

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Навчально-науковий фізико-технологічний інститут

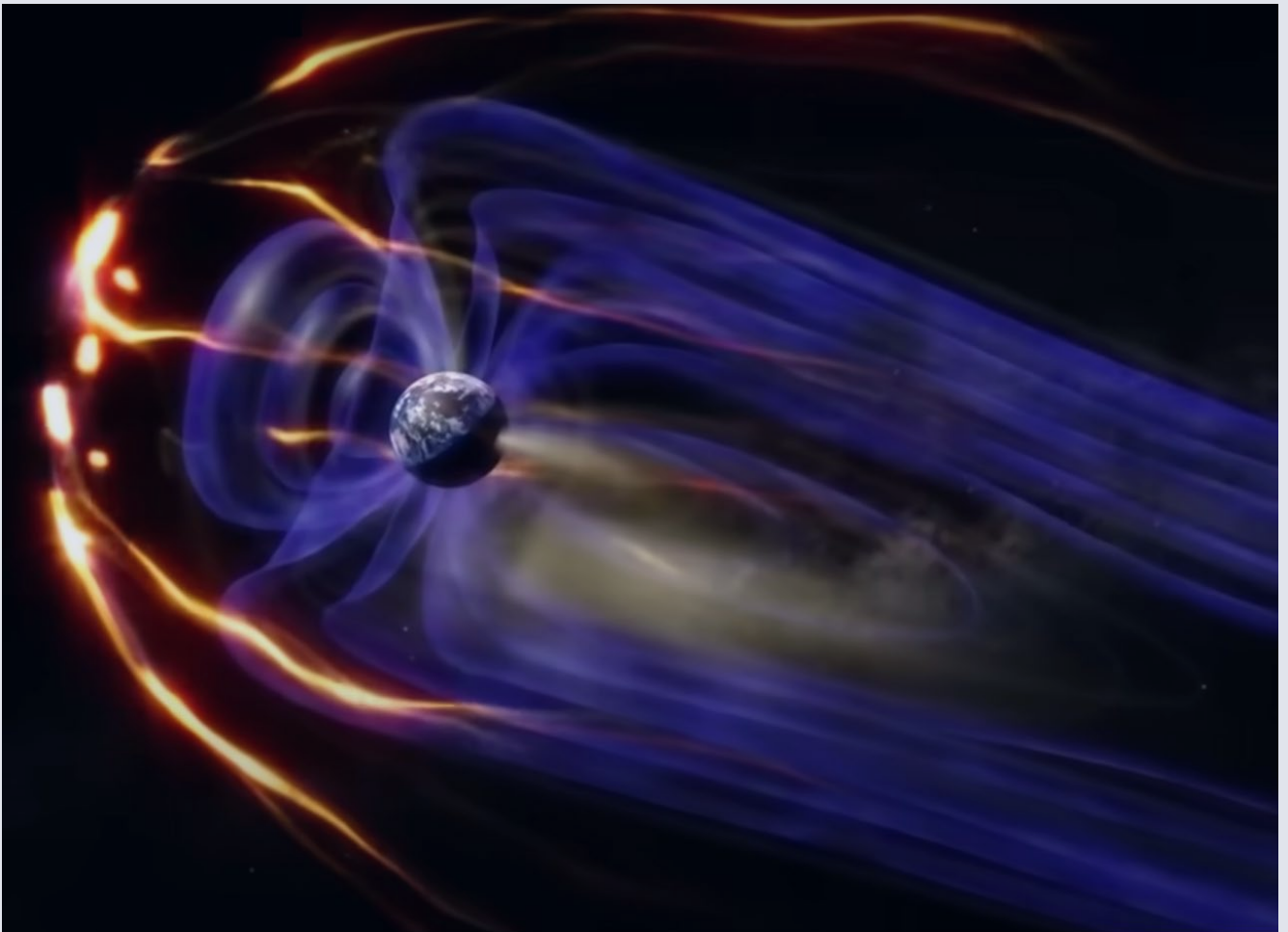
О. В. Новосад

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина II. Електромагнетизм.

Електромагнітні коливання і хвилі



Луцьк

2025

УДК 537
Н-72

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки.
(протокол № 9 від 21 травня 2025)

Рецензент:

Трохимчук П. П. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського Волинського національного університету імені Лесі Українки

Н-72 Новосад О. В. Електрика і магнетизм : конспект лекцій у 2 ч. - Ч. 2. Електромагнетизм. Електромагнітні коливання і хвилі. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2025. 114 с.

У навчально-методичному виданні поданий лекційний матеріал згідно з силабусом освітнього компонента «Електрика і магнетизм» для здобувачів освіти спеціальностей Е6 - Прикладна фізика та наноматеріали, Е5 - Фізика та астрономія, А4 - Середня освіта (Фізика та астрономія)». Представлені у виданні лекції стосуються другого модуля «Електромагнетизм. Електромагнітні коливання і хвилі».

Рекомендовано для здобувачів освіти технічних та природничих спеціальностей які вивчають електрику і магнетизм.

УДК 537
© Новосад О. В.
© Волинський національний
університет імені Лесі Українки

Зміст

ВСТУП.....	4
ЛЕКЦІЯ 1. Магнітна взаємодія струмів. Лінії напруженості магнітного поля. Закон Ампера.	6
ЛЕКЦІЯ 2. Закон Біо-Савара-Лапласа. Сила Ампера. Принцип суперпозиції магнітних полів.....	13
ЛЕКЦІЯ 3. Дія електричного і магнітного полів на рухомий заряд. Сила Лоренца. Магнітний момент витка із струмом.....	21
ЛЕКЦІЯ 4. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму. Використання закону повного струму для розрахунку магнітних кіл.	32
ЛЕКЦІЯ 5. Електромагнітна індукція. Досліди Фарадея. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца. Явище самоіндукції.....	38
ЛЕКЦІЯ 6. Магнітне поле в речовині. Зв'язок між напруженістю та індукцією магнітного поля в магнетиках. Типи магнетиків.	52
ЛЕКЦІЯ 7. Енергія і густина енергії магнітного поля. Система рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле.....	66
ЛЕКЦІЯ 8. Електричні коливання в коливальному контурі. Власні коливання при відсутності активного опору. Затухаючі коливання.....	76
ЛЕКЦІЯ 9. Змінний струм. Закон Ома для ділянки кола змінного струму. Робота і потужність в колах змінного струму.....	83
ЛЕКЦІЯ 10. Електромагнітні хвилі як наслідок рівнянь Максвелла. Плоскі електромагнітні хвилі. Зв'язок між напруженістю електричної і магнітної компоненти поля в електромагнітній хвилі	97
ЛЕКЦІЯ 11. Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Умова-Пойнтінга. Тиск електромагнітних хвиль.....	106
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА ТА ІНТЕРНЕТ РЕСУРСИ.....	111

ВСТУП

З давніх часів люди помітили, що в природі трапляються сріблясто-чорні камінці, які взаємодіють між собою та притягують залізо. Ці мінерали у великих кількостях можна було знайти в Туреччині біля стародавнього міста Магnezія. Тому ще приблизно 600 років до нашої ери один із засновників давньогрецької науки Фалес Мілетський назвав ці камінці *Magnitys litos*, що перекладається як «камінь з Магnezії». З часом ця назва трансформувалась до звичного для нас слова «магніт», від якого походить слово *магнетизм*. Сьогодні природний мінерал *Magnitys litos* називають магнетитом або магнітним залізняком (Fe_3O_4) (рис. 1).



Рис. 1. Магнетит [1]

Магніти мали ще одну цікаву властивість. Маючи можливість вільно обертатись в просторі, вони завжди орієнтувались на строго визначений напрямок, і цей напрямок співпадав з географічною віссю південь – північ. Дану властивість магніту було покладено в основу принципу дії дуже важливого навігаційного приладу, який називається компасом. Про автора цього винаходу на даний час нічого не відомо. Є деякі відомості, що компас був винайдений у Китаї приблизно за 1000 років до нашої ери. Європейці про компас дізнались від арабів. Без цього простого навігаційного приладу були б неможливі великі географічні відкриття XV...XVII століть.

На даному етапі розвиток цивілізації неможливо уявити без використання магнітних матеріалів та магнітного поля. Особливо важливий ефект від використання магнітних полів та матеріалів одержаний в науці. Це, наприклад, створення та використання методів ядерного магнітного резонансу, електронно-парамагнітного резонансу, використання магнітного поля для утримання плазми, використання в техніці різних магнітних сепараторів, магнітних підйомних пристроїв, магнітних методів неруйнівного контролю якості деталей тощо. Постійні магніти та електромагніти використовуються в генераторах, які виробляють електричний струм, та в електродвигунах, які споживають цей струм. Без них не може обійтися більшість транспортних засобів: автомобіль, електромобіль, тролейбус, тепловоз, літак, корабель тощо. Магніти полегшують нам життя та розважають нас, служать нам в різних домашніх електро побутових приладах, у засобах зв'язку, комп'ютерах та звичайних дитячих іграшках.

Зараз магнітні явища цікавлять не тільки вчених та інженерів, які створюють нову техніку, ці явища вивчаються лікарями, біологами, геологами та представниками багатьох інших професій. Наприклад, геологи за аномаліями магнітного поля Землі шукають корисні копалини; лікарі ефективно використовують магнітні поля та матеріали для терапії, діагностики, оздоровлення; біологи вивчають магнітні поля живих організмів і вплив на живі організми зовнішніх магнітних полів. І це далеко не повний перелік використання магнітного поля. Магнітне поле Землі захищає все живе на планеті від потоку високоенергетичних частинок з космосу (космічної радіації). Разом з тим варто відмітити негативний вплив магнітних полів на живий організм. Дослідження показали, що сильні магнітні поля загальмовують ріст та розвиток клітин живих організмів, можуть змінювати склад крові тощо.

Попереду ще неймовірно багато відкриттів нових властивостей магнітних полів, нових магнітних матеріалів та унікальних застосувань магнітного поля в науці, промисловості, транспорті, медицині і т.д.

ЛЕКЦІЯ 1.

Магнітна взаємодія струмів. Лінії напруженості магнітного поля. Закон Ампера.

1.1. Вступ в магнетизм. Магнітне поле електричного струму.

Приблизно у XII столітті компас отримав широке застосування у навігації. При цьому принцип дії компасу залишався незрозумілим. Люди в той час не розуміли магнітних явищ. Була незрозумілою дія магнітів на залізо і те, чому вони не діють на мідь, золото, срібло, деревину тощо. Лише в 1788 р. французький фізик Шарль Кулон створив більш-менш вдалу теорію магнетизму, хоча вона виявилась неправильною. В основі цієї теорії лежало припущення про те, що в магнетизмі, аналогічно як і в електриці, існує два типи магнітних зарядів, а полюси магнітів є місцем зосередження магнітних зарядів.

Теорія Кулона повністю виправдовувала себе і була логічною. В електриці аналогічна теорія різнойменних електричних зарядів повністю пояснювала все різноманіття відомих на той час електричних явищ. Саме тому було цілком логічно передбачити, що і в магнітних явищах теорія різнойменних магнітних зарядів мала б місце.

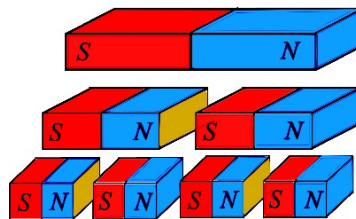


Рис. 1.1. Неможливість поділу магніту на «магнітні заряди»

Проте теорію магнітних зарядів вдалось легко спростувати. Якщо магнітні заряди різних знаків існують, і південний та північний магнітні полюси магніту є місцями їх накопичення, то, розділивши магніт на дві однакові частини (рис. 1.1), на одній частині мав би бути надлишок «південних» зарядів, а на іншій частині мав би бути надлишок «північних» зарядів. Коли здійснили відповідні експерименти, з'ясувалось, що дві половини магніту стали новими магнітами. У кожному з нових магнітів виявився свій північний і південний полюси. Таким

чином, можна як завгодно довго ділити магніт, але результат виявиться одним: **усі, навіть найдрібніші, частинки магніту обов'язково мають два полюси, розділити ці полюси неможливо.** Цей результат експерименту суперечив теорії магнітних зарядів і вказував на те, що ця теорія є неправильною.

У часи Кулона вчені-фізики вважали, що електричні та магнітні явища – це абсолютно різні, не пов'язані одне з одним явища. Лише в 1820 році данський вчений Ганс Крістіан Ерстед (1777-1851) експериментально встановив, що магнітна стрілка реагує не лише на магніт, а й на електричний струм (рис. 1.2). Тобто вдалося показати, що між магнітними та електричними явищами існує зв'язок, і що магнітну дію створюють електричні струми, а не лише постійні магніти, тому між електричними та магнітними явищами існує зв'язок.

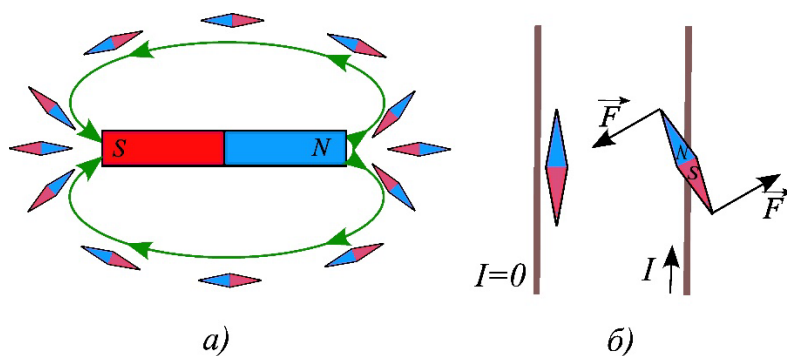


Рис. 1.2. Реакція магнітної стрілки на магніт (а) та провідник із струмом (б)

Узагальнюючи, можна зробити висновки, що в середині 1820 року наукові знання з магнетизму представляли собою такі експериментальні факти:

1. Більшість існуючих в природі матеріалів «сильних» магнітних властивостей не проявляють.
2. Магнітні властивості мають лише феромагнетики, до яких належать залізо, кобальт, нікель та деякі їх сплави.
3. Феромагнетики можуть бути як активними (постійні магніти), так і пасивними (не намагнічене залізо).
4. Магніти мають два полюси, які називаються південним та північним.
5. Однойменні полюси магніту відштовхуються, а різнойменні полюси – притягуються.
6. Розділити магнітні полюси (заряди) неможливо.

7. Крім магнітів, магнітну дію створюють електричні струми.

На основі цих висновків французький вчений Андре Ампер (1775-1836) в кінці 1820 року розробив першу науково обґрунтовану теорію магнетизму. В основі теорії Ампера лежало припущення, що джерелом магнетизму є електричні струми, а не якісь гіпотетичні магнітні заряди. Разом з тим, це пояснювало те, чому електричний струм діє на магнітну стрілку. Проте дане припущення не пояснювало причину та походження магнітних властивостей постійних магнітів та магнітної стрілки. Відповідно, Ампер висунув гіпотезу про те, що в кожному тілі існують внутрішні струми. Ці струми Ампер назвав «молекулярними». Саме «молекулярні» струми надають тілу відповідних магнітних властивостей.

Кожен «молекулярний» струм створює елементарну магнітну дію (елементарний магніт). Залежно від просторової орієнтації цих елементарних дій тіло набуває відповідних магнітних властивостей. Якщо елементарні магніти орієнтовані хаотично або попарно протилежно (рис. 1.3. а), то їх магнітні дії компенсують одна одну, тіло магнітних властивостей не проявляє. Якщо ж елементарні магніти напрямлені в одну сторону (рис. 1.3. б), то їх магнітні дії підсилюються і тіло матиме магнітні властивості.

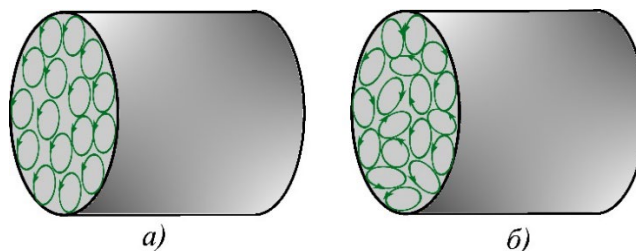


Рис. 1.3. Залежно від просторової орієнтації «молекулярних струмів» тіло має магнітні властивості (а), або не має їх (б).

Теорія Ампера дозволила пояснити усі відомі на той час магнітні явища. В тому числі і неможливість розділення магнітних полюсів. На основі цього в 1820 році була створена перша науково обґрунтована теорія магнетизму. Основу цієї теорії (теорії Ампера) складають два твердження:

- 1. Джерелом магнетизму (магнітного поля) є електричний струм.**
- 2. У кожному тілі існують внутрішні струми («молекулярні» струми), які надають даному тілу відповідних магнітних властивостей.**

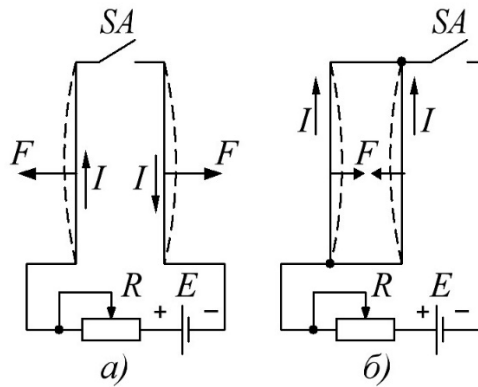


Рис. 1.4. Силова взаємодія протилежно та однаково напрямлених струмів

Ампер узагальнив велику кількість експериментальних результатів і встановив, що два паралельні прямолінійні провідники, по яких проходять постійні електричні струми в різних напрямках, відштовхуються один до одного (рис. 1.4. а). І провідники притягаються, якщо напрямки струмів однакові (рис. 1.4. б). Ампер розробив математичну теорію даного явища і вивів формулу для розрахунку сили взаємодії електричних струмів.

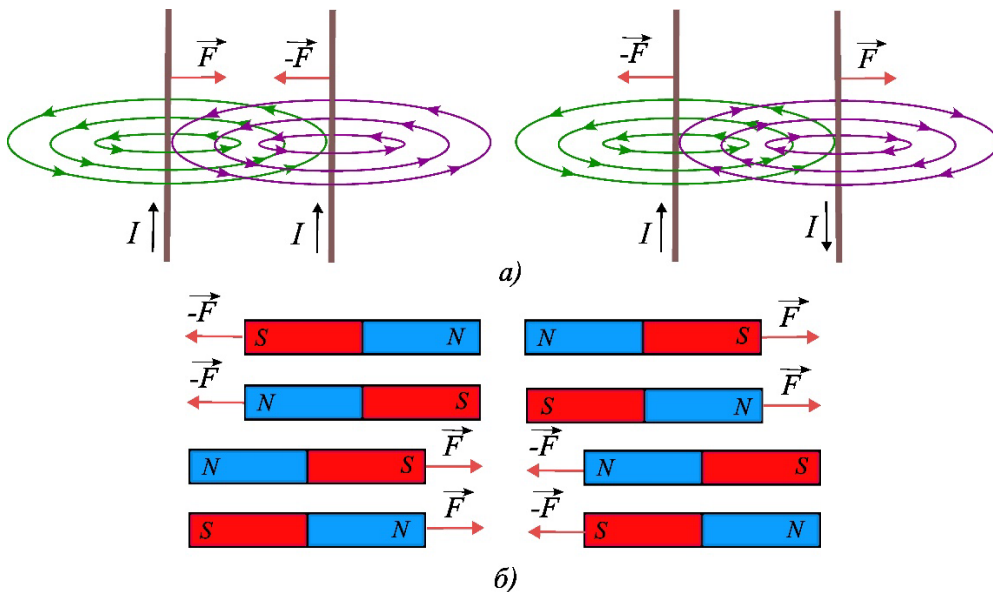


Рис. 1.5. Співнаправлені струми притягуються, протилежно напрямлені – відштовхуються (а). Різнойменні магнітні полюси притягуються, однойменні – відштовхуються (б)

На основі узагальнення явища дії струму на магнітну стрілку та дії магніту на струм Ампер встановив, що *електричний струм створює навколо себе магнітне*

поле, через магнітне поле відбувається силова взаємодія. Сили, з якими провідники зі струмом взаємодіють, називають магнітними силами.

Аналогічно до електричного поля, яке виникає в просторі між нерухомими електричними зарядами, у просторі, що оточує електричні струми, виникає магнітне поле. Електричний струм, який проходить по одному з провідників, утворює навколо себе магнітне поле, яке діє на електричний струм, який проходить у другому провіднику. Магнітне поле, створене другим струмом, діє на магнітне поле створене першим провідником (рис. 1.5.а). Напрямки сил взаємодії між магнітами представлено на рис. 1.5.б. Також потрібно наголосити, що магнітне поле є матеріальним.

1.2. Закон Ампера.

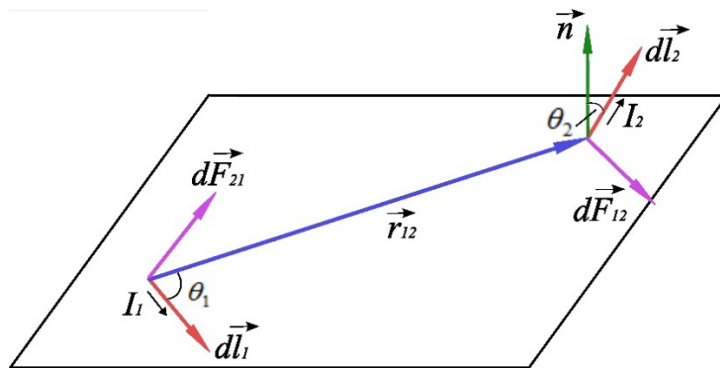


Рис. 1.6. Два елементи струму, розміщені в різних площинах

Ампер встановив закон механічної взаємодії двох елементів струмів, які розміщені на певній відстані один від одного. Дія магнітного поля на електричний струм різна залежно від форми провідника, по якому проходить струм, розміщення провідника в магнітному полі та напрямку струму в провіднику. Тому для опису магнітного поля потрібно розглядати його дію на деякий визначений струм. Будемо вважати, що провідники, по яких проходять струми, знаходяться у вакуумі. Для визначення властивостей магнітного поля скористаємось його дією на елемент струму. Елемент струму - поняття абстрактне. Елементом струму $I d\vec{l}$ будемо вважати нескінченно малий провідник довжиною $d\vec{l}$, по якому протікає струм I . Елемент струму є вектором, його напрям співпадає із напрямом струму. У найбільш загальному випадку елементи струму $I_1 d\vec{l}_1$ та $I_2 d\vec{l}_2$ лежать в різних площинах так, як це зображено на рис. 1.6.

