованого дерева.

3. Продовжуючи цей процес через скінченне число кроків, отримаємо дерево, яке покриває всі вершини графа.

Означення. *Орієнтованим деревом (ордеревом)* називається ациклічний орграф, який має такі властивості:

- 1) існує єдина вершина V_0 графа зі степенем входу $\rho^-(V_0)=0$, яку називають коренем дерева;
- 2) кожна інша вершина графа має степінь входу $\rho^-(V_i)=1, i \neq 0$;
- 3) кожна вершина V_i досягається з кореня, тобто існує орієнтований маршрут від кореня V_0 до всіх інших вершин графа.

Якщо існує в ордереві дуга AB , то вершина A називається *батьком* вершини B , а B – *сином* вершини A .

Упорядкованим ордеревом називається дерево, в якого множина синів кожної вершини упорядкована.

У програмуванні інтенсивно використовують ордерева для запису алгебраїчних виразів, побудови алгоритмів, а структура вкладень каталогів та файлів у сучасних операційних системах є впорядкованим деревом. Це відображається навіть у терміні “кореневий каталог дисків”.

Приклади

1. Побудувати каркасне дерево графа (рис. 38):

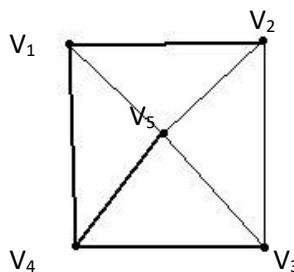


Рис. 38

Розв'язання

Вибираємо вершину V_1 графа G . Граф G зв'язний, тому існують вершини, що не збігаються з V_1 і суміжні з нею. Вибираємо серед цих вершин одну, наприклад V_2 . Вершини V_1 та V_2 і ребро V_1V_2 утворюють граф, який є деревом. Позначимо його G_1 .

Дерево G_1 не покриває усіх вершин графа G . Існує вершина, що не належить графові G_1 і суміжна з деякою іншою його вершиною, наприклад вершиною V_4 .

Вибираємо ребро суміжності V_1V_4 , яке не утворює циклу з ребрами уже побудованого дерева. Отримали дерево G_2 з вершинами V_1, V_2, V_4 і двома ребрами V_1V_2 та V_1V_4 .

Дерево G_2 не покриває всіх вершин графа G . До дерева G_2 додаємо вершину V_5 і ребро суміжності V_4V_5 . Отримаємо дерево G_3 .

Оскільки дерево G_3 не покриває вершину V_3 , то додаємо до графа G_3 дану вершину і ребро суміжності V_4V_3 . Отримали дерево G_4 , яке містить усі вершини графа G .

Отже, G_4 – каркасне дерево графа G .

Відповідь: каркасне дерево графа виділено потовщеними лініями (рис. 38).

2. Знайти мінімальне каркасне дерево графа G (рис. 39).

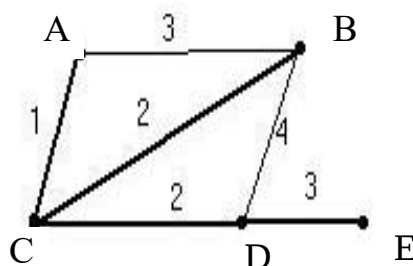


Рис. 39

Розв'язання

Вибираємо у графа G ребро мінімальної ваги – це ребро AC . Разом з інцидентними йому вершинами воно утворює підграф G_1 графа G .

Оскільки дерево G_1 не покриває усіх вершин графа, то до побудованого дерева приєднуємо нове ребро мінімальної довжини – ребро CB . Отримали дерево G_2 з вершинами A, C, B і двома ребрами AC та CB .

Дерево G_2 не покриває всіх вершин графа G . До дерева G_2 приєднуємо нове ребро мінімальної довжини – ребро CD . Отримали дерево G_3 .

Оскільки дерево G_3 не покриває вершину E , то додаємо до графа G_3 дану вершину і ребро суміжності DE . Отримали дерево G_4 , яке містить усі вершини графа G .

Дерево G_4 є мінімальним каркасним деревом графа G . Вага мінімального каркасного дерева: $l = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$.

