

Волинський національний університет імені Лесі Українки  
Навчально-науковий фізико-технологічний інститут  
Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського

САХНЮК В.Є., ЗАМУРУЄВА О.В., ЯВОРСЬКИЙ Р.С.

**СТРУМОВІ СТАНИ В НАДПРОВІДНИХ КОМПОЗИЦІЯХ  
З ПРОСТОРОВОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ СТРУКТУРИ**

монографія

ЛУЦЬК - 2023

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № від грудня 2023 року)

**Рецензенти:**

**Никируй Л.І.** – кандидат фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри фізики і хімії твердого тіла Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

**Пастернак Я. М.** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри комп'ютерних наук та кібербезпеки Волинського національного університету імені Лесі Українки;

**Луцьов С.В.** – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету.

Сахнюк В.Є., Замуруєва О.В., Яворський Р.С. Струмові стани в надпровідних композиціях з просторовою неоднорідністю структури : **монографія**. Луцьк. 2023. С. 112.

У монографії представлено теоретичне дослідження рівноважних струмових станів у просторово неоднорідних надпровідних структурах з малими розмірами неоднорідностей при температурах, близьких до критичної, зокрема, з'ясування залежності густини струму від різниці фаз між берегами контакту з врахуванням впливу струму на просторову поведінку ПВ.

Розгляд рівнянь теорії надпровідності виконано в формалізмі методу функцій Гріна із залученням умови самоузгодженості. При одержанні на основі умови самоузгодженості рівняння для ПВ систему рівнянь Горькова розв'язано на основі теорії збурень за малою величиною ПВ. Константа, яка визначає граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау, знайдена методом квазіортогональності до асимптотики, запропонованим в даному виданні. Для обчислення густини струму використано загальну теорію Гінзбурга-Ландау, одержану з мікроскопічної теорії надпровідності, як асимптотичну форму останньої, поблизу критичної температури.

Для спеціалістів у галузі напівпровідникового матеріалознавства.

# Зміст

<b>1</b>	<b>ОГЛЯД</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ЗАГАЛЬНА СХЕМА ОПИСУ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТІВ ПОБЛИЗУ КРИТИЧНОЇ ТЕМПЕРАТУРИ</b>	<b>22</b>
2.1	Контакт нормального металу і надпровідника . . . . .	23
2.1.1	Побудова ЛІР для ПВ поблизу NS–границі. . . . .	23
2.1.2	Перехід від лінійного інтегрального рівняння до рівняння Гінзбурга-Ландау . . . . .	30
2.1.3	Розв’язання проблеми граничних умов для РГЛ. . . . .	34
2.2	Наближені методи обчислення $q_{\infty}$ . . . . .	35
2.2.1	Варіаційний метод . . . . .	36
2.2.2	Метод Гальоркіна . . . . .	39
2.2.3	Метод квазіортогональності до асимптотики . . . . .	40
2.3	Висновки та обговорення . . . . .	41
<b>3</b>	<b>РОЗРАХУНОК СТРУМУ В SNS – КОНТАКТІ ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ТОВЩИНІ НОРМАЛЬНОГО ПРОШАРКУ ТА У ВИПАДКУ НАЯВНОСТІ НЕМАГНІТНИХ ДОМІШОК ДОВІЛЬНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ</b>	<b>43</b>
3.1	Вступ . . . . .	43
3.2	Поведінка ПВ поблизу NS – границі в SNS – контакті . . . . .	45

3.3	Дослідження просторової поведінки ПВ з врахуванням над- плинної швидкості . . . . .	52
3.3.1	Розв'язування РГЛ для ПВ. . . . .	52
3.3.2	Граничне значення для параметра впорядкування . . . . .	56
3.4	Одержання виразу для густини струму в контакті . . . . .	61
3.5	Асимптотичні форми виразу для струму при $v_s = 0$ та $d \gg \xi_0$ . . . . .	65
3.5.1	$v_s = 0$ . . . . .	65
3.5.2	$d \gg \xi_0$ . . . . .	67
3.6	Дослідження переходу від гранично брудного ( $l \ll \xi_0$ ) до достатньо чистого контакту ( $l \gg \xi_0$ ) . . . . .	70
3.7	Висновки та обговорення . . . . .	77

#### **4 НАДПРОВІДНІ ПРОСТОРОВО - НЕОДНОРІДНІ КОМ- ПОЗИЦІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ВІДБИТТЯ ЕЛЕКТРОНІВ ТА НЕМАГНІТНИХ ДОМІШОК 79**

4.1	Тунельний SIS – контакт при неповній прозорості ізолято- ра та за наявності немагнітних домішок . . . . .	79
4.1.1	Просторова поведінка ПВ. . . . .	80
4.1.2	Розрахунок струму в брудному SIS – контакті при неповній прозорості ізолятора, поблизу критичної температури. . . . .	89
4.2	Асимптотичні форми виразу для струму в SIS – контакті без врахування впливу струму на просторову зміну ПВ . . . . .	92
4.3	Симетричний SNINS – контакт при довільній товщині нор- мального прошарку та прозорості діелектрика . . . . .	95
4.3.1	Побудова і дослідження ЛІР для ПВ поблизу NS - границі в SNINS – контакті . . . . .	95
4.3.2	Розрахунок струму в SNINS – контакті . . . . .	102

4.4	Асимптотичні форми виразу для струму в SNINS – контакті	103
4.4.1	Товщина нормального прошарку $d \gg \xi_0$ .	103
4.4.2	Граничний випадок малої товщини нормального металу, перехід до тунельного SIS – контакту.	106
A.1	Пройдення електронів крізь один $\delta$ -функційний бар'єр	121
A.2	Розсіяння на подвійному $\delta$ -функційному бар'єрі	123
B.1	Загальний розв'язок кубічного рівняння	129

## ВСТУП

Після відкриття одного з найяскравіших фізичних явищ 20 століття – зменшення опору провідника при низьких температурах до нуля [1], пройшло майже сто років, а запитань, на які намагаються дати відповідь вчені усього світу, залишається ще багато. Зазначене явище дістало назву надпровідність. Воно приваблює дедалі більшу кількість науковців, яким все ж таки вдається долати, хоч і повільно, тенета складності пізнання цього "чарівного" явища. Найбільшим досягненням на цьому шляху є побудова мікроскопічної теорії надпровідності в 1957 році – так званої теорії БКШ названої на честь її авторів Бардіна, Купера, Шріффера [2]. Основні ідеї, на які спирались ці автори, були висунуті: 1) Фр'юліхом [3] про те, що надпровідність є наслідок взаємодії електронів з квантовими коливаннями кристалічної ґратки, а це приводить до ефективного притягання між електронами поблизу фермі-сфери, 2) в 1956 році Купером [4] було відкрите явище нестійкості основного стану ідеальної Фермі-системи при "включенні" як завгодно малого притягання. Найдовершенішої форми мікроскопічна теорія надпровідності набула в працях Миколи Боголюбова. В них вона була побудована за допомогою чіткого і послідовного математичного методу, який включав знамените канонічне перетворення до операторів квазічастинок. Після побудови основ мікроскопічної теорії надпровідності вона почала широко застосовувалася до теоретичного опису як старих, так і нових експериментальних ефектів, пов'язаних з надпровідністю, крім того, багато ефектів було передбачено теоретично і чекали на їх експериментальне підтвердження. В 1962 році

Брайан Джозефсон [6] зробив своє знамените передбачення про можливість протікання надструму через тунельний контакт, утворений двома надпровідниками, розділеними тонким прошарком діелектрика, навіть у відсутності різниці потенціалів між ними. Він також зауважив, що в разі, коли тунельний струм перевищує певне критичне значення, на контакті з'являється відмінна від нуля різниця потенціалів  $U$ , і струм стає нестационарним, він осцилює з частотою  $\omega = 2eU$ . Всі ці теоретичні результати були експериментально підтверджені в роботах: Андерсон, Роуелл [91] та Янсон, Свистунов, Дмитренко [91]. Ефект Джозефсона і на даний момент є актуальною темою фундаментальних та прикладних досліджень в надпровідності. Надпровідні контакти (контакт двох надпровідників, між якими існує слабкий зв'язок, та їх композиції) широко використовуються в новітніх технологіях при створенні: надчутливих вимірювальних приладів, комп'ютерів нового покоління та інших електронних пристроях. Унікальні властивості джозефсонівських контактів зробили можливим створення надчутливих (до  $10^{-9}$  Гс) пристроїв для вимірювання магнітного поля, а також електричного заряду, напруженості електричного поля, струму, теплових потоків та ін. Ці елементи при виявленні малих сигналів мають чутливість, близьку до фундаментальної квантової границі, тобто в тисячі, десятки тисяч разів вищу, ніж в традиційних напівпровідникових пристроях. Це дало можливість використовувати їх в безконтактній медичній діагностиці (магнітокардіографи, магнітоенцефалографи). В кільці з двох джозефсонівських контактів, ввімкнених паралельно, може існувати магнітний потік, кратний цілому числу квантів магнітного потоку. Елементи швидкої одноквантової логіки, в яких одиниця інформації є квант магнітного потоку, дозволяють сприймати сигнали з частотами вище 100 ГГц при дуже низькому рівні дисипації енергії. Розгляд рівнянь теорії надпровідності виконано в формалізмі

методу функцій Гріна із залученням умови самоузгодженості. При одержанні на основі умови самоузгодженості рівняння для ПВ систему рівнянь Горькова розв'язано на основі теорії збурень за малою величиною ПВ. Константа, яка визначає граничну умову для рівняння Гінзбурга-Ландау, знайдена методом квазіортогональності до асимптотики, запропонованим в даному дисертаційному дослідженні. Для обчислення густини струму використано загальну теорію Гінзбурга-Ландау, одержану з мікроскопічної теорії надпровідності поблизу критичної температури. Проблема побудови струмових станів в надпровідних контактах при не-малій прозорості діелектричної плівки та при малих розмірах (в одному вимірі) просторових неоднорідностей досліджувалась вперше з використанням ЛІР для ПВ поблизу границь неоднорідностей.



# Розділ 1

## ОГЛЯД

Теорія струмових станів в контактах типу SNS розвивалася під впливом відкриття Джозефсона [6], що стосувалося контактів типу SIS, тобто моделі з тонким прошарком ізолятора між двома надпровідниками. На початку дослідження тунельного струму в SIS – контакті використовувався метод тунельного гамільтоніана, запропонованого в роботі Коена, Фалікова і Філіпса [57] для розрахунку струму з нормального металу в надпровідник. Використовуючи їх метод і спираючись на глибокі теоретичні міркування про роль фазової когерентності між двома надпровідниками в контакті, Джозефсон [6] передбачив можливість протікання незатухаючого тунельного струму в контакті з двох надпровідників, розділених плівкою діелектрика, при нульовій різниці потенціалів між ними. Подальший розвиток робота Джозефсона здобула в статті Андерсона [91], який, зокрема, запровадив поняття "слабкої надпровідності пізніше поширене на ефекти в інших типах контактів. Першою роботою, в якій ставилось за мету побудувати загальну теорію тунелювання, що давала б можливість одержати вираз для струму, який містить всі вклади: квазічастинковий, джозефсонівський і інтерференційний, була виконана Амбегаокаром і Баратовим [90]. В цій роботі результат для струму

$$j = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_N} \operatorname{th} \frac{\Delta(T)}{2T} \sin \varphi, \quad (1.1)$$

де  $R_N^{-1} = e^2 v_0 N(0) \int_0^1 x D(x) dx$  опір контакту в нормальному стані, був одержаний технікою функцій Гріна в першому порядку теорії збурень по оператору тунелювання, тобто розглядалась мала прозорість бар'єру. Використовуючи кінетичний підхід, нестационарний струм Джозефсона в SIS – контакті був отриманий в роботі [58] на часовому інтервалі, значно більшому, ніж в роботі [90]. В техніці функцій Гріна ця ж задача була розв'язана в роботах [59].

Незважаючи на очевидні успіхи, схема, заснована на тунельному гамільтоніані, не відповідає на низку питань, які виникають при спробі зрозуміти явище тунелювання і структуру теорії, що його описує. Ще гостріше ці питання виникли, коли предметом досліджень стали інші типи контактів, зокрема, система надпровідник-нормальний метал-надпровідник, де метод тунельного гамільтоніана виявився цілком не придатний. У схемі тунельного гамільтоніана залишається незрозумілим, що таке ліві і праві електронні стани. Ця модель не здатна дати градієнтно інваріантного опису струмових станів в тунельному контакті і є незастосовною поза першим наближенням теорії збурень за прозорістю бар'єру: відповідні поправки виявляються нескінченними.

Перші спроби побудови мікроскопічної теорії стаціонарного ефекту Джозефсона, в якій би не використовувалось поняття тунельного гамільтоніана, були зроблені самим Джозефсоном [90]. Його підхід викладений в монографії Кулика і Янсона [64]. В подальшому для побудови послідовної мікроскопічної теорії опису тунельного контакту було розроблено ефективний метод  $t$  - представлення, суть якого полягає в побудові рівнянь теорії надпровідності з врахуванням квазікласичного характеру руху куперівських пар. Рух куперівських пар можна вважати квазікласичним, оскільки імпульс, пов'язаний з рухом пари, як цілого, тобто  $mv_s$ , значно менший за фермі-імпульс  $p_0$ , що впливає з оцін-

ки  $v_s^c \sim \Delta/p_0 \sim T_c/p_0$ . Відношення  $mv_s/p_0 \ll T_c/E_F \sim a/\xi_0$ , де  $a$  – атомна довжина. Маючи такий малий параметр, а він особливо малий ( $\sim 10^{-4}$ ) для низькотемпературних надпровідників, можна виконати операцію згладження просторової поведінки функцій, з якими маємо справу, зокрема ПВ, по атомній довжині, тобто знехтувати дрібномасштабними змінами, залишивши лише великомасштабні – на довжинах порядку довжини когерентності. Ці рівняння значно простіші вихідних рівнянь Горькова, на їх основі були досягнуті значні успіхи в розв’язку таких задач теорії надпровідності, де метод тунельного гамільтоніана взагалі непридатний. Правила побудови цих рівнянь і одержання основних результатів для тунельного контакту викладено в роботах Свідзинського і Слюсарєва [66] (див. також монографію Свідзинського 1982 року [12], де метод викладено вельми докладно). На основі методу  $t$  - представлення в [89] було знайдено поправку до струму (1.1) в другому порядку по прозорості бар’єру для чистого надпровідника ( $l \gg \xi_0$ )

$$\delta j(\varphi) = -Aenv_0 \frac{\Delta(T)}{E_F} (\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) D^2, \quad (1.2)$$

де  $A = \frac{3\sqrt{3}\pi^4}{448\zeta(3)}$ .

Проблема розрахунку струму Джозефсона через контакт довільної прозорості в балістичному режимі ( $l \gg \xi_0$ ) була розв’язана багатьма авторами [92–94] в моделі з кусково-неперервним ПВ, в якій приймалося, що  $\Delta$  на берегах бар’єру рівне його об’ємному значенню.

Ідея розглянути аналогічну задачу про SNS – контакт була пов’язана з бажанням з’ясувати, які нові риси струмових станів будуть виникати, якщо замість тонкого прошарку ізолятора поставити більш широкий прошарок нормального металу. Як з’ясувалося, в такій системі може існувати надпровідний струм, який також пов’язаний з когерентною різницею фаз між берегами контакту. Однак механізм проникнення електронів через нормальний прошарок дещо інший аніж тунельний, вла-

стивий для контакту Джозефсона, оскільки SNS – контакт можна зробити з достатньо гарними границями і електрони проникатимуть вільно з надпровідника в нормальний метал. Тоді стає зрозумілим, що струм в системі протікає внаслідок якогось нового ефекту. Справа тут виглядає наступним чином. В нормальному металі, де нема ефективного притягання між електронами, не можуть виникати куперівські пари, вони утворюються в надпровіднику і характеризуються хвильовою функцією, яка внаслідок неперервності проникає в нормальну область на відстань порядку довжини когерентності (при  $T = 0$  це  $\xi_0$ ). Таким чином, хвости хвильових функції куперівських пар зліва і справа від надпровідників, що утворюють контакт, тою чи тою мірою (в залежності від товщини нормального прошарку) перекриваються, тому виникає ситуація, коли спарені електрони будуть і в нормальному прошарку. Цей ефект назвали ефектом близькості. Саме він і є відповідальний за надпровідний струм в SNS – контакті.

При дослідженні струмових станів в надпровідних контактах типу SNS часто вживаним є підхід, який базується на моделі з кусково-неперервним ПВ (див. [39]). В цій моделі модуль ПВ вважається сталим аж до границі розділу нормального прошарку та надпровідника і рівним нулю в нормальному металі, а для можливості існування ненульових струмових станів в контакті припускається наявність різниці фаз між берегами контакту. З'ясувалося, що в такій задачі можна порахувати струм, хоча не обійшлося без певних непорозумінь. А саме, перша робота [40], в якій це намагався зробити автор (Кулик І.О.) була помилковою хоча ідейно автор був на правильному шляху. Він використав техніку розкладу за власними функціями і не впорався з сумацию та інтеграцію, яка передбачається цим розкладом для обчислення функції Гріна. В результаті отримав, в цілому, неправильний результат (наприклад, було одержано ефект

осциляції струму, як функції товщини нормального прошарку). Тому в успішній роботі [41] на цю тему, яка належала Ішії, була використана схема інтегральних рівнянь і одержана правильна відповідь для струму. Однак альтернативний підхід, який передбачав обчислення струму через  $F$ -функцію вів до іншого результату через те, що апроксимації використані в цих схемах були розузгоджені. Ішії довелося з'ясувати чому ці розузгодження виникли і пізніше з'явилася публікація [42], в якій ці питання були зняті. Правильний результат узгоджений з виглядом  $F$ -функції був одержаний в роботі Свідзинського, Анцигіної, Братусь [43] при цьому був використаний не метод інтегральних рівнянь, а значно простіший метод склеювання (див. [27]), в якому, як нормальна так і аномальна функції Гріна будувалися за її відомими аналітичними властивостями. Після цього була закладена основа і для розв'язання більш складних задач в моделі з сталим по модулю ПВ. Роком пізніше з'явилася робота Бардіна і Джонсона [44], в якій автори пішли тим шляхом, що і Кулик, а саме розкладом функції Гріна за власними функціями, однак вони не помітили, що через ті ж загальні властивості функцій Гріна внески від дискретного спектру повністю анулюються частиною внесків неперервного спектру і цей факт є точним. У зв'язку з цим в новій роботі Свідзинського, Анцигіної, Братусь [45] був використаний метод розкладу по власних функціях і цей ефект знищення внесків від дискретного спектру частиною внесків неперервного спектру був точно встановлений. Таким чином, стало зрозуміло, як розв'язувати задачу і іншим методом – методом розкладу за власними функціями, причому результат був таким самим, як і в більш простій роботі тих самих авторів.