Закон, що описує взаємодію двох елементів струму називається законом Ампера. Сформулюємо цей закон: *сила $d\vec{F}_{12}$, з якою перший елемент струму $I_1 d\vec{l}_1$ діє на другий $I_2 d\vec{l}_2$, прямо пропорційна добутку елементів струмів, обернено пропорційна квадратові відстані між ними r_{12} і залежить від взаємної орієнтації цих елементів.*

У скалярній формі закон Ампера для випадку розміщення двох елементів струму, зображеного рис. 1.6, записується так:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1 \cdot I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r_{12}^2}, \quad (1.1)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ н/А² - магнітна стала вакууму, r_{12} - модуль радіус-вектора, проведеного від першого елемента струму до другого, θ_1 - кут між першим елементом струму та радіус-вектором, θ_2 - кут між другим елементом струму та вектором нормалі $\vec{n}$ до площини S . Положення вектора нормалі $\vec{n}$ визначається за правилом правого свердлика: якщо свердлик закручувати так, щоб обертальний рух його рукоятки співпадав з напрямком від першого елемента до радіус-вектора, то поступальний рух покаже напрямок нормалі $\vec{n}$. Напрямок сили також визначатиметься поступальним рухом правого свердлика, обертуючи рукоятку від другого елемента струму до нормалі $\vec{n}$.

Формулу (1.1) можна записати у векторній формі:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 [d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}]]}{r_{12}^3}$$

Якщо аналогічно провести аналіз і визначити силу dF_{21} , з якою діє другий елемент на перший, то очевидним стане те, що кути θ_1 та θ_2 будуть іншими, і в результаті цього сили dF_{21} та dF_{12} не будуть паралельними і різними за модулем, тобто у випадку магнітної взаємодії елементів струму не виконується третій закон Ньютона. Це властиве механічним силам немеханічного походження.

$$d\vec{F}_{21} \neq d\vec{F}_{12}. \quad (1.2)$$

Силовою характеристикою магнітного поля є напруженість магнітного поля, позначається буквою H . Напруженість магнітного поля є векторною величиною.

1.3. Лінії напруженості магнітного поля.

Лінія напруженості магнітного поля - це така лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає за напрямом із напруженістю поля в цій точці. Лінії напруженості прийнято проводити так, щоб їх густина була рівна або пропорційна напруженості поля в даному місці. Означення для ліній індукції магнітного поля аналогічне до означення напруженості.

У наявності силових ліній магнітного поля, створеного прямолінійним провідником із струмом, можна переконатися із дослідів з металевими ошурками, які можна розглядати як маленькі магнітні стрілки, орієнтація яких в магнітному полі відповідатиме лініям напруженості поля (рис. 1.2).

Напрямок ліній напруженості та індукції магнітного поля визначається за правилом свердлика або правилом правої (рис. 1.7): **якщо свердлик закручувати так, щоб його поступальний рух співпадав з напрямком струму, то обертальний рух рукоятки вказуватиме напрямок напруженості магнітного поля.**

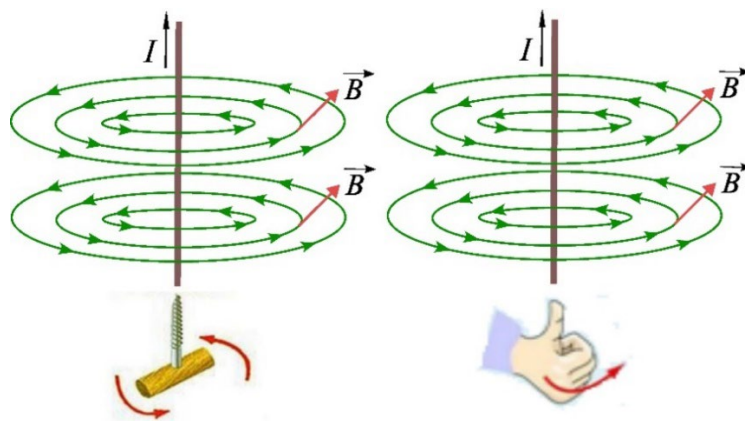


Рис. 1.7. Правило свердлика та правило правої руки

Важливою особливістю ліній магнітної індукції є те, що вони не мають ні початку, ні кінця, тобто вони завжди замкнені. **Поля із замкненими силовими лініями називають вихровими.** Отже, **магнітне поле є вихровим**, це означає, що, на відміну від електричних зарядів, у природі не існує магнітних зарядів.

ЛЕКЦІЯ 2.

Закон Біо-Савара-Лапласа. Сила Ампера. Принцип суперпозиції магнітних полів.

2.1. Закон Біо-Савара-Лапласа.

Напруженість магнітного поля встановлюється по формальній аналогії з напруженістю електричного поля. Вважається, що магнітна взаємодія струмів відбувається через магнітне поле. Магнітне поле - це різновид електромагнітного поля. Магнітна взаємодія передається зі скінченою швидкістю, не більшою за швидкість світла.

Індукцією магнітного поля у вакуумі будемо називати векторну величину, яка пов'язана з напруженістю формулою:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Індукція за напрямком співпадає з вектором напруженості, тобто, як і напруженість, визначатиметься правилом правого свердлика.

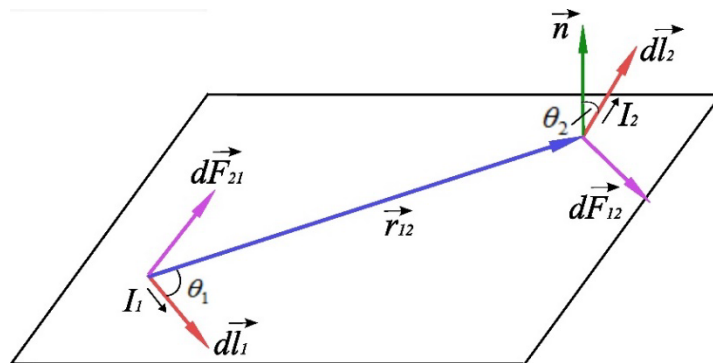


Рис. 2.1. Два елементи струму, розміщені в різних площинах

Розглядаючи два елементи струму (рис. 2.1), запишемо формулу, яка визначає напруженість магнітного поля, що створюється першим елементом струму $I_1 d\vec{l}_1$ у точці, де розміщений другий елемент струму $I_2 d\vec{l}_2$. Для цього використаємо означення напруженості магнітного поля та формулу (1.1).

$$dH_{12} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dF_{12}}{I_2 dl_2 \sin \theta_2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{4\pi \frac{\mu_0 I_1 dl_1 \sin \theta_1 \cdot I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r_{12}^2}}{I_2 dl_2 \sin \theta_2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1}{r_{12}^2},$$

тобто

$$dH_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1}{r_{12}^2}.$$

Абстрагуючись від індексів, визначимо напруженість магнітного поля в деякій точці M , яка знаходиться на відстані r від елемента струму $Id\vec{l}$

$$dH_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1}{r_{12}^2}$$

У загальному випадку, абстрагуючи звіт індексів, напруженість визначатиметься формулою

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}, \quad (2.1)$$

де Idl - елемент струму, який створює електричне поле напруженістю dH на відстані r , θ - кут між елементом струму та радіус-вектором, проведеним у досліджувану точку.

Формулу (2.1) можна записати у векторній формі:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (2.2)$$

Формули (2.1) та (2.2) називаються законом Біо-Савара-Лапласа, який дає можливість визначити напруженість магнітного поля, створеного елементом струму. Закон Біо-Савара-Лапласа є результатом теоретичного узагальнення французьким астрономом, математиком і фізиком П. Лапласом результатів експериментальних досліджень, отриманих французькими вченими Ж. Біо та Ф. Саваром у 1820р.

Напрямок вектора напруженості магнітного поля визначають за правилом

правого свердлика (рис.2.2):

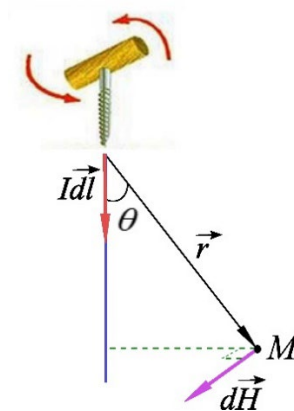


Рис. 2.2. Визначення напрямку напруженості та індукції магнітного поля

2.2. Сила Ампера.

Визначимо силу, що діє на деякий елемент струму $Id\vec{l}$, поміщений в точку простору, де існує електричне поле напруженістю $d\vec{H}$, кут між напруженістю магнітного поля та елементом струму - α . Для визначення сили використаємо закон Ампера та закон Біо-Савара-Лапласа:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1 \cdot I_2 dl_2 \sin \theta_2}{r_{12}^2}$$

$$dH_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin \theta_1}{r_{12}^2}$$

Порівнюючи дві останні формули та упускаючи індекси, отримаємо

$$dF = \mu_0 Idl \cdot \sin \alpha \cdot dH \quad (2.3)$$

Враховуючи, що $dB = \mu_0 dH$, отримаємо

$$dF = Idl \cdot \sin \alpha \cdot dB. \quad (2.4)$$

Коли провідник прямолінійний і має довжину l , то, інтегруючи рівняння (2.4), можна визначити силу F , з якою однорідне магнітне поле індукцією B діє на провідник із струмом I в цьому полі.

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (2.5)$$

або

$$F = \mu_0 \cdot H \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (2.6)$$

Формули (2.5) та (2.6) можна записати у векторній формі

$$\vec{F} = I \cdot [\vec{l} \times \vec{B}] \quad (2.7)$$

$$\vec{F} = \mu_0 \cdot I \cdot [\vec{l} \times \vec{H}] \quad (2.8)$$

Силу, яка визначається формулами (2.5) – (2.8), називають силою Ампера. Закон Ампера використовують для розрахунку сил, що діють на провідники зі струмом у багатьох пристроях, зокрема у вимірювальних приладах, електродвигунах.

Напрямок сили Ампера визначається за правилом лівої руки (рис. 2.3): *ліву руку потрібно розмістити так, щоб перпендикулярна до провідника складова вектора індукції магнітного поля входила в долоню, чотири випрямлені пальці співпадали з напрямком струму в провіднику, то відігнутий на 90° великий палець покаже напрямок дії сили Ампера.*

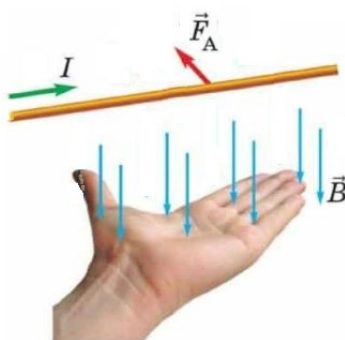


Рис. 2.3. Правило лівої руки для визначення сили Ампера

2.3. Принцип суперпозиції магнітних полів.

Як і електричне поле, створене системою точкових зарядів, у будь-якій точці простору, визначатиметься принципом суперпозиції, так само і магнітне поле, створене системою струмів, визначатиметься принципом суперпозиції магнітних полів. Сформулюємо принцип суперпозиції магнітних полів: **якщо магнітне поле створене декількома струмами, то результуюча напруженість у даній точці простору визначатиметься векторною сумою напруженостей полів, створених кожним окремим струмом.**

Магнітне поле прямолінійного нескінченно довгого провідника із струмом. Відомо, що індукція та напруженість магнітного поля нескінченно довгого провідника із струмом визначаються формулами:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi \cdot R},$$

або, використовуючи зв'язок між напруженістю та індукцією магнітного поля $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, отримаємо, що

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot R}. \quad (2.9)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, переконаємося в справедливості цих формул. Для цього розглянемо прямолінійний провідник із струмом, розміщений у вакуумі так, як це зображено на рис. 2.4.

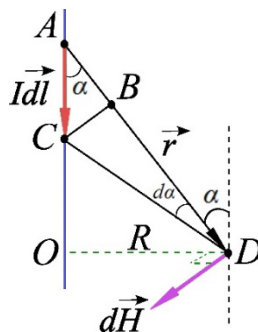


Рис. 2.4. Магнітне поле прямолінійного провідника із струмом

На рис. 2.4 dH - напруженість магнітного поля, створеного елементом струму $Id\vec{l}$ у досліджуваній точці D , розміщеній на відстані R від провідника із струмом. Для розрахунку будемо використовувати закон Біо-Савара-Лапласа.

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} .$$

Враховуючи, що $dl \cdot \sin \alpha = CB$, попередню формулу запишемо у вигляді

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{CB}{r} \frac{1}{r}, \quad (2.10)$$

Не важко помітити, що

$$\frac{CB}{r} = d\alpha ,$$

а також, що

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} ,$$

тобто

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \alpha}{R}$$

Підставимо отримане в (2.10), отримаємо, що

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \sin \alpha \cdot d\alpha , \quad (2.11)$$

але dH - це напруженість магнітного поля, створеного не провідником зі струмом, а елементом струму. Для того, щоб визначити напруженість H , яка створюється усім провідником у досліджуваній точці D , потрібно використати принцип суперпозиції, тобто просумувати поля, створені елементами струму, на які можна розбити весь провідник. Сумування, оскільки ми маємо неперервну

множину елементів і їх кількість є нескінченною, зручно замінити інтегруванням. І оскільки ми маємо провідник нескінченної довжини, а змінною величиною в (2.11) є кут α , то інтегрування потрібно проводити по куту α в межах від 0 до π . Проведемо це інтегрування.

$$H = \int dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \int_0^\pi \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \cos \alpha \Big|_0^\pi = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} (\cos(0) - \cos(\pi)) = \\ = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} (1 - (-1)) = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot 2 = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R},$$

отже, напруженість магнітного поля прямолінійного провідника із струмом - $H = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R}$, відповідно, індукція $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R}$, де R - відстань до провідника. Що і потрібно було довести.

Формулу (2.4) використовують для означення одиниці вимірювання напруженості магнітного поля. Напруженість магнітного поля вимірюється в А/м. Використовуючи формулу (2.4), дамо означення 1 А/м.

1 А/м - це напруженість магнітного поля в точці, яка розміщена на відстані $R = \frac{1}{2\pi}$ метрів від нескінченно довгого прямолінійного провідника, по якому проходить струм силою 1 А.

Магнітне поле кільцевого струму в центрі кільця. Використовуючи принцип суперпозиції магнітних полів, розрахуємо магнітне поле, створене кільцевим струмом у центрі цього кільця. Для цього умовно розіб'ємо кільце на елементи струму $I d\vec{l}$ та, використовуючи закон Біо-Савара-Лапласа, запишемо вираз для напруженості dH , що створюється цим елементом, напрям поля в центрі кола визначимо за правилом правого свердлика.

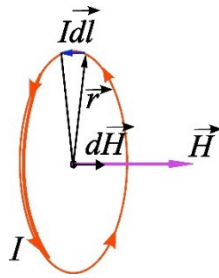


Рис. 2.5. Магнітне поле кільцевого струму в центрі кільця

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

$\sin \alpha = 1$, оскільки кут між елементом струму та радіус-вектором 90° .

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}. \quad (2.12)$$

Для того, щоб визначити напруженість магнітного поля у центрі кільця, створену усім кільцем, потрібно (2.12) проінтегрувати по всьому замкнутому контуру:

$$H = \oint_{\gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} = \frac{I}{4\pi \cdot r^2} \oint_{\gamma} dl = \frac{I}{4\pi \cdot r^2} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{I}{2 \cdot r},$$

тобто

$$H = \frac{I}{2 \cdot r}$$

ЛЕКЦІЯ 3.

Дія електричного і магнітного полів на рухомий заряд. Сила Лоренца.

Магнітний момент витка із струмом.

3.1. Сила Лоренца.

Дія магнітного поля на провідник, по якому проходить електричний струм, є результатом дії магнітного поля на заряджені частинки, які рухаються всередині провідника. *Силу, яка діє на рухому заряджену частинку зі сторони магнітного поля, називають силою Лоренца.* Силу Лоренца можна розрахувати, використовуючи силу Ампера:

$$F_L = \frac{F}{N}, \quad (3.1)$$

де N - кількість вільних носіїв заряду в провіднику.

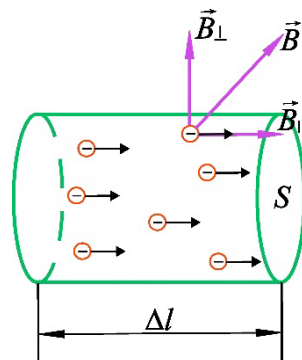


Рис. 3.1. Провідник із струмом

Розглянемо ділянку провідника, по якому проходить постійний електричний струм (рис. 3.1). Нехай довжина провідника Δl та його площа поперечного перерізу S є настільки малими, що індукцію магнітного поля $\vec{B}$ можна вважати сталою в межах провідника. При вивченні теми «Постійний електричний струм» для сили струму була отримана формула:

$$I = q_0 n v S, \quad (3.2)$$

де q_0 - заряд частинки, n - концентрація вільних носіїв заряду, v - дрейфова швидкість вільних носіїв заряду.

Враховуючи рівняння (3.2), одержимо, що сила Ампера:

$$F = BIl \sin \alpha = Bq_0nvSl \sin \alpha, \quad (3.3)$$

де величина $nSl=N$ - кількість вільних носіїв заряду.

Підставивши (3.3) у (3.1), отримаємо формулу для сили Лоренца:

$$F_L = \frac{F}{N} = \frac{q_0NvB \sin \alpha}{N} = q_0vB \sin \alpha; \quad (3.4)$$

$$F_L = q_0vB \sin \alpha, \quad (3.5)$$

де α - кут між вектором швидкості носіїв заряду і вектором магнітної індукції.

Або у векторній формі:

$$\vec{F}_L = q_0[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Якщо заряджена частинка знаходиться в електромагнітному полі, то на неї діє сила:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} + q_0[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Напрямок дії сили Лоренца, як і напрям дії сили Ампера, визначається за правилом лівої руки. **Якщо ліву руку розмістити так, щоб складова вектора магнітної індукції, перпендикулярна до швидкості заряду, входила у долоню, а чотири пальці були напрямлені за напрямком руху позитивно заряджених частинок (проти руху негативного заряду), то відігнутий на 90° великий палець покаже напрям сили Лоренца, що діє на заряд.**

На рис. 3.2 та рис. 3.3 зображено правило лівої руки для визначення напрямку дії сили Лоренца.

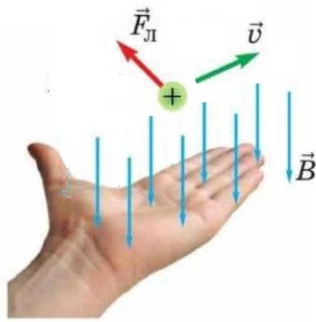


Рис. 3.2. Правило лівої руки для визначення напрямку сили Лоренца

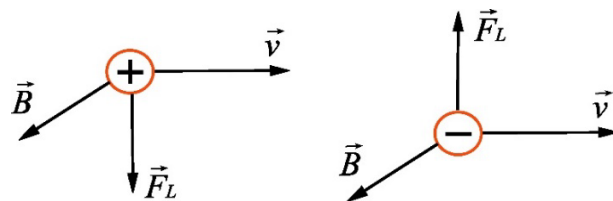


Рис. 3.3. Напрямок сили Лоренца для позитивно та негативно заряджених частинок

Оскільки сила Лоренца напрямлена перпендикулярно до швидкості руху частинки, то вона не виконує роботи. Це означає, що вона не змінює кінетичної енергії частинки і модуля її швидкості. Під дією сили Лоренца змінюється лише напрямок швидкості зарядженої частинки. Якщо заряджена частинка потрапляє в магнітне поле перпендикулярно до вектора індукції магнітного поля, то вона буде рухатися по колу (рис. 3.4.а). Якщо частинка потрапляє в магнітне поле під кутом $\alpha < \pi/2$, то вона буде рухатися по спіралі (рис. 3.4.б).

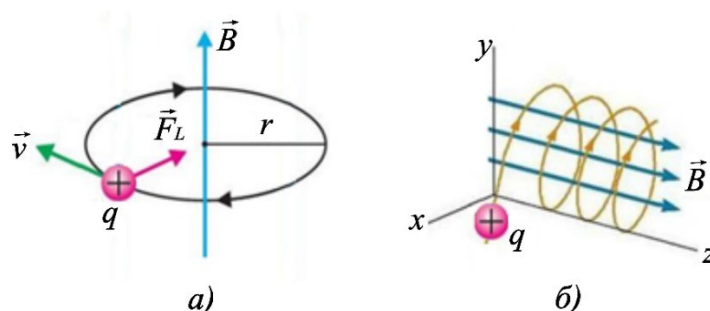


Рис. 3.4. Траєкторія руху позитивно зарядженої частинки в магнітному полі

Дія магнітного поля на рухомий заряд знайшла використання у сучасній техніці. Дію сили Лоренца застосовують у мас-спектрографах. Мас-спектрограф - це прилад, за допомогою якого можна визначати маси елементарних частинок за знайденими значеннями їх питомих зарядів. Його також застосовують у

кінескопах, осцилографах. Електрони, які рухаються до екрана, відхиляються магнітним полем.

3.2. Магнітне поле створене рухомих зарядом.

За допомогою закону Біо-Савара можна розглянути взаємодію не тільки лінійних, а й об'ємних струмів, а також окремих точкових заряджених частинок. Для цього в співвідношенні (2.2) (див. лекцію 2) необхідно провести заміну

$$Id\vec{l} \rightarrow \vec{j}dV, \quad (3.6)$$

У результаті закон Біо-Савара-Лапласа (2.2) матиме наступний вигляд:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV, \quad (3.7)$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений від об'ємного елемента струму $\vec{j}dV$ в точку простору, де визначається магнітне поле.

Підставимо в (3.7) вираз для густини струму $\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}$ і потім розділимо на число рухомих заряджених частинок $dn = ndV$ в фізично малому об'ємі dV , де n - концентрація частинок. У результаті знаходимо напруженість магнітного поля точкового заряду з зарядом q , який рухається з постійною нерелятивістською швидкістю v :

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.8)$$

Індукція магнітного поля, створеного точковим зарядом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (3.9)$$

Відомо, що напруженість електричного поля $\vec{E}$ точкового заряду, що рухається з нерелятивістською швидкістю, описується таким же співвідношенням, як і для частки, що знаходиться в стані спокою. З

попереднього матеріалу відомо, що напруженість електричного поля точкового заряду обчислюється за формулою:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Враховуючи останній вираз, формулу (3.9) можна представити таким чином:

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \times \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{E}], \quad (3.10)$$

де $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі, що відноситься до фундаментальних фізичних констант і задовольняє співвідношення

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (3.11)$$

Використовуючи формулу (3.10), можна порівняти сили електричної і магнітної взаємодій рухомих заряджених частинок. Розглянемо два точкові заряди, що мають однаковий заряд q , і в певний момент часу рухаються паралельно одна одній з однаковою нерелятивістською швидкістю $\vec{v}$. За допомогою формул $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ і (3.5) знаходимо відношення сил магнітної і електричної взаємодій частинок

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{vB}{E}, \quad (3.12)$$

де B і E індукція магнітного і напруженість електричного полів, створюваних першою часткою в точці знаходження другої частки.