Відповідь: мінімальне каркасне дерево графа виділено потовщеними лініями (рис. 38), $l = 8$.

3. Зобразити алгебраїчні вирази $x + yz$ та $(x + y)z$ за допомогою орієнтованих дерев.

Розв'язання

На практиці для зображення орієнтованих дерев прийнята домовленість про те, що корінь дерева міститься зверху, а всі стрілки дуг направлені вниз, тому стрілки можна не зображати.

Алгебраїчний вираз $x + yz$ за допомогою орієнтованого дерева зображено на рисунку 39, вираз $(x + y)z$ – на рисунку 40.

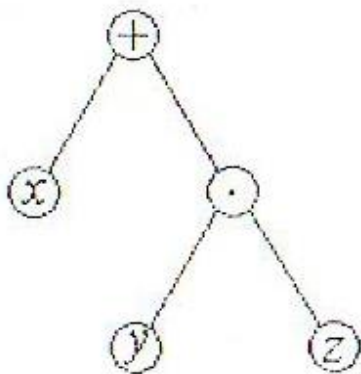


Рис. 40

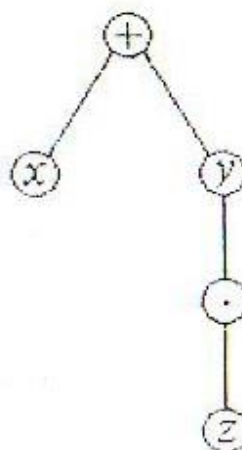


Рис. 41

ЛЕКЦІЯ 7

Розфарбування графів

Існують ситуації, які потребують, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю деякої електронної схеми (вершини такого графа – окремі елементи схеми, ребра – електричні провідники), то бажано розмістити ці ребра на площині так, щоб уникнути перетинів.

Означення. Граф називається *плоским*, якщо його вершини можна розмістити на площині так, що ніякі два його ребра не мають спільних точок, крім інцидентних їм вершин.

Довільний граф, ізоморфний плоскому, називається *планарним*.

Приклад

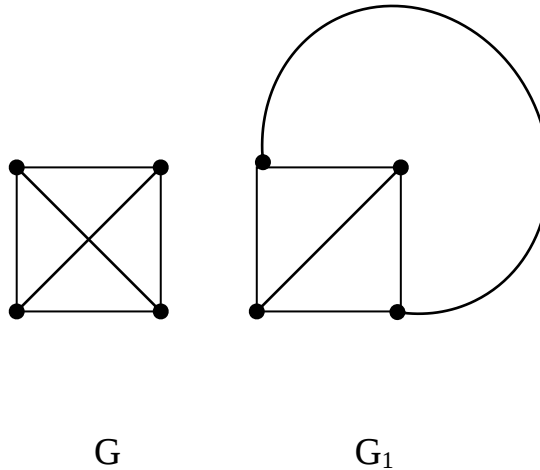


Рис.42

Граф G, зображений на рис.42, планарний, оскільки він ізоморфний графові G₁.

Простий цикл, дерево і ліс – це також планарні графи

Очевидними є такі твердження:

- Будь-який підграф планарного графа є планарним.
- Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли кожна його зв'язна компонента – планарний граф.

Про планарні графи кажуть, що вони *укладаються на площині* або мають *плоске укладання*.

Означення. *Жордановою кривою* називають неперервну лінію, яка не перетинає сама себе.

Гранню плоского графа називають множину точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, яка не перетинає ребер графа.

Межею грані вважається замкнений маршрут, який обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані.

Відзначимо, що плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань. Таку грань будемо називати *зовнішньою*, а всі інші – *внутрішніми* гранями. Множину граней плоского графа позначатимемо через P .