Хоча ці результати добре узгоджувались з експериментом, все ж таки теорія викликала певне незадоволення у зв'язку із використанням моделі з кусково-неперервним за модулем ПВ, тому було бажаним виконати роз-

рахунок самоузгодженим чином, беручи до уваги просторову зміну ПВ поблизу границі. Для цього можна обрати якусь пробну функцію і подивитись, наскільки міняється результат. Оцінки показують, що результат міняється несуттєво, якісно він залишається таким самим, а числовий коефіцієнт перед виразом для струму міняється на величину порядку одиниці.

Поблизу критичної температури ефект зменшення ПВ поблизу границі збільшується, однак відкривається можливість побудови самоузгодженої теорії, оскільки виникає вельми своєрідна ситуація, завдяки якій задача в околі критичної температури може бути розв'язана точно, а ті сумніви, які виникають в моделі з сталим ПВ знімаються.

Теорія, яку тут можна розвинути, була намічена Де Женом [65], який спирався на теорію Гінзбурга-Ландау [13] (побудова теорії Гінзбурга-Ландау, як асимптотичної форми мікроскопічної теорії БКШ послідовно виконана в монографії [10]). Де Жен одержав залежність струму від температури та різниці фаз і показав, що величина критичного струму залежить від температури по закону  $(1 - T/T_c)^2$ , а не  $1 - T/T_c$ , як у випадку тунельного контакту і ця відмінність пов'язана саме із зміною модуля ПВ. Однак результат Де Жена був якісний, кількісний результат в строгій послідовній теорії був одержаний Галайко, Свідзинським і Слюсаревим [9]. Вони чітко показали, що в надпровіднику поблизу  $T_c$ , якщо цей надпровідник обмежений з одного боку, наприклад, прошарком ізолятора, виникає складніша ситуація, а саме, для області, віддаленої від границі на відстань порядку довжини когерентності в теорії Гінзбурга-Ландау  $\xi(T)$  можна використовувати РГЛ. Однак ближче до границі, на відстані порядку  $\xi_0$ , РГЛ не працює. Тут виникає не нелінійне диференціальне рівняння Гінзбурга-Ландау, а лінійне інтегральне рівняння. Розв'язок ЛІР має бути зшитий з розв'язком РГЛ, при цьому в обла-

сті зшиву характерні відстані мають бути значно більші  $\xi_0$ , але значно менші  $\xi(T)$ , тобто асимптотика розв'язку ЛІР на нескінченності зшивається з асимптотикою розв'язку РГЛ в нулі. З'ясовується, що асимптотика розв'язку ЛІР є лінійна, проте найсуттєвішим є те, що відношення коефіцієнтів цієї асимптотики не є довільним: воно визначається однозначно ядром ЛІР. Це робиться в такий же спосіб як і в задачі Мілна (див. [18]), точний вираз для цього відношення отримуємо, застосовуючи для розв'язання ЛІР метод Вінера-Гопфа. Однак автори роботи [9] використали інший підхід для обчислення цього відношення, а саме варіаційний метод Рітца, запровадивши функціонал, з умови мінімуму якого отримується ЛІР. Варіаційний метод дозволив одержати для пошукованого відношення наближене значення, близьке до точного. Насправді точне значення цього коефіцієнта можна розрахувати чисельно, але вже для контакту SNS метод достатньо громіздкий і зусилля не виправдовуються, тим більше, що наближений результат мало відрізняється від точного і нас цілком задовольняє. Тому надалі у великій кількості різних робіт, де розглядалися також і складніші типи контактів, наприклад SNINS та деякі інші, використовувався варіаційний метод. Однак слід відзначити, що в задачах, які не є ліво-право симетричними, побудувати відповідний функціонал не вдається. Тому в роботі Свідзинського, Голубева [21] було використано еквівалентний методу Рітца, але простіший метод Гальоркіна, в якому відпадає потреба побудови функціоналу для рівнянь, які необхідно розв'язати. В результаті процедура знаходження розв'язків цих рівнянь значно спрощується в порівнянні з варіаційним методом Рітца. Більше того, цей метод може бути успішно застосований до систем, в яких немає право-лівої симетрії. Це дало можливість розв'язати задачі про SINS – контакт [21] та несиметричний SINIS – контакт [31], чого не вдавалось зробити методом Рітца [92,52]. Втім, рівняння Гальоркіна

можна сформулювати ще простіше і використовувати підхід, названий методом квазіортогональності до асимптотики, запропонований в [28] і широко вживаний в даній роботі.

Описана схема задовольняє умови самоузгодженості і в цьому полягає її певна перевага над моделлю, де  $|\Delta| = \text{const}$ . Однак результати останньої теорії справедливі також для низьких температур. Вони фізично зрозумілі і виправдані. В цій моделі було отримано в дуже загальній ситуації (для несиметричного SINS – контакту) формула для струму (див.[12]), яка охопила велику кількість конкретних результатів, у тому числі і для точкового контакту .

В роботі Галайка, Свідзинського і Слюсарєва [9] і низці інших будувалася теорія слабкої надпровідності, тобто припускалося, що  $D \ll 1$  (SIS – контакт) або  $d \gg \xi_0$  (SNS – контакт). Проте Свідзинський А.В. в монографії [12], де ці результати є викладені, показав, що вони стають незадовільними, коли коефіцієнт прозорості в задачі про SIS – контакт не є малим – струм стає необмежений ні зверху, ні знизу і для одержання коректного результату необхідно врахувати вплив струму на просторову поведінку ПВ.

Фернандо Солс і Джеймс Ферер [70,72] дослідили перехід від ідеальної джозефсонівської поведінки, коли коефіцієнт прозорості є малим, до випадку однорідного надпровідника (бар'єр взагалі відсутній  $D = 1$ ), поблизу критичної температури, беручи до уваги просторову зміну ПВ. В першому випадку зв'язок між двома надпровідниками вважається слабким, в другому – сильним. В їх моделі вільна енергія містить ефективний  $\delta$  - функційний потенціал, яким моделюється діелектрик і записується у вигляді

$$F = \int dz \left[ \frac{|\nabla\psi|^2}{k^2} - (1 - V_0\delta(z))|\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} \right],$$



де  $k = \lambda/\xi(T)$ ,  $\lambda$  – глибина проникнення і  $\xi(T)$  – довжина когерентності залежна від температури. Функція  $\psi(z)$  береться у вигляді:  $\psi(z) = R(z)e^{i\varphi(z)}$ . В результаті одержуються наступні рівняння

$$\frac{1}{k} \frac{d^2 R}{dz^2} + (1 - V_0 \delta(z))(1 - j^2/R^4)R - R^3 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{kj}{R^2},$$

які вважаються справедливими у всьому інтервали значень  $z$ . Невідомі сталі в розв'язках цих рівнянь знаходяться з умов неперервності на бар'єрі. Проте вони не одержали аналітичної залежності виразу для струму, а виконали чисельні розрахунки, які вказують на складну залежність струму від різниці фаз, яка в границі малої прозорості переходить у синусоїдальну. Така ж модель з подвійним  $\delta$  - функційним бар'єром досліджується в [71].

За наявності немагнітних домішок вираз для струму в першому порядку по  $D$  в силу теореми Андерсона збігається з результатом Амбегаокара-Баратова (1.1). Розрахунок струму у випадку довільної прозорості, за наявності домішок, є доволі проблематичним, навіть в простій моделі, без врахування зміни ПВ поблизу контакту із залученням чисельних методів розв'язування рівнянь для функцій Гріна.

Вплив немагнітних домішок на властивості SIS – контакту з'ясовується в роботі Братусь і Свідзинського [69] саме на основі методу  $t$  - представлення. Їх результати є викладені в монографії [12]. Особливістю цих робіт є те, що виконані в них розрахунки є правильними для малих значень коефіцієнта прозорості діелектрика.

Слабкий зв'язок через надпровідник (SS'S - контакт) за наявності немагнітних домішок розглянуто в роботі [72], Купріянов [74] застосував до гранично брудного SIS – контакту рівняння Узаделя [77] і одержав результати для кількох значень коефіцієнта прозорості, але не для близь-

ких до одиниці. Якобсон [75] замість  $\delta$  - функційного брав прямокутний бар'єр. В роботі Волкова А.Ф. [76]  $\delta$  - функція використана для опису SNS – контакту.

Крім вищезгаданих оригінальних джерел, ефект Джозефсона міститься в багатьох підручниках і монографіях [78–86]. Можливі області застосування ефекту Джозефсона розглянуто в [88] <sup>1</sup>.

Інший тип надпровідних контактів, яким приділяється значна увага, це є контакти типу  $S - C - S$  ( де  $C$  - означає геометричне звуження (constriction), через яке встановлюється зв'язок між масивними надпровідними електродами). Надпровідні звуження можуть бути змодельовані, як отвір діаметром  $d$  в площині між двома надпровідниками, через який електрони можуть проникати з лівого півпростору в правий, або навпаки (так званий точковий контакт). В іншій моделі (мікросток) звуження моделюється тонким каналом довжиною  $L$  в контакті з надпровідними берегами. Асламазов і Ларкін [53] на основі рівнянь Гінзбурга-Ландау показали, що в брудній границі і для малих розмірів звуження  $L, d \ll \xi(T)$  зв'язок між струмом і різницею фаз між берегами контакту даються співвідношенням

$$I = I_c \sin \varphi, I_c = \pi \Delta_0^2(T) / 4eR_N T_c, \quad (1.3)$$

де  $\Delta_0(T)$  - абсолютне значення ПВ в масивних берегах,  $R_N$  - нормальний опір мікростка. Критичний струм мікростка (1.3) залежить від довжини містка, як  $I_c \sim \frac{1}{L}$ . Проте вираз (1.3) є правильний в межах застосовності теорії Гінзбурга-Ландау, тобто для температур, близьких до критичної і  $L, d \gg \xi_0$  ( $\xi_0 = \frac{v_0}{2\pi T_c}$ ). У випадку малих збурень, роз-

<sup>1</sup>У монографії [64] за 1970 рік автори в передмові написали – "Можна не сумніватись, що тунельний ефект Джозефсона (в широкому змісті цього слова) ще тривалий час буде привертати увагу дослідників – наукових співробітників та інженерів – як в області подальшого вивчення фізики цього явища, так і з точки зору використання унікальних властивостей джозефсонівських тунельних контактів в прикладних цілях" і ми, сучасники, бачимо наскільки вони були праві.

міри яких є порядку довжини когерентності або менші, вираз (1.3) є непридатним, а для одержання правильного результату необхідно застосувати мікроскопічний підхід навіть для температур, близьких до критичної. Така мікроскопічна теорія стаціонарного ефекту Джозефсона для мікрозвужень в балістичному режимі була розроблена Куликом та Омелянчуком [55] при довжині містка  $L = 0$  і діаметрі отвору  $d \ll \xi_0$ . Їх результат

$$I = \frac{\pi \Delta_0(T)}{eR_0} \sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \frac{\Delta_0(T) \cos \frac{\varphi}{2}}{2T}, \quad R_0^{-1} = \frac{1}{2} S e^2 v_0 N(0), \quad (1.4)$$

де  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  - площа області контакту між надпровідниками. При температурах, близьких до критичної, вираз (1.4) узгоджується із результатом (1.3) в якому замість  $R_N$  потрібно підставити  $R_0$ . В роботі Заряєна, Колесніченка і Омелянчука [95] представлена мікроскопічна теорія струмових станів в мікромістках довільної довжини (але  $L, d > \lambda_0 = \frac{\hbar}{p_0}$ ) в масштабі довжини когерентності. Для температур, близьких до критичної, ними була досліджена залежність критичного струму Джозефсона від відношення  $\frac{L}{\xi_0}$  і проаналізовано перехід від випадку  $I_c(L = 0)$  (1.4) до  $I_c \sim \frac{1}{L}$  (1.3) із збільшенням довжини  $L$ . В основі цього дослідження були квазікласичні рівняння Айленбергера [96] для функцій Гріна з відповідними граничними умовами для них [55]. Відповідний вираз для струму одержаний цими авторами

$$I = I_0 \frac{16T^2}{v_0} \sum_{\omega > 0} \left[ \frac{1}{\omega^2} \left\langle v_z e^{-\frac{\omega L}{v_z}} \right\rangle_{v_z > 0} + \frac{2}{\omega} \int_0^{L/2} dz q(z) \left\langle e^{-\frac{2\omega}{v_z} z} \right\rangle_{v_z > 0} \right] \sin \varphi, \quad (1.5)$$

де функція  $q(z)$  задовольняє рівняння

$$q(z) = 2\lambda\pi T \sum_{\omega>0} \frac{1}{\omega} \left\langle e^{-\frac{\omega L}{v_z} \operatorname{sh} \frac{2\omega z}{v_z}} \right\rangle_{v_z>0} + \int_{-L/2}^{L/2} dz' q(z') \lambda 2\pi T \sum_{\omega>0} \left\langle \frac{1}{v_z} e^{-\frac{2\omega}{v_z} z} \right\rangle_{v_z>0} \quad (1.6)$$

Вираз (1.5) при  $L=0$  узгоджується з результатом (1.4) при температурах, близьких до критичної. А при  $L \gg \xi_0$  з (1.5) можна відтворити результат, одержаний на основі теорії Гінзбурга-Ландау для чистих мікромістків в роботі [56], крім того, одержані поправки до струму в [55], пов'язані з скінченністю довжини звуження. Випадок довільної прозорості точкового контакту досліджувався різними авторами [94,30,97-98]. Їх результат:

$$j = \frac{\pi}{4} e v_0 N(0) \frac{\Delta^2(T) D}{|\varepsilon(\varphi)|} \sin \varphi \operatorname{th} \frac{|\varepsilon(\varphi)|}{2T},$$

де  $\varepsilon(\varphi) = \pm \Delta(T) \sqrt{1 - D \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$  - дискретні енергетичні рівні зв'язаних станів, які виникають при енергіях менших за величину енергетичних щілини і локалізовані в околі контакту. Ці стани переносять основну частку надструму через контакт. Як показано в [99], ці стани існують навіть в слабких зв'язках, ширина яких є набагато більша за довжину когерентності  $\xi_0$ . В цій роботі досліджувався випадок звужень довільної довжини  $L$ , від граничного випадку  $\frac{L}{\xi_0} \rightarrow 0$  (точковий контакт) до протилежного граничного випадку  $\frac{L}{\xi_0} \gg 1$  (просторово однорідний квазіодновимірний надпровідник). В основі цього дослідження є підхід, який базується на локальному описі надпровідних мезоскопічних систем з використанням формалізму нерівноважних функцій Гріна.

Що ж до даної роботи то однією із задач, яку цікавим є розглянути була задача про контакт, який не був би дуже широким в масштабі

довжини когерентності  $\xi_0$ . Справа в тому, що в згаданих вище роботах прості асимптотичні формули одержуються у випадках широких контактів, коли  $d \gg \xi_0$ , а в тих випадках, коли є прозорість, формально можна одержати результат для будь-якої прозорості, але, при  $D$  не значно менше одиниці відповідь ускладнюється, зокрема, фазова залежність струму. Прості формули виникають, коли  $D \ll 1$ . Однак модель з сталим по модулю  $\Delta$  при немалих  $D$  має бути вдосконалена, аби врахувати внесок в струм, зумовлений просторовою зміною ПВ. Тому було вирішено вдосконалити теорію і врахувати вплив просторової зміни ПВ на величину струму. Унікальна можливість одержати теорію, яка б не викликала якихось сумнівів в тому плані, що використовується спрощена модель, це є теорія поблизу критичної температури. Ефект, який тут додатково має бути взятий до уваги – це вплив струму на просторову зміну ПВ. Це нелінійний зворотний ефект, який приводить до суттєвого ускладнення в теорії, оскільки ми отримуємо кубічне рівняння, при розв'язку якого треба виокремити з трьох коренів потрібний. Значне місце в роботі і посідає розв'язання цієї проблеми.

## Розділ 2

### ЗАГАЛЬНА СХЕМА ОПИСУ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТІВ ПОБЛИЗУ КРИТИЧНОЇ ТЕМПЕРАТУРИ

Даний розділ присвячений загальній схемі дослідження надпровідних контактів при температурах, близьких до критичної. Важливою величиною, яка характеризує надпровідну структуру, є ПВ  $\Delta(\vec{r})$ . ПВ – комплексна функція, модуль якої не залежить від координат в просторово однорідному надпровіднику і є функцією лише від температури. У випадку неоднорідного надпровідника маємо залежність також і від координат. Оскільки головна мета роботи – отримати вираз для густини струму в надпровідних контактах, вихідна формула для якого є функціоналом  $\Delta(\vec{r})$ , то необхідно дослідити просторову зміну ПВ. Так як всі розрахунки виконуються для області температур, близьких до критичної, тому можна використати теорію Гінзбурга-Ландау для знаходження просторової зміни ПВ. Розв’язок відповідного рівняння міститиме невідому сталу, для знаходження якої необхідно мати граничну умову.

Послідовний мікроскопічний опис одержання граничної умови для РГЛ, виходячи з ЛПР для ПВ поблизу границі неоднорідності, було виконано в роботі Галайко В.П., Свідзинський А.В., Слюсарев В.А. [9], а більш докладно розвинений в монографіях Свідзинського А.В. [10–12]. Даний розділ в значній мірі наслідує основні ідеї закладені в цих роботах з деякими модифікаціями, зокрема запропонований новий варіант варіа-

ційного принципу для знаходження граничної умови для РГЛ названий методом квазіортогональності до асимптотики.