Враховуючи, що

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\vec{v} \times \vec{E}] = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{E}],$$

одержимо

$$\frac{F_M}{F_g} = \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad (3.13)$$

тобто при нерелятивістських швидкостях магнітна сила значно поступається за величиною електричній силі взаємодії точкових заряджених частинок.

Здавалося б, формула (3.13) може бути застосована і під час аналізу взаємодії струмів у проводах, адже швидкість дрейфу електронів провідності в металах є нерелятивістською і має порядок $v \sim 10^{-4} \text{ м/с}$, при цьому виконується співвідношення $v^2/c^2 \sim 10^{-24}$.

Однак при взаємодії електричних струмів, що проходять по провідниках, основну роль відіграє магнітна сила. Так відбувається тому, що провідники є електрично нейтральними з високим ступенем точності, і результуюча електрична сила взаємодії провідників близька до нуля. Хоча на проводах можуть існувати надлишкові заряди, але вони нескінченно малі в порівнянні з сумарним зарядом носіїв струму. Оскільки концентрація електронів провідності в металах є дуже високою, сила магнітної взаємодії струмів виступає на перший план.

3.3. Магнітний момент витка із струмом.

При розв'язуванні практичних задач, де фігурує кільцевий струм, зручно використовувати магнітний момент витка із струмом, який визначається за формулою

$$\vec{P}_m = \mu_0 I S \vec{n}, \quad (3.14)$$

де I - струм в провіднику, S - площа круга, що обмежує виток із струмом.

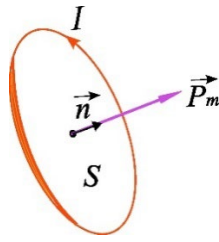


Рис. 3.5. Магнітний момент витка із струмом

Магнітний момент витка із струмом - це векторна величина (рис. 3.5), яка за напрямком співпадає з напрямком одиничної нормалі $\vec{n}$ до площини, у якій розміщений виток із струмом. Напрямок вектора $\vec{n}$ визначається за правилом правого свердлика: якщо свердлик закручувати так, щоб обертальний рух рукоятки співпадав з напрямком струму, то поступальний рух вказуватиме напрям вектора $\vec{n}$.

3.4. Взаємодія двох нескінченно довгих паралельних прямолінійних провідників.

Розглянемо два нескінченно довгі прямолінійні паралельні провідники, розміщені у вакуумі на відстані r один до одного (рис. 3.6). Нехай по провідниках проходять струми I_1 та I_2 так, як це зображено на рис. 3.6. $d\vec{B}_1$ - індукція магнітного поля, створеного елементом струму $I_1 d\vec{l}_1$ в точці, де розміщений другий елемент струму $I_2 d\vec{l}_2$. З попереднього матеріалу відомо, що провідники в такому випадку будуть притягатися, сила, з якою перший провідник притягатиме другий:

$$F_2 = B_1 \cdot I_2 \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (3.15)$$

де l - довжина другого провідника, $\sin \alpha = 1$, оскільки $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - кут між першим провідником і вектором індукції магнітного поля, створеного другим провідником.

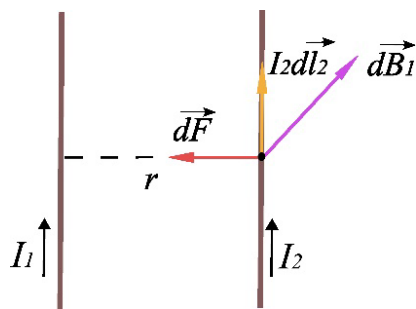


Рис. 3.6. Силова взаємодія двох нескінченно довгих провідників із струмом

Також відомо, що $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ - індукція магнітного поля, створеного нескінченно довгим прямолінійним провідником зі струмом I_1 на відстані r від цього провідника.

Враховуючи останню формулу та формулу (3.15), отримаємо, що сила, яка діє на другий провідник, довжиною l

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l \quad (3.16)$$

Очевидним є те, що в розглянутому випадку $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, де $\vec{F}_1$ - сила, з якою другий провідник діятиме на перший, тобто аналогічно до $\vec{F}_2$ можна визначити $\vec{F}_1$.

Використовуючи (3.16), визначимо силу, що діє на одиницю довжини другого провідника, для цього (3.16.) поділимо на довжину провідника - l .

$$F_{02} = \frac{F_2}{l} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi r}. \quad (3.17)$$

До 20 травня 2019 року формулу (3.17) використовували для означення одиниці вимірювання сили струму, для цього провідники розміщували у вакуумі паралельно на відстані 1 м один від одного. Через провідники пропускали струм в 1 ампер. З (3.17) сила взаємодії на кожен метр довжини провідника становить $2 \cdot 10^{-7}$ Н. Тобто **один ампер - це сила постійного струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малого**

діаметра, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створює силу взаємодії між ними $2 \cdot 10^{-7}$ ньютонів на кожний метр довжини.

Означення одного ампера, яке набуло чинності 20 травня 2019 року, формулюють так: «Ампер, символ А, є одиницею електричного струму в SI. Вона встановлюється фіксацією числового значення елементарного електричного заряду e , коли він виражений одиницею Кл, що відповідає $A \cdot c$, де секунда визначається через $\Delta\nu_{Cs}$ ». Це означення полягає в тому, що один ампер - це сила електричного струму, якому відповідає потік $1/(1,602176634 \cdot 10^{-19})$ елементарних зарядів за секунду.

3.5. Рамка із струмом в магнітному полі.

Розглянемо рамку із струмом, поміщену в магнітне поле (рис. 3.7), та сили, що діятимуть на її сторони зі сторони магнітного поля. На верхнє і нижнє плече довжиною a , згідно із законом Ампера, діятимуть сили, які деформуватимуть (в нашому випадку розтягуватимуть) рамку, але не обертатимуть її. Ці сили зрівноважаться з силами пружності в самій рамці. Сили, які діятимуть на плече b , будуть повертати рамку і, відповідно, виконуватимуть деяку роботу.

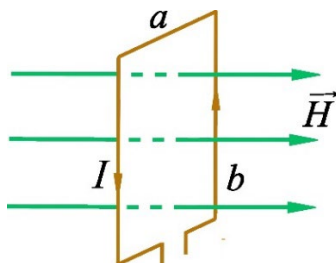


Рис. 3.7. Рамка із струмом в магнітному полі

Розглянемо сили, які діятимуть на плече b (рис. 3.8). Ці сили будуть рівні за модулем та напрямлені в різні сторони і повертатимуть рамку, орієнтуючи її в напрямку, перпендикулярному до ліній напруженості. Тобто на рамку діятиме момент сил:

$$M = F \cdot L. \quad (3.18)$$

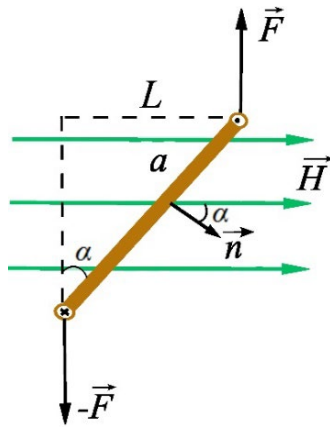


Рис. 3.8. Рамка зі струмом у магнітному полі (вигляд зверху)

Модуль сили можна визначити за законом Ампера:

$$F = \mu_0 H \cdot I \cdot b \cdot \sin \beta$$

β - кут між напрямленістю магнітного поля та плечем b , по якому проходить струм

I . Оскільки $\beta = \frac{\pi}{2}$, то $\sin \beta = 1$ відповідно

$$F = \mu_0 H \cdot I \cdot b$$

У формулі (3.18) L - плече сил, $L = a \cdot \sin \alpha$. Враховуючи дві останні формули, отримаємо

$$M = \mu_0 H \cdot I \cdot b \cdot a \cdot \sin \alpha, \quad (3.19)$$

Неважко помітити, що $b \cdot a = S$ - площа рамки із струмом і $P_m = \mu_0 I S$ - магнітний момент витка із струмом. Формула (3.19) набуде вигляду

$$M = H \cdot P_m \cdot \sin \alpha. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) справедлива для будь-якого витка зі струмом, поміщеного в магнітне поле, також вона лежить в основі роботи електродвигунів.

Під дією моменту сил рамка повертатиметься до рівноважного положення, тобто коли $M=0$, це відбудеться, коли $\alpha=0$, рамка розміститься перпендикулярно до ліній напруженості поля.

Визначимо максимальний момент сил, який діє на рамки в магнітному полі. Цей момент сил відповідатиме куту $\alpha=\pi/2$, математично визначатиметься формулою

$$M_{\max} = I \cdot B \cdot S. \quad (3.21).$$

Визначимо з цієї формули індукцію магнітного поля:

$$B = \frac{M_{\max}}{I \cdot S}.$$

У кожній точці магнітного поля можна визначити напрям вектора магнітної індукції і його модуль вимірюванням моменту сили, що діє на рамку зі струмом.

Одиниця вимірювання індукції магнітного поля - тесла (Тл), названа на честь хорватського інженер-електрика, фізика Н. Тесла (1856 р. - 1943 р.).

За одиницю магнітної індукції беруть магнітну індукцію такого магнітного поля, у якому на контур площею 1 м^2 , по якому проходить струм силою 1 А , з боку магнітного поля діє максимальний момент сил $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, за умови, що рамка розміщена паралельно до ліній індукції магнітного поля.

ЛЕКЦІЯ 4.

Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму.

Використання закону повного струму для розрахунку магнітних кіл.

4.1. Вихровий характер магнітного поля.

Оскільки лінії напруженості та лінії індукції магнітного поля замкнені, то потік цих ліній через будь-яку замкнену поверхню S дорівнює нулю (рис. 4.1).

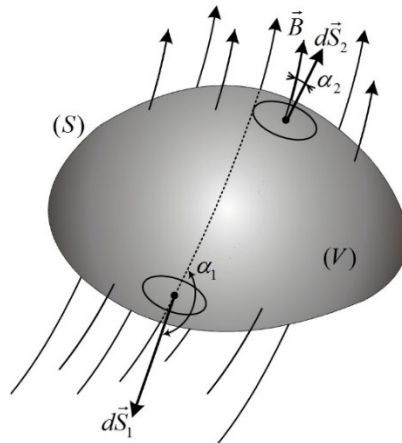


Рис. 4.1. Потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню

$$\oint_S (\vec{H} d\vec{S}) = 0 \quad (4.1.a)$$

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0 \quad (4.1.b)$$

Використовуючи теорему Гауса, формули (4.1) можна записати в диференціальній формі:

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad (4.2.a)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.2.b)$$

Формули (4.1) та (4.2) виражають замкнутий характер ліній напруженості та ліній індукції магнітного поля. Ці формули ще називають теоремою

Остроградського-Гауса для магнітного поля. Також вони виражають вихровий характер магнітного поля.

Отже, між електростатичним і магнітним полем існує суттєва відмінність. Силкові лінії електростатичного поля починаються і закінчуються на електричних зарядах. У той же час, як нам відомо, у природі не існує магнітних зарядів, які були б джерелами магнітних полів. Експериментальним фактом є те, що магнітне поле створюється рухомими електричними зарядами, і лінії індукції замкнені в просторі, при цьому вони охоплюють електричні струми.

4.2. Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму.

Розглянемо циркуляцію вектора напруженості магнітного поля, утвореного прямолінійним провідником із струмом вздовж замкнутого контуру γ , розміщеного у площині, перпендикулярній до провідника (рис. 4.2.).

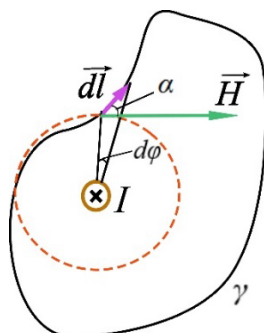


Рис. 4.2. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля

Використовуючи нескладні геометричні міркування, отримаємо, що

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \oint_{\gamma} H \cos \alpha dl = \oint_{\gamma} H dS \quad (4.3)$$

Враховуючи, що напруженість магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом визначається формулою $H = \frac{I}{2\pi \cdot r}$, також те, що $dS = dl \cos \alpha$, а $\frac{dS}{r} = d\phi$ вираз (4.3) набуде вигляду

$$\oint_{\gamma} \frac{I}{2\pi} \frac{dS}{r} = \frac{I}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{dS}{r} = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi = I$$

Отримаємо:

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = I. \quad (4.4)$$

Формулу (4.4) називають теоремою повних струмів для лінійного струму.

Якщо поверхню, обмежену контуром, пронизує декілька струмів (рис. 4.3), то формула (4.4) набуває вигляду

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \sum_{i=1}^n I_i \quad (4.5)$$

За додатній напрям обходу контуру вибирають напрям руху стрілки годинника. У лівій частині останньої рівності ми маємо алгебраїчну суму струмів, тобто матимемо як додатні, так і від'ємні струми.

Для визначення знаку струму користуються правилом знаків. Для цього спочатку визначають додатній напрям обходу контуру та, за правилом правого свердлика, додатній напрям нормалі до плоскої поверхні обмеженої контуром. Струми, які утворюють гострий кут з нормаллю, вважають додатніми, а струми, які утворюють тупий кут з нормаллю, вважають від'ємними.

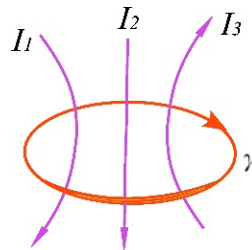


Рис. 4.3.

Формулу (4.5) можна використовувати до дискретних струмів. У випадку, коли ми матимемо неперервний розподіл струму з густиною $\vec{J}$, в певному середовищі, де знаходиться контур γ , то теорема повних струмів набуде іншого вигляду. Відомо, що в такому випадку

$$I = \int_S J_n dS, \quad (4.6)$$

Підставивши (4.6) в (4.4), отримаємо

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S J_n dS \quad (4.7)$$

Узагальнюючи формули (4.4), (4.5), (4.7), можна зробити висновок, **що циркуляція вектора напруженості магнітного поля по замкнутому контуру завжди рівна повному струму, який проходить через поверхню, обмежену даним контуром.**

Використовуючи формулу Стокса, формулу (4.7) можна записати в диференціальній формі.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (4.8)$$

або

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \vec{J} \quad (4.9)$$

Формули (4.8) та (4.9) виражають теорему повних струмів у диференціальній формі.

Наведені вище формули та міркування підтверджують результати фізичних експериментів, згідно з якими магнітне поле є вихровим. З курсу вищої математики відомо, що векторні поля, для яких ротор вектора або циркуляція вектора не рівні нулю, є вихровими.

4.3. Використання теореми повних струмів для розрахунку магнітних полів прямолінійного провідника із струмом та тороїдальної котушки.

Теорема повних струмів дає можливість розраховувати магнітні поля деяких струмів, не використовуючи принципу суперпозиції.

Використовуючи теорему повних струмів, визначимо напруженість магнітного поля, яке створюється нескінченно довгим прямолінійним

провідником із струмом на відстані r від провідника. Нехай струм у провіднику напрямлений від нас (рис. 4.4), напрям магнітного поля визначається за правилом правого свердлика. З міркувань симетрії системи очевидно, що контуром інтегрування зручно обрати коло радіуса r , що лежить у площині, перпендикулярній до провідника із струмом, і так, щоб провідник проходив через центр кола.

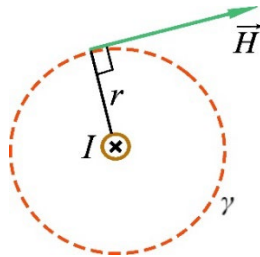


Рис. 4.4. Магнітне поле прямолінійного провідника із струмом

Запишемо теорему повних струмів

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = I. \quad (4.10)$$

Розглянемо праву частину цієї рівності. $d\vec{l}$ - нескінченно малий елемент контуру інтегрування, модуль вектора напруженості поля в кожній точці контуру γ буде однаковий, тобто напруженість магнітного поля можна винести за знак інтегрування. А також, враховуючи, що скалярний добуток $\vec{H} d\vec{l} = H \cdot dl \cdot \cos \alpha = H \cdot dl$, де $\alpha=0$ - кут між векторами $\vec{H}$ та $d\vec{l}$,

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = H \cdot \oint_{\gamma} dl = H \cdot 2\pi \cdot r \quad (4.11)$$

Отриманий результат, за теоремою повних струмів, буде рівний струму I .

$$H \cdot 2\pi \cdot r = I,$$

звідси отримаємо

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r}.$$

Розглянемо магнітне поле тороїдної котушки. Тороїдом називається кільцева котушка з витками, намотаними на осердя, що має форму тора, по якому проходить електричний струм. Особливістю поля тора є те, що поза тором воно майже відсутнє.

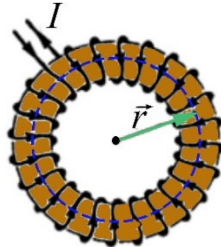


Рис. 4.5. Тороїдальна котушка

Для розрахунку напруженості магнітного поля використаємо теорему повних струмів. Контуром інтегрування у такому випадку зручно вибрати коло радіуса r , центр якого розміщений на осі тороїда рис. 4.5.

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot \oint_{\gamma} dl = H \cdot 2\pi \cdot r = I \cdot N,$$

де N - кількість витків тороїдної котушки, одночасно це і кількість струмів, що пронизують коло, утворене контуром інтегрування. Отже, поле тороїда можна визначити за формулою

$$H = I \cdot \frac{N}{2\pi \cdot r}$$

або

$$H = I \cdot n = \frac{N}{l}$$

де n - кількість витків котушки, що припадають на одиницю довжини тороїда

$$n = \frac{N}{2\pi \cdot r}$$

Інколи кажуть, що напруженість магнітного поля всередині тороїда рівна ампер-виткам на одиницю довжини.

ЛЕКЦІЯ 5.

Електромагнітна індукція. Досліди Фарадея. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца. Явище самоіндукції.

5.1. Досліди Фарадея.

Між електричним та магнітним полями існує зв'язок: змінне в часі електричне поле породжує магнітне, а магнітне породжує електричне поле. Цей зв'язок встановлено завдяки відкриттю 1831 року англійським вченим М. Фарадеєм *явища електромагнітної індукції, яке полягає у виникненні електричного струму в замкнутому контурі, який або нерухомий у змінному магнітному полі, або переміщується в постійному магнітному полі так, що кількість ліній магнітної індукції, що пронизують площу обмежену цим контуром, змінюється.*

Вперше явище електромагнітної індукції дослідив Фарадей, проводячи досліди, які без проблем може повторити кожен з нас. Наприклад, у котушку, кінці якої під'єднано до гальванометра, вводимо або витягуємо з неї магніт (рис. 5.1). Під час переміщення магніту створюється змінне в просторі магнітне поле, у якому перебуватиме котушка. У котушці під дією змінного магнітного поля виникає струм, який називають індукційним.

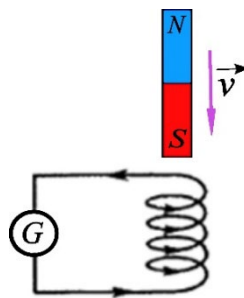


Рис. 5.1. Створення індукційного струму в котушці за допомогою магніту

Індукційний струм в котушці виникає також під час зміни сили струму в іншій котушці, магнітне поле якої пронизує першу котушку. Індукційний струм утворюється також під час руху однієї котушки відносно іншої (рис. 5.2), а також, коли котушку рухати відносно нерухомого магніту.

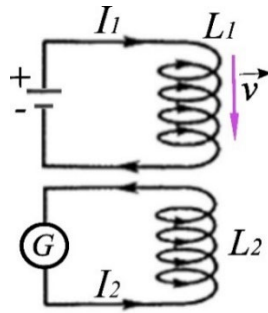


Рис. 5.2. Збудження індукційного струму в нерухомій котушці K_2 за допомогою магнітного поля рухомої котушки K_1

Якщо з'єднана з гальванометром котушка рухається рівномірно в однорідному полі, то індукційний струм не виникатиме, оскільки кількість силових ліній, що перетинають котушку, увесь час залишається сталою.

Поява електричного струму в замкненому контурі під час зміни магнітного поля, що пронизує цей контур, свідчить про дію в контурі сторонніх сил неелектростатичної природи або про виникнення електрорушійної сили, яку ми будемо називати ЕРС індукції.

Кількісний опис явища електромагнітної індукції виконують на основі встановлення зв'язку між ЕРС індукції і фізичною величиною, яку називають магнітним потоком. Магнітний потік залежить від вектора $\vec{B}$ не в одній точці, а в усіх точках поверхні, яку утворює замкнений контур.

Магнітним потоком Φ через поверхню з площею S називають скалярну фізичну величину, рівну добутку модуля вектора магнітної індукції $\vec{B}$ на площу поверхні S та косинус кута між вектором $\vec{B}$ і вектором нормалі до поверхні $\vec{n}$. (рис. 5.3).

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (5.1.)$$

Добуток $B \cdot \cos \alpha = B_n$ - проекція вектора магнітної індукції на нормаль до площини S , тому

$$\Phi = B_n \cdot S$$

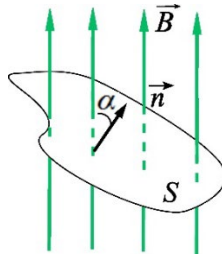


Рис. 5.3. Потік вектора індукції магнітного поля через поверхню S

Магнітний потік наочно можна витлумачити як величину, пропорційну кількості ліній магнітної індукції, що пронизують поверхню площею S .

Одиницею вимірювання магнітного потоку є вебер (Вб). **Магнітний потік в 1 Вб створюється однорідним магнітним полем з індукцією 1 Тл через площу 1 м², перпендикулярну до ліній магнітної індукції.**

У найбільш загальному випадку потік ліній індукції магнітного поля буде визначатись формулою:

$$\Phi = \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S})$$

Причина виникнення індукційного струму полягає, перш за все, у тому, що виникатиме ЕРС, і вже під її впливом в контурі виникне індукційний струм. Експериментально було помічено, що сила індукційного струму пропорційна до швидкості зміни магнітного потоку $\frac{d\Phi}{dt}$ через поверхню, обмежену контуром:

$$I_i \sim \frac{d\Phi}{dt}.$$

Враховуючи те, що опір провідника не залежить від швидкості зміни магнітного потоку, струм буде пропорційний величині $\frac{d\Phi}{dt}$, тільки тому, що і ЕРС індукції також буде пропорційна $\frac{d\Phi}{dt}$, тобто $\varepsilon_i \sim \frac{d\Phi}{dt}$.

Закон електромагнітної індукції сформульовано саме для ЕРС, оскільки за такого формулювання він виражає суть явища, незалежного від властивостей

провідників, у яких виникає індукційний струм.

