# Матеріали для самостійного вивчення курсу "Вибрані питання елементарної математики"

Антонюк О. П.

## 1. Симетрія відносно точки

Означення 1.1 Нехай т. $O$ – деяка точка площини. Перетворення площини, при якому будь-якій т. $X$ площини ставиться у відповідність т. $X'$, яка лежить на продовженні відрізка $OX$ за точку $O$ на відстані $OX'$, що дорівнює $OX$. Точки $X$ і $X'$ називаються *симетричними відносно точки O*, а точка *O – центром симетрії*.

Геометрична фігура $F$ називається центральносиметричною, якщо існує точка $O$, відносно якої можна здійснити відображення кожної точки $X$ фігури $F$ на таку точку $X'$ цієї самої фігури, яка розміщена на прямій $OX$ на відстані $OX'$, що дорівнює $OX$.

Знаючи, які дві точки називаються симетричними відносно даної точки $O$ і як їх можна побудувати, ми можемо для будь-якої даної фігури $F$ побудувати фігуру $F'$, симетричну відносно даної точки $O$. Тоді фігура $F'$, утворена з усіх точок, симетричних точкам фігури $F$ відносно даної точки $O$, називається *симетричною фігурі F відносно точки O*, а перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, при якому довільна точка $X$ фігури $F$ переходить у симетричну відносно деякої точки $O$ точку $X'$ фігури $F'$, називається *перетворенням симетрії відносно точки O.* Позначають це перетворення через $Z_0$, причому, якщо точка $X'$ є образом точки $X$, то це записують так: $(Z_0X) = X'$, або $X' = Z_0(X)$.

**Властивості центральної симетрії**

З означення симетрії відносно точки випливають такі властивості:

1. Для кожної точки $O$ прямої, площини або простору існує центральна симетрія $Z_0$.

2. Для різних точок $X$ і $X'$ прямої, площини або простору існує така єдина симетрія $Z_0$, що $Z_0(X) = X'$. Центр симетрії $Z_0$ - середина $O$ відрізка $XX'$. Отже, *центральна симетрія* може бути задана або центром симетрії, або двома відповідними точками.

3. Центральна симетрія відображає фігуру $F$ на фігуру $F'$, причому різні точки першої фігури перетворюються в різні точки другої. Тому *центральна симетрія $Z_0$ є взаємно однозначним відображенням відносно її центра O.*

Звідси випливає, що перетворення $Z_0^{-1}$, обернене до центральної симетрії, є також центральна симетрія, причому оскільки $Z_0(X) = X'$ і $Z_0(X')=X$, то $Z_0^{-1}=Z_0$.

Перетворення, яке відмінне від тотожного і збігається з оберненим до себе, називається *інволютивним,* або *інволюцією.* Отже, симетрія відносно точки є інволютивним перетворенням. Тому послідовне виконання перетворень $Z_0$ і $Z_0^{-1}$ – їх *композиція* відносно одного й того самого центра $O$ – є тотожним перетворенням, тобто $Z_0^{-1} \circ Z_0(X) = Z_0(Z_0(X)) = Z_0(X') = X$, звідки маємо $Z_0 \circ Z_0 = Z_0^2 = E$ – тотожне перетворення.

4. Якщо розглядати фігуру $F$ і симетричну їй відносно точки $O$ фігуру $F'$ як одну фігуру, то в результаті центральної симетрії $Z_0$ її частини $F$ і $F'$ будуть

відображатися одна на одну, а вся фігура відображатиметься сама на себе, тобто така фігура буде симетричною відносно точки $O$. Перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$ називається *рухом*, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки $X$ і $Y$ фігури $F$ у точки $X'$, $Y'$ фігури $F'$ так, що $XY = X'Y'$.

5. Перетворення симетрії відносно точки є рухом.

6. Точки, які лежать на прямій, переходять у результаті руху в точки, що також лежать на прямій, причому зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Отже, центральна симетрія $Z_0$ перетворює:

а) відрізок у рівний і паралельний йому відрізок;

б) напрямлений відрізок – у рівний і протилежно напрямлений – антипаралельний відрізок;

в) промінь – у паралельний і протилежно напрямлений промінь;

г) пряму – у паралельну пряму;

д) кут – у рівний йому кут;

є) площину – у паралельну площину.

7. Єдина нерухома точка перетворення симетрії відносно точки $O$ – сама ця точка (центр симетрії). Нерухомою є також кожна пряма, що проходить через центр симетрії, причому кожна точка прямої, що лежить по один бік від точки $O$, переходить у точку, що лежить по другий бік від точки $O$. Нерухомою є й кожна площина простору, що проходить через центр симетрії, причому нерухомою точкою такої площини є тільки центр симетрії.

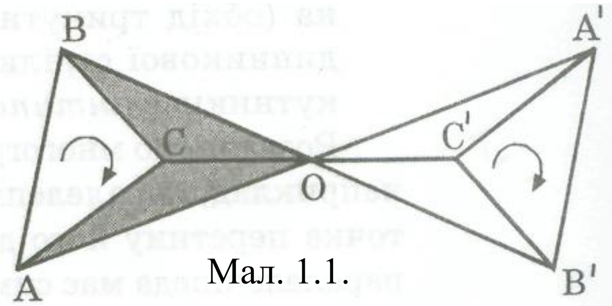
8. Якщо фігура має два центри симетрії $O$ і $O_1$, то вона має нескінченну їх множину і необмежена.

Прикладами таких фігур є пряма, смуга, нескінченний в обидва боки круговий циліндр тощо.

9. Якщо фігура має три центри симетрії $0, 0_1, 0_2$, що не лежать на одній прямій, то вона має в площині $00_10_2$ нескінченну множину центрів. Вони утворюють решітку паралелограмів.

10. Якщо фігура має чотири центри симетрії, які не лежать на одній площині, то вона має нескінченну множину центрів. Усі такі центри утворюють решітку паралелепіпедів.

11. Центральна симетрія на площині не змінює орієнтації трикутника (обхід трикутника за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки), але сторони центрально-симетричних трикутників є *антипаралельними* (мал. 1.1).



Мал. 1.1.

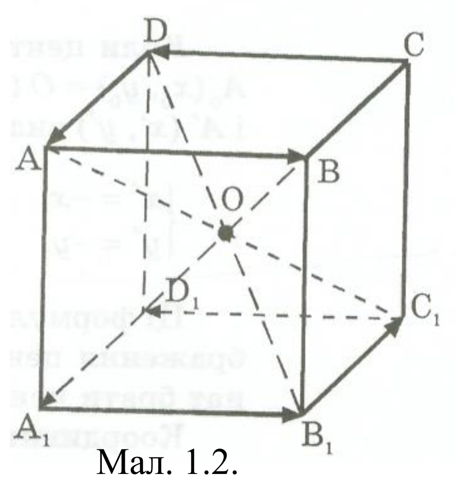
Розглянемо многогранник, що має центр симетрії. Такою фігурою є, наприклад, паралелепіпед. Центр симетрії паралелепіпеда – точка перетину його діагоналей, бо відносно цієї точки кожна точка паралелепіпеда має симетричну, кожному ребру відповідає антипаралельне ребро. Так, антипаралельність відрізків, променів, прямих – одна з характерних властивостей фігур, що мають центр симетрії.

Візьмемо на одній з граней паралелепіпеда три довільні точки, які визначають деякий трикутник. Оскільки паралелепіпед має центр симетрії, то на протилежній грані існує центральносиметричний йому трикутник. Такі трикутники, за аналогією до відрізків, називають *антипаралельними.* Отже, має місце така властивість.

12. Грані многогранника, що має центр симетрії, перетворюються при симетрії відносно нього в рівні й антипаралельні грані протилежної орієнтації.

Центральна симетрія в просторі перетворює праву рукавичку в ліву і навпаки.

13. Відповідні пари граней, які самі мають центр симетрії, многогранника, що також має центр симетрії, є одночасно паралельними й антипаралельними. Ця властивість характерна, наприклад, для куба. Правильне й обернене твердження: фігури, що мають такі грані, – центрально-симетричні. Тетраедр не має центра симетрії, бо кожна грань не має паралельної грані.



Мал. 1.2.