В підпункті 2.2.1 на прикладі NS – контакту викладено загальну схему одержання ЛІР для ПВ поблизу границі, виходячи із системи рівнянь Горькова для мацубарівських функцій Гріна із залученням умови самоузгодженості. Коли відходити від границі в глиб надпровідника (на відстань порядку  $\xi(T) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{12}} \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - T/T_c}}$ ), то ЛІР втрачає свою чинність, і ПВ описується РГЛ. Як відбувається перехід від ЛІР до РГЛ, в міру віддалення від границі розглянуто в підпункті 2.2.2, а 2.2.3 з умов зшиву асимптотик розв’язків ЛІР і РГЛ в області їх спільної чинності ( $\xi_0 \ll z \ll \xi(T)$ ), для останнього знайдено граничну умову. Проте гранична умова містить константу, яку необхідно знайти, виходячи з ЛІР. Наближенні способи обчислення цієї константи подані в пункті 2.3.

## 2.1 Контакт нормального металу і надпровідника

### 2.1.1 Побудова ЛІР для ПВ поблизу NS–границі.

Розглянемо контакт нормального металу і надпровідника (надалі NS-контакт). Вважатимемо границю розділу плоскою і такою, що відбиття електронів від неї відсутнє, тобто  $D = 1$ . Нехай півпростір  $z > 0$  заповнює надпровідник, а  $z < 0$  – нормальний метал.

Одержимо рівняння, які описують поведінку ПВ в надпровідній області, і дослідимо їх розв’язки. Як відомо з мікроскопічної теорії надпровідності [10 – 11], джерелом інформації про просторову поведінку параметра впорядкування є умова самоузгодженості

$$\Delta(\vec{r}) = |g|T \sum_{\omega_n} F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}), \quad (2.1)$$

де  $g$  - константа зв’язку, яка дорівнює нулю в нормальному металі і є

сталою в надпровіднику;  $T$  – температура;  $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$  – так звана аномальна функція Гріна, яка є функціоналом від  $\Delta(\vec{r})$ .

$F$  - функція задовольняє систему рівнянь Горькова

$$\begin{cases} (i\omega_n + \hat{\xi})G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta(\vec{r})F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ (i\omega_n - \hat{\xi})F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta^*(\vec{r})G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Тут  $\omega_n = \pi T(2n + 1)$  – непарна мацубарівська частота,  $G_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$  – мацубарівська функція Гріна,  $\hat{\xi} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu$ . Щоб одержати функціональну залежність  $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$  від  $\Delta(\vec{r})$ , потрібно ров'язати систему рівнянь (2.2). Зробити це аналітично в загальному випадку є не можливим. Проте, оскільки приймаємо до розгляду область температур, близьку до критичної, ров'язок можна одержати наближено у вигляді розкладу за ступенями ПВ, який є малим поблизу критичної температури.

Запишемо систему (2.2) в нульовому наближенні по  $\Delta(\vec{r})$

$$\begin{cases} (i\omega_n + \hat{\xi})G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ (i\omega_n - \hat{\xi})F_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

З другого рівняння маємо  $F_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0$ . Справді, ми для одержання (2.3) поклали в (2.2)  $\Delta(\vec{r}) = 0$ , тобто фактично розглядаємо нормальний метал, а в нормальному металі  $F$  - функція дорівнює нулеві. Візьмемо друге рівняння системи (2.2) в першому наближенні

$$(i\omega_n - \hat{\xi})F_{\omega_n}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta^*(\vec{r})G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') = 0.$$

З першого рівняння системи (2.3), записаного в символічній формі, одержуємо

$$G_{\omega_n}^{(0)} = (i\omega_n + \hat{\xi})^{-1}. \quad (2.4)$$

З останнього рівняння, враховуючи (2.4), знаходимо

$$F_{\omega_n}^{(1)} = G_{-\omega_n}^{(0)} \Delta^* G_{\omega_n}^{(0)}.$$



Переходячи до конфігураційного представлення, для функції  $F_{\omega_n}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$  в лінійному по  $\Delta(\vec{r})$  наближенні отримуємо

$$F_{\omega_n}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \int d\vec{r}'' G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}'') G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}'', \vec{r}') \Delta^*(\vec{r}), \quad (2.5)$$

$G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}')$  – мацубарівська функція Гріна нормального металу, для якої на основі (2.4) маємо

$$G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{p}\vec{r}}}{i\omega_n - \xi_p} d\vec{p}. \quad (2.6)$$

Цей інтеграл можна обчислити наближено, оскільки основний внесок в надпровідний стан дають електрони, імпульси яких близькі до фермієвського  $p_0$ .

Перш за все перейдемо в (2.6) до сферичних координат

$$\begin{aligned} G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dp p^2 \frac{e^{ipr \cos \theta}}{i\omega_n - \xi_p} \sin \theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp p^2 \int_{-1}^1 \frac{e^{iprx}}{i\omega_n - \xi_p} dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dp p \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{i\omega_n - \xi_p}. \end{aligned}$$

Далі, приймаючи, що

$$\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p - p_0)(p + p_0) \cong \frac{1}{2m}2p_0(p - p_0) = v_0(p - p_0),$$

тобто  $p = p_0 + \frac{\xi}{v_0}$ , перейдемо до змінної  $\xi$  і замінимо функції, що повільно змінюються під інтегралом їх значенням при  $p = p_0$ . В результаті одержимо

$$\begin{aligned} G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}) &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ip_0 r} e^{i\frac{\xi}{v_0} r} - e^{-ip_0 r} e^{-i\frac{\xi}{v_0} r}}{i\omega_n - \xi} d\xi = \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \left\{ e^{ip_0 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\frac{r}{v_0} \xi}}{i\omega_n - \xi} d\xi - e^{-ip_0 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\frac{r}{v_0} \xi}}{i\omega_n - \xi} d\xi \right\} = \\ &= -\frac{m}{2\pi} e^{ip_0 r \text{sign} \omega_n} e^{-i\frac{|\omega_n|}{v_0} r}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Повернемося тепер до умови самоузгодженості (2.1) і перепишемо її, беручи до уваги виконаний вище розклад (2.5). В результаті одержимо рівняння

$$\Delta(\vec{r}) = |g|T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' G_{-\omega_n}^{*(0)}(\vec{r} - \vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}' - \vec{r}) \Delta(\vec{r}'),$$

або в іншій формі

$$\Delta(\vec{r}) = \int d\vec{r}' K(\vec{r} - \vec{r}') \Delta(\vec{r}'), \quad (2.8)$$

тут  $K(\vec{r} - \vec{r}')$  ядро рівняння, вираз для якого має вигляд

$$K(\vec{r} - \vec{r}') = |g|T \sum_{\omega_n} G_{-\omega_n}^{*(0)}(\vec{r} - \vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (2.9)$$

Тоді для  $K(\vec{r})$  на підставі (2.8) та (2.9) одержимо

$$K(\vec{r}) = \frac{|g|m^2}{4\pi^2 r^2} T_c \sum_{\omega_n} \exp\left(-2\frac{|\omega_n|}{v_0} r\right). \quad (2.10)$$

Зауважимо, що в подальших перетвореннях можна вважати інтегрування поширеним на весь нескінченний простір, якщо під  $g$  розуміти функцію від координат. Лише у відповіді можна врахувати, що  $|g(z)| = |g|\theta(z)$ .

Візьмемо до уваги, що  $\Delta$  залежить лише від  $z$  і запишемо рівняння для  $\Delta(z)$  в такій формі

$$\Delta(z) = \frac{|g|m^2}{4\pi^2} T_c \sum_{\omega_n} \int \exp\left(-2\frac{|\omega_n|}{v_0} r_1\right) \Delta(z + z_1) \frac{d\vec{r}_1}{r_1^2}$$

(ми ввели заміну  $\vec{r}_1 = \vec{r}' - \vec{r}$ ). Запишемо інтеграл по  $\vec{r}_1$  в циліндричних координатах і виконаємо інтегрування по азимутальному куту. Тоді, оскільки  $r_1^2 = \rho^2 + z_1^2$ , маємо

$$\Delta(z) = \frac{|g|m^2}{2\pi} T_c \sum_{\omega_n} \int_0^\infty d\rho \rho \int \frac{\exp\left(-2\frac{|\omega_n|}{v_0} \sqrt{\rho^2 + z_1^2}\right)}{\rho^2 + z_1^2} \Delta(z + z_1) dz_1.$$

Покладаючи  $\rho = z_1 u$ ,  $\sqrt{1+u^2} = 1/x$ , отримуємо після переходу до змінних  $z$  та  $z'$ :

$$\Delta(z) = \frac{|g|m^2}{2\pi} T_c \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_0 x} |z - z'|\right) \Delta(z') dz'. \quad (2.11)$$

Тут ми взяли до уваги, що  $|g|$  зникає при  $z < 0$ . Скористаємося також співвідношенням  $\frac{m^2}{2\pi} = \frac{\pi}{v_0} N(0)$  і запишемо це рівняння через безрозмірну константу зв'язку  $\rho = |g|N(0)$ . В цих позначеннях остаточно маємо

$$\Delta(z) = \int_0^\infty K(z - z') \Delta(z') dz', \quad z > 0. \quad (2.12)$$

$$K(z) = \frac{\pi \rho T_c}{v_0} \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_0 x} |z|\right). \quad (2.13)$$

Таким чином, отримано ЛІР для ПВ на півосі з різницеvim ядром, яке міняється на характерній довжині  $\xi_0 = \frac{v_0}{2\pi T_c}$ . Ядро має деякі важливі особливості, які варто одразу взяти до уваги: 1)  $K(z)$  – парна функція  $z$ ; 2)  $K(z)$  позитивне;

3)  $\int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = \tilde{K}(0) = \pi \rho T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|} = 1$ ; 4)  $1 - \tilde{K}(p)$  має єдиний нуль другого порядку в точці  $p = 0$  (тут  $\tilde{K}(p)$  – перетворення Фур'є). Властивість 3) випливає з визначення критичної температури; обрізання на дебаївській частоті мається на увазі. Властивість 4) випливає з 3) і того, що  $\tilde{K}(p) = \frac{2\pi \rho T_c}{v_0} \sum_{\omega_n} \frac{1}{p} \arctg \frac{v_0 p}{2|\omega_n|}$ . Фактично, враховуючи 3), отримуємо для малих  $p$  асимптотику

$$1 - \tilde{K}(p) \sim \frac{7\zeta(3)}{24\pi^2} \rho \xi_0^2 p^2.$$

Із зазначеного легко побачити, що асимптотика розв'язку рівняння (2.12) на нескінченності є лінійною. Переконалися в цьому неважко: при  $z \rightarrow +\infty$  внесок в інтеграл (2.12) дають великі  $z'$ , отже, в цьому інтегралі

можна розтягнути нижню границю до  $-\infty$ . Після переходу до фур'є-образів отримуємо

$$(1 - \tilde{K}(p))\tilde{\Delta}_{as}(p) = 0.$$

Оскільки  $1 - \tilde{K}(p) \sim p^2$  при малих  $p$ , маємо:  $\tilde{\Delta}_{as}(p) = c_1\delta(p) + c_2\delta'(p)$ , звідки й випливає лінійність асимптотики в конфігураційному просторі. Втім, те, що лінійна функція задовольняє рівняння (2.12) при  $z \rightarrow \infty$ , можна легко побачити і без перетворення Фур'є. Якщо підставити лінійну функцію  $\Delta'z + \Delta$ , де  $\Delta'$  та  $\Delta$  – сталі, в рівняння (2.12), одержимо

$$\begin{aligned} \Delta'z + \Delta = (\Delta'z + \Delta)\pi\rho T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|} + \frac{\pi}{4}\Delta'\rho v_0 T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2} \int_0^1 x \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_0 x} z\right) dx - \\ - \frac{\pi}{2}\Delta\rho T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|} \int_0^1 \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_0 x} z\right) dx. \end{aligned}$$

Оскільки  $\pi\rho T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|} = 1$ , а решта членів у правій частині експоненціально прямують до нуля при  $z \rightarrow +\infty$ , лінійна функція є асимптотичним розв'язком.

Для подальшого аналізу зручно записати інтегральне рівняння в безрозмірних змінних. Покладімо  $\zeta = z/\xi_0$ , тоді це рівняння запишеться у такому вигляді

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty d\zeta' \Delta(\zeta') \int_0^1 \frac{dx}{x} \sum_n \exp\left\{-\frac{|2n+1|}{x} |\zeta - \zeta'|\right\}, \quad (2.14)$$

а його ядро так:

$$K(\zeta) = \frac{\rho}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \sum_n \exp\left\{-\frac{|2n+1|}{x} |\zeta|\right\}. \quad (2.15)$$

Якщо виділити асимптотику на нескінченності, невідомий розв'язок можна записати через нову функцію  $\psi(\zeta)$ , яка прямує до нуля при  $\zeta \rightarrow \infty$ :

$$\Delta(\zeta) = \zeta + q_\infty + \psi(\zeta). \quad (2.16)$$

Тут  $q_\infty$  – константа, яку слід обчислити, оскільки вона визначає граничну умову для РГЛ. Підставимо (2.16) в (2.14) і скористуємося властивістю ядра  $\int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) d\zeta = 1$ , а також його парністю. Отримаємо

$$\psi(\zeta) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \psi(\zeta') d\zeta' = \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta' - q_\infty \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') d\zeta'. \quad (2.17)$$

Легко бачити, що задане  $q_\infty$  відповідає цілком певному розв'язку  $\psi(\zeta)$ . Доведемо це від супротивного. Якби при даному  $q_\infty$  таких розв'язків було два  $\psi_1(\zeta, q_\infty)$  та  $\psi_2(\zeta, q_\infty)$ , то для їх різниці  $\psi_1(\zeta, q_\infty) - \psi_2(\zeta, q_\infty) = \chi(\zeta, q_\infty)$  отримали б однорідне рівняння для функцій  $\chi$  з класу функцій, що на нескінченності обертаються на нуль

$$\chi(\zeta, q_\infty) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \chi(\zeta', q_\infty) d\zeta' = 0.$$

Однак в цьому класі це рівняння має лише нульовий розв'язок. Справді, хай  $\zeta_0$  є значенням, для якого  $|\chi(\zeta_0, q_\infty)| = M$  досягає найбільшого значення. Зрозуміло, що  $0 < \zeta_0 < \infty$ , оскільки  $\chi \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Отже,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\infty} K(\zeta_0 - \zeta') |\chi(\zeta', q_\infty)| d\zeta' \leq M \int_0^{\infty} K(\zeta_0 - \zeta') d\zeta' = \\ &= M \left( 1 - \int_0^{\infty} K(\zeta_0 + \zeta') d\zeta' \right) < M. \end{aligned}$$

Таким чином,  $M = 0$ .

Звідси випливає, що співвідношення, яке визначало б  $q_\infty$  як інтеграл від розв'язку  $\psi(\zeta, q_\infty)$ , могло б бути використане для наближеного обчислення  $q_\infty$ , якщо б такий інтеграл міг бути оцінений на основі відповідного варіаційного принципу.

### 2.1.2 Перехід від лінійного інтегрального рівняння до рівняння Гінзбурга-Ландау

Припустімо, що ПВ змінюється повільно, тоді, зробивши у (2.8) заміну змінної інтегрування  $r^{\vec{r}} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}'$ , візьмемо  $\Delta(\vec{r} + \vec{r}')$  у вигляді розкладу навколо точки з радіус-вектором  $\vec{r}$ , обмежуючись квадратичним доданком:

$$\Delta(\vec{r} + \vec{r}') = \Delta(\vec{r}) + \frac{\partial \Delta(\vec{r})}{\partial r_i} r'_i + \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i \partial r_j} r'_i r'_j. \quad (2.18)$$

Підставимо цей розклад у рівняння (2.8)

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r}) &= \Delta(\vec{r}) |g| T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}') + \\ &+ \frac{\partial \Delta(\vec{r})}{\partial r_i} |g| T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' r'_i G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}') + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i \partial r_j} |g| T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' r'_i r'_j G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Розглянемо окремо кожен доданок в правій частині (2.19). Для першого доданку маємо

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r}) |g| T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}') &= \\ \Delta(\vec{r}) |g| T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}' \int \frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_1) e^{i\vec{p}_1 \vec{r}'} G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_2) e^{-i\vec{p}_2 \vec{r}'} &= \\ \Delta(\vec{r}) |g| T \sum_{\omega_n} \int G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{p}) G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{p}) \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} &= \Delta(\vec{r}) |g| T \sum_{\omega_n} \int \frac{1}{\xi^2 + \omega_n^2} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} = \\ \Delta(\vec{r}) |g| \int \frac{1}{2\xi} \text{th} \frac{\xi}{2T} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Пригадуючи, що  $\rho = |g|N(0)$ , а  $N(0) = \frac{m^2 v_0}{2\pi^2}$ , одержимо

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{r})\rho \int \frac{1}{2\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} d\xi &= \Delta(\vec{r})\rho \left( \int \frac{1}{2\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T_c} d\xi + \right. \\ &\left. \int \frac{1}{2\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} d\xi - \int \frac{1}{2\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T_c} d\xi \right) = \Delta(\vec{r}) \left( 1 + \rho \left( \ln \frac{2\gamma\omega_n}{\pi T} - \ln \frac{2\gamma\omega_n}{\pi T_c} \right) \right) = \\ &= \Delta(\vec{r}) \left( 1 + \rho \ln \frac{T_c}{T} \right) = \Delta(\vec{r}) \left( 1 + \rho \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Другий доданок рівний нулеві. Використовуючи для функції  $G_{\omega_n}^{(0)}$  наближений вираз (2.7), обчислимо третій доданок в (2.19):

$$\begin{aligned} \int d\vec{r}' r'_i r'_j G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}') &= \delta_{ij} \int d\vec{r}' r'^2 G_{-\omega_n}^{*(0)}(-\vec{r}') G_{\omega_n}^{*(0)}(\vec{r}') = \\ &= \delta_{ij} \frac{m^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^\infty dr' r'^2 e^{-\frac{2|\omega_n|}{v_0} r'} = \\ &= \delta_{ij} \frac{m^2}{4\pi^2} 2\pi \frac{2}{3} \int_0^\infty dr' r'^2 e^{-\frac{2|\omega_n|}{v_0} r'} = \delta_{ij} \frac{m^2}{3\pi} 2 \left( \frac{v_0}{2|\omega_n|} \right)^3 = \\ &= \delta_{ij} \frac{m^2 v_0}{2\pi^2} \frac{v_0^2}{6\pi^2 T^3 |2n+1|^3} = \frac{N(0)v_0^2}{6\pi^2 T^3 |2n+1|^3} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Беручи до уваги (2.21) і (2.22), для (2.19) одержуємо

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(\vec{r}) + \rho \Delta(\vec{r}) \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) + \rho \frac{v_0^2}{\pi^2 T^2} \frac{7\zeta(3)}{48} \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i^2}. \quad (2.23)$$

З останнього рівняння бачимо, що основні доданки знищуються, крім того формується нова характерна довжина зміни параметра в порядкування  $\xi(T) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_c}}$ . Оскільки вже в просторово однорідному випадку  $\Delta \sim \sqrt{1 - T/T_c}$ , то доданки, які залишилися, будуть порядку  $(1 - T/T_c)^{3/2}$ . Отже, в даній ситуації виникає потреба продовжити розклад  $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r})$  до кубічного члена по  $\Delta(\vec{r})$ .