Приклад

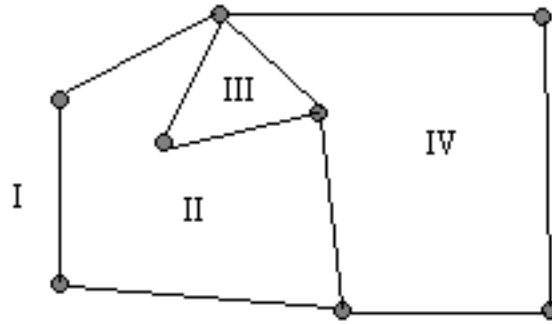


Рис. 43

На рис. 43 зображено плоский граф, який має грані I, II, III, IV. Зовнішньою є грань I.

Теорема (Ейлера). Для будь-якого зв'язного плоского графа $G = (V, U)$ виконується рівність $n + p = t + 2$, (1)

де n – кількість вершин, t – кількість ребер, p – кількість граней графа.

Доведення

Доведемо теорему методом індукції за числом ребер у графі $G = (V, U)$.

Якщо $t = 0$, то $n = 1$ (граф зв'язний) і $p = 1$ (нескінченна грань), тобто теорема у цьому випадку виконується.

Нехай теорема справедлива для довільного графа G , який має $(t-1)$ ребро. Додамо до цього графа нове ребро e . При цьому можливі такі випадки:

- ребро e є петлею, і тоді число граней збільшується на одну, а число вершин залишається незмінним;
- ребро e з'єднує дві різні вершини в графі G , і тоді одна з граней графа G розпадається на дві, тобто число граней зростає на одиницю, а число вершин залишається незмінним;

- ребро e інцидентне лише одній із вершин графа G , і в цьому випадку число його вершин зростає на одиницю, а число граней залишається незмінним.

У кожному з цих випадків теорема виконується, а оскільки наведеними випадками вичерпуються всі можливі випадки, то це і доводить рівність (1).

Теорему доведено. ■

Під час дослідження плоских графів особливе місце займають графи K_5 і $K_{3,3}$, зображені на рисунку 44.

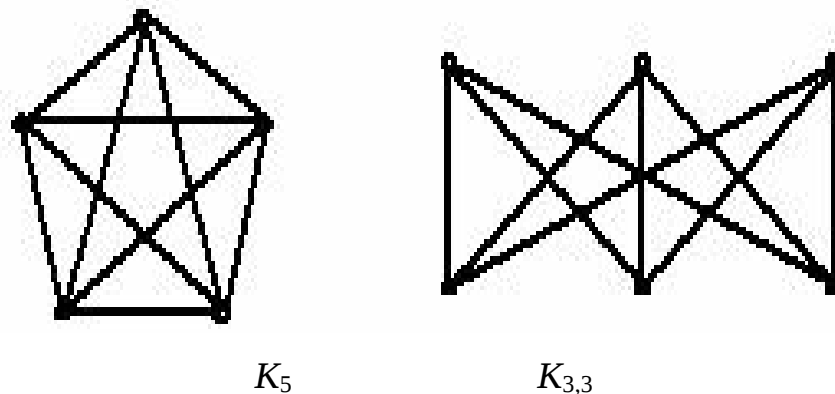


Рис. 44

Граф K_5 є повним графом із п'ятьма вершинами. Граф $K_{3,3}$ – повний двочастинний. Можна показати, що графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Значення графів K_5 і $K_{3,3}$ полягає в тому, що вони є "єдиними" суттєво непланарними графами. Всі інші непланарні графи містять у собі підграфи "подібні" до K_5 або $K_{3,3}$. Характер цієї подібності розкривається за допомогою наступного поняття.

Два графи називаються *гомеоморфними*, якщо після вилучення в них вершин другого степеня з подальшим об'єднанням інцидентних цим вершинам ребер вони стають ізоморфними.

Очевидно, що граф, гомеоморфний планарному графу, також є планарним, і, навпаки, граф, гомеоморфний непланарному графу, також є непланарним.

Теорема (Понтрягіна-Куратовського). Граф G є планарним тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.

Ця теорема лежала в основі перших алгоритмів перевірки планарності графів. Однак час роботи таких алгоритмів був досить великим. Згодом були створені значно швидші алгоритми, які здійснюють перевірку планарності графа.