**Координатні формули симетрії відносно точки**

Для того щоб знайти координатне подання геометричного перетворення площини, встановлюють зв'язки між координатами довільної точки $A$ $(x, y)$ цієї площини і координатами точки $A'$ $(x', y')$, яку дістали внаслідок дії даного перетворення на точку $A$ $(x, y)$. Вирази, які задають координати $x'$, $y'$ образу точки $A$ через координати $x$, $y$ прообразу, називаються *координатними формулами даного перетворення.* Ці формули повністю визначають перетворення координатної площини.

Знайдемо координатні формули симетрії відносно точки $A_0(x_0, y_0)$. Нехай $A(x,y)$ і $A(x', y')$ – дві взаємно симетричні точки відносно точки $A_0$. Оскільки $A_0$ – середина відрізка $AA'$, то її координати визначаються за формулами: $x_0 = \dfrac{x + x'}{2}$, $y_0 = \dfrac{y + y'}{2}$. Записавши ці рівності відносно $x'$ і $y'$, дістанемо *координатні формули симетрії відносно точки:* $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$.

Коли центр симетрії збігатиметься з початком координат, тобто $A_0(x_0, y_0)=O(0, 0)$, то координати взаємно симетричних точок $A(x, y)$ і $A'(x', y')$ визначатимуться такими рівностями: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

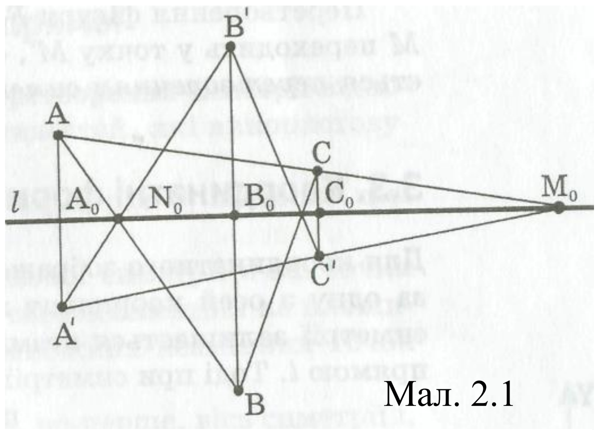
## 2. Симетрія відносно прямої

Означення 2.1. Нехай $l$ – деяка пряма площини. Перетворення площини, при якому точки прямої $l$ самі собі відповідають, а будь-якій точці $A$, не належній прямій $l$, відповідає така точка $A'$ цієї ж площини, що відрізок $AA'$ перпендикулярний до прямої $l$ і ділиться нею навпіл, називається *симетрією відносно прямої* $l$, *або осьовою симетрією.*

Пряма $l$ називається віссю симетрії. Точка $A'$ називається симетричною точці $A$ відносно прямої $l$. Осьову симетрію з віссю $l$ позначають символом $S_l$,. Якщо точка $A'$ є образом точки $A$ в симетрії відносно прямої $l$, записують:

$A' = S_l(A)$, або $S_l$: $A \to A'$, або $A \xrightarrow{S_l} A'$.

Осьова симетрія повністю визначається заданням або осі симетрії, або однієї пари відповідних точок, або двох різних незмінних точок.



Мал. 2.1

Справді, якщо задану пряму $l$ на площині вибрано за вісь симетрії, то згідно з означенням для будь-якої точки $A$ площини можна знайти її образ такою побудовою.

1. Через точку А проведемо пряму, перпендикулярну прямій $l$, до перетину з нею в точці $A_0$ (мал. 2.1).

2. По інший бік від прямої $l$ на побудованому перпендикулярі від точки $A_0$ відкладемо відрізок $A_0A'$, рівний відрізку $AA_0$, дістанемо $A'= S_l(A)$.

Нехай осьова симетрія задана однією парою відповідних точок $B$ і $B'$. Тоді, знайшовши середину $B_0$ відрізка $BB'$, проведемо через $B_0$ пряму $l$, перпендикулярну до відрізка $BB'$. Це й буде вісь симетрії, у якій $B'= S_l(B)$. Тепер можна будувати скільки завгодно пар відповідних точок за означенням 2.1.

Якщо ж осьову симетрію задано двома незмінними точками, то пряма, яка проходить через ці точки, буде віссю симетрії, бо за означенням 2.1 незмінними точками є точки осі симетрії.

На мал. 2.1 побудовано три пари відповідних точок: $A'= S_l(A)$, $B'= S_l(B)$, $C'=S_l(C)$. Тоді можна записати: $A'B' =S_l(AB)$, $A'C' =S_l(AC)$, $B'C' =S_l(BC)$.

Означення 2.2. Якщо в симетрії відносно прямої $l$ деяка фігура $F$ відображається на себе, то така фігура називається *симетричною відносно прямої* $l$, а пряма $l$ називається *віссю симетрії фігури* $F$. Наприклад, бісектриса кута є його віссю симетрії; серединний перпендикуляр відрізка є його віссю симетрії; кожна висота рівностороннього трикутника є його віссю симетрії; кожна діагональ ромба (квадрата) є його віссю симетрії; кожний діаметр кола є його віссю симетрії і т.д.

Означення 3.3. Фігура $F'$, яка є образом фігури $F$ у симетрії відносно прямої $l$, називається *симетричною фігурі* $F$ *відносно прямої* $l$.

Перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, при якому довільна її точка $M$ переходить у точку $M'$, симетричну $M$ відносно прямої $l$, називається *перетворенням симетрії відносно прямої* $l$.

**Властивості симетрії відносно прямої**

З означення симетричних точок, фігур і перетворення симетрії відносно прямої $l$ площини випливає ряд властивостей, які використовуються при застосуванні осьової симетрії.

1. Для кожної прямої $l$ площини існує симетрія $S_l$ відносно цієї прямої.

2. Незмінними (подвійними) точками осьової симетрії є всі точки осі симетрії $l$. Інших подвійних точок осьова симетрія на площині не має. Отже, вісь симетрії – це множина незмінних точок площини в осьовій симетрії.

3. Незмінною прямою в осьовій симетрії є, по-перше, вісь симетрії і, по-друге, кожна пряма, перпендикулярна осі симетрії. Кожна точка осі симетрії як незмінної прямої незмінна. Таку пряму, кожна точка якої незмінна в якомусь перетворенні, називають *точково інваріантною.* На відміну від осі симетрії всі інші незмінні прямі – перпендикулярні до осі симетрії, мають тільки по одній незмінній точці, якою є точка перетину цих прямих з віссю симетрії. Інші точки цих незмінних прямих не подвійні, кожна з них має свій образ, що не збігається з прообразом.

4. Осьова симетрія має властивість взаємності, тобто якщо $A' = S_l(A)$, то і $A = S_l(A')$. Точки $A$ і $A'$ називають *взаємно симетричними в* $S_l$. Перетворення площини, при якому образом кожної точки є прообраз (тобто коли $A \to A'$, то й $A' \to A$), називається *інволюційним.* Отже, перетворення площини в симетрії відносно прямої є *інволюційним перетворенням.*

5. Якщо пряма $a$ і її образ $a'$ в осьовій симетрії $S_l$ перетинаються в якійсь точці $A_0$, то ця точка перетину належить осі симетрії $l$. Справді, образ точки $A_0$ прямої $a$ повинен належати як прямій $a' = S_l(a)$, так і прямій, проведеній через $A_0$ перпендикулярно до $l$. Оскільки $A_0 = a \times a'$, то перпендикуляр, проведений до $l$ через $A_0$, не може перетнути $a'$ в іншій точці, відмінній від $A_0$, бо він перетинає пряму $a'$ в точці $A_0$. Отже, $A_0$ є $l$.

6. Якщо пряма $a$ перетинає вісь симетрії $l$ в якійсь точці $A_0$, то через точку $A_0$ пройде і пряма $a'$ – образ прямої $a$ в осьовій симетрії $S_l$.

7. Будь-які дві точки площини мають лише одну вісь симетрії.

8. Для будь-яких півпрямих $AB$ і $AC$ існує така симетрія $S_l$, при якій кожна з них переходить у другу відносно прямої $l$; пряма $l$ є бісектрисою кута $BAC$.