Запишемо систему рівнянь Горькова, беручи до уваги перше рівняння в квадратичному наближенні, а друге – кубічному

$$\begin{cases} (i\omega_n - \hat{\xi})G_{\omega_n}^{(2)} + \Delta F_{\omega_n}^{(1)} = 0, \\ (i\omega_n + \hat{\xi})F_{\omega_n}^{(3)} + \Delta^* G_{\omega_n}^{(2)} = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Тут використано символічну форму запису. З цієї системи одержуємо

$$G_{\omega_n}^{(2)} = -\frac{1}{i\omega_n - \hat{\xi}} \Delta F_{\omega_n}^{(1)}, \quad F_{\omega_n}^{(3)} = -\frac{1}{i\omega_n + \hat{\xi}} \Delta^* G_{\omega_n}^{(2)},$$

або

$$G_{\omega_n}^{(2)} = G_{\omega_n}^{(0)} \Delta F_{\omega_n}^{(1)}, \quad F_{\omega_n}^{(3)} = -G_{-\omega_n}^{(0)} \Delta^* G_{\omega_n}^{(0)} \Delta G_{-\omega_n}^{(0)} \Delta^* G_{\omega_n}^{(0)}.$$

Таким чином, у правій частині рівняння (2.8) з'являється ще один доданок (кубічний по ПВ), проте вже в даному доданку можна знехтувати малими градієнтами  $\Delta(\vec{r})$  і взяти його в локальній формі, тоді інтеграли, які там містяться, можна легко обчислити. Зазначені вище дії виконані



аналітично нижче

$$\begin{aligned}
& - |g|T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}_3 \overset{*}{G}_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{r} - \vec{r}_1) \Delta(\vec{r}_1) \overset{*}{G}_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overset{*}{\Delta}(\vec{r}_2) \times \\
& \quad \overset{*}{G}_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \Delta(\vec{r}_3) \overset{*}{G}_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_3 - \vec{r}) = \\
& - |g|T \sum_{\omega_n} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}_3 \overset{*}{G}_{-\omega_n}^{(0)}(-\vec{r}_1) \Delta(\vec{r}_1 + \vec{r}) \overset{*}{G}_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overset{*}{\Delta}(\vec{r}_2 + \vec{r}) \times \\
& \quad \overset{*}{G}_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \Delta(\vec{r} + \vec{r}_3) G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}_3) = \\
& - |g| |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) T \sum_{\omega_n} \int \frac{d\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \times \\
& \int d\vec{r}_3 G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_1) G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_2) G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_3) G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{p}_4) e^{i\vec{p}_1 \vec{r}_1} e^{-i\vec{p}_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} e^{-i\vec{p}_3(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)} e^{-i\vec{p}_4 \vec{r}_3} = \\
& - |g| |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) T \sum_{\omega_n} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left( G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{p}) G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{p}) \right)^2 = \\
& - |g| |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) T \sum_{\omega_n} N(0) 2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} = -\rho |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2}.
\end{aligned}$$

Додаючи цей доданок до правої частини рівняння (2.23), одержимо

$$\Delta(\vec{r}) \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) + \frac{7\zeta(3)}{12} \frac{v_0^2}{4\pi^2 T_c^2} \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i^2} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) = 0. \quad (2.25)$$

Ввівши позначення:

$$\Delta_\infty^2 = \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right), \quad (2.26)$$

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{12}} \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - T/T_c}}, \quad (2.27)$$

де  $\xi_0 = \frac{v_0}{2\pi T_c}$ , рівняння (2.25) можна переписати так

$$\xi^2(T) \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i^2} - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) = 0. \quad (2.28)$$

Отже, отримано нелінійне диференціальне рівняння, в припущенні, що характерна довжина зміни ПВ значно більша за  $\xi_0$ . Це рівняння назива-

ють рівнянням Гінзбурга-Ландау, воно було одержано в феноменологічній теорії ще за довго до побудови мікроскопічної теорії надпровідності. Вище було подано послідовний мікроскопічний його вивід (без магнітного поля).

### 2.1.3 Розв'язання проблеми граничних умов для РГЛ.

Як зазначено вище, на відстанях від границі порядку  $\xi(T)$  ( $\xi(T) \gg \xi_0$ ) і поблизу  $T_c$  справедливе РГЛ, розв'язок якого для випадку  $NS$  – границі містить константу інтегрування, що залишається довільною. Використовуючи асимптотику розв'язку ЛІР на нескінченності, тобто для  $z \gg \xi_0$  з фіксованим відношенням констант  $\Delta/\Delta'$ , можна ототожнити цю величину з невизначеною константою інтегрування РГЛ і, таким чином, отримати для нього граничну умову на  $NS$  – границі.

А зараз зшиємо асимптотику розв'язку ЛІР на нескінченності з асимптотикою розв'язку РГЛ на малих відстанях від границі розділу нормального металу і надпровідника. Зрозуміло, що можливість зшиву заснована на тому, що розв'язок ЛІР та розв'язок РГЛ мають різні характерні мірила зміни. Перший змінюється на довжині  $z \sim \xi_0$  (або  $\zeta \sim 1$ ), другий – на значно більшій довжині  $z \sim \xi(T)$ . Існують  $z$ , які в мірилі  $\xi_0$  є великими, а водночас малими в мірилі  $\xi(T)$ . Асимптотика ЛІР на нескінченності перекривається, таким чином, з асимптотикою РГЛ в нулі. Розв'язок РГЛ дорівнює

$$\Delta(\zeta) = \Delta_\infty \operatorname{th} \frac{(\zeta + \gamma)\xi_0}{\sqrt{2}\xi(T)}. \quad (2.29)$$

При малих  $\zeta$  маємо

$$\Delta(\zeta) = \Delta_\infty \left( \operatorname{th} \frac{\gamma\xi_0}{\sqrt{2}\xi(T)} + \frac{\xi_0}{\sqrt{2}\xi(T)} \frac{\zeta}{\operatorname{ch}^2(\gamma\xi_0/\sqrt{2}\xi(T))} \right).$$

Що ж до розв'язку ЛІР, то його асимптотика при  $z \gg \xi_0$  має вигляд

$$\Delta(\zeta) = C(\zeta + q_\infty). \quad (2.30)$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, знаходимо

$$C = \frac{\Delta_\infty \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}, \quad C q_\infty = \Delta_\infty \operatorname{th} \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}. \quad (2.31)$$

Оскільки  $q_\infty$  є величиною порядку одиниці (його значення буде одержано в наступному пункті), а відношення  $\xi(T)/\xi_0 \gg 1$ , то із співвідношення

$$q_\infty = \frac{\sqrt{2\xi(T)}}{\xi_0} \operatorname{ch}^2 \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}} \operatorname{th} \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}$$

видно, що воно можливе лише за умови мализни аргументу гіперболічного тангенсу. Отже,  $\operatorname{th} \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}} \sim \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}$ ,  $\operatorname{ch} \frac{\gamma \xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}} \sim 1$ . Таким чином, в цьому наближенні

$$\gamma \cong q_\infty, \quad C \cong \Delta_\infty \xi_0 / \sqrt{2\xi(T)}. \quad (2.32)$$

Внаслідок зшиву константа інтегрування у РГЛ виявилася рівною  $q_\infty$ . Заразом визначилася й мультиплікативна стала у розв'язку ЛІР.

## 2.2 Наближені методи обчислення $q_\infty$ .

Встановимо деякі точні співвідношення, які знадобляться для наближеного обчислення  $q_\infty$ . Зауважимо, що рівняння (2.17), яке формально стало неоднорідним після виділення асимптотики, має нетривіальний розв'язок для  $\psi(\zeta)$  лише за умови ортогональності правої частини до розв'язку однорідного рівняння  $\Delta(\zeta)$ . Ця умова має вигляд

$$\int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta' = q_\infty \int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') d\zeta',$$

звідки

$$q_\infty = \frac{\int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'}{\int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') d\zeta'}.$$

Покладімо в чисельнику  $\Delta(\zeta) = q(\zeta) + \zeta$ ,  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} q(\zeta) = q_\infty$ , тоді

$$q_\infty = \frac{I_2 + \int_0^\infty d\zeta q(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'}{\int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') d\zeta'}.$$

Тут запроваджено позначення:  $I_2 = \int_0^\infty d\zeta \cdot \zeta \int_0^\infty d\zeta' \cdot \zeta' K(\zeta + \zeta')$ . Аналогічно

позначимо  $I_1 = \int_0^\infty d\zeta \cdot \zeta \int_0^\infty d\zeta' K(\zeta + \zeta')$ ,  $I_0 = \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' K(\zeta + \zeta')$ .

Зазначимо, що має місце точне співвідношення

$$\int_0^\infty d\zeta \Delta(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') d\zeta' = 2I_1, \quad (2.33)$$

отже, з його урахуванням можна записати таку точну формулу для  $q_\infty$ :

$$q_\infty = \frac{1}{2I_1} \left\{ I_2 + \int_0^\infty d\zeta q(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta' \right\}. \quad (2.34)$$

### 2.2.1 Варіаційний метод

Згідно з (2.34), для визначення  $q_\infty$  потрібно знати інтеграл

$$\int_0^\infty d\zeta q(\zeta) \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'. \quad (2.35)$$

Покажемо, що його можна витлумачити як мінімум функціоналу, для якого необхідна умова екстремуму дається інтегральним рівнянням для  $q(\zeta)$ . Будемо використовувати рівняння для  $q(\zeta) = \Delta(\zeta) - \zeta = q_\infty + \psi(\zeta)$ , яке має вигляд

$$q(\zeta) - \int_0^\infty K(\zeta - \zeta') q(\zeta') d\zeta' = \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'. \quad (2.36)$$

Розгляньмо тепер функціонал  $\Phi$ , визначений на певному класі функцій  $\tilde{q}(\zeta)$

$$\Phi = \frac{\int_0^{\infty} \tilde{q}(\zeta) [\tilde{q}(\zeta) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \tilde{q}(\zeta') d\zeta'] d\zeta}{[\int_0^{\infty} d\zeta \tilde{q}(\zeta) \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta']^2}. \quad (2.37)$$

Прирівнюючи нулю варіаційну похідну  $\delta\Phi/\delta\tilde{q}(\zeta)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} & \tilde{q}(\zeta) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \tilde{q}(\zeta') d\zeta' = \\ & = \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta' \frac{\int_0^{\infty} \tilde{q}(\zeta') [\tilde{q}(\zeta') - \int_0^{\infty} K(\zeta' - \zeta'') \tilde{q}(\zeta'') d\zeta''] d\zeta'}{\int_0^{\infty} d\zeta \tilde{q}(\zeta) \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Функціонал (2.38) не змінюється при масштабному перетворенні функції  $\tilde{q}(\zeta)$ , отже, можливо його задати так, щоб

$$\int_0^{\infty} q(\zeta) [q(\zeta) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') q(\zeta') d\zeta'] d\zeta = \int_0^{\infty} d\zeta q(\zeta) \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta'.$$

При такому виборі умова екстремуму функціоналу (2.38) перетворюється на наше інтегральне рівняння (2.36). При цьому мінімум функціоналу  $\Phi$  дорівнює

$$\Phi_{min} = \left\{ \int_0^{\infty} d\zeta q(\zeta) \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta' \right\}^{-1}. \quad (2.39)$$

Тепер ми бачимо, що згідно з (2.34) потрібний коефіцієнт  $q_{\infty}$  виражається через мінімальне значення функціоналу

$$q_{\infty} = \frac{1}{2I_1} \left( I_2 + \frac{1}{\Phi_{min}} \right). \quad (2.40)$$

Покажемо, що при виборі замість  $\tilde{q}(\zeta)$  пробної функції у вигляді сталої  $\Gamma$ , отримаємо з варіаційного принципу таку апроксимацію для  $\Phi_{min}$ :

$$\Phi_{min} \cong \frac{\int_0^{\infty} d\zeta [1 - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') d\zeta']}{[\int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta']^2} = \frac{I_0}{I_1^2}. \quad (2.41)$$

Тоді для  $q_{\infty}$  на підставі (2.40) отримаємо

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_0} \right). \quad (2.42)$$

Таку саму відповідь можна отримати інакше. Проінтегруємо рівняння (2.36) по  $\zeta$  від нуля до нескінченності. В результаті одержимо

$$\int_0^{\infty} d\zeta q(\zeta) \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') d\zeta' = I_1. \quad (2.43)$$

Підставимо в (2.34) і (2.43) пробну функцію у вигляді константи  $\Gamma$ . Тоді (2.34) дає

$$q_{\infty} \cong \frac{1}{2I} (I_2 + \Gamma I_1),$$

а з (2.43) випливає, що  $\Gamma = I_1/I_0$ . Виключаючи  $\Gamma$ , отримуємо знову (2.42).

Елементарне обчислення інтегралів  $I_0, I_1, I_2$  дає

$$I_0 = \frac{\rho}{4} S_2; \quad I_1 = \frac{\rho}{6} S_3; \quad I_2 = \frac{\rho}{8} S_4,$$

де

$$S_{\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2n + 1|^{-\alpha}.$$

Після підстановки в (2.42) значень сум  $S_2 \cong 2,47$ ,  $S_3 \cong 2,10$ ,  $S_4 \cong 2,02$ , отримуємо для  $q_{\infty}$  чисельне значення:  $q_{\infty} \cong 0,64$ . Воно несуттєво відрізняється від значення  $q_{\infty} \cong 0,70$ , обчисленого на основі точної формули

$$q_{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{k} + \frac{\tilde{K}'(k)}{1 - \tilde{K}(k)} \right) \frac{dk}{k},$$

одержаної методом Вінера-Хопфа в [11].

### 2.2.2 Метод Гальоркіна

Згодом, коли виникла потреба узагальнити метод на контакти, які не мають право-лівої симетрії, побудувати відповідний функціонал не вдалося. Для подолання цієї трудності в роботі [21] автори звернулися до відомого методу Гальоркіна, в якому знати функціонал не потрібно. В цьому методі підставляють пробну функцію безпосередньо в рівняння і знаходять нев'язку, тобто різницю між нулем, який отримали б, якби ця пробна функція виявилася точним розв'язком, і фактичним значенням лівої частини рівняння за умови підстановки у неї обраної пробної функції (очевидно, всі члени в рівнянні слід перенести наліво). Далі вимагають ортогональності нев'язки до пробної функції. У випадку рівняння (2.36)

$$q(\zeta) - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta')q(\zeta')d\zeta' - \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta')\zeta'd\zeta' = 0$$

нев'язка при виборі пробної функції у вигляді сталої  $\Gamma$  дорівнює

$$\begin{aligned} & \Gamma \left( 1 - \int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta')d\zeta' \right) - \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta')\zeta'd\zeta' = \\ & = \Gamma \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta')d\zeta' - \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta')\zeta'd\zeta'. \end{aligned}$$

Умова ортогональності нев'язки до пробної функції (фактично до одиниці) дає

$$\Gamma \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\zeta' K(\zeta + \zeta') - \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\zeta' K(\zeta + \zeta')\zeta' = 0,$$

або в запроваджених вище позначеннях

$$\Gamma I_0 - I_1 = 0, \quad \Gamma = I_1/I_0. \quad (2.44)$$

Тепер можна скористатися точним співвідношенням (2.34), і підставити в нього знайдене значення пробної функції  $\Gamma = I_1/I_0$ . Отримаємо

$$q_\infty = \frac{1}{2I_1}(I_2 + \Gamma I_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_0} \right), \quad (2.45)$$

тобто те саме, що дав варіаційний метод. Очевидно, що працювати з методом Гальоркіна простіше.

### 2.2.3 Метод квазіортогональності до асимптотики

Однак, найпростішим є спосіб наближеного обчислення  $q_\infty$ , який випливає з точних співвідношень (2.34), (2.43). Погляньмо на їх отримання під дещо іншим кутом зору. Як ми бачили, (2.43) отримано шляхом інтегрування рівняння (2.36) з виділеною асимптотикою по  $\zeta$  і знищенням інтеграла  $\int_0^\infty \psi(\zeta) d\zeta$ . Аналогічно для отримання другого співвідношення домножаємо рівняння (2.36) на  $\zeta$  і інтегруємо від нуля до нескінченності. Далі так само знищується член  $\int_0^\infty d\zeta \cdot \zeta \psi(\zeta)$  стандартним перетворенням з використанням формули

$$\int_0^\infty K(\zeta - \zeta') \zeta d\zeta = \zeta' + \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \zeta d\zeta.$$

У висліді одержуємо

$$-\int_0^\infty d\zeta \cdot \zeta \int_0^\infty K(\zeta + \zeta') \psi(\zeta') d\zeta' = I_2 - q_\infty I_1.$$

Переходячи тепер до функції  $q(\zeta) = \psi(\zeta) + q_\infty$ , надаємо другому співвідношенню форми

$$\int_0^\infty d\zeta \cdot \zeta \int_0^\infty d\zeta' K(\zeta + \zeta') q(\zeta') = 2q_\infty I_1 - I_2.$$

Це є точна формула (2.36).



Який сенс цих перетворень? В першому випадку ми множили рівняння на одиницю, в другому – на  $\zeta$  і робили перетворення, які дали би в лівій частині рівності нуль, якби одиниця або  $\zeta$  були розв’язками однорідного рівняння. Однак це не так, взяті функції є лише асимптотиками такого розв’язку при великих  $\zeta$ . Тому нуля не отримуємо, але основні в певному сенсі члени знищуються. Одержані співвідношення можна назвати умовами квазіортогональності (неповної ортогональності) до асимптотики. Ці умови мають форму точних співвідношень, з яких і обчислюється наближено  $q_\infty$  після вибору функції  $q(\zeta)$  у вигляді константи. Даний метод був запропонований в [28] для обчислення коефіцієнта  $q_\infty$  при розгляді NIS – границі за наявності немагнітних домішок. Саме такий варіант схеми наближених обчислень буде використовуватись в наступних розділах.