При більш детальному аналізі експериментальних результатів було встановлено, що ЕРС індукції визначається виразом

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2)$$

Знак «-» у формулі (5.2) впливає із закону Фарадея-Ленца, який ми розглянемо в наступному пункті лекції.

5.2. Закон Фарадея-Ленца.

Під час проведення дослідів із дослідження явища електромагнітної індукції можна помітити, що стрілка гальванометра, залежно від напрямку руху магніту, відхиляється то в один, то в інший бік, що свідчить про різні напрямки індукційного струму (рис. 5.4).

Ленц застосував до явища електромагнітної індукції закон збереження та перетворення енергії і сформулював правило, користуючись яким, можна визначити напрям індукційного струму.

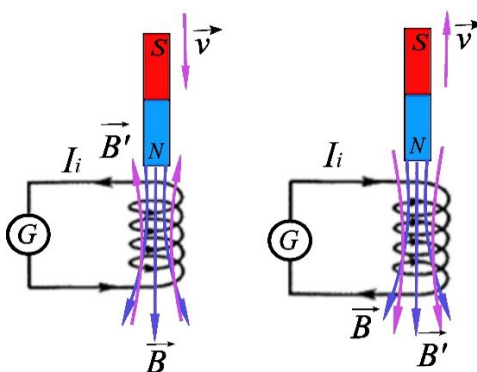


Рис. 5.4. Магнітне поле створене індукційним струмом

Правило Ленца формулюється так: *індукційний струм, що виникає в замкненому контурі, своїм магнітним полем протидіє зміні потоку зовнішнього магнітного поля, який створює цей струм.*

Застосуємо це правило до закону електромагнітної індукції. На рис. 5.5. зображено замкнений контур. За додатній напрям обходу контуру в розглядуваному випадку виберемо напрям, протилежний до руху стрілки

годинника. Нормаль до контуру $\vec{n}$ утворюють за допомогою правого свердлика та додатного напрямку обходу контура. Нехай магнітна індукція $\vec{B}$ напрямлена вздовж нормалі до контуру і з часом зростає, тобто це саме математично можна записати:

$$\Phi > 0 \text{ та } \frac{d\Phi}{dt} > 0.$$

Згідно з правилом Ленца, індукційний струм створює магнітний потік $\Phi' < 0$. Силкові лінії магнітного поля індукційного струму зображено на рис. 5.5 пунктиром. Отже, індукційний струм I_i , згідно з правилом свердлика, напрямлений за рухом стрілки годинника (проти напрямку додатного обходу контура) і ЕРС індукції від'ємна. Тому в рівнянні електромагнітної індукції має стояти знак мінус, який вказує, що ε_i і $\frac{d\Phi}{dt}$ мають різні знаки:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

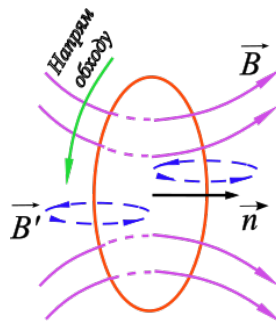


Рис. 5.5.

Якщо в з'єднаних послідовно контурах відбуваються однакові зміни магнітного потоку, то ЕРС індукції в них дорівнює сумі ЕРС індукції в кожному із контурів. Тому, якщо змінюється магнітний потік у котушці, що складається із N однакових витків провідника, загальна ЕРС індукції буде в N разів більшою від ЕРС індукції в окремому контурі:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.3)$$

Аналізуючи вище описані явища та результати цих явищ, можна дійти до висновку, що під час будь-якої зміни магнітного поля в просторі виникає електричне поле, яке приводить в рух вільні носії заряду в контурі, викликаючи появу індукційного струму. **Таке електричне поле називають вихровим.**

Робота сил вихрового електричного поля по переміщенню електричних зарядів називається роботою сторонніх сил, виконується ця робота під дією ЕРС індукції.

Явище електромагнітної індукції спостерігається і в тих випадках, коли магнітне поле не змінюється з часом, а зміна потоку магнітного поля відбувається через рух провідника в цьому полі. У такому випадку причиною виникнення ЕРС індукції буде не вихрове електричне поле, а сила Лоренца. Розглянемо це явище на прикладі руху провідника в магнітному полі. Нехай провідник довжиною l , що рухається зі швидкістю v перпендикулярно до ліній індукції однорідного магнітного поля $\vec{B}$, за час Δt він переміститься на відстань $v \cdot \Delta t$, описавши поверхню площею $S = l \cdot v \cdot \Delta t$.

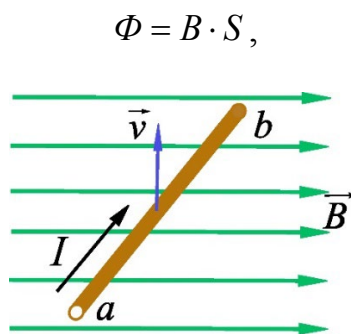


Рис. 5.5. Виникнення ЕРС індукції та індукційного струму в рухомому провіднику

Враховуючи, що за цих умов потік магнітного поля $\Delta\Phi = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t$ та те, що в розглядуваному випадку $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, отримаємо

$$\varepsilon_i = -B \cdot l \cdot v. \quad (5.4)$$

Якщо вектори $\vec{B}$ і $\vec{v}$ розміщені під кутом α один до одного, то, проводячи

аналогічні міркування, матимемо

$$\varepsilon_i = -B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha .$$

Напрямок індукційного струму в рухомому замкненому провіднику можна визначати за правилом правої руки: **якщо праву руку розмістити так, щоб лінії магнітної індукції входили в долоню, а великий відігнутий палець показував напрям швидкості руху провідника, то чотири пальці покажуть напрям індукційного струму.**

5.3. Явище самоіндукції

Якщо по замкненому контуру проходить змінний струм, то магнітний потік, що пронизує контур, змінюється. Тому, згідно із законом електромагнітної індукції Фарадея, у цьому ж провіднику виникає ЕРС індукції. **Явище виникнення індукційного струму в провіднику внаслідок зміни магнітного потоку, зумовленого зміною струму в цьому ж провіднику, називають самоіндукцією.** Під час самоіндукції провідний контур відіграє подвійну роль: по ньому проходить струм, що викликає індукцію, і в ньому ж з'являється ЕРС індукції ε_i .

Згідно з правилом Ленца, в момент збільшення сили струму напруженість електричного вихрового поля напрямлена так, щоб протидіяти цьому збільшенню. Тобто в цей момент самоіндукція перешкоджає наростанню струму. І навпаки, в момент зменшення струму самоіндукція його підтримує. Іншими словами, самоіндукція протидіє змінам струму в провідниках.

Це приводить до того, що під час замикання кола певне значення струму встановлюється не відразу (крива ОА, рис. 5.6.а), а поступово через деякий проміжок часу. Під час вимикання джерела струм у замкненому контурі не зникає миттєво (крива ВС, рис. 5.6.а). У випадку, якби в природі не існувало явища електромагнітної індукції, ці процеси відбувалися б так, як зображено на рис. 5.6.б.

У більшості практичних випадків ЕРС самоіндукції може перевищувати ЕРС джерела струму, оскільки зміна струму і його магнітного поля під час

вимкнення джерела відбувається дуже швидко.

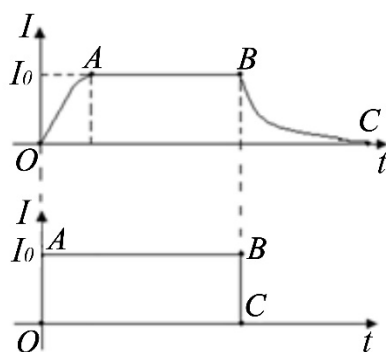


Рис.5.6. Екстраструми розмикання та замикання. а) Реальна зміна струму в колі.
б) За відсутності явища електромагнітної індукції.

Для того, щоб переконатися в описаних явищах, можна провести такий дослід. Нехай дві однакові лампочки $EL1$ і $EL2$ з'єднані паралельно через резистор R і котушку індуктивності L із залізним осердям у колі з джерелом постійного струму і перемикачем SA (рис.5.7). У момент замикання кола ключем SA лампочка $EL1$ загоряється миттєво, а лампочка $EL2$ загоряється із запізненням. Пояснюється це тим, що сила струму на ділянці кола з котушкою через явище самоіндукції встановлюється не відразу, а поступово (крива ОА рис. 5.6.а.).

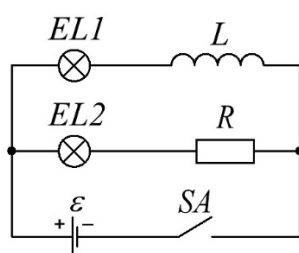


Рис. 5.7.

Явище самоіндукції подібне до явища інерції в механіці. Внаслідок самоіндукції під час замикання кола сила струму не відразу набуває максимального значення, і навпаки, під час вимкнення джерела ЕРС струм зникає не відразу, струм самоіндукції підтримуватиме його деякий час, незважаючи на опір кола.

Мірою «інертності» контура відносно зміни сили струму в ньому (аналогічно масі тіла в механіці) в електродинаміці є індуктивність або коефіцієнт самоіндукції контура L .

Індукція магнітного поля струму, відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа, прямо пропорційна першому степеню сили струму. Тому й потік магнітної індукції Φ крізь певну фіксовану поверхню буде також пропорційним силі струму, тобто

$$\Phi = L \cdot I. \quad (5.5)$$

Використовуючи закон електромагнітної індукції та вираз (5.5), при умові, що форма контуру залишається незмінною, отримаємо рівність

$$\varepsilon_{Si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.6)$$

Індуктивність залежить від розмірів провідника, його форми, але не залежить безпосередньо від сили струму в провіднику, залежить від магнітних властивостей середовища, у якому знаходиться провідник. Наприклад, індуктивність соленоїда:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (5.7)$$

де μ_0 - магнітна стала, μ - магнітна проникність середовища, n - кількість витків на одиницю довжини; $V=S \cdot l$ - об'єм соленоїда.

З формули (5.6) слідує, що **індуктивність - це скалярна фізична величина, яка чисельно дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в контурі внаслідок зміни струму на 1 А за 1 с.** Одиницею індуктивності в СІ є генрі (Гн).

1 Гн - це індуктивність такого провідника, у якому при зміні сили струму на 1 А за 1 с виникає ЕРС самоіндукції 1 В.

Явище самоіндукції відіграє дуже важливу роль в електротехніці й радіотехніці. Індуктивність кола істотно впливає на проходження в ньому змінного електричного струму.

Оскільки електричний струм і пов'язаний з ним магнітний потік - дві сторони одного процесу, то будь-яка зміна електричного струму викликає зміну його магнітного потоку, і навпаки, будь-яка зміна магнітного потоку має, згідно із законом електромагнітної індукції, викликати появу ЕРС у зв'язаному з цим потоком контурі.

5.4. Явище взаємоіндукції.

Розглянемо два контури 1 і 2 (рис. 5.8), що зберігають взаємне розміщення. Якщо по контуру 1 проходить електричний струм I_1 , то частина його потоку пронизуватиме контур 2. Оскільки магнітний потік через контур 1 пропорційний силі струму I_1 , то й повний магнітний потік через контур 2 також буде пропорційний силі струму I_1 . При зміні сили струму в першому контурі, внаслідок зміни потоку ліній індукції магнітного поля, у другому колі буде індукуватись ЕРС.

Розглянуті контури називають магнітозв'язаними, а **явище індукування ЕРС в одному контурі при зміні сили струму в другому контурі називають взаємоіндукцією**. Величину, що визначає зв'язок між зміною відповідної сили струму та індукованої ЕРС, називають взаємною індуктивністю контурів.

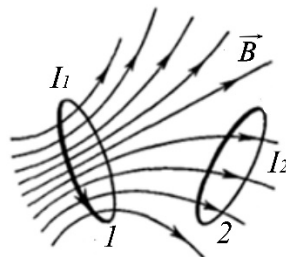


Рис. 5.8. Два магнітозв'язані контури

Тобто, **взаємна індуктивність – це фізична величина, яка чисельно дорівнює ЕРС індукції, що виникає в одному із контурів, коли в іншому за час 1 с сила струму змінюється на 1 А.**

Розрахувати ЕРС, яка індукується в другому контурі, можна за формулою

$$\varepsilon_{2i} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

I_1 - струм в першому контурі, L_{21} - коефіцієнт взаємної індуктивності контурів 1 і 2.

Розглянувши наведений приклад у випадку, коли струм індукується в першому контурі магнітним полем, яке створюється струмом в другому контурі отримаємо, що

$$\varepsilon_{1i} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

I_2 - струм в другому контурі, L_{21} - коефіцієнт взаємної індуктивності контурів 2 та 1.

Використовуючи закон збереження енергії, можна показати, що для розглянутої системи із двох контурів $L_{12} = L_{21}$.

5.5. Генератор змінного струму

Явище електромагнітної індукції лежить в основі принципу дії генератора змінного струму. У генераторі рамка, що має площу і активний опір R , розташовується між полюсами магніту, що створює поле з індукцією $\vec{B}$ (рис. 5.9). Під північним полюсом N розуміють ту область магніту, де лінії вектора $\vec{B}$ виходять з магніту. Відповідно, південний полюс S - це область магніту, де лінії вектора індукції магнітного поля входять в магніт. Магнітне поле повинне бути однорідним в межах області, яку займає обертова рамка.

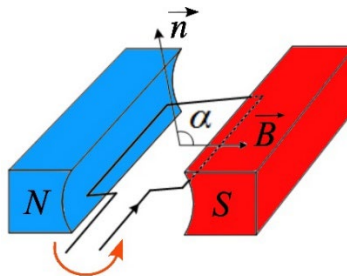


Рис. 5.9. Будова найпростішого генератора змінного струму

Магнітний потік, що пронизує рамку:

$$\Phi = (\vec{B} \cdot \vec{S}) = BS \cos \alpha. \quad (5.9)$$

При обертанні магнітів (або рамки) з постійною кутовою швидкістю ω в рамці виникає змінний електричний струм, який має частоту ω :

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t .$$

Таким чином, силу струму можна представити у вигляді

$$I = I_0 \sin \omega t ,$$

де $I_0 = \frac{BS\omega}{R}$ - амплітудне значення сили струму; ω - циклічна частота струму.

Змінний струм передається від генератора споживачеві і знаходить широке застосування у промисловості, побуті, транспорті, зв'язку та в інших сферах життя і діяльності людини.

5.6. Трансформатор.

Явище електромагнітної індукції лежить в основі принципу дії трансформатора. Цей пристрій складається з первинної і вторинної обмоток, які не з'єднані між собою, але мають спільне осердя з феромагнітного матеріалу (рис. 5.10).

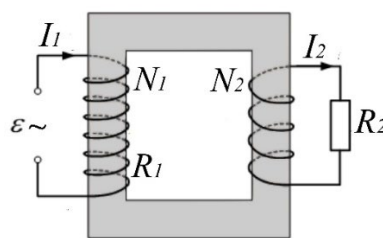


Рис. 5.10. Принципова схема роботи трансформатора

Трансформатори використовуються для перетворення змінної напруги та сили змінного струму. Змінні електричні струми в обмотках зв'язані між собою завдяки явищу електромагнітної індукції. Закон Ома для первинної та вторинної обмоток трансформатора можна записати у вигляді

$$\varepsilon - \frac{d\Phi_1}{dt} = I_1 R_1, \quad (5.10)$$

$$-\frac{d\Phi_2}{dt} = I_2 R_2, \quad (5.11)$$

де ε - ЕРС, що створюється джерелом в первинній обмотці, індексом 1 позначені величини, що відносяться до первинної обмотки, а індексом 2 - до вторинної обмотки.

Осердя трансформатора характеризується великою відносною магнітною проникністю, а для повітря відносна магнітна проникність практично дорівнює одиниці. Тому, з урахуванням формул $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ і $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, можна припустити, що магнітні потоки через обидві обмотки зосереджені в середині феромагнітного осердя. Тому виконується співвідношення

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (5.12)$$

де N_1 і N_2 - кількість витків первинної та вторинної обмотки.

Виконуючи диференціювання, можна показати, що співвідношення (5.12) справедливе також для похідних магнітних потоків за часом. Використовуючи (5.10 - 5.12), отримаємо

$$I_1 R_1 - \frac{N_1}{N_2} I_2 R_2 = \varepsilon. \quad (5.13)$$

На практиці часто реалізується випадок, коли опір первинної обмотки малий ($R_1 \rightarrow 0$). Тоді з формули (5.13) випливає співвідношення

$$I_2 = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\varepsilon}{R_2}. \quad (5.14)$$

Можна обчислити також падіння напруги на опорі, яке називається напругою у вторинному колі:

$$U_2 = I_2 R_2 = -\frac{N_2}{N_1} \varepsilon. \quad (5.15)$$

З формули (5.15) випливає, що трансформатор підвищує напругу у вторинному колі в N_2/N_1 раз або знижує в N_1/N_2 раз в порівнянні із значенням ЕРС в первинному колі. Згідно з (5.14), в опорі R_2 відбувається відповідне збільшення (або зменшення) сили струму. Величину

$$K = \frac{N_2}{N_1}$$

прийнято називати коефіцієнтом трансформації.

Трансформатор застосовується також для передачі електричної енергії на відстань. У потужних лініях електропередач використовують дуже високі напруги (тисячі і десятки тисяч вольт). Це дозволяє зменшити силу струму в лінії і застосовувати проводи меншого перерізу, що призводить до значного зниження вартості ліній електропередачі. У той же час генератори змінного струму, так само, як і різні прилади, які споживають електроенергію, розраховані на низьку напругу, щоб можна було забезпечити необхідну ізоляцію обмоток. Тому напруга, що створюється генераторами на початку лінії електропередач, збільшується за допомогою підвищувальних трансформаторів. У місцях, де розташовані споживачі електроенергії, струм високої напруги знову перетвориться, тепер уже за допомогою понижуючих трансформаторів, в струми низької напруги, наприклад, 110 В або 220 В.

ЛЕКЦІЯ 6.

Магнітне поле в речовині. Зв'язок між напруженістю та індукцією магнітного поля в магнетиках. Типи магнетиків.

6.1. Магнітне поле в речовині.

Магнетиками називаються речовини, які після поміщення їх в зовнішнє магнітне поле також починають створювати магнітне поле. Це явище називається намагнічуванням речовини. Причина намагнічування полягає в тому, що у всіх речовинах існують елементарні колові електричні струми, що замикаються в межах кожного атома і молекули, які прийнято називати молекулярними струмами. Наприклад, електрон при русі навколо ядра може створювати елементарний кільцевий струм.

Поки речовина не намагнічена, вона не створює магнітне поле. Це означає, що молекулярні струми спрямовані в речовині хаотично, і сумарне магнітне поле, створюване цими струмами, дорівнює нулю. Результируючий магнітний момент магнетика також дорівнює нулю. При намагніченні речовини напрямок молекулярних струмів стає частково або повністю впорядкованим, і в цьому випадку магнетик можна розглядати як систему орієнтованих елементарних струмів (рис. 1.3). Результируючий магнітний момент магнетика стає відмінним від нуля. При цьому виникає магнітне поле, яке породжене цими однаково орієнтованими молекулярними струмами, та яке, відповідно до принципу суперпозиції, сумується із зовнішнім магнітним полем. У результаті магнітне поле, створене зовнішніми джерелами, в присутності магнетика змінюється.

Стан магнетиків характеризується вектором намагніченості

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (6.1)$$

де $\vec{p}_i$ - магнітний момент довільного атома; ΔV - деякий фізично малий об'єм речовини; сумування проводиться для всіх атомів і молекул в межах розглянутого об'єму ΔV .

Вектор намагніченості (6.1) характеризує об'ємну густину магнітних моментів речовини. Вектор намагніченості аналогічний вектору поляризації діелектриків.

Всі струми, що існують в магнетик, можна розділити на два види:

- 1) вільні струми (сторонні струми, струми провідності);
- 2) зв'язані струми (власні струми, струми намагнічування).

Вільні струми створюються в речовині в результаті впорядкованого руху вільних або сторонніх зарядів, тобто зарядів, котрі не належать атомам і молекулам магнетика. Це звичайні струми, які проходять по провідниках.

У свою чергу, зв'язані струми, як вже було зазначено, створюються рухом зв'язаних зарядів, зарядами, що входять до складу атомів і молекул речовини. Та існують в межах атомів і молекул.

Таким чином, можна записати

$$\vec{j} = \vec{j}_{зв} + \vec{j}_{вільн} . \quad (6.2)$$

При цьому для об'ємної густини зв'язаних струмів справедливий вираз

$$\vec{j}_{зв} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{M} . \quad (6.3)$$

Ця формула показує, що ротор вектора намагніченості $\vec{M}$ визначається густиною зв'язаних струмів у тій же точці простору.

Співвідношення (6.3) можна записати також в інтегральній формі

$$\oint_{\gamma} \vec{M} d\vec{l} = I_{зв} , \quad (6.4)$$

де

$$I_{зв} = \int_S \vec{j}_{зв} d\vec{S} , \quad (6.5)$$

I_{36} - повний пов'язаний струм через поверхню S , обмежену замкнутим контуром γ .

Використовуючи співвідношення (6.3), можна довести, що в однорідно намагніченому магнетикі густина зв'язаних струмів не дорівнює нулю тільки на його поверхні. У цьому факті також простежується аналогія з властивостями діелектриків.

Співвідношення (6.4) означає, що циркуляція вектора намагніченості $\vec{M}$ по довільному замкнутому контуру γ дорівнює повному зв'язаному струму I_{36} , охопленому цим контуром (рис. 6.1).

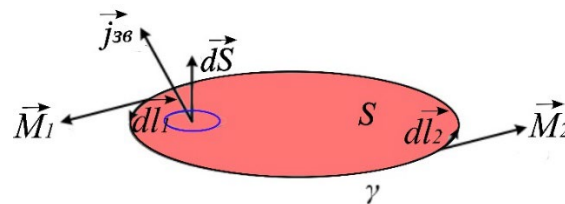


Рис. 6.1. Орієнтація вектора намагніченості відносно зв'язаних струмів

Можна ввести в розгляд також вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{M}}{\mu_0}, \quad (6.6.a)$$

або

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (6.6.b)$$

Цей вектор називається вектором напруженості магнітного поля. Він характеризує не тільки магнітне поле, а й властивості магнетика, в якому існує це поле. Вектор напруженості $\vec{H}$ вимірюється в одиницях А/м. Цей вектор виражається через об'ємну густину вільних струмів у такий спосіб

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{вільн.}}. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) називається законом повного струму для магнетиків у диференціальній формі. Ця формула показує, що ротор вектора напруженості дорівнює густині вільних струмів в тій же точці простору.

Закон повного струму можна записати і в інтегральній формі

$$\oint_{\gamma} \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{вільн.}}, \quad (6.8)$$

де

$$I_{\text{вільн.}} = \int_S \vec{j}_{\text{вільн.}} d\vec{S}, \quad (6.9)$$

$I_{\text{вільн.}}$ - повний вільний струм через поверхню S , межею якої є замкнутий контур γ .