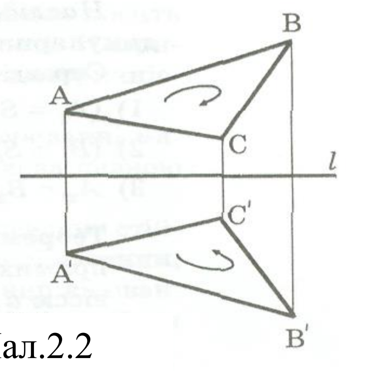
9. Фігури, що мають єдину вісь симетрії, поділяються нею на дві асиметричні частини протилежної орієнтації, які називаються *енантіоморфами.* Лівий і правий енантіоморфи не можна сумістити ніяким рухом у площині, відмінним від осьової симетрії, їх можна сумістити, якщо виконати поворот у тривимірному просторі навколо осі симетрії.

**Теорема 2.1.** Осьова симетрія на площині є рухом.

Для доведення теореми досить довести, що відстань між точками $A$ і $B$ дорівнює відстані між їх образами $A'$ і $B'$ в симетрії відносно прямої $l$. З цією метою використаємо координатний метод у системі $(O, \vec{i}, \vec{j})$, вісь $OX$ якої збігається з віссю симетрії.

*Дано:* $A'(x'; y') = S_l(A(x; y))$, $B'(x'_1; y'_1) = S_l(B(x_1; y_1))$. Довести: $A'B' = AB$.

*Доведення.* $A'B' = \sqrt{(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2}$. Врахувавши формули залежності між координатами образа і прообраза, які в даному випадку мають вигляд: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = -y_1 \end{cases}$, знайдемо, що $A'B'$=



Мал.2.2

$= \sqrt{(x_1' - x')^2 + (-y_1' - (-y'))^2} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y - y_1)^2} = =AB.$

Цю теорему можна довести на основі рівності трикутників без використання системи координат (виконати самостійно).

Наведемо ще деякі властивості осьової симетрії, які є наслідком з доведеної теореми 2.1.

*Наслідок* 1. Фігури, симетричні відносно прямої, рівні, але мають протилежну орієнтацію (мал. 2.2).

*Наслідок* 2. В осьовій симетрії пряма відображається на пряму, промінь – на промінь.

*Наслідок* 3. Упорядкованість точок прямої є інваріантом осьової симетрії.

*Наслідок* 4. Симетричні прямі або перетинаються на осі симетрії, або паралельні їй.

*Наслідок* 5. Паралельність прямих є інваріантом осьової симетрії.

*Наслідок* 6. Точки осі симетрії рівновіддалені від будь-якої пари симетричних точок.

*Наслідок* 7. Для будь-яких двох прямих, що перетинаються, можна побудувати дві осі симетрії – це бісектриси кутів, утворених прямими.

*Наслідок* 8. Будь-які дві різні паралельні прямі мають одну вісь симетрії – це множина точок, рівновіддалених від даних паралельних прямих.

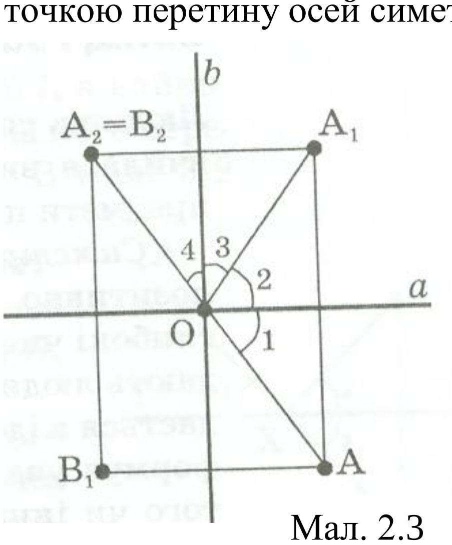
*Наслідок* 9. Об'єднання двох фігур, які мають спільну вісь симетрії, симетричне відносно цієї ж осі.

*Наслідок* 10. Переріз двох фігур, які мають спільну вісь симетрії, симетричний відносно тієї ж осі.

*Наслідок* 11. Колінеарність точок зберігається при осьовій симетрії.

*Наслідок* 12. Симетричні прямі утворюють з віссю симетрії рівні кути.

**Теорема 2.2.** Композиція двох осьових симетрій із взаємно перпендикулярними осями є центральною симетрією, центр якої збігається з точкою перетину осей симетрії.



Мал. 2.3

*Доведення.* Нехай $a$, $b$ - осі симетрії, $a \perp b$; $O = a \times b$ (мал. 2.3). Візьмемо довільну точку $A$ і побудуємо їй симетричну відносно прямої $a$ точку $A_1$, при цьому $OA = OA_1$, $\angle 1 = \angle 2$. (1)

Побудуємо далі точку $A_2$, симетричну точці $A_1$ відносно прямої b, при цьому $OA_1 = OA_2$, $\angle 3 = \angle 4$. (2)

Враховуючи рівності (1) і (2), а також те, що $\angle 2 + \angle 3 = 90°$, дістанемо $\angle OA_2 = OA$, $\angle AOA_2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$.

Отже, точка O лежить на відрізку $AA_2$ і ділить його навпіл, тобто точка $O$ є центром симетрії відрізка $AA_2$, точка $A_2 = Z_0(A)$. Цим доведено, що коли $a \perp b$, то $S_a \circ S_b = Z_0$, де $O = a \times b$.

*Наслідок* 1. Множина всіх осьових симетрій на площині не утворює групи перетворень площини.

*Наслідок 2.* Композиція двох осьових симетрій із взаємно перпендикулярними осями симетрії комутативна. Справді,

1) $(A_1=S_a(A),\ A_2=S_b(A_1)) \Rightarrow S_b \circ S_a = Z_0$;

2) $(B_1=S_b(A),\ B_2=S_a(B_1)) \Rightarrow S_a \circ S_b = Z_0$;

3) $A_2 = B_2 \Rightarrow S_b \circ S_a = S_a \circ S_b$.

**Теорема 2.3.** Композиція трьох осьових симетрій відносно трьох прямих $a$, $b$ і $c$, які мають спільну точку $O$ є осьовою симетрією з віссю $d$, яка проходить через точку $O$.

*Доведення.* У композиції $S_c \circ S_b \circ S_a$, де $a$, $b$, $c$ – дані прямі, які мають спільну точку $O$, усі три компоненти – осьові симетрії, кожна з яких змінює орієнтацію фігури на протилежну. У результаті композиції трьох осьових симетрій дістаємо фігуру, орієнтація якої буде протилежною орієнтації даної фігури. Тому результатом композиції трьох осьових симетрій може бути або осьова симетрія, або ковзна симетрія. Оскільки точка $O$ при цьому залишається незмінною, то композицією трьох осьових симетрій буде осьова симетрія, вісь якої $d$ повинна проходити через точку $O$.

Для побудови осі $d$ результуючої симетрії, зручно вибрати прообразом точку $A$ довільно на прямій $a$. Тоді $A = S_a(A)$, і, якщо $A'=S_b(A)$ і $A''= S_c(A)$, то шукана вісь $d$ є серединним перпендикуляром відрізка $AA''$.

## 3. Поворот

<u>Означення 3.1.</u> *Поворотом площини* навколо заданої точки $O$ на даний кут $\alpha$ називається таке перетворення, при якому кожній точці $A$ площини, відмінній від точки $O$, ставиться у відповідність така точка $A'$ цієї самої площини, що: 1) $OA = OA'$, 2) кут $AOA'$ дорівнює даному куту $\alpha$ і однаково з ним орієнтований.

Точка О при цьому називається *центром повороту*, а кут $\alpha$ – *кутом повороту.*

Поворот площини навколо точки $O$ на кут $\alpha$ позначатимемо символом $R_O^\alpha$ (від латинського слова *Rotation*). Якщо точка $A'$ є образом точки $A$ у повороті навколо точки $O$ на кут $\alpha$, то це записують так: $A'= R_O^\alpha(A)$ або $R_O^\alpha: A \to A'$. Із запису $A'B' = R_O^\alpha(AB)$ маємо, що пряма $A'B'$ є образом прямої $AB$ при повороті $R_O^\alpha$.