### 2.3 Висновки та обговорення

Зробимо певні висновки з виконаних вище розрахунків. При розгляді просторово неоднорідних надпровідників при температурі, близькій до критичної, можна скористатися мализною параметра впорядкування для наближеного розв’язання відповідних рівнянь теорії. Таким чином, з системи рівнянь Горькова, використовуючи умову самоузгодженості, одержано для параметра впорядкування лінійне інтегральне рівняння, з якого бачимо, що характерна довжина просторової зміни  $\Delta(\vec{r})$  є порядку  $\xi_0$ . Якщо в цьому рівнянні розглядати великі  $r$  ( $r \gg \xi_0$ ) і вважати, що ПВ змінюється повільно, то виникає можливість розкладу  $\Delta(\vec{r} + \vec{r}')$  в ряд по  $\vec{r}'$  під знаком інтеграла. Внаслідок цього лінійні по  $\Delta$  члени знищуються (з врахуванням рівняння для критичної температури), а залишається член з другою похідною від  $\Delta$  по  $r$  і член порядку  $(1 - T/T_c)\Delta$ , тому виникає потреба продовжити розклад  $F_{\omega_n}(\vec{r}, \vec{r}')$  і враховувати на-

ступний, кубічний по  $\Delta(\vec{r})$  член, оскільки він буде того ж порядку як і ті, що залишились. Отже, ПВ описується: ЛІР на відстанях від границі порядку  $\xi_0$ , нелінійним диференціальним рівнянням на відстанях значно більших за  $\xi_0$ . Тому напевно існує область, де відбувається перехід від ЛІР до РГЛ, тобто область чинності обох цих рівнянь. Саме наявність цієї області дозволяє з ЛІР знайти граничну умову для РГЛ.

## Розділ 3

### РОЗРАХУНОК СТРУМУ В SNS – КОНТАКТІ ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ТОВЩИНІ НОРМАЛЬНОГО ПРОШАРКУ ТА У ВИПАДКУ НАЯВНОСТІ НЕМАГНІТНИХ ДОМШОК ДОВІЛЬНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ

#### 3.1 Вступ

В даному розділі розглядатиметься контакт двох надпровідників, розділених прошарком нормального металу (SNS – контакт). Для опису струмових станів в надпровідних контактах типу SNS при температурах, не надто близьких до критичної використовується модель з кусково-неперервним за модулем ПВ, який вважається рівним нулю в нормальному металі і відмінним від нуля та сталим в надпровіднику. А для того, щоб уможливити існування струмових станів, припускається наявність різниці фаз між обома берегами контакту. Насправді ПВ зменшується при наближенні до границі на характерній довжині  $\xi_0$  – довжині когерентності – і врахування цього зменшення ПВ впливає тільки на чисельний коефіцієнт в струмі для контактів, коли товщина нормального прошарку  $d$  є набагато більша за  $\xi_0$ . Однак спрощена модель не може застосовуватись в області температур, близьких до критичної, за яких характерна довжина збільшується в  $(1 - T/T_c)^{-1/2}$  разів. При температурах, близьких до критичної, потрібно враховувати просторову зміну

ПВ.

Метою даного розділу є дослідження струмових станів в  $SNS$  – контакті для температур, близьких до критичної, та при довільній товщині нормального прошарку в масштабі довжини когерентності  $\xi_0$ . Розглядаються два випадки – чистого контакту та контакту за наявності немагнітних домішок. Природно вважати, що критичний струм зменшується при зростанні товщини нормального прошарку. Виникає питання, якою є характерна величина цього зменшення. Оскільки ПВ при температурах, близьких до критичної, є малим, то фізичні величини в лінійному по  $\Delta(\vec{r})$  наближенні можуть бути виражені через функцію Гріна нормального металу. Характерна довжина  $\xi_N(T)$ , на якій міняється ця функція є порядку  $v_0/T$ , а оскільки  $T \sim T_c$ , то вона виявляється порядку довжини когерентності  $\xi_0$ . Якщо довжина  $l$  вільного пробігу електронів скінченна, характерна довжина в функції Гріна нормального металу дорівнює  $(1/\xi_0 + 1/l)^{-1}$ . Іншими словами, характерна довжина повинна бути рівна  $\min(\xi_0, l)$ . Звідси випливає, що ця характерна довжина буде визначати зменшення струму при зростанні  $d$ . Насправді, як добре відомо (див. [12]), при  $l \ll \xi_0$  характерна довжина є  $\xi_d = \sqrt{\xi_0 l/3}$ , тобто виражається не через середнє гармонічне значень  $\xi_0$  і  $l$ , а через їх середнє геометричне. При  $l \gg \xi_0$  характерною довжиною є  $\xi_0$ . Очевидно, виникнення нової характерної довжини пов'язане з наведенням надпровідних кореляцій в нормальному металі, але не очевидним є те, як відбувається перехід від однієї характерної довжини до іншої, а саме, від  $\xi_d = \sqrt{\xi_0 l/3}$  до  $\xi_0$  при зростанні довжини вільного пробігу. Це питання буде розглянуто в пункті 3.6. В пункті 3.2 представлено схему дослідження просторової поведінки ПВ поблизу NS – границі в  $SNS$  – контакті. Для цього використано ЛІР, яке є справедливим на відстанях від границі порядку  $\xi_0$ . РГЛ, якому задовольняє ПВ на відстанях  $z \gg \xi_0$  вивчається в (2.2). В 3.3

одержано розв'язок РГЛ з врахуванням доданку, що містить надплинну швидкість, тобто з'ясовано вплив струму на просторову поведінку ПВ. Використовуючи метод квазіортогональності до асимптотики, одержано граничну умову, що дало можливість зафіксувати невідому сталу, яка міститься в розв'язку РГЛ.

Розрахунки для рівноважних струмових станів в контакті подані в пункті 3.4. Асимптотичні випадки  $v_s = 0$  і  $d \gg \xi_0$ , виходячи із одержаного загального результату, будуть розглянуті в пункті 3.5.

### 3.2 Поведінка ПВ поблизу NS – границі в SNS – контакті

Вважатимемо поверхні, що розділяють нормальний метал і надпровідник, плоскими, а вісь  $0Z$  перпендикулярною до них. Нехай надпровідник заповнює область  $|z| > d/2$ , а нормальний метал –  $|z| < d/2$ . Відбиття електронів від NS - границі відсутнє, тобто коефіцієнт проходження  $D = 1$ . Константу ефективного притяжіння між електронами покладемо рівною нулю в нормальному металі і відмінною від нуля та сталою в надпровіднику.

Просторова поведінка ПВ  $\Delta(z)$  в надпровіднику поблизу NS - границі описується ЛІР. Метод побудови цього рівняння було представлено в розділі I, його вигляд з врахуванням геометрії задачі такий

$$\Delta(z) = \int_{-\infty}^{-d/2} K(z - z')\Delta(z')dz' + \int_{d/2}^{\infty} K(z - z')\Delta(z')dz' \quad (3.1)$$

з ядром

$$K(z) = \frac{\pi\rho T_c}{v_0} \sum_{\omega_n} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{2|\omega_n||z|}{v_0 x}\right), \quad (3.2)$$

де  $\omega_n = \pi T_c(2n + 1)$  – непарна Мацубарівська частота (для статистики Фермі);  $\rho = |g|N(0)$  – безрозмірна константа зв'язку електронів,  $N(0)$  – густина електронних станів на поверхні сфери Фермі;  $v_0$  – швидкість Фермі.

Для подальшого дослідження рівняння (3.1) зручно переписати так, щоб інтегрування виконувалось на півосі  $z > 0$ . Для цього введемо парну  $\Delta_s(z)$  і непарну  $\Delta_a(z)$  частини ПВ:

$$\Delta_s(z) = \frac{1}{2}(\Delta(z) + \Delta(-z)), \quad \Delta_a(z) = \frac{1}{2}(\Delta(z) - \Delta(-z)),$$

рівняння для яких матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_s(z) &= \int_{d/2}^{\infty} \{K(z - z') + K(z + z')\} \Delta_s(z') dz', \\ \Delta_a(z) &= \int_{d/2}^{\infty} \{K(z - z') - K(z + z')\} \Delta_a(z') dz'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Виконаємо зсув змінних  $z$  і  $z'$  на  $d/2$  і позначимо зсунуті функції тими самими літерами, тобто  $\Delta_{s,a} \left\{ z + \frac{d}{2} \right\} \rightarrow \Delta_{s,a}(z)$ . В результаті одержимо

$$\begin{aligned} \Delta_s(z) &= \int_0^{\infty} \{K(z - z') + K(z + z' + d)\} \Delta_s(z') dz', \\ \Delta_a(z) &= \int_0^{\infty} \{K(z - z') - K(z + z' + d)\} \Delta_a(z') dz'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

З цими рівняннями простіше працювати в безрозмірних змінних, тому покладемо  $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$ ,  $a = \frac{d}{\xi_0}$ , де  $\xi_0 = \frac{v_0}{2\pi T_c}$  – ДК. Тоді рівняння (3.4) запишуться у такому вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) &= \int_0^{\infty} \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \Delta_s(\zeta') d\zeta', \\ \Delta_a(\zeta) &= \int_0^{\infty} \{K(\zeta - \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} \Delta_a(\zeta') d\zeta', \end{aligned} \quad (3.5)$$

а їх ядро так

$$K(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x} |\zeta|\right).$$

З (3.1) можна показати, що асимптотика ПВ на нескінченності обох знаків є лінійною. Для цього зробимо в першому доданку рівняння (3.1) заміну  $z \rightarrow -z$ , тоді при великих  $z$   $z + z' \rightarrow \infty$ , а ядро експоненціально до нуля (див. 3.2). В другому доданку при великих  $z$  можемо нижню межу в інтегралі покласти рівною нулю. В результаті одержимо рівняння, асимптотика якого, як вже було показано в розділі I, є лінійною. Отже покладемо

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) &\stackrel{as}{=} \Delta'_+ \zeta + \Delta_+, & \zeta \rightarrow +\infty, \\ \Delta(\zeta) &\stackrel{as}{=} \Delta'_- \zeta + \Delta_-, & \zeta \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Під нескінченністю розуміється область  $z \gg \xi_0$  ( $\zeta \gg 1$ ). Для парних і непарних розв'язків матимемо відповідно

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) &\stackrel{as}{=} C_1(\zeta + q_{1,\infty}), & \zeta \rightarrow +\infty, \\ \Delta_a(\zeta) &\stackrel{as}{=} C_2(\zeta + q_{2,\infty}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

При цьому

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta'_+ - \Delta'_-, & C_1 q_{1,\infty} &= \Delta_+ + \Delta_-, \\ C_2 &= \Delta'_+ + \Delta'_-, & C_2 q_{2,\infty} &= \Delta_+ - \Delta_-. \end{aligned}$$

Після виключення сталих  $C_1$  і  $C_2$  одержимо

$$\begin{aligned} (\Delta'_+ - \Delta'_-) q_{1,\infty} &= \Delta_+ + \Delta_-, & \zeta \rightarrow +\infty, \\ (\Delta'_+ + \Delta'_-) q_{2,\infty} &= \Delta_+ - \Delta_-, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Сталі  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  не є довільними, вони фіксуються розв'язком ЛІР однозначно. Нашим подальшим завданням буде їх обчислення, оскільки вони входитимуть у кінцевий вираз для густини струму.

Існує декілька методів, які можуть бути використані для цього. Історично першим був метод Вінера-Хопфа, який хоч і дає точний результат, проте є громіздким, а для одержання кінцевих значень вимагає чисельних розрахунків. Наближений метод (похибка порівняно з точними розрахунками порядку кількох відсотків) базується на варіаційному принципі Рітца. В цьому методі для розв'язання відповідних рівнянь потрібно побудувати функціонал, а це не завжди вдається (наприклад у відсутності право-лівої симетрії). Тому для задач такого типу в роботі [9] був запропонований метод Гальоркіна.

В даному дослідженні для знаходження значень сталих  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  використовуватиметься так званий метод квазіортогональності до асимптотики, вперше запропонований в [28].

Перейдемо до розгляду рівняння (3.5). При цьому достатньо розглянути лише рівняння для парної частини ПВ  $\Delta_s(\zeta)$ . Виділяючи асимптотику його розв'язку на нескінченності

$$\Delta_s(\zeta) = C_1(\zeta + q_{1,\infty} + \psi(\zeta)), \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi(\zeta) = 0$$

і підставляючи цей вираз в (3.5), отримаємо таке рівняння для функції  $\psi(\zeta)$ :

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) - \int_0^{\infty} \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \psi(\zeta') d\zeta' = \\ \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \zeta' d\zeta' - \\ - q_{1,\infty} \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} d\zeta'. \quad (3.9) \end{aligned}$$



Тут використано формули

$$\int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') d\zeta' = 1 - \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') d\zeta', \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \zeta' d\zeta' = \zeta + \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta', \quad (3.11)$$

які легко перевірити.

Тепер проінтегруємо рівняння (3.9) по  $\zeta$  від нуля до нескінченності.

Використовуючи рівність (3.11), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} \psi(\zeta') d\zeta' = \\ \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \zeta' d\zeta' - \\ - q_{1,\infty} \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} d\zeta'. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Друге необхідне співвідношення знайдемо, домножаючи (3.9) на  $\zeta$  і інтегруючи по  $\zeta$  від нуля до нескінченності. Тоді, використовуючи рівність (3.10), знайдемо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\zeta \zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \psi(\zeta') d\zeta' = \\ - \int_0^{\infty} d\zeta \zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \zeta' d\zeta' + \\ + q_{1,\infty} \int_0^{\infty} d\zeta \zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} d\zeta'. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Запровадимо нову функцію  $q(\zeta) = q_{1,\infty} + \psi(\zeta)$ . Очевидно, враховуючи (3.8), маємо  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} q(\zeta) = q_{1,\infty}$ . Тоді зробимо в рівняннях (3.12) і (3.13)

заміну  $\psi(\zeta) = q(\zeta) - q_{1,\infty}$ . В результаті маємо два точних співвідношення

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} q(\zeta') d\zeta' &= I_1 + I_1(a), \\ \int_0^\infty d\zeta \zeta \int_0^\infty \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} q(\zeta') d\zeta' &= \\ 2q_{1,\infty} I_1 - I_2 - I_2(a), \end{aligned} \quad (3.14)$$

що будуть використані надалі для знаходження значень сталих  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$ .

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} I_0(a) &= \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' K(\zeta + \zeta' + a), \\ I_1(a) &= \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' \zeta' K(\zeta + \zeta' + a), \\ I_2(a) &= \int_0^\infty d\zeta \zeta \int_0^\infty d\zeta' \zeta' K(\zeta + \zeta' + a), \\ I_k &= I_k(0), k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

З'ясуємо сенс виконаних вище перетворень. В першому рівнянні було домножено на одиницю, а в другому – на  $\zeta$  і проінтегровано по  $\zeta$ . Коли  $b$  і  $\zeta$  були розв'язками однорідного рівняння, то ліва частина рівності дорівнювала  $b$  тотожно нулю. Нуля ми не отримали тому, що функції  $b$  і  $\zeta$  не є розв'язками однорідного рівняння, вони є лише асимптотиками його розв'язку при великих  $\zeta$ . Однак основні в певному сенсі члени знищуються. Співвідношення (3.14) отримані в роботі [28], де їх названо умовами квазіортогональності до асимптотики.

Введемо в рівняннях (3.14) пробну функцію  $\Gamma$ , яку вважатимемо

невизначеною сталою, замість  $q(\zeta)$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\Gamma(I_0 - I_0(a)) &= I_1 + I_1(a), \\ \Gamma(I_1 + I_1(a)) &= -I_2 - I_2(a) + 2q_{1,\infty}I_1.\end{aligned}$$

Звідси можна знайти як сталу  $\Gamma$  так і вираз для  $q_{1,\infty}$

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{2I_1} \left\{ I_2 + I_2(a) + \frac{(I_1 + I_1(a))^2}{I_0 - I_0(a)} \right\}. \quad (3.15)$$

Вираз для  $q_{2,\infty}$  відрізняється від  $q_{1,\infty}$  лише знаком перед  $I_k(a)$ , це легко зрозуміти з вигляду системи (3.5). Тому

$$q_{2,\infty} = \frac{1}{2I_1} \left\{ I_2 - I_2(a) + \frac{(I_1 - I_1(a))^2}{I_0 + I_0(a)} \right\}. \quad (3.16)$$

Беручи до уваги введені вище позначення для інтегралів, подамо вирази для  $q_{1,\infty}$ ,  $q_{2,\infty}$  в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}q_{1,\infty}(a) &= \frac{12\zeta(3)}{7} \left\{ \frac{\pi^4}{384} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^3}{(2n-1)^4} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\left[ \frac{7\zeta(3)}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^2}{(2n-1)^3} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} \right]^2}{\frac{\pi^2}{16} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x}{(2n-1)^2} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\}} \right\}, \quad (3.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{2,\infty}(a) &= \frac{12\zeta(3)}{7} \left\{ \frac{\pi^4}{384} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^3}{(2n-1)^4} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\left[ \frac{7\zeta(3)}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^2}{(2n-1)^3} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} \right]^2}{\frac{\pi^2}{16} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x}{(2n-1)^2} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\}} \right\}. \quad (3.18)\end{aligned}$$

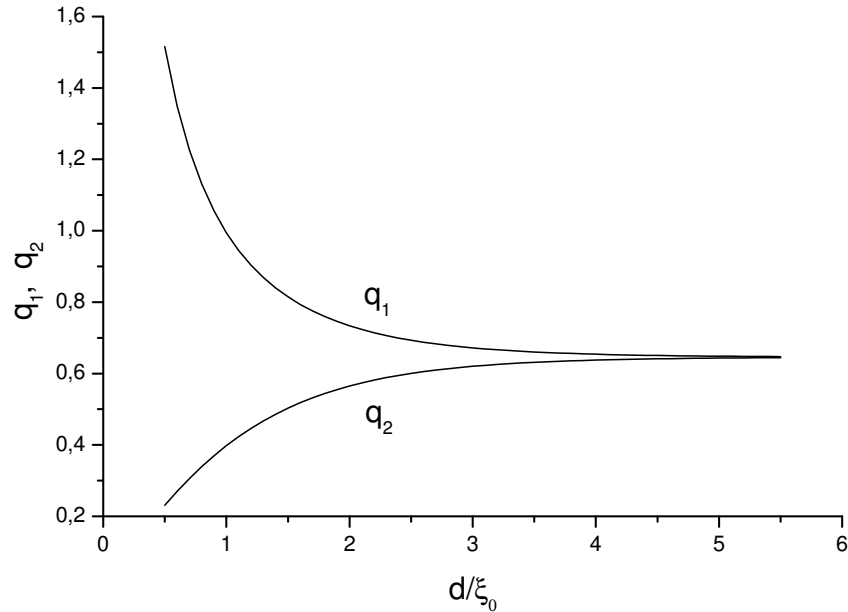


Рис. 3.1: Крива залежності значення  $q_{1,\infty}$  та  $q_{2,\infty}$  від товщини нормального прошарку.