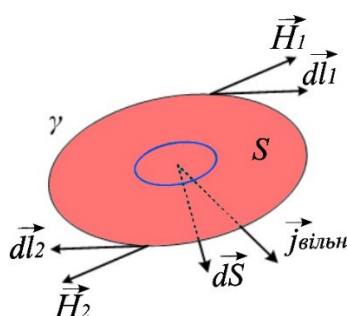


Рис. 6.2. Напрямок вектора напруженості магнітного поля відносно вільних струмів

Співвідношення (6.8) показує, що циркуляція вектора напруженості $\vec{H}$ по довільному замкнутому контуру γ дорівнює сумарному вільному струму, охопленому цим контуром (рис. 6.2).

Для ізотропних магнетиків $\vec{M} \sim \vec{H}$, перейшовши від пропорційності до рівності, отримаємо:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}, \quad (6.10)$$

де χ - магнітна сприйнятливості речовини. Ця величина показує, наскільки сильно речовина намагнічується у зовнішньому полі.

Підставивши (6.10) в (6.6.b), отримаємо:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H}$$

Для характеристики магнітних властивостей речовини використовується також магнітна проникність

$$\mu = 1 + \chi. \quad (6.11)$$

Використовуючи співвідношення (6.11), можна знайти зв'язок між векторами індукції і напруженості магнітного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (6.12)$$

Якщо магнетик однорідний, то його відносна магнітна проникність не залежить від координат. У цьому окремому випадку, використовуючи спільно (6.12) і (6.7), отримуємо

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j}_{\text{вільн.}}. \quad (6.13)$$

Порівнюючи формулу (6.13) з законом повного струму для вакууму ($\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$), приходимо до висновку, що величина μ показує, у скільки разів індукція магнітного поля в однорідній безмежній речовині зростає в порівнянні з полем, яке створювали б такі ж струми в вакуумі.

Відзначимо, що співвідношення (6.13) має більш вузьку область застосування в порівнянні з формулою (6.7), яка правильна як для однорідних, так і для неоднорідних магнетиків.

6.2. Класифікація магнетиків.

Характеризуючи магнітні властивості речовин, усі магнетики можна розділити на діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики.

Діамагнетизм. Діамагнетики - це такі речовини, атоми яких не мають магнітних моментів під час відсутності зовнішнього магнітного поля. При внесенні діамагнетиків у магнітне поле їх атоми набувають магнітних моментів, направлених протилежно напруженості зовнішнього магнітного поля. Отже, для діамагнетиків виконуються нерівності

$$\chi < 0, \mu_r < 1. \quad (6.14)$$

Діамагнетики послаблюють зовнішнє поле, хоча і незначно. Модуль магнітної сприйнятливості дуже малий ($\chi \sim 10^{-5}$), при цьому χ не залежить від температури. Діамагнетизм властивий всім речовинам і є наслідком Ларморової прецесії атомів у зовнішньому магнітному полі. Використовуючи класичний підхід, діамагнетизм можна пояснити як результат дії сили Лоренца на електрони в атомах речовини.

Рух електрона, зв'язаного в атомі, в рамках класичної теорії можна розглядати як обертання по круговій орбіті. Розглянемо найпростіший випадок, коли площина орбіти ортогональна вектору індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}$ (рис. 6.3).

На малюнках а) і б) показані два електрони, що рухаються в одному атомі по орбітах однакового радіусу в протилежних напрямках. Обертання кожного електрона навколо ядра атома створює замкнутий струм I , з яким пов'язаний магнітний момент $\vec{p}$. Вектор $\vec{p}$ утворює з напрямком струму правогвинтову систему, тому в разі а) вектор магнітного моменту $\vec{p}$ спрямований до нас, а в разі б) - від нас. Сумарний магнітний момент, що характеризує рух двох електронів, за відсутності зовнішнього магнітного поля дорівнює нулю. Саме такою властивістю володіють атоми діамагнетиків, вони не мають магнітних моментів, якщо зовнішнє магнітне поле дорівнює нулю. Отже, два розглянуті електрони повинні бути присутніми одночасно в атомі діамагнетика.

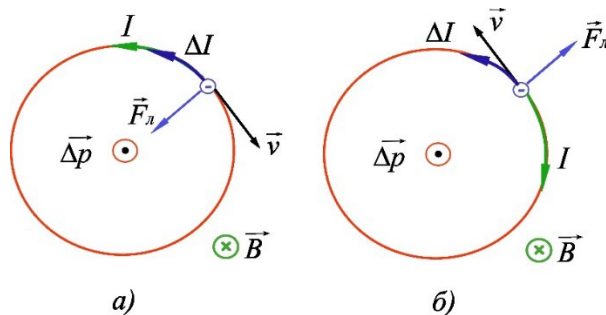


Рис. 6.3. Рух електронів по кругових орбітах в атомі діамагнетика в зовнішньому магнітному полі і виникнення додаткових кругових струмів

Електрон рухається по орбіті під дією сили кулонівського притягання електрона ядром. При поміщенні атома в зовнішнє магнітне поле виникає сила Лоренца, і доцентрове прискорення електрона змінюється. Використовуючи вираз для сили Лоренца, можна записати

$$|e|\nu B = \pm m \Delta a_{\partial}, \quad (6.15)$$

де $e < 0$ - заряд електрона; ν - швидкість руху електрона по орбіті; $\vec{B}$ - індукція магнітного поля; m - маса електрона; Δa_{∂} - зміна доцентрового прискорення електрона; знак «+» відповідає малюнку а), знак «-» - малюнку б).

Сила Лоренца істотно поступається за величиною кулонівській силі взаємодії електрона з ядром, тому можна вважати, що у присутності зовнішнього магнітного поля радіус орбіти r не змінюється. Отже,

$$\Delta a_{\partial} = \Delta(\omega^2 r) = 2\omega r \Delta\omega, \quad (6.16)$$

де ω - циклічна частота обертання електрона в атомі, r - радіус орбіти, $\Delta\omega$ - зміна циклічної частоти обертання електрона в атомі.

Використовуючи співвідношення $|e|\nu B = \pm m \Delta a_{\partial}$, $\Delta a_{\partial} = \Delta(\omega^2 r) = 2\omega r \Delta\omega$ і враховуючи, що $\nu = \omega r$, отримуємо

$$\Delta\omega = \pm \frac{|e|}{2m} B. \quad (6.17)$$

Таким чином, циклічна частота обертання електрона в атомі під дією зовнішнього магнітного поля може або збільшуватися, або зменшуватися, залежно від взаємного розташування векторів $\vec{\nu}$ і $\vec{B}$. У випадку а) електрон обертається швидше в присутності зовнішнього магнітного поля, в разі б) - повільніше. У той же час в обох випадках в атомі створюється додатковий круговий струм ΔI , який утворює з вектором $\vec{B}$ лівогвинтову систему. З цим струмом ΔI пов'язаний додатково виникаючий магнітний момент $\Delta \vec{p}$, напрямком

якого в обох випадках протилежний вектору $\vec{B}$. Отже, при внесенні діамagnetиків в магнітне поле їх атоми набувають магнітних моментів, спрямованих протилежно зовнішньому полю.

Електрон внаслідок колового руху в атомі володіє не тільки орбітальним магнітним моментом

$$\vec{p} = -\frac{er^2}{2}\vec{\omega}, \quad (6.18)$$

але і орбітальним моментом імпульсу або орбітальним механічним моментом (рис. 6.4)

$$\vec{L} = m_e r^2 \vec{\omega}, \quad (6.19)$$

де e - елементарний електричний заряд; r - радіус орбіти електрона; ω - кутова швидкість руху електрона в атомі; m_e - маса електрона.

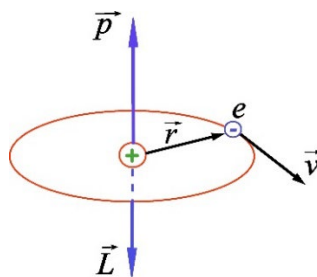


Рис. 6.4. Магнітний і механічний моменти електрона при його орбітальному русі

Як випливає з формул (6.18) і (6.19), орбітальні моменти протилежні один до одного за напрямком і пов'язані співвідношенням

$$\vec{p} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}, \quad (6.20)$$

де величина $-e/2m_e$, яка відіграє роль коефіцієнта пропорційності між $\vec{p}$ і $\vec{L}$, називається гіромагнітним відношенням.

Для пояснення діамagnetизму розглянемо також випадок, коли площина електронної орбіти не є перпендикулярною до зовнішнього магнітного поля (рис. 6.5).

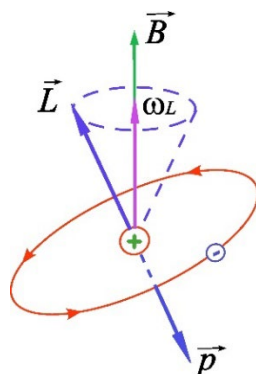


Рис. 6.5. Ларморова прецесія електронної орбіти

Такий рух електрона навколо ядра атома також створює замкнутий струм, на який в магнітному полі діє обертальний момент сил. Електрон на орбіті має моментом імпульсу $\vec{L}$, і тому подібний до дзиги. Отже, під дією моменту сил електрон буде здійснювати, як будь-яка дзига, прецесійний рух. Це означає, що виникне додаткове обертання електрона з постійною кутовою швидкістю. При цьому вектор $\vec{L}$ буде описувати конус навколо напрямку, що задається вектором індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}$. Кутова швидкість додаткового обертання електрона називається ларморовською частотою і дорівнює

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e}{2m} \vec{B}. \quad (6.21)$$

Як впливає з формули (6.21), швидкість прецесії не залежить від орієнтування орбіти, тобто від кута між векторами $\vec{L}$ і $\vec{B}$. Оскільки електрон має негативний заряд, то вектори $\vec{\omega}_L$ і $\vec{B}$ спрямовані однаково. Формула (6.21) є узагальненням співвідношення (6.17) на випадок довільної орієнтації електронної орбіти.

При ларморовій прецесії електронних орбіт в кожному атомі речовини, як і в випадку, показаному на рис. 6.5, виникає додатковий круговий струм, який утворює з вектором індукції зовнішнього магнітного поля $\vec{B}$ лівогвинтову

систему. Тому в кожному атомі речовини утворюється магнітний момент, протилежний зовнішньому полю. У результаті речовина проявляє діамагнітні властивості.

Таким чином, зовнішнє магнітне поле не приводить безпосередньо до переорієнтації електронних орбіт, воно викликає тільки їх прецесію. Однак зіткнення з сусідніми атомами можуть привести до гальмування прецесії і до поступової переорієнтації електронної орбіти. У результаті орбіта встановиться в площині, перпендикулярній вектору індукції зовнішнього магнітного поля.

Діамагнетизм притаманний атомам всіх речовин, проте в парамагнетиках і феромагнетиках він непомітний на тлі інших, більш сильних магнітних ефектів.

Парамагнетизм. Парамагнетики - це речовини, молекули яких володіють магнітними моментами навіть при відсутності зовнішнього магнітного поля. Однак внаслідок теплового руху молекул їх магнітні моменти орієнтовані хаотично. При поміщенні парамагнетика в магнітне поле магнітні моменти молекул орієнтуються переважно вздовж зовнішнього магнітного поля. Отже, для парамагнетиків виконуються співвідношення

$$\chi > 0, \mu > 1. \quad (6.22)$$

Такі речовини незначно підсилюють зовнішнє магнітне поле. Парамагнітна сприйнятливість має величину $\chi \sim 10^{-3}$ та характеризується оберненою залежністю від температури

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (6.23)$$

де C - деяка стала, T - абсолютна температура.

Залежність (6.23) називається законом Кюрі, який з достатнім ступенем точності можна застосувати для газів. Для рідин та твердих тіл, молекули яких взаємодіють більш інтенсивно в порівнянні з молекулами газів, залежність магнітної сприйнятливості від температури описується законом Кюрі-Вейсса

$$\chi = \frac{C}{T - T_k}, \quad (6.24)$$

де T_k - температура Кюрі.

Енергетичні стани молекул парамагнетика в магнітному полі з урахуванням хаотичного теплового руху молекул можна описати за допомогою розподілу Больцмана.

Для характеристики процесу намагнічування парамагнетиків використовують параметр

$$\beta = \frac{pB}{kT}, \quad (6.25)$$

де p - власний магнітний момент молекули за відсутності зовнішнього поля; B - індукція зовнішнього поля; k - стала Больцмана; T - абсолютна температура речовини.

Величина β показує, яке співвідношення має місце між характерною енергією взаємодії молекули із зовнішнім магнітним полем та середньою енергією хаотичного теплового руху молекули. У міру збільшення параметра β досягається більш високий ступінь намагнічування речовини. За своїми магнітними властивостями парамагнетики аналогічні полярним діелектрикам в електричному полі.

Феромагнетизм. Феромагнетики - це речовини, які в певному інтервалі температур проявляють спонтанну, або самовільну, намагніченість, тобто вони можуть бути намагнічені навіть при відсутності зовнішнього магнітного поля. Саме спонтанна намагніченість призводить до дуже хороших магнітних властивостей речовини.

Типовими представниками феромагнетиків є залізо, кобальт і їхні сплави. До основних властивостей феромагнетиків відноситься складна нелінійна залежність намагніченості $\vec{M}$ від напруженості магнітного поля $\vec{H}$, або індукції $\vec{B}$ від $\vec{H}$. При цьому вже для невеликих значень H намагніченість M може досягати насичення (рис. 6.6.a). На цьому малюнку приведена так звана основна

крива намагнічення, тобто залежність M від H для зразка, намагніченість якого при $H=0$ відсутня.

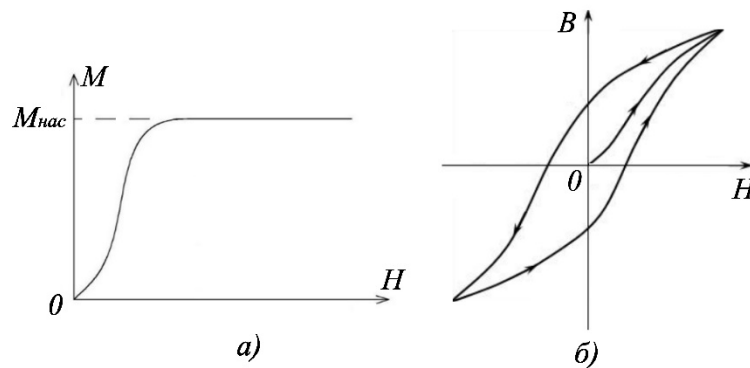


Рис. 6.6. Залежність намагніченості феромагнетика від напруженості магнітного поля (а) та явище магнітного гістерезису (б)

Оскільки намагніченість феромагнетика швидко росте при збільшенні напруженості, для феромагнетиків мають місце співвідношення

$$\chi > 0, \mu \sim 10^3 - 10^4,$$

однак величини χ і μ не є сталими, а залежать від напруженості магнітного поля H .

Для феромагнетиків притаманне також явище магнітного гістерезису (рис. 6.6.б): спостерігається неоднозначна залежність між B і H чи M та H , яка визначається попередньою історією намагнічування феромагнетика. Тому величини χ і μ обчислюють тільки для основної кривої намагнічування.

При підвищенні температури магнітні властивості феромагнетиків слабшають, і при деякій температурі, яка називається температурою або точкою Кюрі, феромагнітні властивості зникають. Для заліза температура Кюрі дорівнює 768°C , для нікелю 365°C . При більш високих температурах, ніж температура Кюрі, феромагнетик перетворюється в парамагнетик, магнітна сприйнятливість якого описується законом Кюрі-Вейсса.

За своїми властивостями феромагнетики аналогічні сегнетоелектрикам в електричних полях. Графіки, побудовані для сегнетоелектриків, залишаються

правильними також для феромагнетиків після формальної заміни електричних величин на відповідні магнітні величини: $\varepsilon_r \rightarrow \mu_r, E \rightarrow H, D \rightarrow B$. Тому для феромагнетиків також можна ввести такі характеристики, як залишкова намагніченість і коерцитивної сила.

Аналогічно формулі $\varepsilon(E) = 1 + \frac{P(E)}{\varepsilon_0 E}$ можна записати наступний вираз для відносної магнітної проникності:

$$\mu = 1 + \frac{M(H)}{H}.$$

Феромагнетики прийнято поділяти на жорсткі і м'які. Жорсткі феромагнетики характеризуються великою коерцитивною силою, тобто широкою петлею гістерезису. Такі феромагнетики важко перемагнічуються і тому використовуються в якості постійних магнітів. М'які феромагнетики відрізняються вузькою петлею гістерезису і, отже, малою коерцитивною силою. Вони використовуються в якості осердь трансформаторів, оскільки легко змінюють напрямок намагніченості при зміні напрямку зовнішнього поля.

5.3. Доменна структура та спін електрона.

Властивості феромагнетиків обумовлені їх доменною структурою. У феромагнетику завдяки дії внутрішніх сил виникають домени або області спонтанної намагніченості, що мають розміри порядку 1-10 мкм. У межах кожного домена феромагнетик намагнічений до насичення і володіє певним магнітним моментом. Якщо зразок попередньо не поміщається в зовнішнє магнітне поле, то магнітні моменти для різних доменів мають різні напрямки. Тому сумарний момент всього зразка дорівнює нулю, тобто зразок в цілому не намагнічений. При включенні слабкого зовнішнього магнітного поля спостерігається зсув границь доменів. Відбувається збільшення розмірів доменів, орієнтованих вздовж магнітного поля, за рахунок зменшення доменів, намагнічених протилежно зовнішньому полю. При подальшому намагніченні, в більш сильних полях, спостерігається одночасна переорієнтація магнітних

моментів в межах всього домену. Цей процес і є причиною гістерезису і залишкової намагніченості.

Щоб зрозуміти природу феромагнетизму, потрібно вивчити властивості окремого електрона. Експериментальні дослідження показують, що, крім орбітальних моментів, в електронів є також власний механічний момент (спін) $\vec{L}_0$ і власний магнітний момент $\vec{p}_0$. Ці власні моменти взаємопов'язані співвідношенням

$$\vec{p}_0 = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_0, \quad (6.26)$$

яке відрізняється від (6.20) відсутністю множника 1/2. Результати експериментів свідчать про те, що власні моменти електрона не можна розглядати як результат обертання електрона навколо власної осі. Отже, при вивченні об'єктів мікросвіту доводиться під впливом очевидних фактів відмовлятися від наочних класичних уявлень. Власні моменти електрона, так само, як заряд і маса, характеризують властивості електрона.

Для атомів справедлива формула

$$p = g \frac{e}{2m_e} L, \quad (6.27)$$

де L - модуль механічного моменту атома, m - проекція магнітного моменту атома на напрямок механічного моменту, g - деяка безрозмірна величина.

Для орбітального руху електрона $g=1$, для власних моментів $g=2$, при цих значеннях g з формули (6.27) слідує співвідношення (6.20) і (6.26). Оскільки повні моменти атома складаються з орбітальних і власних моментів, то для атома виконується нерівність $1 \leq g \leq 2$. Вимірювання показали, що для феромагнетиків $g=2$, тобто властивості феромагнетиків обумовлені взаємодією власних магнітних моментів електронів. Завдяки цій взаємодії у феромагнетику і утворюються домени.

ЛЕКЦІЯ 7.

Енергія і густина енергії магнітного поля. Система рівнянь Максвелла.

Електромагнітне поле.

7.1. Енергія та густина енергії магнітного поля.

Розглянемо електричне коло, що містить джерело струму з ЕРС ε_0 , ключ SA , характеризується активним опором R і індуктивністю L (рис.7.1).

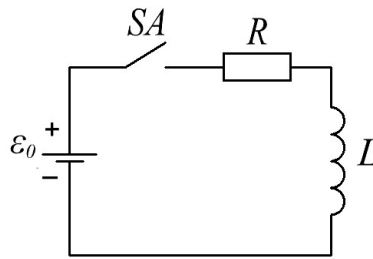


Рис.7.1. Схема електричного кола постійного струму, яке містить резистор і котушку

У деякий момент часу $t=0$ коло замикають, після чого починається зростання електричного струму. Зміна струму в колі обумовлює виникнення ЕРС самоіндукції, яку можна записати у вигляді $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$. Закон Ома в даному випадку матиме вигляд:

$$\varepsilon_0 - L \frac{dI}{dt} = IR. \quad (7.1)$$

Обчислимо елементарну роботу, яку виконують сторонні сили при переміщенні заряду $dq = Idt$ по колу. Використовуючи (7.1), отримаємо:

$$dA = \varepsilon_0 dq = I^2 R dt + LI dI. \quad (7.2)$$

Проінтегруємо рівняння (7.2) по часу від 0 до довільного моменту t_1 :

$$A = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt + \frac{1}{2} L I_1^2, \quad (7.3)$$

де $I_1 = I(t_1)$ - сила струму в момент часу t_1 .

Розглядаючи формули $P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ і $Q = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$, отримаємо, що

перший доданок в правій частині рівняння (7.3) описує теплоту Джоуля-Ленца, яка виділяється при проходженні струму в колі. Відповідно до закону збереження енергії і рівняння (7.3), робота сторонніх сил частково витрачається на збільшення внутрішньої енергії провідників, з якою і пов'язане виділення джоулевої теплоти. Інша частина роботи сторонніх сил, яка описується другим доданком у правій частині рівняння (7.3), йде на збільшення енергії магнітного поля, яке з'являється і зростає після замикання кола, в процесі збільшення струму.

Таким чином, контур з індуктивністю, в якому існує струм, має енергію

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2, \quad (7.4)$$

яку називають магнітною енергією струму.

Визначимо енергію магнітного поля тороїдальної котушки великого радіуса. У такій котушці магнітне поле зосереджене в осерді і воно однорідне. Пригадаємо, що напруженість магнітного поля такого тороїда визначається формулою:

$$H = I \cdot n = I \frac{N}{l} \quad (7.5)$$

Визначимо індуктивність тороїдальної котушки. З попередніх лекцій відомо, що потік ліній індукції магнітного поля тороїда:

$$\Phi = L \cdot I \quad (7.6)$$

Визначимо потік через один виток

$$\Phi_0 = B \cdot S$$

Враховуючи, що $B = \mu_0 \mu H$, отримаємо:

$$\Phi_0 = \mu_0 \mu H S \quad (7.8)$$

Підставимо (7.5) в (7.8)

$$\Phi_0 = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I S$$

Потік через всі витки тороїдальної котушки:

$$\Phi = \Phi_0 N = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} I S$$

В останньому рівнянні помножимо чисельник і знаменник на l

$$\Phi = \mu_0 \mu \left(\frac{N}{l} \right)^2 I (Sl)$$

Враховуючи, що $\frac{N}{l} = n$ та $Sl = V$, отримаємо

$$\Phi = \mu_0 \mu n^2 I V \quad (7.9)$$

Порівнюючи рівняння (7.6) та (7.9), отримаємо

$$L = \mu_0 \mu n^2 V$$

Згідно з (7.4)

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 V I^2$$

та враховуючи (7.5), отримаємо

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 V$$

Густина енергії $w_m = \frac{W_m}{V}$ або

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2$$

Використовуючи формулу для густини енергії магнітного поля, можна визначити енергію магнітного поля в найбільш загальному випадку, випадку довільного неоднорідного магнітного поля, яке знаходиться в неоднорідному середовищі.