Із наведеного означення випливає, що поворот навколо точки повністю визначається заданням центра повороту і орієнтованого кута повороту. Крім того, поворот може бути заданий центром повороту і парою відповідних точок або двома парами відповідних точок (парою відповідних відрізків).

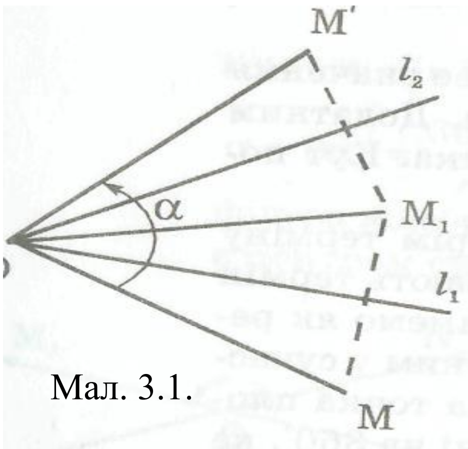
Кут повороту є напрямленою величиною, тому числове значення кута повороту може бути як додатним, так і від'ємним. Додатним вважають напрям повороту проти руху стрілки годинника. Кут повороту а може мати значення в межах $-180° < \alpha < 180°$.

Звертаємо увагу на те, що в науковій літературі, крім терміну «поворот» навколо точки, у тому самому розумінні вживають термін «обертання». Відомо, що кожна точка площини повертається в попереднє положення при обертанні на 360°, на 2•360° і т.д., на $n \bullet 360°$, де $n$ – будь-яке ціле число. Тому поворот $R_O^\alpha$ дістанемо не лише обертанням на кут $\alpha$, а й на кут $\alpha + n \bullet 360°$, де $n$ – будь-яке ціле число.

Кожна геометрична фігура – це певна множина точок. Для побудови образу фігури в даному повороті $R_O^\alpha$ треба вміти будувати образи точок. Якщо задано поворот $R_O^\alpha$, то для побудови образу $A'$ довільної точки $A$ площини треба: 1) сполучити $A$ з центром повороту $O$; 2) побудувати кут $AOA'$, рівний куту $\alpha$ і однаково з ним орієнтований; 3) на промені $OA'$ відкласти відрізок $OA'=OA$.

**Теорема 3.1.** Будь-який поворот площини навколо точки можна подати у вигляді композиції двох осьових симетрій площини.

*Доведення.* Нехай дано поворот $R_O^\alpha$, який відображає довільно взяту точку $M$ на точку $M'$: $M' = R_O^\alpha(M)$. Проведемо через центр $O$ повороту довільний промінь $l_1$ (мал. 3.1.) і знайдемо образ $M_1$ точки $M$ у симетрії відносно променя $l_1$: $M_1 = S_{l_1}(M)$. Далі побудуємо вісь симетрії $l_2$ точок $M_1$ і $M'$ – це буде серединний перпендикуляр відрізка $M_1M'$. Вісь $1_2$ пройде через точку $O$ (трикутник $M_1OM'$ – рівнобедрений, $OM_1=OM'$). Осьова симетрія поставить у відповідність точці $M_1$ точку $M'$: $M'=S_{l_2}(M_1)$. Отже, точку $M'$ дістаємо з точки $M$ композицією двох осьових симетрій $S_{l_2} \circ S_{l_1}$. Кут повороту $\alpha$ у два рази більший кута між осями симетрії $l_1$ і $1_2$ : $\angle(l_1, l_2)=\frac{1}{2}\alpha$. Справді, за властивостями осьової симетрії $\angle 1=\angle 2$ і $\angle 3=\angle 4$. Звідси $\angle(l_1, l_2)= =\angle 2+\angle 3= \frac{1}{2}\alpha$. Має місце й обернене твердження.



Мал. 3.1.

**Теорема 3.2**. Композиція двох осьових симетрій з непаралельними осями $l_1$ і $l_2$ є поворотом навколо точки перетину осей симетрії на кут, рівний подвійному куту між осями симетрії.

**Властивості повороту площини**

Назвемо деякі властивості повороту площини навколо точки, які випливають безпосередньо з означення.

1. Образом точки при повороті площини є точка.

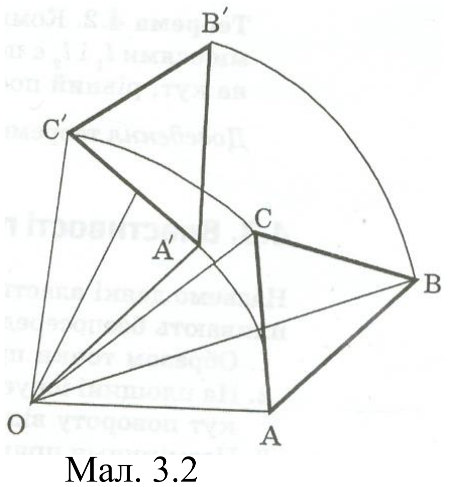
2. На площині існує єдина незмінна точка – центр повороту $O$, якщо кут повороту відмінний від 0°.

3. Незмінними прямими при повороті на кут $\alpha$=180° є всі прямі, що проходять через центр повороту.

**Теорема 3.3.** Поворот площини навколо точки є рухом площини.

*Дано:* $A' = R_O^\alpha(A)$, $B' = R_O^\alpha(B)$. *Довести:* $A'B' = AB$.

*Доведення.* Використаємо мал. 3.2.



Мал. 3.2

$A' = R_O^{\alpha}(A)$ => $(OA = OA',\ \angle AOA' = \alpha)$,

$B' = R_O^{\alpha}(B)$ => $(OB = OB',\ \angle BOB' = \alpha)$.

Звідси $\angle AOA' = \angle BOB'$. Крім того,
$\angle AOB = \angle AOA' - \angle BOB'$,
$\angle A'OB' = \angle BOB' - \angle BOA'$, тому $\angle AOB = \angle A'OB'$.

Отже, трикутники $AOB$ і $A'OB'$ мають:
$OA = OA'$, $OB = OB'$ і $\angle AOB = \angle A'OB'$, тому $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ і $AB = A'B'$. Таким чином, поворот площини навколо точки не змінює відстані між точками, тобто є рухом.

*Наслідок* 1. Поворотом площини навколо точки пряма відображається на пряму, промінь – на промінь, відрізок – на відрізок.

*Наслідок* 2. Відповідні фігури при повороті рівні і однаково орієнтовані.

*Наслідок* 3. Упорядкованість точок прямої не порушується поворотом площини, тобто якщо точка $C$ лежить між точками $A$ і $B$, то точка $C' = R_O^{\alpha}(C)$ лежатиме між точками $A' = R_O^{\alpha}(A)$, $B' = R_O^{\alpha}(B)$.

Введемо поняття групи перетворень.

**Означення.** Сукупність перетворень називається *групою*, якщо в цій сукупності виконуються такі властивості:

1) композиція будь-яких двох перетворень даної сукупності є перетворенням цієї ж сукупності;

2) перетворення, обернене до будь-якого перетворення даної сукупності, є перетворенням цієї ж сукупності;

3) серед перетворень даної сукупності є тотожне перетворення;

4) композиція перетворень асоціативна.

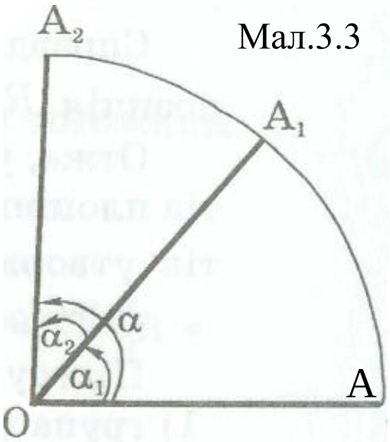
Ці властивості називаються *груповими властивостями.*

**Теорема 3.4.** Множина всіх поворотів площини навколо однієї і тієї ж точки площини є групою.

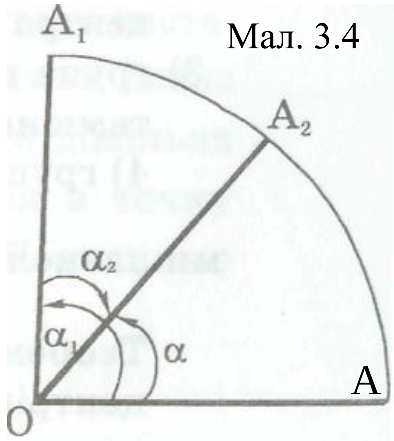
*Доведення.* Правильність теореми випливає з того, що в множині всіх поворотів площини зі спільним центром виконуються всі групові властивості.