Звичайно формули (3.15) і (3.16) дають наближене значення коефіцієнтів  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$ , оскільки замість точного виразу для  $q(\zeta)$  взято було сталу  $\Gamma$  як пробну функцію. Зазначимо, що такий самий результат отримується іншими варіаційними методами, якщо пробна функція аналогічна. Проте запропонований тут метод квазіортогональності до асимптотики є найпростішим із них. З (3.15) і (3.16) випливає також, що  $q_{1,\infty} \rightarrow \infty$ ,  $q_{2,\infty} \rightarrow 0$ , якщо  $a \rightarrow 0$ .

### 3.3 Дослідження просторової поведінки ПВ з врахуванням надплинної швидкості

#### 3.3.1 Розв'язування РГЛ для ПВ.

В попередньому пункті було досліджене ЛІР, якому задовольняє ПВ  $\Delta(\vec{r})$  поблизу границі нормального металу і надпровідника на відстанях порядку  $\xi_0$ . Якщо відійти вглиб надпровідника на відстань порядку  $\xi(T)$ , ЛІР втрачає свою чинність, і ПВ описується РГЛ. Те, як відбувається пе-

рехід від ЛІР до РГЛ, було показано в розділі I, там же був одержаний розв'язок РГЛ у безструмовому випадку для SN-контакту. Цей розв'язок використовується [11] і у випадку наявності струму в контакті, що означає нехтування впливом струму на просторову зміну ПВ. Оскільки в даному розділі цей вплив буде враховано, то розв'язок РГЛ слід шукати із збереженням в ньому доданку, який містить надплинну швидкість.

Випишемо РГЛ для ПВ  $\Delta(\vec{r})$

$$\xi^2(T) \frac{\partial^2 \Delta(\vec{r})}{\partial r_i^2} - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\vec{r})|^2 \Delta(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) = 0, \quad (3.19)$$

де  $\Delta_\infty^2 = \frac{8\pi^2 T_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$  – значення ПВ на нескінченності,  $\xi(T) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{12}} \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - T/T_c}}$  – характерна довжина зміни ПВ поблизу критичної температури. Беручи до уваги, що просторова однорідність порушена лише в напрямку осі OZ і переходячи до безрозмірної змінної  $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$ , рівняння (3.19) можна переписати у формі

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} \frac{d^2 \Delta(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\zeta)|^2 \Delta(\zeta) + \Delta(\zeta) = 0 \quad (3.20)$$

Оскільки припускається наявності струму в контакті, то розв'язок рівняння (3.20) слід шукати у вигляді

$$\Delta(\zeta) = e^{\pm i\varphi/2} \Delta_\infty f(\zeta) e^{2im\chi(\zeta)}. \quad (3.21)$$

Тут введена фаза ПВ, пов'язана з надплинною швидкістю  $\frac{d\chi}{d\zeta} = \xi_0 v_s$ . Ця функція вважається всюди неперервною, зокрема покладемо

$$\chi(d/2) = \chi(-d/2) = 0.$$

Однак для існування ненульового струму слід допускати наявність стрибка фази між обома берегами контакту. З цією метою введений фазовий множник, не залежний від координат в межах кожного з надпровідників, але різний в них обох. Без обмеження загальності можна вважати, що

наявність різниці фаз  $\varphi$  між берегами означає значення  $-\varphi/2$  для лівого і  $\varphi/2$  для правого надпровідника. Після підстановки (3.21) в (3.20) для функції  $f(\zeta)$  маємо рівняння

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - \xi^2(T) 4m^2 v_s^2(\zeta) f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0. \quad (3.22)$$

Уявна частина РГЛ, яка виникає при підстановці (3.21), зводиться до рівняння неперервності  $\text{div} \vec{j} = 0$ , яке в даному (одновимірному) випадку дає рівність

$$v_s(\zeta) f^2(\zeta) = \text{const}. \quad (3.23)$$

За умов слабкої надпровідності приймається, що  $f$  не міняється під впливом струму і член  $-4\xi^2(T)m^2 v_s^2 f$  в РГЛ нехтується. Тоді рівняння неперервності з урахуванням граничної умови  $f(\infty) = 1$ , яка слідує з (3.23), можна записати у вигляді  $v_s(\zeta) f^2(\zeta) = v_s(\infty)$ . Проте, якщо мати за мету розглянути більш загальний випадок, то слід зберегти в РГЛ доданок, що містить надплинну швидкість.

На нескінченності  $f$  є константа, тоді з рівняння (3.22) одержимо

$$f_\infty^2 = 1 - 4m^2 v_s^2(\infty) \xi^2(T), \quad f_\infty \equiv f(\infty).$$

З (3.23), залучаючи останню рівність, маємо

$$v_s^2(\zeta) = \frac{1 - f_\infty^2}{4m^2 \xi^2(T)} \frac{f_\infty^4}{f^4(\zeta)}. \quad (3.24)$$

Підставляючи (3.24) в (3.22), одержуємо замкнене рівняння відносно  $f(\zeta)$

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - (1 - f_\infty^2) \frac{f_\infty^4}{f^3(\zeta)} + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0. \quad (3.25)$$

Для даного рівняння легко знаходиться перший інтеграл

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} (f'(\zeta))^2 + (1 - f_\infty^2) \frac{f_\infty^4}{f^2(\zeta)} + f^2(\zeta) - \frac{1}{2} f^4(\zeta) = \text{const}. \quad (3.26)$$

Розглядаючи останнє рівняння в границі  $\zeta \rightarrow \infty$ , фіксуємо константу

$$\text{const} = 2f_\infty^2 \left( 1 - \frac{3}{4} f_\infty^2 \right).$$

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння першого порядку для  $f(\zeta)$

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2}(f'(\zeta))^2 + (1 - f_\infty^2)f_\infty^2 \left( \frac{f_\infty^2}{f^2(\zeta)} - 1 \right) + f^2(\zeta) - f_\infty^2 + \frac{1}{2}f_\infty^4 - \frac{1}{2}f^4(\zeta) = 0, \quad (3.27)$$

яке можна привести до наступної форми

$$\frac{f(\zeta)df(\zeta)}{[f_\infty^2 - f^2(\zeta)] \sqrt{2f_\infty^2 - 2 + f^2(\zeta)}} = \frac{\xi_0 d\zeta}{\sqrt{2}\xi(T)}. \quad (3.28)$$

Виконуючи інтегрування, остаточно знаходимо

$$f(\zeta) = \left\{ \frac{2(1 - f_\infty^2)}{\text{ch}^2 \frac{\zeta + C}{\sqrt{2}\xi(T)} \xi_0} + f_\infty^2 \text{th}^2 \frac{\zeta + C}{\sqrt{2}\xi(T)} \xi_0 \right\}^{1/2}, \quad (3.29)$$

де  $C$  – стала інтегрування, для знаходження якої потрібно мати граничну умову. Це питання буде розглядатися в наступному підпункті. Розв'язку (3.29) можна надати й іншої форми

$$f(\zeta) = \left\{ 2(1 - f_\infty^2) + (3f_\infty^2 - 2) \text{th}^2 \frac{\zeta + C}{\sqrt{2}\xi(T)} \xi_0 \right\}^{1/2}, \quad (3.30)$$

або через надплинну швидкість

$$f(\zeta) = \left\{ 1 - 4m^2v_s^2(\infty)\xi^2(T) + \frac{12m^2v_s^2(\infty)\xi^2(T) - 1}{\text{ch}^2 \frac{\zeta + C}{\sqrt{2}\xi(T)} \xi_0} \right\}^{1/2}. \quad (3.31)$$

Порівнюючи одержаний результат (формула (3.29)) з відомим раніше (2.29), бачимо, що врахування в РГЛ доданку з надплинною швидкістю приводить до виникнення нового доданку у виразі для  $f(\zeta)$ .

Якщо покласти  $v_s(\infty) = 0$  (або  $f_\infty = 1$ , що є еквівалентно) в формулі (3.29), то повернемося до старого результату (2.29). Криві залежності  $f(\zeta)$  при значеннях  $f_\infty = 1$  та  $f_\infty \lesssim 1$  подані на рисунку 3.1.

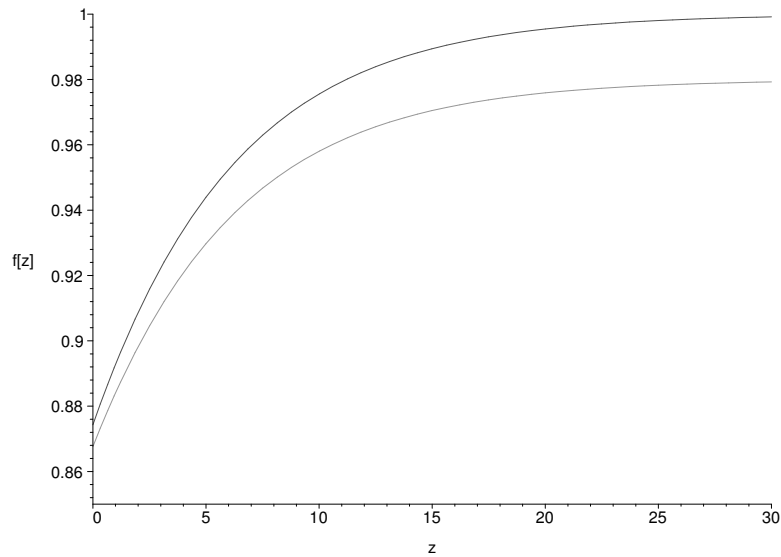


Рис. 3.2: Залежність значення модуля параметра впорядкування від відстані до NS – границі

З цього креслення ми бачимо, що наявність струму в контакті понижує значення ПВ в порівнянні із еквівалентним, але безструмовим контактом.

### 3.3.2 Граничне значення для параметра впорядкування

Перший інтеграл РГЛ (3.25) має вигляд

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} f'(\zeta) - \frac{f_\infty^2 - f^2(\zeta)}{f(\zeta)} \sqrt{f_\infty^2 - 1 + \frac{1}{2} f(\zeta)} = 0. \quad (3.32)$$

Покладімо в рівнянні (3.32)  $\zeta = a/2$  і нехай  $f(a/2) \equiv f_+$ . В результаті матимемо співвідношення між  $f'_+$  і  $f_+$

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} f'_+ - \frac{f_\infty^2 - f_+^2}{f_+} \sqrt{f_\infty^2 - 1 + \frac{1}{2} f_+^2} = 0. \quad (3.33)$$

Для одержання ще одного співвідношення між  $f'_+$  і  $f_+$  звернімося до граничних умов (3.8), і запишемо їх через функцію  $f(\zeta)$  та її похідну  $f'(\zeta)$  на границях надпровідного контакту (з точки зору теорії Гінзбурга-Ландау). В цих термінах і після розділення дійсної та уявної частин, ці



співвідношення набувають форми чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} 2q_{1,\infty}q_{2,\infty}f'_+ - (q_{1,\infty} + q_{2,\infty})f_+ + (q_{1,\infty} - q_{2,\infty})f_- \cos \varphi = 0, \\ 4mv_s\xi_0q_{1,\infty}q_{2,\infty}f_+ + (q_{2,\infty} - q_{1,\infty})f_- \sin \varphi = 0, \\ 2q_{1,\infty}q_{2,\infty}f'_- + (q_{1,\infty} + q_{2,\infty})f_- + (q_{2,\infty} - q_{1,\infty})f_+ \cos \varphi = 0, \\ 4mv_s\xi_0q_{1,\infty}q_{2,\infty}f_- + (q_{2,\infty} - q_{1,\infty})f_+ \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Виписані рівняння мають нетривіальний розв'язок за умови

$$4mv_s\xi_0 = \left( \frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}} \right) \sin \varphi. \quad (3.35)$$

Беручи її до уваги, легко знаходимо з (3.34), що

$$\frac{f'_+}{f_+} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_{1,\infty}} + \frac{1}{q_{2,\infty}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_{1,\infty}} - \frac{1}{q_{2,\infty}} \right) \cos \varphi \equiv \frac{1}{q_\infty}. \quad (3.36)$$

$$f_+ = f_-, \quad f'_+ = -f'_-, \quad (3.36)$$

Таким чином, насправді  $f_+ = f_-$ , як і має бути з огляду на симетрію задачі; з симетрією пов'язане також і співвідношення  $f'_+ = -f'_-$ , оскільки нахил кривої зліва є дзеркальним відображенням нахилу справа; з третьої формули випливає, що  $f'_+ = f_+/q_\infty$ .

Використовуючи (3.36), виключимо з (3.33)  $f'_+$ . В результаті приходимо до замкненого рівняння відносно  $f_+$ :

$$f_+^6 - 2 \left( 1 + \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2 q_\infty^2} \right) f_+^4 + f_\infty^2 (4 - 3f_\infty^2) f_+^2 + 2f_\infty^4 (f_\infty^2 - 1) = 0. \quad (3.37)$$

Розглянемо рівняння (3.37) у випадку  $f_\infty = 1$

$$f_+^4 - 2 \left( 1 + \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2 q_\infty^2} \right) f_+^2 + 1 = 0. \quad (3.38)$$

Це рівняння можна привести до наступної форми:

$$\frac{2\xi^2(T)}{\xi_0^2 q_\infty^2} f_+^2 = (f_+^2 - 1)^2, \quad (3.39)$$

яке після взяття кореня і врахування, що  $0 \leq f_+ \leq 1$ , має вигляд квадратного рівняння

$$f_+^2 + \frac{\sqrt{2}\xi(T)}{\xi_0 q_\infty} f_+ - 1 = 0, \quad (3.40)$$

його корені

$$(f_+)_{1,2} = -\frac{\xi(T)}{\sqrt{2}q_\infty\xi_0} + \sqrt{1 + \frac{\xi^2(T)}{2q_\infty^2\xi_0^2}}. \quad (3.41)$$

З двох коренів залишаємо той, який є додатній. Таким чином, ми отримали відомий результат для  $f_+$ , коли доданок з надплинною швидкість в РГЛ не враховується.

Повернемося до рівняння (3.37). Це є звичайне кубічне рівняння відносно  $f_+^2 \equiv x$  і, якщо ввести для його коефіцієнтів позначення:

$$a = -2 \left( 1 + \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2 q_\infty^2} \right), b = f_\infty^2 (4 - 3f_\infty^2), c = 2f_\infty^4 (f_\infty^2 - 1), \quad (3.42)$$

то воно набуде вигляду

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (3.43)$$

Як відомо, загальний розв'язок кубічного рівняння дається формулами Кардано-Тарталья (див. додаток А):

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{3} + \\ &\frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left[ -i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2 - 27c + 9ab - 2a^3} \right]^{1/3} + \\ &\frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left[ i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2 - 27c + 9ab - 2a^3} \right]^{1/3}, \\ x_2 &= -\frac{a}{3} - \\ &\frac{1}{6\sqrt[3]{2}} (1-i\sqrt{3}) \left[ i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2 - 27c + 9ab - 2a^3} \right]^{1/3} - \\ &\frac{1}{6\sqrt[3]{2}} (1+i\sqrt{3}) \left[ -i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2 - 27c + 9ab - 2a^3} \right]^{1/3}, \end{aligned}$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}(1+i\sqrt{3}) \left[ i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2} - 27c + 9ab - 2a^3 \right]^{1/3} - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}(1-i\sqrt{3}) \left[ -i3\sqrt{3}\sqrt{a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2} - 27c + 9ab - 2a^3 \right]^{1/3}.$$

Якщо ввести позначення

$$A = -27c + 9ab - 2a^3,$$

$$B = 3\sqrt{3}\sqrt{b^2a^2 + 18abc - 4b^3 - 4ca^3 - 27c^2},$$

то останні три формули можна переписати в більш компактній формі

$$x_1 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left\{ [A + iB]^{1/3} + [A - iB]^{1/3} \right\},$$

$$x_2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ [A + iB]^{1/3} + [A - iB]^{1/3} \right\} - i\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ [A - iB]^{1/3} - [A + iB]^{1/3} \right\},$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ [A + iB]^{1/3} + [A - iB]^{1/3} \right\} + i\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ [A - iB]^{1/3} - [A + iB]^{1/3} \right\},$$

Знайдемо корені кубічні з виразу  $z = A + iB$  при умові, що  $A > 0$ . Записуючи  $z$  в тригонометричній формі і виконуючи елементарні перетворення, одержимо

$$z_1 = |z|^{1/3} e^{i\varphi/3} = |z|^{1/3} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right),$$

$$z_2 = |z|^{1/3} e^{i(\varphi+2\pi)/3} = |z|^{1/3} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right),$$

$$z_3 = |z|^{1/3} e^{i(\varphi+4\pi)/3} = |z|^{1/3} \left( \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right),$$

де

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}, \quad |z| = \sqrt{A^2 + B^2} = 2(a^2 - 3b)^{3/2}.$$

Тоді  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \cos \frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= -\frac{a}{3} - \frac{\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \left\{ \cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right\} = -\frac{a}{3} - \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3} \right), \\ x_3 &= -\frac{a}{3} - \frac{\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \left\{ \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right\} = -\frac{a}{3} - \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, вирази для коренів приведені до найкомпактнішої форми в термінах елементарних функцій при виконанні накладених вище умов на коефіцієнти рівняння. У випадку, якщо  $A < 0$ , маємо наступний набір:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a}{3} - \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \cos \frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= -\frac{a}{3} - \frac{\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \left\{ \cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right\} = -\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3} \right), \\ x_3 &= -\frac{a}{3} + \frac{\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \left\{ \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right\} = -\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3} \right), \end{aligned}$$

З трьох коренів кубічного рівняння залишається той, який у випадку  $f_\infty = 1$  узгоджується з формулою (3.41) (деталі дослідження одержаних коренів подані в додатку А). В результаті для  $f_+^2$  маємо

$$\begin{aligned} f_+^2 &= \mp \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - 3b} \times \\ &\quad \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{4(a^2 - 3b)^3}{(9ba - 27c - 2a^3)^2} - 1} \right) - \frac{a}{3}, \quad (3.44) \end{aligned}$$

знак  $(-)$  ставимо, якщо  $9ba - 27c - 2a^3 > 0$  і знак  $(+)$ , якщо  $9ba - 27c - 2a^3 < 0$ . Одержаний вираз визначає граничне значенням функції  $f(\zeta)$  при  $\zeta = \frac{a}{2}$  і дає можливість зафіксувати невідому сталу  $C$  в розв'язку РГЛ.