Приклад

Задача-головоломка про три криниці. Є три будинки: A , B , C і три криниці: 1, 2, 3 (рис. 45). Кожний мешканець може користуватися будь-якою із трьох криниць. Одного дня мешканці будинків вирішили прокласти доріжки до криниць. Чи можна це зробити так, щоб виключити можливість зустрічі, тобто? щоб доріжки не перетиналися.

Розв'язання

Граф, який відповідає умові задачі, зображено на рисунку 46.

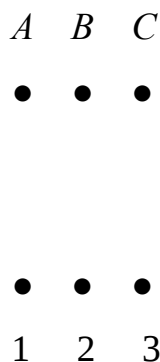


Рис. 45

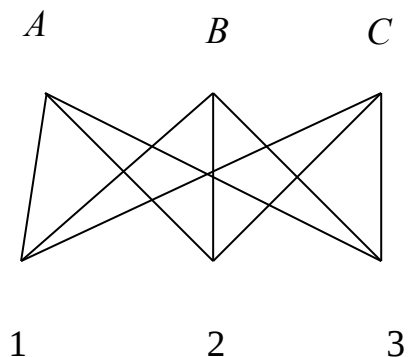


Рис. 46

Граф на рис.46 є графом $K_{3,3}$, який непланарний. Отже, прокласти доріжки, як цього вимагає умова задачі, не можна.

Відповідь: не можна.

Нехай $G = (V, U)$ – граф, k – деяке натуральне число. Довільна функція $f: V \rightarrow N_k$, де $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$, називається *вершинним k -розфарбуванням* або просто *k -розфарбуванням* графа G .

Розфарбування називається *правильним*, якщо для довільних суміжних його вершин A та B виконується: $f(A) \neq f(B)$.

Розфарбованим графом називається граф, для якого існує правильне k -розфарбування.

Правильне розфарбування графа можна трактувати як розфарбування кожної його вершини в один із k кольорів таким чином, щоб суміжні вершини були розфарбовані в різні кольори. Оскільки функція f не обов'язково взаємно однозначна, то при k -розфарбуванні може бути використано менше ніж k кольорів. Отже, правильне розфарбування можна розглядати як розбиття множини вершинами графа V на класи $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l = V$, де $l \leq k$

$$V_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, l.$$

Означення. Мінімальне число k , для якого існує правильне k -розфарбування графа G , називається *хроматичним числом графа G* і позначається $X_p(G)$.

Граф G називається *k -хроматичним*, якщо $X_p(G) = k$.

Правильне k -розфарбування графа G при $k = X_p(G)$ називається *мінімальним*.

Для певних різновидів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичним є порожні графи й тільки вони. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n , хроматичне число довільного двочастинного графа – 2.

Теорема. Для всякого планарного графа G справедлива нерівність

$$X_p(G) \leq 5.$$

Приклад

Побудувати правильне розфарбування графа G (рис. 47).

Розв'язання

Одне із можливих правильних розфарбувань цього графа таке: вершини V_1, V_3, V_7 розфарбуємо кольором № 1, вершини V_2, V_4, V_8 – № 2, вершину V_5 – № 3, вершину V_6 – № 4. На рисунку 47 натуральні числа 1, 2, 3, 4 позначають фарби відповідних вершин.

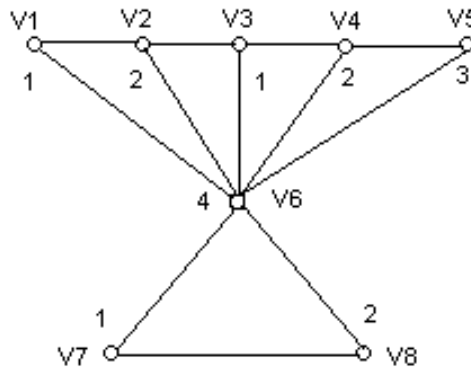


Рис. 47

Практичні задачі, що зводяться до задачі розфарбування

1. Задача складання розкладу занять.

Нехай потрібно прочитати кілька лекцій за найкоротший проміжок часу. Протягом години читається одна лекція, але деякі лекції не можуть читатися одночасно (можливо, їх читає один і той же лектор).