1. Композиція двох будь-яких поворотів зі спільним центром на кути $\alpha_1$ і $\alpha_2$ є теж поворотом з цим самим центром на кут $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Справді, нехай маємо два Повороти $R_O^{\alpha_1}$ і $R_O^{\alpha_2}$, в яких $A_1 = R_O^{\alpha_1}(A)$ і $A_2 = R_O^{\alpha_2}(A_1)$. Якщо $\alpha_1$ і $\alpha_2$ однаково орієнтовані (мал. 3.3), то $\angle AOA_2 = \angle AOA_1 + \angle A_1OA_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ і $A_2 = R_O^{\alpha}(A)$.

Мал.3.3




Мал. 3.4




У випадку, коли $\alpha_1$ і $\alpha_2$ протилежно орієнтовані (мал. 3.4), аналогічно $\angle AOA_2 = \angle AOA_1 + (-\angle A_1OA_2) = \alpha_1 + (-\alpha_2) = \alpha$, тобто $A_2 = R_O^{\alpha}(A)$.

2. Композиція поворотів площини зі спільним центром повороту асоціативна.

Нехай маємо три повороти зі спільним центром на кути $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ тобто $R_O^{\alpha_1}$, $R_O^{\alpha_2}$, $R_O^{\alpha_3}$. Оскільки композиція поворотів зводиться до операції додавання кутів повороту, а ця операція асоціативна для чисел, то $R_O^{\alpha_3} \circ \left(R_O^{\alpha_2} \circ R_O^{\alpha_1}\right) = R_O^{\alpha_3} \circ R_O^{\alpha_2+\alpha_1} = R_O^{\alpha_3+(\alpha_2+\alpha_1)} = R_O^{\alpha_3+\alpha_2} \circ R_O^{\alpha_1} = \left(R_O^{\alpha_3} \circ R_O^{\alpha_2}\right) \circ R_O^{\alpha_1}$.

3. Серед поворотів площини існує тотожне перетворення. Роль тотожного перетворення площини відіграє поворот на кут $\alpha = 0°$ або $\alpha = k \cdot 360°$, де $k \in Z : R_O^{0^0} = E$. При $R_O^{0^0}$ всі точки площини залишаються незмінними, самі собі відповідають.

4. Кожний поворот площини на кут $\alpha$ має обернене собі перетворення, яке є поворотом на кут $(-\alpha)$.

Справді, якщо поворот $R_O^{\alpha} : A \to A'$, то поворот $R_O^{-\alpha} : A' \to A$. Композиція $R_O^{\alpha} \circ R_O^{-\alpha} = E = R_O^{0^0}$.

Отже, усі групові властивості мають місце в множині всіх поворотів площини зі спільним центром, тому множина всіх таких поворотів утворює групу, причому комутативну, бо $R_O^{\alpha_2} \circ R_O^{\alpha_1} = R_O^{\alpha_2+\alpha_1} = R_O^{\alpha_1+\alpha_2} = R_O^{\alpha_1} \circ R_O^{\alpha_2}$.

**Теорема 3.5.** Множина всіх поворотів площини навколо різних центрів не утворює групи.

## 4. Паралельне перенесення

Означення 4.1. Нехай $\vec{a}$ – деякий вектор площини. Перетворення площини, при якому кожна точка $M$ площини відображається на таку точку $M'$ цієї ж площини, що $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$, називається *паралельним перенесенням.*

Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$ позначають символом $T_{\vec{a}}$ (від латинського слова translation – „перенесення”) або просто $\vec{a}$.

Точка $M'$ називається *образом* точки $M$ при паралельному перенесенні, символічно це записується так: $M' = T_{\vec{a}}(M)$ або $M' = \vec{a}(M)$.

**Теорема 4.1.** Паралельне перенесення площини однозначно визначається заданням однієї пари відповідних точок.

*Доведення.* Нехай паралельне перенесення $\vec{a}$ відображає точку $A$ на точку $A'$ таку, що $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. (1)

Покажемо, що не існує іншого паралельного перенесення, у якому образом точки $A$ була б та сама точка $A'$. Припустимо супротивне: нехай існує інше паралельне перенесення $\vec{b}$, при якому $A' = \vec{b}(A)$, тоді $\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$. (2)

Образом довільної точки $M$ площини у перетворенні $\vec{a}$ буде точка $M'$ така, що $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$, (3)

а в перетворенні $\vec{b}$ – точка $M''$, для якої $\overrightarrow{MM''} = \vec{b}$. (4)

З рівностей (1), (2), (3), (4) маємо, що $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM''}$, тобто точки $M'$ і $M''$ збігаються. Отже, перетворення $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не різні, бо образом довільної точки $M$ в обох цих перетвореннях є одна й та ж точка $M'$.

*Наслідок*. Оскільки упорядкована пара точок ($M$, $M'$) однозначно визначає вектор $\overrightarrow{MM'}$, то можна сказати, що паралельне перенесення повністю визначається заданням вектора $\overrightarrow{MM'}$, який називають *вектором переміщення.*

Для побудови образа будь-якої точки $B$ площини в паралельному перенесенні, заданому упорядкованою парою відповідних точок ($A$, $A'$), треба від точки $B$ відкласти вектор $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$. Операція відкладання даного вектора від даної точки виконується завжди і однозначно, тому образом даної точки $B$ при паралельному перенесенні $\overrightarrow{AA'}$ є єдина точка $B'$.

Маючи одну пару відповідних точок ($A$, $A'$), можна побудувати скільки завгодно інших пар точок. Усі такі пари утворюють множину співнапрямлених, однакових по довжині відрізків. Множину таких відрізків називають *вектором.* Саме в цьому розумінні ми говоримо, що вектор – це паралельне перенесення.

Виберемо прямокутну систему координат (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) на площині, в якій визначене паралельне перенесення вектором $\vec{a}$. Якщо $A(x, y)$ і $A'(x', y')$ є парою відповідних точок то $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. Нехай вектор $\vec{a}$ в ($O$, $\vec{i}$, $\vec{j}$) має координати $x_0$ і $y_0$. Знайдемо вираження координат $x'$, $y'$ точки-образу через координати $x$, $y$ її прообразу. $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, тому $x' - x = x_0$, $y' - y = y_0$. Отже формули координат образу при паралельному перенесенні:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}. \qquad (5)$$

**Властивості паралельного перенесення**

Координатні формули паралельного перенесення $\vec{a}$ дають можливість легко довести деякі теореми про паралельне перенесення.

**Теорема 4.2.** Образом прямої в паралельному перенесенні є пряма.

*Доведення.* Нехай $p$ – деяка пряма, задана рівнянням $ax + by + c = 0$. (6)

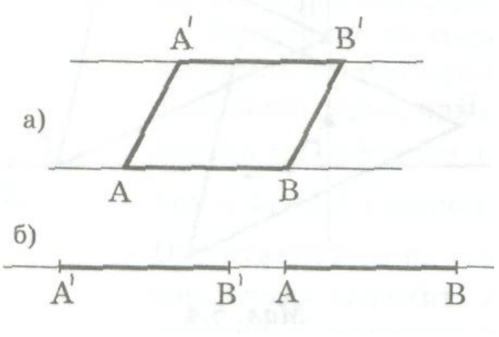
Підставивши в це рівняння $x'–x_0$ замість $x$ і $y'–y_0$ замість $y$, дістанемо $a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c = 0$, або $ax' + by' + (c - ax_0 - by_0) = 0$. (7)

Звідси маємо, що множиною образів точок прямої $p$ є також деяка пряма $p'$.

*Наслідок*. Відповідні в паралельному перенесенні прямі паралельні. Справді, у рівняннях (6) і (7) коефіцієнти змінних $x, y$ і $x', y'$ відповідно рівні, тому $p \parallel p'$.