### 3.4 Одержання виразу для густини струму в контакті

Перейдімо тепер до задачі про розрахунок струмових станів у системі двох однакових надпровідників, розділених прошарком нормального металу довільної товщини  $d$ .

Загальний вираз для густини струму в теорії Гінзбурга-Ландау дається формулою

$$j(z) = i \frac{7\zeta(3)ev_0^2 N(0)}{24\pi^2 T_c^2} \chi(\xi_0/l) \left( \Delta \frac{d\Delta^*}{dz} - \Delta^* \frac{d\Delta}{dz} \right), \quad (3.45)$$

тут  $\chi(\xi_0/l) = \frac{8}{7\zeta(3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+1+\xi_0/l)}$ ,  $l$  – довжина вільного пробігу електронів. Покладімо в (3.45)  $z = \xi_0\zeta$ ; виразимо також  $N(0)$  через число електронів в одиниці об'єму  $N(0) = \frac{3}{2} \frac{n}{p_0 v_0}$ . Тоді

$$j(\zeta) = i \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \left( \Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \chi(\xi_0/l). \quad (3.46)$$

Підкреслимо, що ми працюємо в області, де асимптотика розв'язку ЛПР на нескінченності (в масштабі характерної довжини ЛПР, тобто для  $z \gg \xi_0$ ) і асимптотика розв'язку РГЛ при малих  $z$  (в масштабі характерної довжини в РГЛ,  $z \ll \xi(T)$ ) перекриваються. Тому в формулі для струму (3.46) замість ПВ  $\Delta(\zeta)$  можна скористатися його асимптотичною формою (3.6). Отже, можемо покласти

$$j(\zeta) = i \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \chi(\xi_0/l) \left( \Delta_+ \Delta'_+{}^* - \Delta_+{}^* \Delta'_+ \right). \quad (3.47)$$

Звичайно, можна було б узяти асимптотику на мінус нескінченності, тоді замість форми  $\Delta_+ \Delta'_+{}^* - \Delta_+{}^* \Delta'_+$  мали б  $\Delta_- \Delta'_-{}^* - \Delta_-{}^* \Delta'_-$ .

Переконаємося, що обидві ці форми рівні, тобто вибір тої чи другої

неістотний. Справді, співвідношення (3.8) можуть бути записані так

$$\begin{pmatrix} \Delta_+ \\ \Delta'_+ \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \Delta_- \\ \Delta'_- \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

де

$$\hat{\mathcal{M}} = \frac{1}{q_{1,\infty} - q_{2,\infty}} \begin{pmatrix} q_{1,\infty} + q_{2,\infty} & 2q_{1,\infty}q_{2,\infty} \\ 2 & q_{1,\infty} + q_{2,\infty} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

При цьому  $\text{Det}\hat{\mathcal{M}} = 1$ . Ця властивість матриці  $\hat{\mathcal{M}}$  є аналогом унітарності розсіяння. Вона забезпечує рівність зазначених форм. Виражаючи одну з них через другу, бачимо, що вони відрізняються на множник  $\text{Det}\hat{\mathcal{M}}$ , рівний одиниці. Тому аргумент у густині струму можна опустити.

Для подальших обчислень зручно виключити у виразі для струму похідні від  $\Delta$ , використавши ті ж співвідношення (3.8). Таким чином, отримуємо

$$j = i \frac{7\zeta(3)env_0}{32\pi^2 p_0 \xi_0 T_c^2} \chi(\xi_0/l) \left( \frac{1}{q_{1,\infty}} - \frac{1}{q_{2,\infty}} \right) (\Delta_+ \Delta_-^* - \Delta_+^* \Delta_-). \quad (3.50)$$

Зауважимо, що величини  $\Delta_+$  та  $\Delta_-$  не можуть бути знайдені з розв'язку ЛІР, оскільки цей розв'язок визначений з точністю до мультиплікативної константи. Для їх визначення слід звернутися до умов зшиву асимптотики розв'язку ЛІР з асимптотикою розв'язку РГЛ, яке є нелінійним. Це фактично й було виконано в попередньому підпункті.

Зараз зазначимо, що представлення (3.21) дає можливість записати формулу (3.50) для густини струму у такому вигляді

$$j = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0 \Delta_\infty^2}{p_0 \xi_0 T_c^2} \chi(\xi_0/l) \left( \frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}} \right) f_+ f_- \sin \varphi. \quad (3.51)$$

Принциповий інтерес становить формула (3.51). Вона дає можливість записати густину струму у такому вигляді (для простоти беремо  $l = \infty$ , тобто  $\chi(\xi_0/l) = 1$ ).

$$j = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \Delta_\infty^2 f^2 \cdot 4mv_s \xi_0.$$

Після підстановки виразу для  $\Delta_\infty^2$  та інших спрощень отримуємо

$$j = 2en \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) f^2 v_s.$$

Тут  $f^2 v_s$  береться на берегах контакту. Насправді, як ми бачили вище, цей вираз є сталим, і отже, рівним  $v_s(\infty)$  (якщо покласти  $f_\infty = 1$ ). Таким чином,

$$j = 2env_s(\infty) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right).$$

Оскільки поблизу  $T_c$  маємо  $n_s = 2n(1 - T/T_c)$ , приходимо до звичайної формули  $j = en_s v_s(\infty)$ , як і має бути. Насправді  $v_s(\infty)$  не є довільною величиною, її допустимі значення обмежуються величиною струму, який може пропускати контакт. Тому отримане співвідношення цікаве лише остільки, оскільки свідчить про внутрішню узгодженість теорії; змістовною ж є формула, в якій фігурує  $\sin \varphi$ . Тому повертаємося до формули (3.51), з якої, беручи до уваги співвідношення (3.44), одержимо остаточний вираз для густини струму в SNS – контакті

$$j = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0 \xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left\{ \mp \sqrt{a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)} \times \right. \\ \left. \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arctg \sqrt{\frac{4(a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2))^3}{(9f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)a - 54f_\infty^4(f_\infty^2 - 1) - 2a^3)^2} - 1} \right) - \frac{a}{2} \right\} \\ \left( \frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}} \right) \sin \varphi, \quad (3.52)$$

тут

$$a = -2 \left[ 1 + \frac{7\zeta(3)}{12(1 - T/T_c)} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)^2 \right].$$

Цей вираз містить складну залежність від різниці фаз, яка суттєво відрізняється від синусоїдальної при зменшенні товщини нормального прошарку, що має місце для широких контактів ( $d \gg \xi_0$ ).

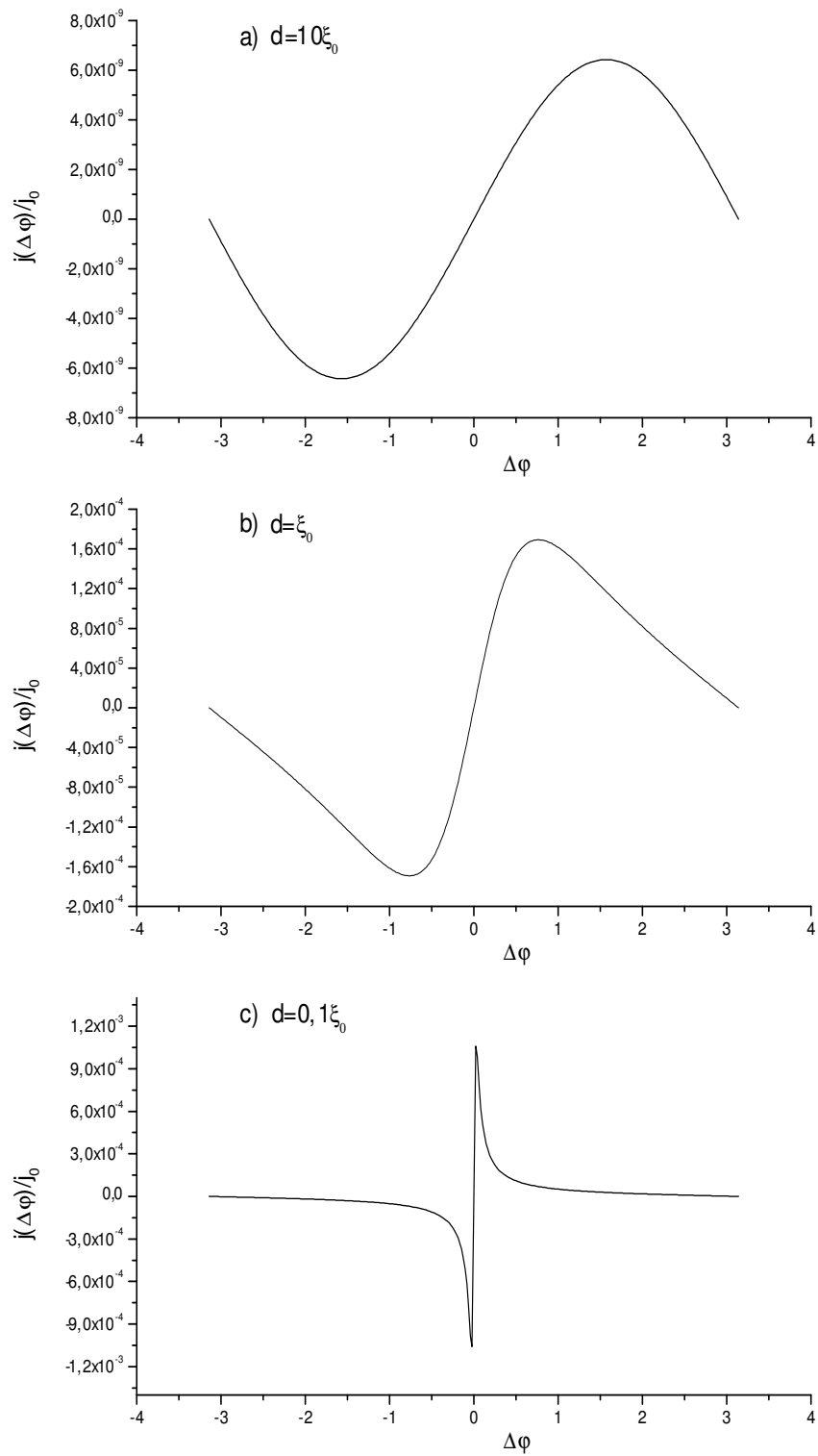


Рис. 3.3: Залежність густини струму від різниці фаз між берегами контакту при різних значеннях товщини нормального прошарку. Температура  $T = 0,98T_c$ .  $j_0 = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0\xi_0}$ .



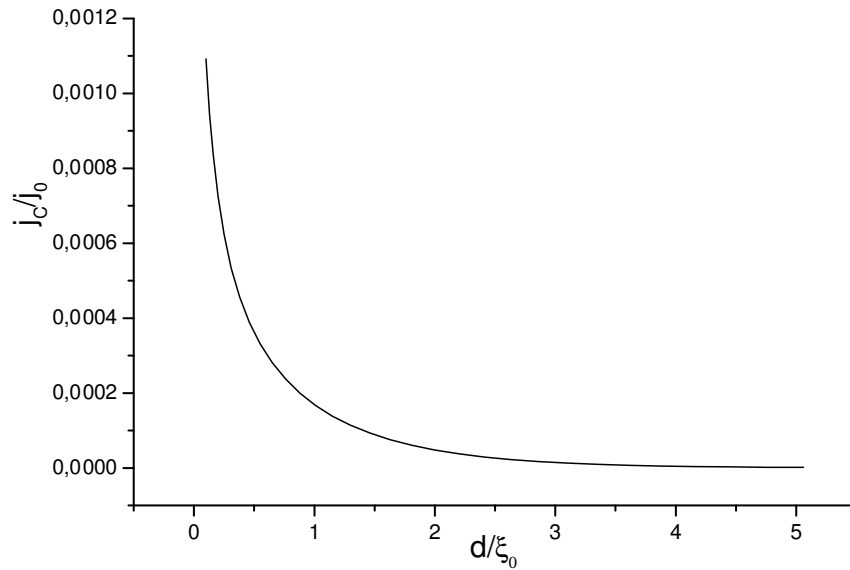


Рис. 3.4: Залежність критичного значення густини струму від товщини нормального прошарку. Температура  $T = 0.98T_c$ .  $j_0 = \frac{1}{3} \frac{en v_0}{\rho_0 \xi_0}$ .

### 3.5 Асимптотичні форми виразу для струму при

$$v_s = 0 \text{ та } d \gg \xi_0$$

В даному пункті розглядатимемо частинний випадок порівняно широких контактів ( $d \gg \xi_0$ ), коли впливом струму на просторову зміну ПВ можна знехтувати, тобто відкинути в РГЛ доданок, що містить надплинну швидкість. Далі знайдемо вираз для густини струму і виконаємо спрощення, пов'язані з малим відношенням  $\xi_0/d$ .

#### 3.5.1 $v_s = 0$ .

Відкидаючи в РГЛ (3.22) доданок, що містить надплинну швидкість, для функції  $f(\zeta)$  матимемо наступне рівняння:

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0. \quad (3.53)$$

Це рівняння допускає знаходження першого інтегралу, вираз для якого випишемо на NS – границі (з точки зору характерної довжини в РГЛ)

$$f'_+ = \frac{\xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}(1 - f_+^2) \quad (3.54)$$

На основі (3.54) та співвідношення (3.36) одержуємо граничне значення для функції  $f(\zeta)$

$$f_+ = \sqrt{1 + \frac{\xi^2(T)}{2\xi_0^2} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)^2 - \frac{\xi(T)}{\sqrt{2}\xi_0} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)} \quad (3.55)$$

Підставляючи (3.55) в формулу (3.51), знаходимо вираз для густини струму в даному частинному випадку ( $v_s = 0$ )

$$j = \frac{1}{2} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \left( \frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}} \right) \times \left[ \left( 1 + \frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)^2 \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)} \right]^2 \sin \varphi. \quad (3.56)$$

При одержанні останньої формули на товщину нормального прошарку не накладалось ніяких умов, проте ця формула не придатна для контактів, в яких товщина нормального прошарку є малою ( $d \ll \xi_0$ ). Справді, при  $d \ll \xi_0$  ( $a \rightarrow 0$ )  $q_{1,\infty} \rightarrow \infty$ ,  $q_{2,\infty} \rightarrow 0$ . Тоді в (3.56) доданки, що містять  $q_{1,\infty}$  є асимптотично малі і можуть бути відкинуті. В результаті маємо

$$j = \frac{1}{2} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \frac{1}{q_{2,\infty}} \times \left[ \left( 1 + \frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)} \frac{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}^2} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}}} \right]^2 \sin \varphi. \quad (3.57)$$

Незважаючи на те, що  $q_{2,\infty}$  є малим, ми не можемо вважати, що доданки, в яких  $q_{2,\infty}$  міститься в знаменнику, є великими, бо чисельник змінюється в інтервалі значень від нуля до одиниці. Тому ці доданки можуть вважатися великими лише тоді, коли різниця фаз  $\varphi$  не є близькою до нуля. Якщо це так, то, виконуючи подальші спрощення, одержимо асимптотичну форму виразу для густини струму при  $d \ll \xi_0$  і значеннях фази, не близьких до нуля,

$$j = \frac{6}{7\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 q_{2,\infty} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sin^3(\varphi/2)}. \quad (3.58)$$

З останньої формули бачимо, що вона справді не працює при малих значеннях  $\varphi$ . Отже, при розгляді надпровідних контактів, в яких товщина нормального прошарку  $d \sim \xi_0$  і менша, необхідно враховувати вплив струму на просторову зміну ПВ.

### 3.5.2 $d \gg \xi_0$ .

В даному підпункті розглядатиметься протилежний граничний випадок, коли товщина нормального прошарку є велика в порівнянні з ДК. Перш за все одержимо асимптотичні вирази для коефіцієнтів  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  при умові, що  $d \gg \xi_0$  ( $a \gg 1$ ). Для цього обчислимо наближено інтеграли  $I_0(a)$ ,  $I_1(a)$ ,  $I_2(a)$ .

Для  $I_0(a)$  маємо

$$I_0(a) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}(\zeta + \zeta' + a)\right) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{x^2}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}a\right). \quad (3.59)$$

При  $a \gg 1$ , основний внесок в суму по  $n$  дають  $n = 0$  та  $n = -1$ . Тоді

$$I_0(a) \cong \rho \int_0^1 dx x \exp\left(-\frac{a}{x}\right) \cong \rho \frac{e^{-a}}{a}. \quad (3.60)$$

Аналогічно виконуються спрощення і для інших інтегралів, що приводить до такого результату

$$I_0(a) = I_1(a) = I_2(a) \cong \rho \frac{e^{-a}}{a}.$$

Таким чином, у виразах для  $q_{1,\infty}$ ,  $q_{2,\infty}$  виникає мала величина  $\frac{e^{-a}}{a}$ , по якій можемо виконати розклад. Обмежуючись першим наближенням, маємо

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_1} \right) + \frac{\rho}{2I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2 = q_{\infty}^{(0)} + \delta q_{\infty}, \quad (3.61)$$

$$q_{2,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_1} \right) - \frac{\rho}{2I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2 = q_{\infty}^{(0)} - \delta q_{\infty}. \quad (3.62)$$

Звідси випливає, що  $\delta q_{\infty} = \frac{\rho}{2I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2$ .