Побудуємо граф $G = (V, U)$, де V – множина, яка відповідає множині лекцій, при чому дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли відповідні лекції не можуть читатися одночасно.

Очевидно, що кожне правильне розфарбовування цього графа визначає допустимий розклад: лекції, які відповідають вершинам графа, що утворюють клас одного кольору, читаються одночасно. Навпаки, кожен допустимий розклад визначає правильне розфарбування графа G .

Отже, оптимальний розклад відповідає мінімальному розфарбуванню, а число годин, яке потрібне для читання всіх лекцій, дорівнює $X_p(G)$.

2. Задача розподілу устаткування.

Нехай дано множини $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ та $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – види робіт і механізмів відповідно. Щоб виконати кожну роботу, потрібен певний час, однаковий для всіх робіт, і деякі механізми. При цьому жодний із механізмів не може бути використаний одночасно у кількох роботах. Слід розподілити механізми так, щоб загальний час виконання всіх робіт був мінімальний.

Побудуємо граф $G = (V, U)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, а $(v_i, v_j) \in U$ тоді й тільки тоді, коли для виконання робіт v_i та v_j потрібен хоча б один спільний механізм.

При правильному розфарбовуванні графа роботи, які відповідають вершинам одного кольору, можна виконувати одночасно. При мінімальному розфарбуванні досягається найменший час виконання всіх робіт.

3. Задача проектування коробки швидкостей.

Коробка швидкостей – це механізм для зміни частоти оборотів валу, який регулює швидкість автомобіля. Ця зміна виконується за рахунок того, що шестерні, які містяться в коробці, зчіплюються спеціальним способом.

Одна із задач, яка стоїть перед конструктором коробки, полягає в мінімізації її розмірів, а це часто зводиться до мінімізації числа валів, на яких розміщені шестерні.

Побудуємо граф $G = (V, U)$, де V – множина шестерень і $(v_i, v_j) \in U$, якщо шестерні v_i та v_j не можуть бути розміщені на одному валу.

Вершини, які входять до одного колірнього класу, при правильному розфарбуванні цього графа, відповідають шестерням, які можуть бути розміщені на одному валу, а хроматичне число $X_p(G)$ дорівнює мінімальній кількості валів, які є необхідними для коробки, що проектується.

Гіпотеза чотирьох фарб

Одна з найвідоміших нерозв'язаних проблем теорії графів – *гіпотеза чотирьох фарб* формулюється так: *всякий планарний граф розфарбовується чотирма фарбами.*

Понад століття всі дослідження цієї проблеми не давали позитивних результатів. Пізніше стало зрозуміло, що за допомогою традиційних підходів цю проблему не розв'язати. 1976 року два американські математики В. Хакен (W. Haken) та К. Аппель (K. Appel) запропонували новий метод. Вони змогли звести проблему до 1482 конфігурацій, які можна було використати для складання довільної карти. Для аналізу цих всіх конфігурацій був використаний

комп'ютер, який дав відповідь: у кожному випадку чотирьох фарб вистачить. Звідси вчені зробили висновок, що проблема розв'язана в загальному вигляді.

Деякі математики не сприйняли комп'ютерне доведення проблеми, але більшість учених все ж таки визнала право на існування таких методів доведення.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Борисенко О. А. Дискретна математика. Суми: Університетська книга, 2023. 255с.
2. Гнатів Б.В., Гладун В.Р., Гнатів Л.Б. Дискретна математика. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021. 400с.
3. Матвієнко М. П. Дискретна математика. Київ: Ліра-К, 2019. 324 с.
4. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Львів: Магнолія, 2024. 432 с.
5. Швай О.Л. Практикум із дискретної математики: навч. посіб. 2-ге вид., переробл. і допов. Луцьк: Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2020. 236 с.
Гриф «Рекомендовано до друку вченою радою Волинського національного університету імені Лесі Українки» (Протокол №14 від 26.11.2020 р.).
6. Шевченко Г.В., Шкапа В.В. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник. Київ: ДУТ, 2018. 158 с.

Навчально-методичне видання

Швай Ольга Леонідівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

(РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ ГРАФІВ»)

Видання друкується в авторській редакції