**Теорема 4.3.** Образом півпрямої в паралельному перенесенні є співнапрямлена з нею півпряма.

*Доведення.* Нехай паралельне перенесення, задане формулами (5), переводить точку $A(x_1; y_1)$ у точку $A'(x_1 + a; y_1 + b)$, точку $B(x_2; y_2)$ – у точку $B'(x_2 + a; y_2 + b)$. Після виконання паралельного перенесення матимемо один із двох випадків: а) точка $A'$ не лежить на прямій $AB$; б) точка $A'$ лежить на прямій $AB$ (мал. 4.1).




Мал. 4.1

У першому випадку за попередньою теоремою чотирикутник $AA'B'B$ – паралелограм, у якого вершини $B$ і $B'$ лежать по один бік від прямої $AA'$. У другому випадку з того, що точка $A'$ лежить на прямій $AB$, випливає, що й точка $B'$ лежить на цій самій прямій, бо середина (її координати) відрізка $AB'$ збігається з серединою (її координатами) відрізка $A'B$, яка лежить на прямій $AB$. Отже, півпрямі збігаються. Зрозуміло, що коли дві півпрямі $AB$ і $A'B'$ розміщені на площині паралельно одна одній і по один бік від прямої $AA'$ або вони збігаються, то в кожному випадку буде таке паралельне перенесення, яке одну півпряму перетворює на іншу.

**Теорема 4.4.** Паралельне перенесення є рухом.

*Доведення.* Нехай у паралельному перенесенні $\vec{a}\,(x_0, y_0)$ точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ відображаються на точки $A'(x_1'; y_1')$, $B'(x_2'; y_2')$. Тоді $x_1' = x_1 + x_0$; $y_1' = y_1 + y_0$; $x_2' = x_2 + x_0$; $y_2' = y_2 + y_0$. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

$$A'B' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 + x_0 - (x_1 + x_0))^2 + (y_2 + y_0 - (y_1 + y_0))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Звідси $AB = A'B'$, отже, паралельне перенесення є рухом.

*Наслідок.* Образом будь-якої фігури $F$ у паралельному перенесенні є фігура $F'$, рівна фігурі $F$.

Таким чином, у паралельному перенесенні кожний відрізок відображається на паралельний і рівний йому відрізок, трикутник – на рівний йому трикутник, коло – на рівне йому коло, кут – на рівний йому кут і т.д.

Назвемо, крім того, ще деякі властивості паралельного перенесення.

1. На площині в паралельному перенесенні $\vec{a} \neq \vec{0}$ немає незмінних точок. Справді, образом кожної точки $A$ площини є така точка $A'$ цієї ж площини, що $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, при $\vec{a} \neq \vec{0}$ $A \neq A'$.

2. Незмінними прямими площини у паралельному перенесенні $\vec{a}$ є всі прямі, паралельні вектору $\vec{a}$.

3. Якщо точка $C$ лежить між точками $A$ і $B$, то образ $C'$ точки $C$ лежить між образами $A'$ і $B'$ точок $A$ і $B$ у будь-якому паралельному перенесенні.

4. Упорядкованість точок прямої є інваріантом паралельного перенесення площини.

5. Відповідні фігури в паралельному перенесенні мають однакову орієнтацію.

Розглянуті теореми і властивості дають можливість спростити побудову образів фігур у паралельному перенесенні. Так, для побудови образу відрізка досить побудувати образи його кінців, для побудови образа променя – побудувати образ його початку і однієї довільної точки, для побудови образу трикутника будуємо образи його вершин, для побудови образа кола будуємо образ його центра і тим же радіусом описуємо коло і т.д.

Загальні властивості паралельного перенесення можна використати для знаходження інваріантів конкретних фігур у даному паралельному перенесенні. Наприклад, легко переконатися, що медіана, висота, бісектриса трикутника відображається відповідно на медіану, висоту, бісектрису образу трикутника; точка перетину медіан, висот, бісектрис переходить відповідно в точку перетину медіан, висот, бісектрис і т.п.

Розглянемо нескінченну множину $P = \{\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_i}, \dots \overrightarrow{a_j}, \dots \overrightarrow{a_k}, \dots\}$ всіх паралельних перенесень площини, тобто множині *P* належать усі можливі в площині вектори.

Крім названих вище властивостей, паралельні перенесення множини *P* мають ще такі властивості:

1. Композиція двох будь-яких паралельних перенесень $\overrightarrow{a_i}$ і $\overrightarrow{a_j}$ множини *P* є також паралельним перенесенням $\overrightarrow{a_k}$ що належить множині *P*. Справді, якщо $A_i=\overrightarrow{a_i}(A)$ і $A_j=\overrightarrow{a_j}(A_i)$, то $\overrightarrow{AA_i}=\overrightarrow{a_i}$, $\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{a_j}$ і $\overrightarrow{AA_j}=\overrightarrow{AA_i}+\overrightarrow{A_iA_j}=\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j} = \overrightarrow{a_k}$, звідси $A_j=\overrightarrow{a_k}(A)$. Отже, $\overrightarrow{a_j}\circ\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{a_k}$, де $\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j}$, тобто композиція двох паралельних перенесень $\overrightarrow{a_i}$ і $\overrightarrow{a_j}$ множини *P* – це також паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{a_k}$, що є сумою векторів $\overrightarrow{a_i}$ і $\overrightarrow{a_j}$. Вектор $\overrightarrow{a_k}$, як і всі інші вектори площини, належить множині *P*.

2. Композиція паралельних перенесень множини *P* асоціативна.

Нехай маємо три паралельні перенесення $A_1=\overrightarrow{a_1}(A)$, $A_2=\overrightarrow{a_2}(A_1)$, $A_3=\overrightarrow{a_3}(A_2)$. Тоді, виконуючи спочатку паралельні перенесення $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$, дістанемо $A_2=\overrightarrow{a_2}(\overrightarrow{a_1}(A))$, і після виконання $\overrightarrow{a_3}$ $\quad A_3=\overrightarrow{a_3}\left(\overrightarrow{a_2}(\overrightarrow{a_1}(A))\right)=\vec{a}(A)$, (8)

де $\vec{a}=\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}\right)+\overrightarrow{a_3}$. Якщо ж виконати спочатку $\overrightarrow{a_1}: A_1=\overrightarrow{a_1}(A)$, а потім композицію $\overrightarrow{a_3}\circ\overrightarrow{a_2}$, то матимемо $A_3=\overrightarrow{a_3}\left(\overrightarrow{a_2}(A_1)\right)=\left(\overrightarrow{a_3}\left(\overrightarrow{a_2}\right)\right)\overrightarrow{a_1}(A)=\vec{a}(A)$, (9)

де $\vec{a}=\overrightarrow{a_1}+\left(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}\right)$.

З (8) і (9) маємо $\overrightarrow{a_3}\left(\overrightarrow{a_2}(\overrightarrow{a_1}(A))\right)=\left(\overrightarrow{a_3}\left(\overrightarrow{a_2}\right)\right)\overrightarrow{a_1}(A)$, тобто $\overrightarrow{a_3}\circ\left(\overrightarrow{a_2}\circ\overrightarrow{a_1}\right)=\left(\overrightarrow{a_3}\circ\overrightarrow{a_2}\right)\circ\overrightarrow{a_1}$.

3. Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}=\vec{0}$ залишає незмінними всі точки площини. Таке перетворення площини називається *тотожним перетворенням.* Отже, серед паралельних перенесень множини *P* є тотожне перетворення, яке визначається нуль-вектором.

4. Перетворення, обернене до будь-якого паралельного перенесення $\overrightarrow{a_i}$ з множини *P*, є також паралельним перенесенням на вектор, протилежний вектору $\overrightarrow{a_i}$. Справді, нехай $\overrightarrow{a_i}$ – паралельне перенесення і *A* – довільна точка площини. Тоді $A'=\overrightarrow{a_i}(A)$ і $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{a_i}$. Обернене до $\overrightarrow{a_i}$ перетворення ставить у відповідність точці $A'$ таку точку *A*, яка була її прообразом у перетворенні $\overrightarrow{a_i}$ тобто $\overrightarrow{A'A}$ – обернене перетворення до $\overrightarrow{a_i}$. Отже, $\overrightarrow{A'A}=-\overrightarrow{a_i}$.