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V \mu H^2 dV$$

7.2. Зв'язок магнітного поля з вихровим електричним полем.

Розглянемо більш детально закон електромагнітної індукції:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.9)$$

Виникнення ЕРС в змінному магнітному полі не залежить від роду матеріалу провідника, який знаходиться в цьому полі, воно обумовлюється іншою причиною. Вперше суть даного явища розкрив Максвелл. Згідно з припущенням Максвелла, будь-яке змінне магнітне поле в тому просторі, де воно існує, породжує вихрове електричне поле, яке в провіднику переміщується, створює індукційний струм і ЕРС. Тобто провідник є лише індикатором існування цього електричного поля. Вихрове електричне поле може створювати ЕРС. З попередніх лекцій відомо, що в деякому контурі, поміщеному у вихрове електричне поле, виникає ЕРС:

$$\varepsilon_i = \oint_{\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{l}) \neq 0, \quad (7.10)$$

також відомо, що потік ліній індукції магнітного поля визначається формулою:

$$\Phi = \int_S B_n dS . \quad (7.11)$$

Підставимо (7.10) та (7.11) в (7.9), отримаємо:

$$\oint_{\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS \quad (7.12)$$

Оскільки інтегрування та диференціювання в (7.12) відбувається по різних змінних, то їх можна поміняти місцями.

$$\oint_{\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \int_S \frac{dB_n}{dt} dS \quad (7.13)$$

Рівняння (7.12) та (7.13) виражають одне із основних рівнянь електромагнітної теорії Максвелла, записаних в інтегральній формі. Вони виражають зв'язок між змінним магнітним полем та створюваним ним електричним полем. Використовуючи формулу Стокса, запишемо рівняння (7.13) в інтегральній формі:

$$\oint_{\gamma} (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_S \text{rot}_n \vec{E} dS$$

Підставимо останню формулу в (7.13)

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E} dS = - \int_S \frac{dB_n}{dt} \cdot dS$$

$$\text{rot}_n \vec{E} = - \frac{dB_n}{dt}$$

Якщо останнє рівняння виконується для будь-якого напрямку нормалі в просторі, то воно справедливе для самих векторів, тобто

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) є диференціальною формою запису рівняння (7.13).

7.3. Взаємозв'язок між електричним і магнітним полями. Струми зміщення.

Оскільки магнітне поле може створювати вихрове електричне поле, то чи не може цей процес бути оборотнім? Максвелл вперше відмітив, що цей процес має оборотний характер. Тобто електричне поле може створювати магнітне поле. Пригадаємо, що магнітне поле, створене струмом провідності, обумовлене рухом заряджених частинок. Розглянемо електричне коло, яке складається з конденсатора та джерела струму. Розглянемо окремо два випадки в даному електричному колі:

1) Випадок $U=const$. У даному випадку струм у колі відсутній, оскільки для постійного струму конденсатор являє собою розрив електричного кола. Але пластинки конденсатора будуть заряджатися, і між пластинками буде існувати постійне електричне поле. Оскільки струм провідності відсутній, то і магнітне поле відсутнє, незважаючи на те, що існує постійне електричне поле. Як висновок можна стверджувати, що постійне електричне поле не створює магнітного поля.

2) Випадок $U \neq const$. В електричному колі буде проходити змінний струм провідності, між пластинками конденсатора буде існувати змінне електричне поле. Це обумовлюється тим, що конденсатор в електричному колі змінного струму є ємнісним опором. Навколо провідників буде існувати магнітне поле. Максвелл вперше припустив, що навколо змінного електричного поля також утворюється магнітне поле. Максвелл назвав змінне електричне поле струмом зміщення $I_{зм.}$. Струм зміщення та струм провідності еквівалентні в створенні магнітного поля. Коли струм зміщення рівний струму провідності, то вони створюють однакові магнітні поля.

У найбільш загальному випадку повний струм складається зі струму провідності та струму зміщення:

$$I_{повн.} = I + I_{зм.} \quad (7.15)$$

У розглянутому нами випадку струм зміщення в конденсаторі рівний струмові провідності в металевих провідниках, оскільки повний струм однаковий у кожній ділянці кола. Струм провідності замикається через струм зміщення і вони утворюють однакові магнітні поля.

$$I_{зм.} = I \quad (7.16)$$

Використовуючи означення сили струму $I = \frac{dq}{dt}$, отримаємо, що

$$I_{зм.} = \frac{dq}{dt}.$$

Оскільки, $q = \sigma S$, то $I_{зм.} = \frac{d\sigma}{dt} S$

З попереднього лекційного матеріалу відомо, що напруженість електричного поля між пластинками конденсатора визначається формулою

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ також, що } D = \sigma. \text{ Зв'язок між напруженістю та індукцією електричного}$$

поля $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, тобто можемо записати:

$$I_{зм.} = \frac{dD}{dt} S \quad (7.17)$$

Із врахуванням, що $I_{зм.} = J_{зм.} S$, з (7.17) отримаємо

$$J_{зм.} = \frac{dD}{dt},$$

Або в більш загальному випадку

$$\vec{J}_{зм.} = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Отримали, що *густина струму зміщення рівна швидкості зміни індукції електричного поля.*

Запишемо теорему повних струмів, врахувавши, що повний струм складається зі струму зміщення та струму провідності, та здійснимо деякі елементарні перетворення:

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = I_{нов.} = I + I_{зм.}$$

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S J_n dS + \int_S J_{зм.н} dS$$

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S J_n dS + \int_S \frac{dD_n}{dt} dS \quad (7.18.a)$$

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S J_n dS + \frac{d}{dt} \int_S D_n dS \quad (7.18.б)$$

$N = \int_S D_n d\vec{S}$ - потік ліній індукції.

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S J_n dS + \frac{dN}{dt} \quad (7.18.в)$$

$$I_3 = \frac{dN}{dt} \quad (7.19)$$

З (7.19) слідує, що **струм зміщення рівний швидкості зміни потоку ліній індукції електричного поля.**

Формули (7.18) виражають один із фундаментальних законів природи, який є одним із рівнянь Максвелла. Ці формули дають зв'язок між електричним полем і створеним ним магнітним полем. Також ці рівняння вказують на те, що **магнітне поле завжди є вихровим, тобто в природі не існує магнітних зарядів.** У диференціальній формі рівняння (7.18.б) матиме вигляд:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

7.4. Система рівнянь Максвелла.

Система рівнянь Максвелла є узагальненням рівнянь електростатики та магнетостатики. В основі цієї системи рівнянь лежить аналіз багатьох експериментальних фактів. Система рівнянь Максвелла має такий вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (7.20)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.21)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (7.22)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (7.23)$$

У даному випадку усі рівняння записані в диференціальній формі, $\vec{j}$ - густина вільних струмів, ρ - об'ємна густина вільних зарядів.

Рівняння (7.20) показує, що магнітне поле породжується як електричними струмами, так і змінним в часі електричним полем (струмами зміщення). Рівняння (7.20) називається законом повного струму в узагальненому вигляді. Доданок у правій частині рівняння (7.20)

$$\vec{j}_{\text{зм.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.24)$$

називається об'ємною густиною струму зміщення.

Похідна вектора зміщення (7.24), як і об'ємна густина струму провідності, має розмірність А/м². Експеримент показує, що струм зміщення, як і струм провідності, є причиною виникнення магнітного поля. Ця обставина дає підставу називати похідну вектора індукції (7.24) «густиною струму».

Рівняння (7.21) виражає закон електромагнітної індукції Фарадея і стверджує, що електричне поле створюється змінним в часі магнітним полем. Це електричне поле називається індукційним і є вихровим. Знак мінус в рівнянні

(7.21) дозволяє визначити напрямок індукційного поля відповідно до правила Ленца.

Рівняння (7.22) свідчить про відсутність у природі магнітних зарядів і відображає вихровий характер магнітного поля.

Рівняння (7.23) показує, що електричне поле породжується також електричними зарядами (а не тільки змінюється в часі магнітним полем) і виражає закон Кулона в диференціальній формі. Це електричне поле, на відміну від вихрового індукційного поля, є потенціальним.

З рівнянь Максвелла випливає, що змінне з часом електричне поле створює магнітне поле. Аналогічно, зміна в часі магнітного поля призводить до виникнення електричного поля. Таким чином, електричне і магнітне поля взаємно перетворюються і є нерозривно пов'язаними один з одним. Таким чином, виникає електромагнітне поле, що містить в загальному випадку і електричне, і магнітне поля.

Матеріальні рівняння. Рівняння Максвелла називаються польовими і характеризують насамперед властивості електромагнітного поля. Для опису властивостей поля в деякому середовищі необхідно рівняння Максвелла доповнити матеріальними рівняннями (або рівняннями зв'язку), які в найпростішому випадку мають вигляд

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (7.25)$$

Третє співвідношення в (7.25) є законом Ома в диференціальній формі.

Щоб визначити електромагнітне поле в конкретному випадку, наприклад, в кристалі, хвилеводі, всередині або зовні будь-якого штучного пристрою або природного об'єкта, необхідно розв'язати рівняння Максвелла спільно з матеріальними рівняннями і врахувати граничні умови для векторів електричного і магнітного поля. Отримане таким способом розв'язання рівнянь Максвелла є єдиним і описує поле в даному випадку.

ЛЕКЦІЯ 8.

Електричні коливання в коливальному контурі. Власні коливання при відсутності активного опору. Затухаючі коливання.

8.1. Вільні гармонічні коливання. Коливальний контур.

Вільними електричними коливаннями називають коливання, які виникають в системі під впливом внутрішніх сил і полів, що виникають в тій же системі (вплив зовнішніх факторів відсутній). Коливальним контуром називають систему, яка складається з котушки (індуктивності) і конденсатора (ємності). Розглянемо ідеалізований випадок, коли активний опір контура рівний нулю, та дослідимо процеси, які відбуваються в даному контурі.

Нехай в початковий момент часу $t=0$ конденсатор повністю заряджений (рис. 8.1.a). У даний момент часу напруженість електричного поля буде мати максимальне значення E_0 , напруженість магнітного поля $H=0$, сила струму в контурі $I=0$.

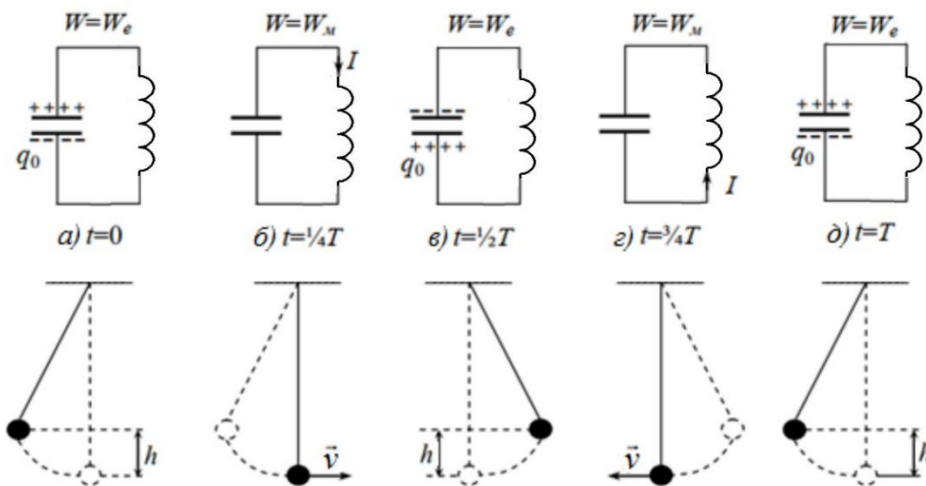


Рис. 8.1. Електричні коливання в коливальному контурі та коливання математичного маятника.

На проміжку часу $t=0 - t=T/4$ конденсатор буде розряджатись. Під час розряджання конденсатора в котушці буде проходити електричний струм і в котушці буде виникати магнітне поле. Розглянемо момент часу $t=T/4$ (рис. 8.1.б). У цей момент часу конденсатор повністю розрядиться, сила струму матиме

максимальне значення $I=I_0$, відповідно і напруженість магнітного поля прийме максимальне значення $H=H_0$.

На проміжку часу $T/4-T/2$ магнітне поле в котушці почне поступово зменшуватись від максимального значення до нуля. У результаті зменшення магнітного поля виникне струм самоіндукції, під дією якого почнеться перезарядка конденсатора. У момент часу $t=T/2$ струм повністю перезарядить конденсатор (рис. 8.1.в). Напруженість електричного поля становитиме $E=-E_0$, а $H=0$ та $I=0$. На пластиках конденсатора виникне заряд, протилежний за знаком до початкового.

Проводячи аналогічні міркування, можна показати, що в момент часу $t=3T/4$ напруженість $H=-H_0$, $I=-I_0$ та $E=0$ (рис. 8.1.г). У момент часу $t=T$ (рис. 8.1.д) система повернеться в початковий стан: $E=E_0$, $H=0$, $I=0$.

Томсон встановив, що період електричних коливань в коливальному контурі визначається формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$$

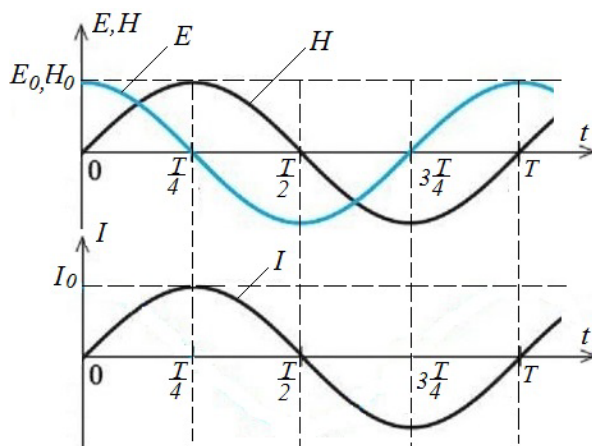


Рис.8.2. Коливання напруженості електричного поля, напруженості магнітного поля та струму.

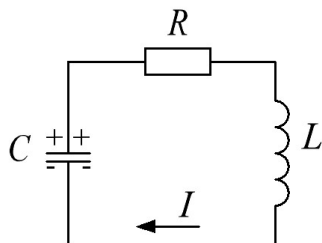
Коливання в коливальному контурі можна звести до коливань електричного і магнітного полів, які зсунуті одне відносно іншого по фазі на $\pi/2$, тобто відбуваються взаємоперетворення енергії електричного поля в енергію

магнітного поля і навпаки. Коливання струму співпадає по фазі з коливаннями напруженості магнітного поля (рис. 8.2.).

Такі коливання аналогічні до коливань математичного маятника. Формальним аналогом потенціальної енергії є енергія електричного поля, а формальним аналогом кінетичної енергії є енергія магнітного поля (рис. 8.1). Це обумовлює те, що механічні та електричні коливання описуються однаковими, з точки зору математики, диференціальними рівняннями.

8.2. Диференціальні рівняння власних електричних коливань.

Будемо розглядати, як і раніше, квазістаціонарні електричні струми. Квазістаціонарним струмом називається такий струм, який в будь-який фіксований момент часу має однакове значення в усіх частинах електричного кола, подібно до постійного струму. Квазістаціонарні струми мають місце при електричних коливаннях з великим періодом. Промисловий змінний струм належить до квазістаціонарних. Для квазістаціонарних струмів можна використовувати закони Ома і Кірхгофа як для постійного струму.



8.3. Коливальний контур із зосередженими параметрами

Розглянемо реальний коливальний контур із зосередженими параметрами, тобто повна індуктивність, ємність, опір кола зосереджені в окремих ділянках кола (рис. 8.3). Складемо диференціальні рівня коливань в такому контурі.

Запишемо другий закон Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i ,$$

для нашого контура він матиме вигляд

$$IR - U_C = \varepsilon_c. \quad (8.1)$$

Для розглянутого нами випадку $I = -\frac{dq}{dt}$ та $\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$. Отримаємо

$$\varepsilon_c = L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Згідно з означенням електричної ємності $C = \frac{q}{U_C}$, отримаємо

$$U_C = \frac{q}{C}.$$

Використовуючи останні формули, вираз (8.1) перепишемо у вигляді:

$$-\frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} = L \frac{d^2 q}{dt^2},$$

або

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (8.2)$$

Користуючись позначенням $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$, формула (8.2) набуде вигляду:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (8.3)$$

Введемо позначення

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \text{ або } \beta = \frac{R}{2L} \quad (8.4)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (8.5)$$

отримаємо

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad . \quad (8.6)$$

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (8.6) описує електричні коливання. Коливання, які описуються лінійним диференціальним рівнянням, називаються лінійними. Будемо розглядати лише лінійні коливання.

8.3. Вільні власні коливання (незатухаючі).

Незатухаючі коливання відбуваються в коливальному контурі, у якому активний опір рівний нулю ($R=0$). Для такого контура $\beta=0$. Незатухаючі коливання будуть описуватись законом:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Як відомо, розв'язком даного рівняння є функція

$$q = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.7)$$

де φ - початкова фаза, яка залежить від вибору початкових умов.

$$I = -\frac{dq}{dt} = A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad . \quad (8.8)$$

Визначимо спад напруги

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{A}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.9)$$

Виберемо початкові умови таким чином: будемо вважати, що для $t=0$ заряд на конденсаторі q_0 і струм в колі $I=0$. Визначимо для даних початкових умов значення початкової фази φ_0 . Очевидно, з (8.7) і (8.8) отримаємо:

$$q_0 = A \cos \varphi_0$$

$$0 = A\omega_0 \sin \varphi_0$$

Оскільки $A \neq 0$ та $\omega_0 \neq 0$, то $\sin \varphi = 0$ та $\varphi = 0$. Отже, для даного вибору початкових умов початкова фаза $\varphi = 0$. Враховуючи це, рівняння (8.7) - (8.9) набудуть вигляду:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$I = q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

$$U_C = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t) = U_{C0} \cos(\omega_0 t)$$

Визначимо період коливань $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, отримаємо:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (8.10)$$

Період власних коливань залежить від L і C . Формула 2 вперше була встановлена Джозефом Джоном Томсоном (1856-1940) і дістала назву формула Томсона.

З рівнянь (8.7) та (8.9) слідує, що напруга і заряд коливаються в однаковій фазі.

8.3. Власні коливання при наявності затухань.

Затухаючі власні коливання відбуваються в реальному контурі, коли $R \neq 0$ і вони описуються диференціальним рівнянням (8.3). При наявності активного опору провідники нагріваються за рахунок енергії контура і ця енергія розсіюється у зовнішнє середовище. У даному випадку розв'язок рівняння (8.3) залежить від співвідношення між параметрами β^2 і ω_0^2 . Розглянемо два випадки:

а) Якщо $\omega_0^2 > \beta^2$, то розв'язком рівняння (8.3) є така функція

$$q = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.11)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

На відміну від попереднього випадку, ці коливання не є гармонійними, оскільки їх амплітуда з часом за законом:

$$Y = Ae^{-\beta t}$$

Зобразимо затухаючі коливання графічно, згідно з рівнянням (8.11):

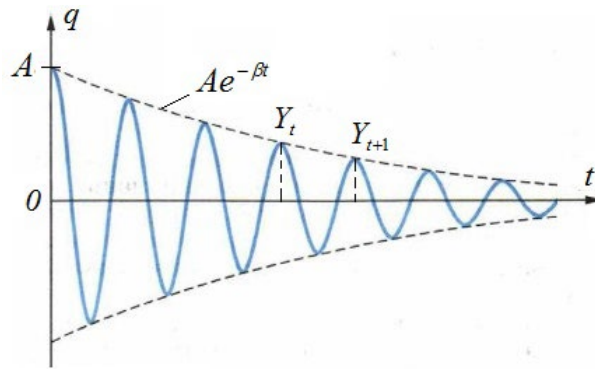


Рис.8.12. Осцилограма затухаючих коливань

Часто, коли електричні коливання затухають повільно, то в невеликому проміжку часу, протягом якого амплітуда майже не змінюється, їх можна вважати гармонійними. Важливим параметром затухаючих коливань є логарифмічний декремент затухань, який визначається формулою:

$$\sigma = \ln \frac{Y_t}{Y_{t+1}} = \ln \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

Визначивши експериментально σ і T , можна визначити β .

б) Якщо $\omega_0^2 \leq \beta^2$, то ω має уявне значення, у такому випадку коливань в коливальному контурі відбуватись не буде. Тобто після заряджання конденсатора струм в контурі буде повільно зменшуватись. Такі коливання інколи називають аперіодичними. Конденсатор буде повільно розряджатись.

Визначимо критичний опір R_k , при якому періодичні коливання будуть переходити в аперіодичні. При критичному опорі:

$$\omega_0^2 = \beta^2$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_k^2}{4L^2}$$

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Коли $R < R_k$, будуть відбуватися періодичні коливання, якщо $R \geq R_k$, то коливання будуть аперіодичними.

ЛЕКЦІЯ 9.

Змінний струм. Закон Ома для ділянки кола змінного струму. Робота і потужність в колах змінного струму.

9.1. Змінний струм. Діюче значення напруги і сили змінного струму.

Змінним струмом називається струм, параметри якого змінюються з часом.

Приклади осцилограм різних змінних струмів показано на рис. 9.1.

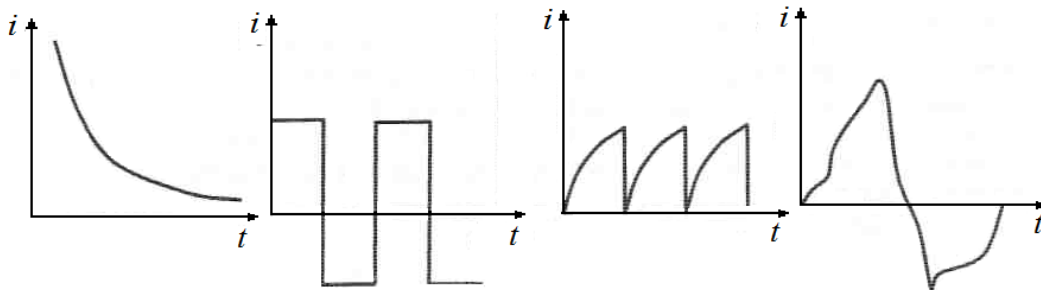


Рис. 9.1. Приклади змінного струму

Розглянемо змінний струм, який змінюється за законом синуса або косинуса (рис. 9.2). Такий струм називають гармонічним. Його силу можна описати рівнянням:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (9.1)$$

де i - миттєве значення сили струму, I_m - амплітудне значення сили струму, $(\omega t + \alpha)$ - фаза коливань у момент часу t , ω - циклічна частота змінного струму, t - час, α - початкова фаза.