Названі чотири властивості є груповими властивостями множини перетворень, вони мають місце в множині *P*. Таким чином, теорему доведено.

**Теорема 4.5.** Множина *P* всіх паралельних перенесень площини є групою.

**Теорема 4.6.** Композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням.

**Теорема 4.7.** Композиція повороту навколо точки і паралельного перенесення є поворотом навколо точки.

**Теорема 5.8.** Композиція двох поворотів навколо різних центрів є поворотом або паралельним перенесенням.

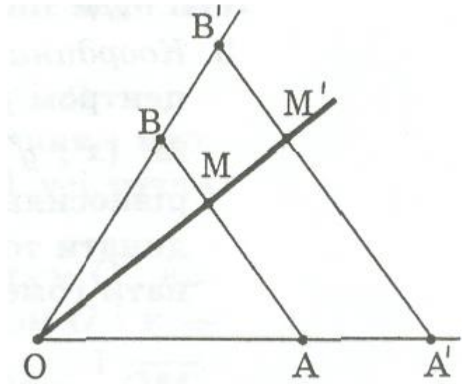
## 5. Гомотетія

**Означення і задання гомотетії**

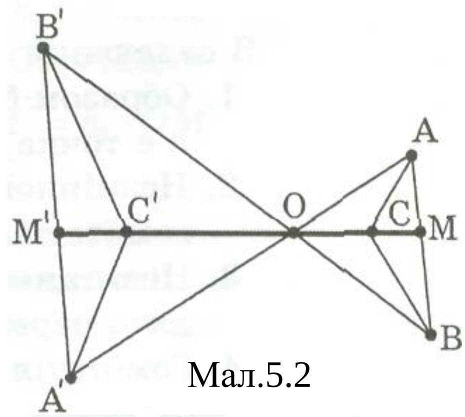
Введення поняття гомотетії і вивчення її властивостей зручно пов'язати з поняттям вектора.

Означення. *Гомотетією з центром O і коефіцієнтом к≠0* називається таке перетворення площини, при якому будь-яка точка $M$ переходить у таку точку $M'$, що $\overrightarrow{OM'} = к \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Точка $M'$ називається *образом* точки $M$, точка $M$ – *прообразом* точки $M'$, число *к – коефіцієнтом* гомотетії, точка $O$ - *центром* гомотетії. Якщо точка $M$ у гомотетії переходить у точку $M'$, то записують $M \rightarrow M'$. Точки $M$ і $M'$ називаються *гомотетичними*.

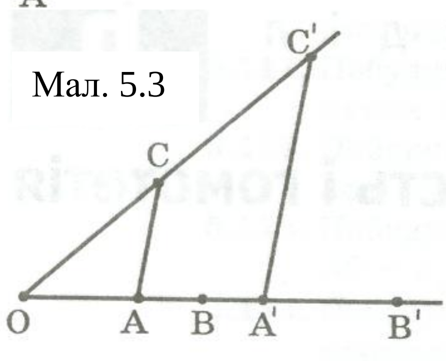



Мал. 5.1




Мал.5.2

Мал. 5.3




Гомотетію на площині можна задати різними способами.

1. *Центром O і коефіцієнтом к – за означенням.* Щоб побудувати образ $M'$ довільної точки $M$ площини, треба від точки O відкласти вектор $\overrightarrow{OM'} = к\overrightarrow{OM}$. Операція виконується однозначно. При цьому, якщо $к > 0$, то вектори $\overrightarrow{OM'}$ і $\overrightarrow{OM}$ співнапрямлені – точки $M'$ і $M$ лежать з одного боку від точки $O$, а якщо $к < 0$, то $\overrightarrow{OM'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM}$: точки $M$ і $M'$ лежать по різні боки від точки $O$.

2. *Центром O і однією парою відповідних точок $M \rightarrow M'$.* При цьому легко знайти коефіцієнт гомотетії: $k = \dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}$ (пряма $MM'$ проходить через точку $O$).

3. *Коефіцієнтом к і однією парою відповідних точок $M \rightarrow M'$.* Тоді для довільної точки $B$, що не лежить на прямій $MM'$ можна побудувати її образ $B'$, відклавши $\overrightarrow{M'B'} = к \cdot \overrightarrow{MB}$. Центром гомотетії буде точка $O$ перетину прямих $MM'$ і $BB'$ (мал. 5.1).

4. *Двома парами відповідних точок (однією парою відповідних відрізків).* Справді, якщо дано дві

пари відповідних точок $A \to A'$ і $B \to B'$, то коефіцієнт гомотетії $k = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}$ (мал. 5.1, 5.2). Центром гомотетії є точка перетину прямих $AA'$ і $BB'$. Якщо точки $A$, $A'$ і $B$, $B'$ лежать на одній прямій, то слід взяти довільну точку $C$, яка не лежить на прямій $AA'$ і побудувати її образ $C'$ за уже знайденим коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}$. Центром гомотетії буде точка перетину прямих $AA'$ і $CC'$ (мал. 5.3).

5. *Координатними формулами.* Нехай гомотетія з коефіцієнтом $к$ і центром у початку координат переводить точку $M(x;\ y)$ у точку $M'(x';\ y')$. За означенням гомотетії $\overrightarrow{OM'} = к \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Ця рівність рівносильна таким двом рівностям: $x'=кx$, $y'=ky$. Знаючи координати точки $M$ і коефіцієнт гомотетії $к$, можна знайти координати гомотетичної їй точки $M'$ за цими формулами.

**Властивості гомотетії**

З означення гомотетії маємо такі її *властивості.*

1. Образом будь-якої точки в гомотетії з центром $O$ і коефіцієнтом $к$ є точка і при тому тільки одна.

2. Незмінною точкою площини в гомотетії є лише одна точка – центр гомотетії.

3. Незмінними прямими площини в гомотетії є всі прямі, що проходять через центр гомотетії.

4. Гомотетія з центром $O$ і коефіцієнтом $к=-1$ є центральною симетрією з центром у точці $O$.

Справді за означенням $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, тобто вектори $\overrightarrow{OM'}$ і $\overrightarrow{OM}$ – протилежні, точка $O$ є серединою відрізка $MM'$. Безпосередньо з властивості 4 випливають такі дві властивості.

5. Промінь, що виходить із центра гомотетії, переходить сам у себе, якщо $к>0$, і в промінь, симетричний даному відносно центра гомотетії, якщо $к<0$.

6. Кут із вершиною в центрі гомотетії переходить сам у себе, якщо $к>0$, і в кут, симетричний даному відносно вершини, якщо $к<0$.

7. Кожна пряма, яка не проходить через центр гомотетії, переходить у паралельну їй пряму. Для доведення цієї властивості використаємо координатні формули гомотетії. Нехай на координатній площині пряма $l$ задана загальним рівнянням $ax + by + c = 0$, а гомотетія – формулами $x'=кx,\ y'=кy$. Тоді $x=\frac{1}{k}x'$; $y=\frac{1}{k}y'$. Образ прямої $l$ матиме рівняння $a\frac{x'}{k} + b\frac{y'}{k} + c = 0$, або $ax' + by' + кc = 0$. Це рівняння прямої, паралельної прямій $l$. Отже, гомотетичним образом прямої $l$ є пряма $l'$, їй паралельна.

8. Гомотетія кожне коло переводить у коло, причому центри кіл гомотетичні, а відношення їх радіусів дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Це випливає з того, що при гомотетії з коефіцієнтом $к$ всі відстані множаться на одне й те ж число $|k|$.

9. Гомотетичні фігури мають однакову орієнтацію (мал. 5.2).

10. Гомотетія з коефіцієнтом $к=1$ є тотожним перетворенням площини. Неважко переконатися, що в гомотетії з $к = 1$ усі точки площини незмінні.

11. Перетворення площини, обернене до гомотетії з центром $O$ і коефіцієнтом $к$, є також гомотетією з тим самим центром $O$ і коефіцієнтом $к$. Справді, маємо звідси $\overrightarrow{OM'} = к \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM'}}$.