Миттєве значення сили струму i в момент часу t визначається рівнянням (9.1). Амплітудне значення сили струму (I_m) – це найбільше значення, яке набуває сила струму з часом (рис. 9.2).

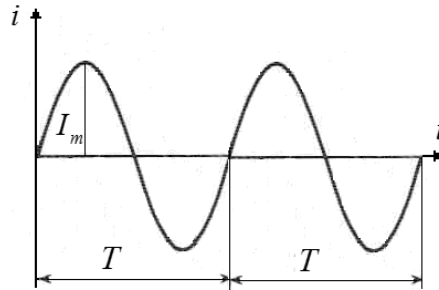


Рис. 9.2. Змінний синусоїдальний струм

Якщо в початковий момент часу миттєве значення рівне нулю (рис. 9.2), то початкова фаза рівна нулю ($\alpha=0$). Рівняння сили струму в даному випадку матиме вигляд:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t). \quad (9.2)$$

При зсуві початку синусоїди струму вліво від початку координат (рис. 9.3) початкова фаза додатна ($\alpha>0$). Рівняння, що описує струм, буде таке саме, як і (9.1). При зсуві початку синусоїди струму вправо від початку координат початкова фаза додатна ($\alpha<0$). Рівняння, що описує струм, буде мати вигляд:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t - \alpha). \quad (9.3)$$

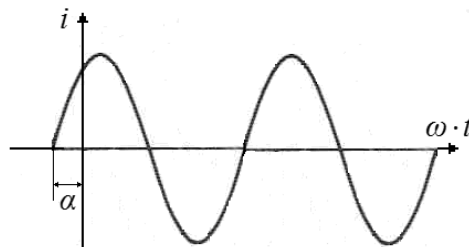


Рис. 9.3. Змінний синусоїдальний струм з початковою фазою

Час, за який здійснюється одне повне коливання, називають періодом (T). Частотою коливань називається фізична величина, яка дорівнює кількості коливань за одиницю часу (ν). Існує зв'язок між періодом і частотою:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (9.4)$$

Частоту вимірюють у герцах (Гц). Період вимірюється в секундах. Циклічною частотою (ω) називають кількість коливань за 2π секунд. Циклічну частоту вимірюють у (рад/с).

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu = \frac{n \cdot \pi}{30}, \quad (9.5)$$

де n - кількість коливань за одну хвилину.

Виробництво та розподіл енергії в енергосистемах Європи та України здійснюють на частоті 50 Гц. У США, Канаді та Японії енергопостачання відбувається на частоті 60 Гц.

Все, що було сказано відносно сили струму, справедливо і для синусоїдно змінних напруги та ЕРС.

Ефективне (діюче) значення сили змінного струму дорівнює силі постійного струму, який в даному колі створює тепловий ефект, що дорівнює ефектові, створюваному змінним струмом. Більшість електровимірювальних приладів градується в ефективних значеннях. Позначають діюче значення сили струму - I . Очевидно, що існує зв'язок між амплітудним та діючим значенням сили струму:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (9.6)$$

Діюче значення сили струму менше амплітудного в $\sqrt{2}$ разів. Аналогічно дають означення та позначають діючі значення напруги та ЕРС:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}},$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (9.7)$$

Інколи при розрахунках зручно використовувати середнє значення сили струму (I_c), напруги (U_c) або ЕРС ($\mathcal{E}_c$). Під середнім значенням цих величин розуміють середнє арифметичне відповідної величини за півперіод коливань:

$$I_c = \frac{2 \cdot I_m}{\pi},$$

$$E_c = \frac{2E_m}{\pi},$$

$$U_c = \frac{2U_m}{\pi}.$$

На відміну від постійного струму, в колах змінного струму є три види опорів.

9.2. Закон Ома для кола змінного струму.

Активний опір в колі змінного струму. Розглянемо електричне коло змінного струму, яке містить лише резистивний елемент (рис. 9.4). Нехай в даному колі напруга на резистивному елементі змінюється з за законом:

$$u = U_m \sin(\omega \cdot t). \quad (9.8)$$

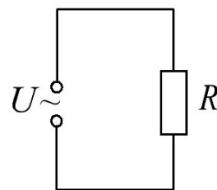


Рис. 9.4. Електричне коло змінного струму з резистивним елементом

Миттєве значення сили струму визначатиметься формулою

$$i = \frac{u}{R},$$

$$i = \frac{U_m \sin(\omega \cdot t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega \cdot t).$$

Оскільки $\frac{U_m}{R} = I_m$ - амплітудне значення сили струму, отримаємо, що сила струму в даному колі змінюється за законом:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t). \quad (9.9)$$

З аналізу формул (9.8) та (9.9) можна зробити висновок, що в активному опорі коливання сили струму за фазою збігаються з коливаннями напруги (рис. 9.5) або зміна сили струму та спаду напруги на резистивному елементі відбуваються синфазно. Амплітудне значення сили струму визначають за формулою:

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

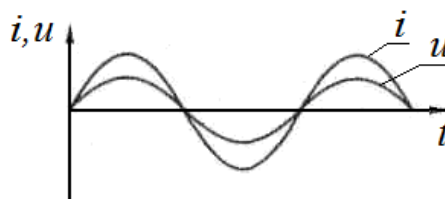


Рис. 9.5. Струм та напруга в електричному колі з резистивним елементом

Електричне коло змінного струму з ємнісним елементом. Розглянемо електричне коло змінного струму з ємнісним елементом (рис. 9.6). Нехай сила струму в колі змінюється за законом $i = I_m \sin(\omega \cdot t)$. Напругу в даному електричному колі можна розглядати як різницю потенціалів між обкладинками конденсатора, тобто $u = u_c$, де:

$$u_c = \frac{q}{C}.$$

Використаємо означення сили струму:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

звідси:

$$dq = I \cdot dt ,$$

$$dq = I \cdot dt = I_m \sin(\omega \cdot t) \cdot dt . \quad (9.10)$$

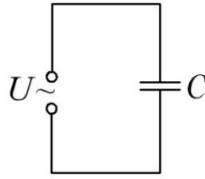


Рис. 9.6. Електричне коло змінного струму з ємнісним елементом

Для визначення закону, за яким змінюється заряд, рівність (9.10) потрібно проінтегрувати по часу:

$$q = \int I_m \sin(\omega \cdot t) \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega \cdot t) + q' , \quad (9.11)$$

де q' - стала величина, обумовлена тим, що в (9.11.) неозначений інтеграл. З точки зору фізичних процесів це означає, що в початковий момент часу ($t=0$) конденсатор був заряджений.

Будемо вважати, що в момент включення $q' = 0$, тоді

$$q = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega \cdot t) = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) ,$$

підставимо остання рівняння в $u_c = \frac{q}{C}$, отримаємо:

$$u = u_c = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) ,$$

або

$$u = U_{Cm} \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) , \quad (9.12)$$

де $\frac{I_m}{\omega C} = U_m$ - амплітудне значення напруги. Оперуючи розмінностями

фізичних величин, отримаємо, що $\frac{1}{\omega C}$ має розмірність опору. Величину

$R_c = X_c = \frac{1}{C\omega}$ називають ємнісним опором.

Порівнюючи закон зміни струму та напруги (9.12), можна зробити висновок, що в електричному колі з ємнісним елементом коливання сили струму випереджають коливання напруги по фазі на $\pi/2$ (рис. 9.7).

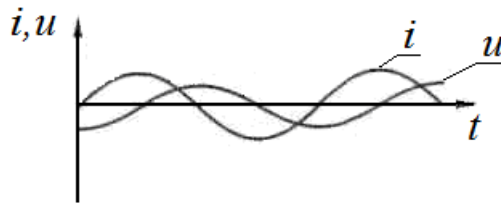


Рис. 9.7. Сила струму та напруга в електричному колі з конденсатором

Електричне коло змінного струму з індуктивним елементом.

Розглянемо електричне коло змінного струму з індуктивним елементом (катушкою) (рис. 9.7). Припустимо, що сила струму в даному колі змінюється за законом:

$$i = I_m \sin(\omega \cdot t).$$

Під час проходження струму внаслідок явища самоіндукції в котушці виникатиме ЕРС (ε_c), відповідно, дане коло можна вважати неоднорідним. Розглянемо закон Ома для неоднорідної ділянки кола:

$$i = \frac{u + \varepsilon_c}{R},$$

враховуючи, що $R=0$, отримаємо $u = -\varepsilon_c$, або

$$u = -\varepsilon_c = L \frac{di}{dt}; \quad (9.13)$$

де L - індуктивність катушки.

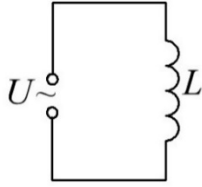


Рис. 9.7. Електричне коло змінного струму з індуктивним елементом

У рівняння (9.13) підставимо закон зміни струму в даному електричному колі.

$$u = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin(\omega \cdot t))}{dt} = I_m L \frac{d(\sin(\omega \cdot t))}{dt} = I_m L \omega \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Де, $I_m L \omega = U_m$ - амплітудне значення напруги в колі.

Аналогічно, як і в попередньому випадку, проаналізуємо розмінності фізичних величин. Отримаємо, що ωL є опором. Величину $R_L = X_L = \omega L$ називають індуктивним опором. Враховуючи, що $\cos(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$, отримаємо, що напруга в досліджуваному колі змінюється за законом:

$$u = U_m \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}). \quad (9.14)$$

Порівнюючи рівняння сили струму та напруги, можна зробити висновок, що в електричному колі з котушкою коливання напруги випереджають коливання сили струму по фазі на $\pi/2$ (рис. 9.8).

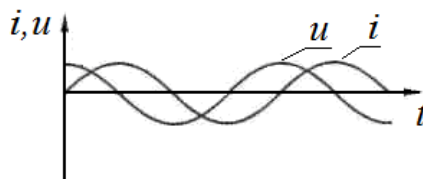


Рис. 9.8. Сила струм та напруга в електричному колі з індуктивним елементом

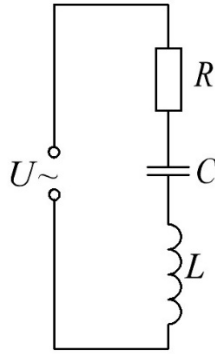


Рис. 9.9. Електричне коло змінного струму з індуктивним, ємнісним та резистивним елементом

Ємнісний та індуктивний опір залежать від частоти. Якщо електричне коло містить ємнісний та індуктивний опори, то кажуть, що таке коло містить **реактивний опір**.

Закон Ома. Розглянувши електричне коло, яке складається з омичного, ємнісного та індуктивного опорів, які з'єднані послідовно (рис. 9.9), та провівши більш детальний аналіз з використанням методу векторних діаграм, отримаємо, що повний опір:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (9.15)$$

де R - активний опір, X - повний реактивний опір.

Повний реактивний опір визначається формулою:

$$X = \frac{1}{\omega C} - \omega L. \quad (9.16)$$

Підставивши (9.16) в (9.15), отримаємо:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}.$$

Маючи повний опір кола для змінного струму, запишемо **закон Ома для ділянки кола змінного струму**:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}}. \quad (9.17)$$

В (9.17) I та U - діючі значення сили струму та напруги. Використовуючи зв'язок між діючими та амплітудними значеннями ((9.6), (9.7)), отримаємо:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}}.$$

Між напругою та силою струму в розглянутому електричному колі є зсув за фазою (φ):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Ефективне (діюче) значення сили змінного струму дорівнює силі постійного струму, який в даному колі створює тепловий ефект, що дорівнює ефектові, створюваному змінним струмом. **Більшість електровимірвальних приладів градуються в ефективних значеннях.**

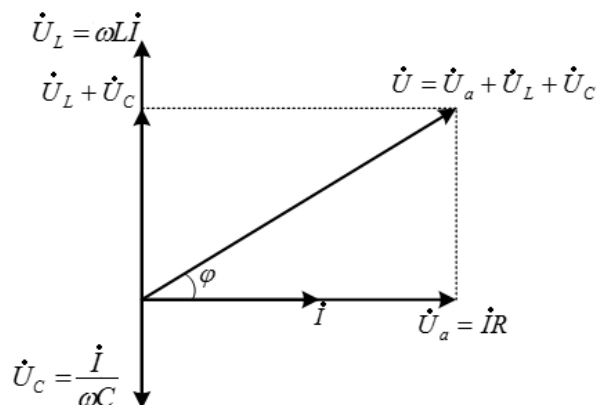


Рис. 9.10. Векторна діаграма напруг в колі змінного струму

Досить зручним і наочним способом зображення (подання) величин, які змінюються за гармонічним законом, є метод векторних діаграм. На рис. 9.10 наведено векторну діаграму для ділянки коло змінного струму з послідовно

з'єднаними резистивним, ємнісним та індуктивними опорами. Вздовж горизонтальної осі відкладено в умовних одиницях діюче значення сили струму I та діюче значення напруги на резисторі $U_R=IR$ (зсуву фаз між ними немає). Амплітудні значення напруги на котушці індуктивності $I\omega L$ і на конденсаторі $I/\omega C$ відкладено на вертикальній осі. Їх протилежна напрямленість свідчить про те, що напруги на індуктивності і ємності перебувають у протифазах.

Графіки залежності величин I і φ від частоти струму показані на рис. 9.11. і 9.12.

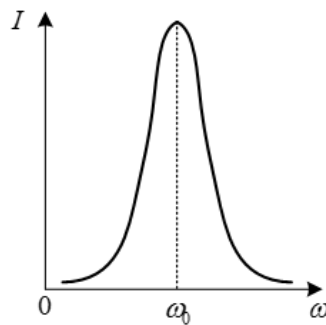


Рис. 9.11. Залежність амплітуди змінного струму від частоти

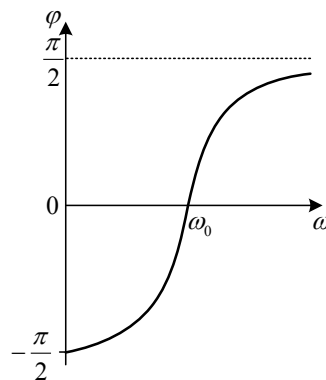


Рис. 9.12. Залежність зсуву фаз між струмом і напругою від частоти

Якщо частота струму прямує до нуля, то сила струму також прямує до нуля, оскільки постійний струм не може існувати в колі, що містить конденсатор. Зміщення фаз між струмом і напругою в цьому випадку наближається до значення $-\pi/2$, так як падіння напруги в колі відбувається тільки на конденсаторі.

Коли частота струму приймає дуже великі значення, сила струму також прагне до нуля, тепер уже через явища самоіндукції. Зміщення фаз між струмом і напругою близьке до значення $\pi/2$, оскільки падіння напруги в колі зосереджено тільки на котушці.

Якщо частота струму дорівнює частоті власних коливань контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (9.18)$$

то в колі має місце резонанс напруг. Співвідношення (9.18) називається формулою Томсона.

Векторна діаграма у випадку резонансу зображена на рис. 9.13.

При резонансі напруги на котушці і конденсаторі мають рівні амплітуди і протилежні фази і тому взаємно компенсуються. Зсув фаз між струмом і напругою $\varphi(\omega_0) = 0$, і амплітуда струму приймає максимальне значення

$$I_m(\omega_0) = \frac{U_m}{R}. \quad (9.19)$$

Отже, амплітуда змінного струму на резонансній частоті така ж, як в колі, що містить тільки активний опір.

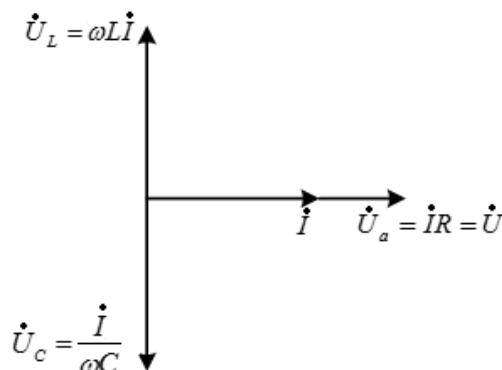


Рис. 9.13. Векторна діаграма при резонансі напруг в колі змінного струму

Слід зазначити, що сумарна напруга в контурі в умовах резонансу, як і раніше, дорівнює зовнішній ЕРС і залишається незмінною. У той же час напруги на окремих ділянках кола (на ємності або індуктивності) можуть досягати дуже високих значень.

9.3. Потужність змінного струму.

Потужність, що розвивається змінним струмом в колі, може бути обчислена наступним чином:

$$P = \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I, \quad (9.20)$$

де dA - робота сторонніх сил (джерела струму), що здійснюються за проміжок часу dt при переміщенні елементарного заряду dq по замкнутому колі; ε - зовнішня ЕРС; I - сила струму.

Після використання співвідношень $\varepsilon = U_a + U_L + U_C = U$ та

$U_a = IR, U_L = L \frac{dI}{dt}, U_C = \frac{q}{C}$ формула (9.20) набуває вигляду

$$P = P_R + P_L + P_C, \quad (9.21)$$

де P_R, P_L та P_C - потужність змінного струму на відповідних ділянках кола.

Потужність, що розвивається змінним електричним струмом на котушці, яка характеризується індуктивністю, можна представити у вигляді

$$P_L = LI \frac{dI}{dt} = \frac{dW_M}{dt}, \quad (9.22)$$

Де W_M - магнітна енергія котушки з струмом.

Формула (9.22) показує, що потужність, що розвивається струмом на котушці, дорівнює швидкості зміни енергії магнітного поля струму. Аналогічно можна показати, що потужність, що розвивається змінним струмом на конденсаторі, який характеризується ємністю C , дорівнює швидкості зміни енергії електричного поля конденсатора $W = \frac{1}{2} qU = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$

$$P_C = I \frac{Q}{C} = \frac{dW_E}{dt}. \quad (9.23)$$

З формул (9.22) і (9.23) випливає

$$P_L = \frac{1}{2} I_m^2 \omega L \sin 2\omega t, \quad (9.24)$$

$$P_C = -\frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega C} \sin 2\omega t. \quad (9.25)$$

Ці співвідношення показують, що котушка і конденсатор періодично накопичують і втрачають енергію. Вирази (9.24) і (9.25) мають протилежні знаки. Це означає, що збільшення енергії магнітного поля котушки, яке має місце при зростанні сили струму в колі, відбувається одночасно зі зменшенням енергії електричного поля конденсатора, і навпаки. Таким чином, проходження змінного електричного струму в колі супроводжується обміном енергією між електричним полем конденсатора і магнітним полем котушки. Середня потужність, що розвивається змінним струмом на котушці і конденсаторі за кожну половину періоду зміни струму, дорівнює нулю:

$$\langle P_L \rangle_t = \langle P_C \rangle_t = 0. \quad (9.26)$$

Оскільки конденсатор і котушка періодично накопичують енергію і повертають її назад, вони називаються реактивними елементами кола. На відміну від виразу (9.26), середня потужність, що розвивається змінним струмом на активному опорі R , не дорівнює нулю і може бути представлена у вигляді

$$\langle P_R \rangle_t = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi, \quad (9.27)$$

де I_m і U_m - амплітудні значення сили струму і напруги, φ - зсув фаз між струмом і напругою, множник $\cos \varphi$ є результатом усереднення потужності за часом.

Якщо ввести в розгляд ефективні або діючі значення сили струму і напруги, то вираз (9.27) можна записати в такий спосіб:

$$\langle P_R \rangle_t = I U \cos \varphi. \quad (9.29)$$

Множник $\cos\varphi$, який називається коефіцієнтом потужності, показує, наскільки ефективно проводиться передача енергії від джерела струму до споживача, що характеризується активним опором. При проектуванні лінії передачі електроенергії необхідно підбирати реактивні елементи кола таким чином, щоб максимально підвищити коефіцієнт потужності. У цьому випадку напруга в колі перерозподіляється, і падіння напруги на активному опорі зростає. Потужність, що розвивається струмом на активному елементі кола, збільшується, тобто відбувається більш ефективна передача енергії від генератора до споживача.

ЛЕКЦІЯ 10.

Електромагнітні хвилі як наслідок рівнянь Максвелла. Плоскі електромагнітні хвилі. Зв'язок між напруженістю електричної і магнітної компоненти поля в електромагнітній хвилі

10.1. Плоскі електромагнітні хвилі.

Як уже відмічалось раніше, з рівнянь Максвелла випливає можливість існування електромагнітних хвиль, тобто змінного електромагнітного поля, що поширюється в просторі зі скінченною швидкістю. Поширення електромагнітних хвиль у вакуумі є прямим експериментальним підтвердженням існування струму зміщення. У вакуумі відсутня речовина і окремі заряджені частинки, тому магнітне поле не може створюватися струмами провідності. Однак в електромагнітній хвилі присутні як електричне, так і магнітне поле, ці поля взаємно перетворюються, що забезпечує поширення хвилі в просторі. Звідси можна зробити висновок, що причиною виникнення магнітного поля у вакуумі є змінне електричне поле, тобто струм зміщення.

Щоб описати поширення електромагнітного поля у вакуумі за відсутності зарядів та струмів, необхідно використовувати рівняння Максвелла і матеріальні рівняння при наступних умовах $\varepsilon = \mu = 1$, $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. В такому випадку можна отримати рівняння для вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (10.1)$$

Такому ж рівнянню відповідає і вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$. З цих рівнянь випливає, що якщо вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ змінюються з плином часу, то вони обов'язково змінюються і в просторі. Рівняння (10.1) є типовим прикладом хвильового рівняння, і будь-яка функція, яка задовольнить таке рівняння, описує деяку хвилю. Щоб знайти швидкість цієї хвилі, необхідно добути квадратний корінь з величини, зворотної до коефіцієнта при другій похідній за часом. Значить, рівняння (10.1) і аналогічне рівняння для вектора $\vec{H}$ вказують на те, що електромагнітні поля можуть існувати у вигляді електромагнітних хвиль, швидкість яких визначається формулою

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

На підставі сформульованої Максвеллом системи рівнянь Максвелл створив електромагнітну теорію світла, згідно з якою світло являє собою електромагнітні хвилі. Дана теорія отримала в подальшому повне підтвердження.

10.2. Зв'язок між напруженістю електричної і магнітної компоненти поля в електромагнітній хвилі.

Хвильове рівняння, аналогічне рівнянню (10.1), можна отримати також для електромагнітного поля в однорідному ізотропному середовищі за відсутності вільних зарядів та струмів. З цього рівняння випливає, що швидкість електромагнітних хвиль у такому середовищі дорівнює

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (10.2)$$

де ϵ і μ - відносна діелектрична і відносна магнітна проникності середовища.