12. Композиція гомотетій з центром $O$ і коефіцієнтами $к_1$ і $к_2$ є гомотетією з тим самим центром і коефіцієнтом $к = к_1 \cdot к_2$ Справедливість властивості дістаємо з таких міркувань. Нехай $\overrightarrow{OM'} = к_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ і $\overrightarrow{OM''} = к_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM'}}$. Звідси $\overrightarrow{OM''} = к_2 \cdot\ к_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

13. Композиція гомотетій із спільним центром асоціативна. Композиція гомотетій зводиться до множення коефіцієнтів гомотетії, а для чисел $к_1$, $к_2$, $к_3$ операція множення асоціативна, тому й композиція гомотетій асоціативна.

Властивості 10-13 є *груповими* властивостями гомотетії. Тому справедлива ще така властивість.

14. Сукупність усіх гомотетій площини зі спільним центром є групою.

Побудова образу фігури $F$ при гомотетії зводиться до побудови образів точок, які визначають фігуру $F$. Наприклад, для побудови образу $\Delta ABC$ в гомотетії з центром $O$ і коефіцієнтом $к = -2$, треба побудувати образи вершин – точки $A'$, $B'$, $C'$:

$\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC'} = -2\overrightarrow{OC}$. $\Delta A'B'C'$ гомотетичний $\Delta ABC$.

## 6. Подібність

Означення. 6.1 Перетворення площини, при якому відстань між точками змінюється в одне й те саме число $к>0$ разів, називається *перетворенням подібності*, або просто *подібністю.* Отже, якщо точки $A$ і $B$ переходять у точки $A'$ і $B'$ при подібному перетворенні, то $A'B' = к \cdot AB$. (1)

Число $к>0$ називається *коефіцієнтом подібності*, воно одне й те саме для всіх пар відповідних точок площини в даному перетворенні. Нагадаємо, що точки $A'$ і $B'$ називаються образами точок $A$ і $B$, а точки $A$ і $B$ – прообразами точок $A'$ і $B'$.

Назвемо деякі основні властивості перетворення подібності площини.

1. З означення випливає, що *кожний рух площини можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом к = 1, тобто рух є окремим випадком перетворення подібності.*

2. *Перетворення подібності площини є взаємно однозначним перетворенням.*

*Доведення.* Покажемо, що двом різним точкам $A$ і $B$ у перетворенні подібності відповідають також різні образи $A'$ і $B'$. Припустимо протилежне: нехай $A'$ співпадає з $B'$, тоді довжина відрізка $A'B' = 0$, але $A'B' = к \cdot AB$, тобто $0 = к \cdot AB$, $к \neq 0$, тому $AB=0$, звідки $A$ співпадає з $B$, що суперечить умові. Отже, припущення неправильне, тому $A' \neq B'$.

3. *Будь-яке перетворення подібності має обернене перетворення, яке є також перетворенням подібності з коефіцієнтом* $\frac{1}{k}$.

*Доведення.* Якщо $A'B' = к\cdot AB$, то при оберненому перетворенні $AB = \dfrac{1}{k}A'B'$.

4. *Композиція двох перетворень подібності з коефіцієнтами* $к_1$ *і* $к_2$ *є також перетворенням подібності з коефіцієнтом* $к = к_1\cdot к_2$.

*Доведення.* Нехай $A'B' = к_1\cdot AB$ і $A''B''= к_2\cdot A'B'$. Тоді $A''B'' = к_2\cdot A'B' = к_1\cdot к_2\cdot AB=к\cdot AB$, де $к = к_1\cdot к_2$.

5. *Композиція подібних перетворень сполучна.* Доведення аналогічне попередньому.

З розглянутих властивостей 1-5 випливає така властивість.

6. *Сукупність усіх подібних перетворень утворює групу.*

7. Оскільки кожний рух є перетворенням подібності з коефіцієнтом $к$=1 і сукупність усіх рухів площини є групою, то *група рухів є підгрупою групи подібних перетворень.*

8. *Колінеарність і впорядкованість точок на прямій є інваріантами перетворення подібності.*

*Доведення.* Справді, нехай точки $A$, $B$ і С – колінеарні (належать одній прямій), і точка $B$ лежить між точками $A$ і $C$. Тоді $AC =AB + BC$.

За означенням подібності для образів $A'$, $B'$, $C'$ точок $A$, $B$, $C$ маємо: $A'C'=к\cdot AC= к\cdot (AB + BC) = к\cdot AB + к\cdot BC = A'B' + B'C'$.

Із співвідношення $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки $A'$, $B'$, $C'$ колінеарні і точка $B'$ лежить між точками $A'$ і $C'$.

Наслідками властивості 8 є такі властивості.

9. *Якщо точки неколінеарні, то їх образи в подібному перетворенні також не колінеарні.*

*Інваріантами перетворення* називають властивості фігур, які не змінюються при даному перетворенні.

10. *Перетворення подібності відображає пряму на пряму, промінь на промінь, відрізок на відрізок, кут на кут і т. д.*

11. *Величина кута є інваріантом подібності.* Звідси: перетворення подібності відображає перпендикулярні прямі на перпендикулярні прямі; паралельність прямих є інваріантом перетворення подібності.

12. *Образом кола в подібному перетворенні є коло.*

*Доведення.* Нехай $M$ – довільна точка кола ($O$; r), $r=OM$. Подібне перетворення відображає точку $O$ на точку $O'$, точку $M$ – на $M'$, при цьому $O'M' = к\cdot OM$. Отже, образом кола ($O$; r) буде сукупність точок, віддалених від точки $O'$ на відстань $к\cdot OM = к\cdot r$, тобто це буде коло з центром $O'$ і радіусом $r'= к\cdot r$.

13. *Кожна гомотетія з коефіцієнтом к є подібним перетворенням з коефіцієнтом* $|k|$.

*Доведення.* Нехай $A$ і $B$ – дві довільні точки площини, $A'$ і $B'$ – їх образи в гомотетії з центром $O$ і коефіцієнтом $к$. Тоді $\overrightarrow{OA'} = к\cdot \overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB'} = к\cdot \overrightarrow{OB}$ (мал. 5.1). Звідси $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\cdot\overrightarrow{OB} - k\cdot\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\cdot\overrightarrow{AB}$.

Отже $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ і $A'B' = |k| \cdot AB$. Таким чином, гомотетія є окремим випадком подібності, коли пари відповідних точок належать прямим, що проходять через дану точку *O* – центр гомотетії.

14. *Група гомотетій площини зі спільним центром є підгрупою групи перетворення подібності.*

**Подібність фігур**

Означення 6.2. *Фігура F' називається подібною фігурі F*, якщо існує перетворення подібності площини, в якому фігура *F'* є образом фігури *F*.

Якщо фігура *F'* подібна фігурі *F*, то записують *F' ~ F*. *У* випадку, коли відомий коефіцієнт *к* подібності, яка переводить фігуру *F* у фігуру *F′*, то записують $F' \overset{k}{\sim} F$. Розглянемо деякі основні властивості подібних фігур.

1. *Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом к=1.* Справедливість цієї властивості випливає з того, що фігуру можна відобразити на себе, при цьому всі відстані зберігаються.

2. *Якщо фігура F′ подібна фігурі F з коефіцієнтом к, то фігура F подібна фігурі F′ з коефіцієнтом* $k' = \frac{1}{k}$.

*Доведення.* Якщо $F' \overset{k}{\sim} F$, то існує подібне перетворення, яке переводить фігуру *F* у фігуру *F′*. Перетворення подібності взаємно однозначне, тому дане перетворення має обернене перетворення таке, що $F \overset{k'}{\sim} F'$, де $k' = \frac{1}{k}$.

3. *Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом* $к_1$, *а фігура F'' подібна фігурі F ' з коефіцієнтом* $к_2$, *то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом* $к=к_1 \cdot к_2$.

*Доведення.* Фігуру *F''* дістаємо з фігури *F* у результаті виконання двох подібних перетворень з коефіцієнтами $к_1$ і $к_2$, композицією яких є також подібне перетворення з коефіцієнтом $к = к_1 \cdot к_2$. Це й доводить властивість 3.

**Теорема 6.1.** *Перетворення подібності площини визначається однозначно*, якщо для трьох неколінеарних точок *A*, *B*, *C* задано як їх образи такі точки *A'*, *B'*, *C′*, що $A'B' = к \cdot AB$, $B'C' = к \cdot BC$, $C'A' = к \cdot CA$.