Основні властивості електромагнітних хвиль можна наочно вивчити на прикладі плоскої монохроматичної хвилі, для якої вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ залежать тільки від однієї координати і від часу. Вибравши вісь z вздовж напрямку поширення плоскої хвилі, можна записати:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kz), \quad (10.3)$$

де $\vec{E}_0$ і $\vec{H}_0$ - сталі, називаються амплітудами хвиль, величина k називається хвильовим числом, ω - циклічна частота хвилі, $\varphi = \omega t - kz$ - фаза хвилі.

Якщо вибрати сталою координату z , то з формул (10.3) утворяться синусоїдальні функції часу, що описують гармонійні коливання з циклічною частотою ω . З іншого боку, для фіксованого моменту часу t отримуємо синусоїдальну зміну електромагнітного поля в просторі.

Розглядаючи переміщення в просторі довільно вибраної точки хвилі, якій відповідає деяке постійне значення фази φ , наприклад, максимуму хвилі, можна визначити швидкість поширення хвилі. З формул (10.3) випливає, що швидкість хвилі дорівнює

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (10.4)$$

Використовуючи співвідношення (10.2) і (10.4), отримуємо вираз для хвильового числа

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (10.5)$$

Відстань між двома точками, в яких коливання відрізняються по фазі на 2π , наприклад, між сусідніми максимумами, називається довжиною хвилі λ . Вона

дорівнює відстані, на яку поширюється хвиля за час одного періоду коливань T , отже, справедливі співвідношення

$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{k}. \quad (10.6)$$

Довжина хвилі дорівнює періоду зміни електромагнітного поля (10.3) в просторі.

Поверхня, у всіх точках якої фаза коливань однакова, називається фронтом хвилі. Для електромагнітної хвилі (10.3) фронт являє собою площину, перпендикулярну осі z . Ввівши в розгляд одиничний вектор $\vec{n}$, ортогональний хвильовому фронту і направлений в сторону поширення хвилі, можна визначити хвильовий вектор,

$$\vec{k} = k\vec{n}, \quad (10.7)$$

модуль якого дорівнює хвильовому числу.

З метою спрощення математичних перетворень, наприклад, при обчисленні ротора, або дивергенції поля, вектори напруженості електричного і магнітного полів (10.3) можна записати в комплексній формі

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k}\vec{r}), \quad (10.8)$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений в довільну точку простору, у якій розглядаються електромагнітні коливання.

Значення напруженості електричного і магнітного полів (10.3) можна отримати, виділяючи тільки дійсні частини в виразах (10.8).

Аналогічно (10.8), можна представити в комплексному вигляді також вектори індукції $\vec{D}$ і $\vec{B}$. Диференціюючи поля по просторових координатах і за часом, отримуємо:

$$\text{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla}\vec{E}] = -i[\vec{k}\vec{E}], \quad \text{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B} = -i\vec{k}\vec{B}, \quad \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = i\omega\vec{D}. \quad (10.9)$$

Використовуючи співвідношення (10.9), рівняння Максвелла (7.20) - (7.23) для плоских монохроматичних хвиль під час відсутності вільних струмів і зарядів можна записати у вигляді

$$[\vec{k} \times \vec{E}] = \omega \vec{B}, [\vec{k} \times \vec{H}] = -\omega \vec{D}, \quad (10.10)$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0, (\vec{k} \cdot \vec{D}) = 0. \quad (10.11)$$

З формул (10.10) випливає, що вектори $\vec{E}$, $\vec{B}$ та $\vec{k}$ (а також вектори $\vec{D}$, $\vec{H}$ та $\vec{k}$) взаємно перпендикулярні і утворюють правогвинтову систему.

Також, на підставі співвідношень (10.10) можна зробити висновок, що в електромагнітній хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{B}$ (а також $\vec{D}$ і $\vec{H}$) завжди мають однакові фази коливань. Формули (10.10) можна записати в скалярному вигляді з урахуванням співвідношення (10.4):

$$E = vB, H = vD. \quad (10.12)$$

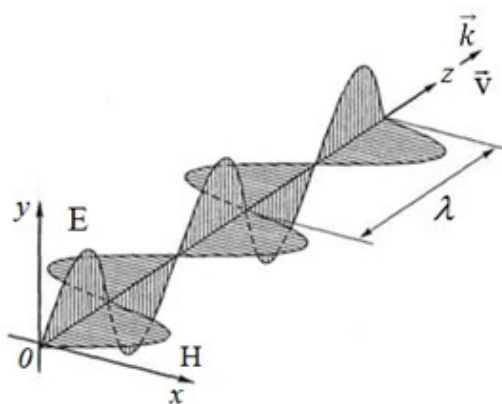


Рис. 10.1. Розподіл електричного і магнітного полів в плоскій монохроматичній хвилі

Використовуючи матеріальні рівняння (7.25) і перемноживши вирази (10.12), отримуємо наступне співвідношення для електромагнітного поля в однорідному ізотропному середовищі за відсутності вільних зарядів і струмів:

$$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2. \quad (10.13)$$

Для такого середовища вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ та $\vec{k}$ є взаємно перпендикулярними і утворюють правоїгвинтову систему (рис. 10.1).

Формула (10.13) справедлива для полів, що розглядаються в довільний момент часу, вона правильна і для амплітуд полів. Для хвилі, що розповсюджується у вакуумі, на підставі співвідношення (10.13) можемо записати:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377(\text{Ом}), \quad (10.14)$$

де величина, яка вимірюється в Омах, називається хвильовим імпедансом вільного простору.

10.3. Класифікація та використання електромагнітних хвиль.

Електромагнітні хвилі мають майже необмежений діапазон частот і довжин хвиль. Весь діапазон поділяють на декілька вузьких ділянок, для яких встановлено конкретні межі.

Радіохвилі поділяють на довгі (понад 10 км), середні (сотні метрів), короткі (десятки метрів). Усіх їх переважно використовують у радіозв'язку. Ультракороткі радіохвилі поділяють на метрові, дециметрові та міліметрові. Перші використовують у телебаченні, другі і треті - у радіолокації. Діапазон радіохвиль частково перекривається з інфрачервоними променями, які широко застосовують у техніці. У цьому діапазоні працюють лазери, фокусування променів яких дозволяє краще обробляти матеріали.

Ультрафіолетові промені використовують для знезаражування приміщень у лікарнях, стимуляції хімічних реакцій та ін. Для людини ультрафіолетові промені шкідливі, поверхня Землі захищена від шкідливих складових ультрафіолетових променів Сонця озоновим шаром (O_3), його збереження - це одна з важливих екологічних проблем.

Рентгенівське проміння отримують під час гальмування електронів, які прискорюються напругою в десятки кіловольтів. На відміну від світлового проміння видимого спектра й ультрафіолетового проміння, воно має значно

меншу довжину хвиль. Причому довжина хвилі рентгенівського проміння є тим меншою, чим більша енергія електронів, які бомбардують перешкоду, цим самим набуваючи прискорення.

У встановленні природи цього випромінювання визначальними були дослідження українського вченого Івана Пулюя (1845 - 1918 рр.) на електронних вакуумних трубках власної конструкції, проведені задовго до відкриття В. Рентгена. Однак, В. Рентген першим запатентував відкриття, тому їх називають рентгенівськими.

Рентгенівські промені майже відразу знайшли застосування в медицині. Ці промені за довжиною перекриваються із γ -промінням, яке утворюється під час розпаду нестійких ядер. Вони майже без послаблення проходять через товстий шар металу, тому їх використовують для перевірки якості великих злитків, зон зварювання товстого металу та ін. γ -проміння використовують у медицині, геології та інших галузях.

Для утворення інтенсивних електромагнітних хвиль необхідно створити електромагнітні коливання досить високої частоти. Коливання високої частоти, яка значно перевищує частоту промислового струму (50 Гц), можна отримати за допомогою коливального контуру, частота власних коливань якого буде тим більшою, чим менша індуктивність котушки і ємність конденсатора:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Для отримання електромагнітних хвиль Г. Герц використав простий пристрій, який нині називають вібратором Герца або відкритим коливальним контуром.

До відкритого коливального контуру можна перейти від закритого, якщо поступово збільшувати відстань між пластинами конденсатора, одночасно зменшуючи їх площу і кількість витків у котушці, як це зображено на рис. 10.2. Оскільки значення ємності та індуктивності вібратора Герца малі, то частота коливань такої системи за формулою досить велика.

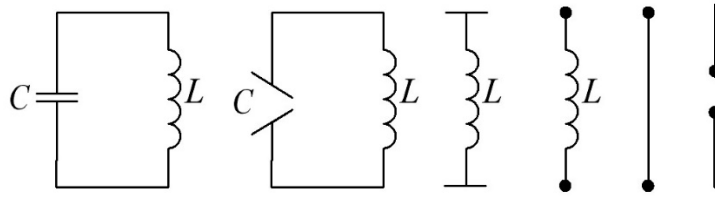


Рис. 10.2. Перехід до відкритого коливального контуру

Такий пристрій, що здатний випромінювати електромагнітні хвилі, Герц назвав антеною, що в перекладі означає вуса.

В основі принципу радіозв'язку лежать такі явища, змінний електричний струм високої частоти, який створюють в антені передавача, викликає в просторі навколо антени електромагнітні хвилі високої частоти, які вільно поширюються в просторі. Коли хвилі досягають антени приймача, вони індукують в ній змінний струм такої ж частоти, на якій працює передавач.

Важливим етапом у розвитку радіозв'язку було створення 1913 року генератора електромагнітних коливань, за допомогою якого можна здійснювати надійний і високочастотний радіотелефонний зв'язок - передачу розмови чи музики за допомогою електромагнітних хвиль.

Радіозв'язок здійснюється на довгих (10 000 - 1 000 м), середніх (1 000 - 100 м), коротких (100 - 10 м) та ультракоротких (менше 10 м) хвилях. Радіохвилі з різними довжинами хвиль по-різному поширюються біля поверхні Землі.

Довгі хвилі завдяки дифракції поширюються далеко за межі видимого горизонту. Тому радіопередачі на довгих хвилях можна приймати на великих відстанях за межами прямої видимості антени.

Середні хвилі зазнають меншої дифракції біля поверхні Землі і поширюються внаслідок дифракції на менші відстані за межі прямої видимості.

Короткі хвилі ще менш здатні до дифракції біля поверхні Землі, але їх можна прийняти в будь-якій точці на поверхні Землі. Поширення коротких

радіохвиль на великі відстані від передавальної радіостанції пояснюється їх здатністю відбиватися від іоносфери.

Ультракороткі хвилі не відбиваються іоносферою і не огинають поверхню Землі внаслідок дифракції. Тому зв'язок на ультракоротких хвилях здійснюється тільки в межах прямої видимості антени передавача.

Ультракороткі хвилі ($l < 10$ м) використовують в радіолокації. Радіолокація - це виявлення різних предметів і вимірювання відстані до них за допомогою радіохвиль.

В основу радіолокації покладено властивість електромагнітних хвиль відбиватися від металевих предметів або будь-яких тіл, що проводять електричний струм.

Відстань, l до предмета що відбив радіохвилю, дорівнює:

$$l = \frac{ct}{2},$$

де c - швидкість поширення радіосигналу ($3 \cdot 10^8$ м/с); t - час проходження електромагнітних хвиль в прямому і зворотному напрямках.

За допомогою радіохвиль передаються на відстань не тільки звукові сигнали, але і зображення предмета. Телевізійні передачі ведуться в діапазоні 50 - 230 МГц. У цьому діапазоні електромагнітні хвилі поширюються майже в межах прямої видимості. Тому будують високі антени, використовують ретранслятори у вигляді антен та штучних супутників Землі.

ЛЕКЦІЯ 11.

Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Умова-Пойнтінга. Тиск електромагнітних хвиль

11.1. Енергія електромагнітної хвилі.

Як випливає з рівнянь Максвелла, електромагнітне поле складається з електричного і магнітного полів, які нерозривно пов'язані і здатні взаємно перетворюватися. Оскільки електромагнітне поле є матеріальним об'єктом, то воно має енергією. Можна довести, що формули для об'ємної густини енергії

$$w_e = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D}) \text{ та } w_m = \frac{1}{2}(\vec{H} \cdot \vec{B}),$$

отримані в електростатиці та магнетостатиці, залишаються справедливими і для змінних полів. Тому формулу для об'ємної густини енергії електромагнітного поля можна отримати шляхом додавання густини енергії електричного і магнітного полів

$$w = w_e + w_m. \quad (11.1)$$

Відповідно, об'ємна густина енергії електромагнітного поля дорівнює

$$w = \frac{1}{2}((\vec{D} \cdot \vec{E}) + (\vec{B} \cdot \vec{H})). \quad (11.2)$$

Використовуючи рівняння зв'язку

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

отримаємо:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2). \quad (11.3)$$

Для плоскої електромагнітної хвилі виконується співвідношення

$$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2.$$

Отже, об'ємні густини енергії електричного і магнітного полів хвилі в будь-який момент часу однакові:

$$w_e = w_m,$$

тому

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

тут E - миттєве значення напруженості електричного поля, тому

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

З останньої формули слідує, що густина енергії електромагнітної хвилі періодично змінюється від 0 до $w_{\max} = \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2$.

11.2. Вектор Умова-Пойтінга.

При поширенні електромагнітної хвилі має місце перенесення енергії в просторі, яке характеризується вектором Умова–Пойнтінга:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (11.4)$$

Орієнтація вектора Умова-Пойтінга збігається з напрямком перенесення енергії. Модуль вектора Умова-Пойнтінга чисельно дорівнює енергії електромагнітного поля, яка переноситься за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку руху енергії. Тому вектор Умова-Пойнтінга називається вектором густини потоку енергії. Для однорідно-ізотропного середовища за відсутності вільних зарядів і струмів вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ і $\vec{k}$ є взаємно перпендикулярними і утворюють правоїгвинтову систему. Тому для такого середовища вектор Умова-Пойнтінга збігається за напрямком з хвильовим вектором $\vec{k}$.

Використовуючи одержані раніше формули $E = vB$, $H = vD$ та $\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2$, можна показати, що модуль вектора Умова-Пойнтінга пов'язаний з об'ємною густиною енергії електромагнітного поля співвідношенням

$$S = EH = wv, \quad (11.5)$$

де v - швидкість поширення хвилі.

Електромагнітне поле може здійснювати роботу по переміщенню заряджених частинок в просторі. Густина потужності, тобто робота, що здійснюється полем в одиницю часу в одиничному об'ємі простору, дорівнює

$$Q = (\vec{E} \cdot \vec{j}), \quad (11.6)$$

де $\vec{j}$ - густина струму.

Використовуючи вирази (11.2), (11.4), (11.6), можна отримати закон збереження енергії електромагнітного поля

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oint_{\Sigma} (\vec{S} \cdot d\vec{\sigma}) - P, \quad (11.7)$$

де, $W = \int_V w dV$ - повна енергія електромагнітного поля в межах об'єму, $P = \int_V Q dV$

- повна потужність, що розвивається полем при переміщенні заряджених частинок в об'ємі V .

Перший доданок в правій частині співвідношення (11.7) описує повний потік енергії через поверхню Σ , яка обмежує область V . Закон збереження енергії (11.7) показує, що енергія електромагнітного поля в будь-якому об'ємі V може змінитися або в результаті перенесення енергії через межу об'єму, або в результаті виконання полем роботи при переміщенні заряджених частинок в цій області. Знаки «мінус» у правій частині співвідношення (11.7) показують, що при перенесенні енергії назовні через межу області, а також при прискоренні зарядів полем, енергія електромагнітного поля в області V зменшується.

Закон збереження енергії електромагнітного поля можна записати також в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -Q. \quad (11.8)$$

Формула (11.8) справедлива для будь-якого фізично малого об'єму простору, тобто вона представлена в локальному вигляді.

11.3. Тиск електромагнітної хвилі.

Одним із наслідків теорії Максвелла є те, що електромагнітні хвилі, взаємодіючи з тілами, чинять на них тиск. Тиск електромагнітного поля можна пояснити тим, що, взаємодіючи з електричним полем, заряджені частинки речовини починають рухатись впорядковано, тобто виникає струм з густиною $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$. Відповідно, на одиницю об'єму середовища буде діяти сила Ампера

$$\vec{F} = [\vec{j} \times \vec{B}] = \sigma [\vec{E} \times \vec{B}]$$

Ця сила є результуючою сил Лоренца, які діють на заряджені частинки, які знаходяться в одиниці об'єму. Дана сила напрямлена в той самий бік, що і вектор Умова-Пойнтінга, тобто співпадає з напрямком поширення хвилі (рис. 11.1). Вона і обумовлює тиск електромагнітної хвилі. Також варто зазначити, що під дією сили $\vec{F}$ тіло набуває імпульс.

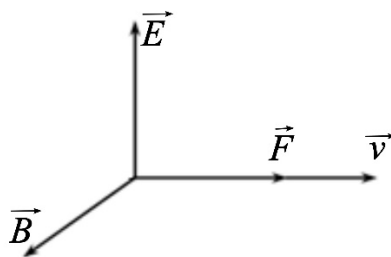


Рис. 11.1. Напрямок сили Ампера

Тиск, що чинить електромагнітна хвиля, дуже малий. Так, наприклад, тиск, що чинить сонячне випромінювання на поверхню Землі, що повністю поглинає це світло, складає всього 5 мкПа.

Існування тиску електромагнітної хвилі приводить до висновку, що електромагнітна хвиля має імпульс. Імпульс, набутий тілом при падінні на нього

електромагнітної хвилі, виникає за рахунок імпульсу, наданого тілу електромагнітним полем. Імпульс електромагнітного поля обчислюється формулою

$$p = \frac{W}{c}$$

де W – енергія електромагнітного поля.

Наявність імпульсу електромагнітного поля в теорії Максвелла знаходить своє підтвердження в квантовій теорії. У відповідності з цією теорією, електромагнітна хвиля - це потік фотонів з імпульсом який визначається формулою

$$p_f = \frac{h\nu}{c},$$

де h – стала Планка, c — швидкість світла, ν – частота електромагнітної хвилі.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА ТА ІНТЕРНЕТ РЕСУРСИ

1. Магнетит. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Магнетит> (дата звернення: 30.04.2025)
2. Новосад О. В. Електрика і магнетизм : конспект лекцій у 2 ч. - Ч. 1. Електростатика. Постійний електричний струм. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2024. 114 с. URL: https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/24836/1/lect_p1.pdf (дата звернення: 30.04.2025)
3. Новосад О. В., Федосов С. А., Кевшин А. Г. Лабораторний практикум з електрики і магнетизму : навч. посіб. Луцьк, 2023. 165 с. URL: https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/23304/1/laborat_prakt.pdf (дата звернення: 30.04.2025)
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Електрика і магнетизм. К.: Техніка, 2006. 452 с.
5. Понеділок Г. В. Курс загальної фізики. Електрика і магнетизм. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 516 с.
6. Дмитрієва В. Ф. Фізика. К.: Техніка, 2008. 648 с.
7. Воловик П. М. Фізика. К.: Ірпінь: Перун, 2005. 864с.
8. Горбачук І. Т. Загальна фізика. Лабораторний практикум. К.: Вища школа, 1992. 509 с.
9. Гаркуша І. П., Горбачук І. Т., Курінний В. П. Загальний курс фізики: Збірник задач. К.: Техніка, 2004. 560 с.
10. Кучерук І. М., Горбачук І.Т., Луцик Т.П. Загальний курс фізики. К.: Техніка, 2001. 320 с.
11. Кучерук І. М., Горбачук І.Т. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. К.: 1996. 368 с.
12. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Серeda В.М., Крушельницька Т.Д., Українець Н.А. Збірник задач з фізики: навч посібник. Львів: Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2003. 124 с.
13. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Серeda В.М., Крушельницька Т.Д.,

Українець Н.А. Збірник задач з фізики. Львів: Львівська політехніка, 2016. 244 с.

14. Гуменюк А.Ф. Електрика та магнетизм. Навчальний посібник. К.: Четверта хвиля, 2008. 506 с.

15. Дідух Л. Д. Електрика та магнетизм : підручник. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 464 с.

16. Лахін Б.Ф., Максимов С. Л., Поліщук А.П., Чернега П. І. Фізика. Електрика і магнетизм. К.: НАУ, 2006. 336 с.

17. Edward M. Purcell, David J. Morin. Electricity and magnetism. Harvard University, Massachusetts. - Third edition. New York: Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2013. 840 p.

18. Г.Ф. Бушок, Є.Ф. Венгер. Курс фізики. Книга 2. Електрика і магнетизм. К.: Вища школа, 2003. 279 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Byshok_P2_2003_278.pdf (дата звернення: 30.04.2025)

19. Новосад О. В., Кевшин А. Г., Федосов С. А., Третяк А. П., Хмарук Г. П. Фізика : метод. рек. до лаб. роб. Луцьк : Вежа-Друк, 2021. Ч.2. 88 с. URL: <https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/19597> (дата звернення: 30.04.2025)

20. Кевшин А. Г., Новосад О. В., Федосов С. А. Електротехніка : навч. посіб. Луцьк, 2021. 127 с. URL: <https://evnuir.vnu.edu.ua/handle/123456789/19575> (дата звернення: 30.04.2025)

21. Демків Т. М., Конопельник О. І., Шопя Я. І. Основи теорії похибок фізичних величин. Методичні матеріали для загального фізичного практикуму. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. 20 с. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/pohybky.pdf> (дата звернення: 30.04.2025)

22. Tatum J. B. Electricity and Magnetism. URL: <https://www.astro.uvic.ca/~tatum/elmag.html> (дата звернення: 30.04.2025)

23. Електрика і магнетизм. Електронний курс. URL: <https://moodle.vnu.edu.ua/course/view.php?id=1612> (дата звернення: 30.04.2025)

24. Фізика. Конспект лекцій. Частина 1. URL: https://tphysics.sumdu.edu.ua/images/downloads/books/lysenko_physics_lek_1.pdf

(дата звернення: 30.09.2024)

25. Фізика. Конспект лекцій. Частина 2. URL:

https://tphysics.sumdu.edu.ua/images/downloads/books/lysenko_physics_lek_2.pdf

(дата звернення: 30.04.2025)

26. Libretexts physics. Electric Fields. URL:

[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_\(Tatum\)/01%3A_Electric_Fields](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_(Tatum)/01%3A_Electric_Fields) (дата звернення: 30.04.2025)

27. Libretexts physics. Book: Electromagnetism II (Ellingson). URL:

[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Book%3A_Electromagnetism_II_\(Ellingson\)](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Book%3A_Electromagnetism_II_(Ellingson)) (дата звернення: 30.04.2025)

Навчально-методичне видання

Новосад Олексій Володимирович

Електрика і магнетизм

Курс лекцій

Частина II. Електромагнетизм. Електромагнітні коливання і хвилі.

Друкується в авторській редакції