Для одержання виразу для густини струму в першому наближенні по  $\frac{e^{-a}}{a}$  в формулі (3.56) покладемо

$$\frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}} \cong \frac{2\delta q_{\infty}}{q_{\infty}^{(0)2}},$$

а в квадратних дужках  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  візьмемо в нульовому наближенні. В результаті матимемо

$$j = \frac{1}{2} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \frac{2\delta q_{\infty}}{q_{\infty}^{(0)2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) (q_{\infty}^{(0)})^2}} - \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{24 \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) q_{\infty}^{(0)}}} \right]^2 \sin \varphi. \quad (3.63)$$

Оскільки розглядається область температур, близьких до критичної, то останню формулу можна переписати у спрощеному вигляді

$$j = \frac{6}{7\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \delta q_{\infty} \sin \varphi. \quad (3.64)$$

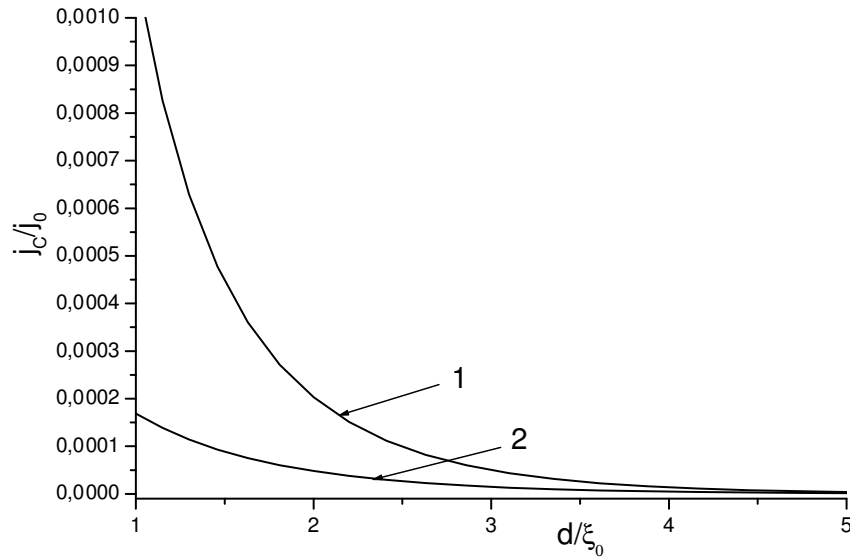


Рис. 3.5: Залежність критичного значення густини струму від товщини нормального прошарку для двох випадків: 1)  $v_s = 0$ , 2)  $v_s \neq 0$ . Температура  $T = 0.98T_c$ .  $j_0 = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0\xi_0}$ .

Тоді, беручи до уваги вираз для  $\delta q_\infty$  і значення інтегралів  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  та  $\zeta(3) \cong 1,2$ , приходимо до кінцевої формули

$$j \cong 2,5 \frac{env_0}{p_0d} e^{-d/\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \sin \varphi. \quad (3.65)$$

Як бачимо, із збільшенням товщини нормального прошарку струм спадає експоненціально. Характерною довжиною спадання при збільшенні товщини нормального прошарку є  $\xi_0$ . Залежність від фази передається фактором  $\sin \varphi$ , що узгоджується з рисунком 3.3.

На рисунку 3.5 для порівняння подано залежності критичного струму від товщини нормального прошарку: 1) без врахування впливу струму на просторову зміну ПВ; 2) враховуючи вплив струму на просторову зміну ПВ. З даного рисунка випливає, що дія струму, як розпаровуючого фактора, є суттєвою при зменшенні  $d$  і практично відсутня, коли  $d$  збільшується.

### 3.6 Дослідження переходу від гранично брудного ( $l \ll \xi_0$ ) до достатньо чистого контакту ( $l \gg \xi_0$ )

В даному пункті розглядатиметься широкий ( $d \gg \xi_0$ ) SNS – контакт за наявності домішок довільної концентрації і при температурах, близьких до критичної. Тут цікавим є питання, як відбувається перехід від одної характерної довжини спадання струму, при збільшенні товщини нормального прошарку, до іншої в залежності від довжини вільного пробігу електронів. Саме це і є предметом дослідження виконаного в даному пункті.

Система лінійних інтегральних рівнянь для ПВ за наявності домішок має вигляд

$$\Delta_n(\zeta) = \Delta(\zeta) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta'|}{x} |2n' + 1|\right) \Delta_n(\zeta') d\zeta', \quad (3.66)$$

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\zeta - \zeta'|}{x} |2n' + 1|\right) \Delta_n(\zeta') d\zeta'. \quad (3.67)$$

Тут  $|2n' + 1| = |2n + 1| + 1/\lambda$ ,  $\lambda = \frac{l}{\xi_0}$  – безрозмірна довжина вільного пробігу електронів. Рівняння (3.66) перетворенням Фур'є легко розв'язується відносно  $\tilde{\Delta}_n(k)$ . Використовуючи цей розв'язок, з рівняння (3.67) можна виключити  $\Delta_n$  і одержати замкнене ЛІР відносно  $\Delta(\zeta)$

$$\Delta(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta - \zeta') \Delta(\zeta') d\zeta'. \quad (3.68)$$

Фур'є-образ ядра цього рівняння дається виразом

$$\tilde{K}(k) = \rho \sum_n \frac{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{k}{|2n' + 1|}}{1 - \frac{1}{\lambda k} \operatorname{arctg} \frac{k}{|2n' + 1|}}. \quad (3.69)$$

Для рівняння (3.68) можна виконати дослідження такі самі, як і ті, що були зроблені для рівняння (3.1) в пункті 3.2. При цьому для  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  одержуються аналогічні результати. Відмінність буде полягати у виразах для інтегралів  $I_n$ ,  $I_n(a)$ ,  $n = 0, 1, 2$ , оскільки тепер  $K(\zeta)$ , яке міститься в цих інтегралах, дається формулою

$$K(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(k) e^{-ik\zeta} dk.$$

Беручи до уваги, що контакт є широким, в  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  можна виконати спрощення пов'язані з мализною  $I_n(a)$ ,  $n = 0, 1, 2$ . В потрібному наближенні маємо

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{I_2(a)}{I_1} + 2 \frac{I_1(a)}{I_0} + \frac{I_1}{I_0^2} I_0(a) \right), \quad (3.70)$$

$$q_{2,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_1}{I_0} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{I_2(a)}{I_1} + 2 \frac{I_1(a)}{I_0} + \frac{I_1}{I_0^2} I_0(a) \right), \quad (3.71)$$

а отже,  $\delta q_\infty$  дається формулою

$$\delta q_\infty = \frac{1}{2} \left( \frac{I_2(a)}{I_1} + 2 \frac{I_1(a)}{I_0} + \frac{I_1}{I_0^2} I_0(a) \right). \quad (3.72)$$

Що ж до виразу для струму, то він визначається формулою (3.64), в якій міститься  $\delta q_\infty$ . Саме через  $\delta q_\infty$  у вираз для струму входить залежність від товщини нормального прошарку  $d$ , оскільки  $\delta q_\infty$  містить  $d$  завдяки інтегралам  $I_1(a)$ ,  $I_2(a)$ ,  $I_3(a)$ . Для широких SNS – контактів, струм експоненціально послаблюється при збільшенні товщини нормального металу. Характерна довжина, на якій це послаблення відбувається, дорівнює  $\xi_0$  для чистого надпровідника і  $\xi_d$  для гранично брудного. Ця залежність походить від зазначених вище інтегралів, тому аби з'ясувати, як відбувається перехід від одної характерної довжини до іншої, необхідно дослідити ці інтеграли.

Обчислення докладно проведемо для одного інтеграла, наприклад,  $I_0(a)$ , бо схема розрахунку однакова для всіх трьох.

Розглянемо

$$I_0(a) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' K(\zeta + \zeta' + a),$$

враховуючи вираз для  $K(\zeta)$  через Фур'є-образ  $\tilde{K}(k)$ , маємо

$$\begin{aligned} I_0(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{K}(k) e^{-ika} \int_0^{\infty} d\zeta' \int_0^{\infty} d\zeta e^{-ik(\zeta+\zeta')} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}(k) e^{-ika}}{(k - i\varepsilon)^2} dk, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Так само

$$I_1(a) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}(k) e^{-ika}}{(k - i\varepsilon)^3} dk, \quad I_2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}(k) e^{-ika}}{(k - i\varepsilon)^4} dk, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{1}{(k - i\varepsilon)^n} = \frac{Pf}{k^n} + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(k),$$

та правило інтегрування псевдофункцію  $\frac{Pf}{k^n}$  з основними функціями  $\varphi(k)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Pf}{k^n} \varphi(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \varphi(k) - \varphi(0) - k\varphi'(0) - \dots - \frac{k^{n-2}}{(n-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) \right] \frac{dk}{k^n}.$$

У випадку інтеграла  $I_0(a)$  маємо

$$\begin{aligned} I_0(a) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}(k) e^{-ika} - 1}{k^2} dk - \frac{i}{2} \lim_{k \rightarrow 0} (\tilde{K}(k) e^{-ika})' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{K}(k) \cos ka}{k^2} dk - \frac{a}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \tilde{K}(k)) \cos ka}{k^2} dk. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Тут використано парність функції  $\tilde{K}(k)$  і те, що  $\tilde{K}'(0) = 0$ , а також

елементарний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos ka}{k^2} dk = \pi a$ . Аналогічні вирази для ін-

тегралів  $I_1(a)$  та  $I_2(a)$  даються представленням

$$I_1(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{K}(k) - 1 - \frac{1}{2} k^2 \tilde{K}''(0)) \sin ka \frac{dk}{k^3}, \quad (3.75)$$



$$I_2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{K}(k) - 1 - \frac{1}{2}k^2 \tilde{K}''(0)) \cos ka \frac{dk}{k^4}. \quad (3.76)$$

Щоб обчислити  $\tilde{K}''(0)$ , використовуємо асимптотичний вираз для малих  $k$

$$\tilde{K}(k) - 1 = \frac{\rho}{3} \sum_n \frac{k^2}{(2n+1)^2 |2n'+1|}.$$

Звідси

$$\tilde{K}''(0) = \frac{2}{3} \rho \sum_n \frac{1}{(2n+1)^2 |2n'+1|}.$$

Підставимо замість ядра  $\tilde{K}(k)$  його явний вираз і зробимо в інтегралах  $I_0(a)$ ,  $I_1(a)$ ,  $I_2(a)$  заміну змінної інтегрування, покладаючи  $k = |2n'+1|x$ , а також врахуємо рівняння для критичної температури  $1 = \rho \sum_n \frac{1}{|2n+1|}$ . В результаті одержимо

$$I_0(a) = \frac{\rho}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\lambda x}} \cos \left[ \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) ax \right] \frac{dx}{x^3}, \quad (3.77)$$

$$I_1(a) = \frac{\rho}{\pi} \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{arctg} x - x}{1 + \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\lambda x}} + \frac{x^3}{3} \right) \sin \left[ \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) ax \right] \frac{dx}{x^4}, \quad (3.78)$$

$$I_2(a) = \frac{\rho}{\pi} \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{arctg} x - x}{1 + \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\lambda x}} + \frac{x^3}{3} \right) \cos \left[ \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) ax \right] \frac{dx}{x^5}. \quad (3.79)$$

Тут взято до уваги, що при  $d \gg \xi_0$  головний внесок в суму дають  $n = 0$  і  $n = -1$ . Для подальшого розгляду цих інтегралів перейдемо до комплексних змінних і виконаємо інтегрування по контуру, який замкнемо через верхню півплощину, зробимо розріз по уявній осі і обійдемо точку  $z = i$  (див. рисунок 3.6).

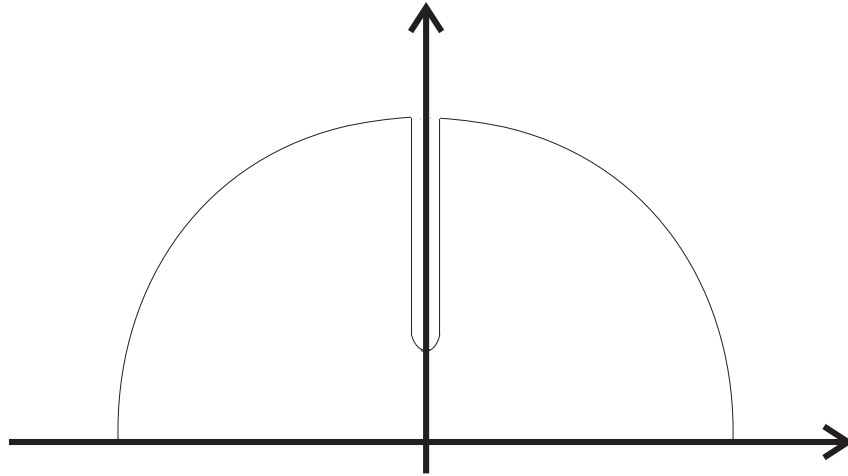


Рис. 3.6: Контур, по якому виконується інтегрування при обчисленні інтегралів  $I_0(a)$ ,  $I_1(a)$ ,  $I_2(a)$ .

Всередину контура потрапляє єдиний полюс, який визначається рівнянням

$$1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda z} \operatorname{arctg} z = 0$$

і знаходиться на уявній осі. Покладімо  $z = iy_0$ , ( $y_0 < 1$ ), тоді

$$1 + \lambda = \frac{\operatorname{arctg} y_0}{y_0}.$$

При інтегруванні по уявній осі означимо логарифм так, що на правому березі  $\operatorname{Ln}(1 - y) = \ln(y - 1) + i\pi$ , а на лівому  $-\operatorname{Ln}(1 - y) = \ln(y - 1) - i\pi$ .

Використовуючи теорему про рештки і скориставшись логарифмічним представленням арктангенса  $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$ , одержимо

$$I_n(a) = \rho \frac{\lambda^{n+2}}{(1 + \lambda)^n} \int_1^{\infty} \frac{\exp\{-a(1 + 1/\lambda)y\}}{\left(1 + \lambda + \frac{1}{2y} \ln \frac{y-1}{y+1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4y^2}} \frac{dy}{y^{3+n}} +$$

$$\rho \frac{\lambda^{n+2}}{(1 + \lambda)^n} \frac{2(1 - y_0^2)}{y_0^{1+n}} \frac{\exp\{-a(1 + 1/\lambda)y_0\}}{(1 + \lambda)y_0^2 - \lambda}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.80)$$

З цієї формули випливає факт експоненціального спадання даних інтегралів, а отже, і величини струму, який проходить через контакт. Щоб зрозуміти, як формується характерна довжина зміни, розглянемо оби-

два доданки в (3.80). В полюсному доданку маємо експоненту

$$\exp \left\{ -a \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) y_0 \right\} = \exp \left\{ -d \left( \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l} \right) y_0 \left( \frac{l}{\xi_0} \right) \right\},$$

з якої бачимо, що на формування характерної довжини впливає корінь полюсного рівняння. Цей корінь, значення якого залежить від концентрації домішок, може бути знайдений чисельно, його графічне зображення подане на рисунку 3.7. Що ж до інтегрального доданка, то він може

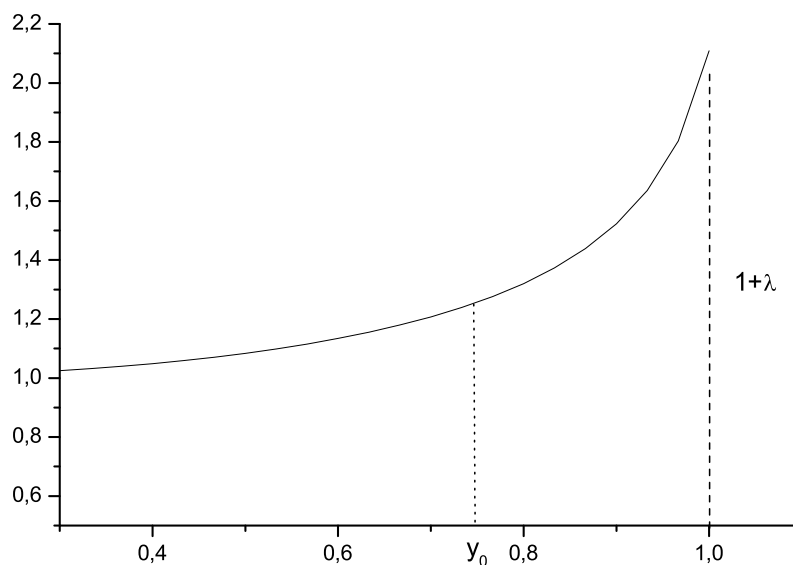


Рис. 3.7: Графічний розв'язок рівняння для  $y_0$ .

бути оцінений за допомогою метода Лапласа, а вираз, який визначає залежність від  $d$ , може бути представлений у вигляді

$$\exp \left\{ -d \left( \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l} \right) \right\} y_1 \left( \frac{l}{\xi_0} \right).$$

Тут  $y_1(l/\xi_0)$  знаходиться з умови мінімуму функції

$$a \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) y + \ln \left\{ \left( 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2y\lambda} \ln \frac{y-1}{y+1} \right)^2 + \frac{\pi^2}{4y^2\lambda^2} \right\},$$

тобто з рівняння

$$a + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2y_1\lambda} \ln \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} \right) \times \right. \\ \left. \left( \frac{1}{2y_1^2} \ln \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - \frac{2}{y_1} \frac{1}{y_1^2 - 1} \right) + \frac{\pi^2}{2y_1^3\lambda} \right] \times \\ \left[ \left( 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2y_1\lambda} \ln \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} \right)^2 + \frac{\pi^2}{4y_1^2\lambda^2} \right]^{-1}. \quad (3.81)$$

Отже, характерна довжина спадання струму  $\xi$  дається співвідношенням

$$\frac{1}{\xi} = \left( \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l} \right) f \left( \frac{l}{\xi_0} \right),$$

де  $f \left( \frac{l}{\xi_0} \right) = \epsilon y_0 \left( \frac{l}{\xi_0} \right)$ , або  $y_1 \left( \frac{l}{\xi_0} \right)$ .

Розгляньмо граничні випадки  $\lambda \sim 0$  і  $\lambda \gg 1$ . При  $\lambda \sim 0$  основний внесок в (3.80) дає полюсний член, асимптотика якого має вигляд

$$2\rho \frac{\lambda^{2+n}}{(1+\lambda)^n} \frac{1 - y_0^2 \exp\{-a(1+1/\lambda)y_0\}}{y_0^{1+n} (1+\lambda)y_0^2 - \lambda} \stackrel{as}{=} \\ 2\rho \frac{\lambda^{2+n} \exp\left\{-\frac{a}{\lambda}y_0\right\}}{y_0^{1+n} y_0^2 - \lambda} = \rho \frac{\lambda}{3} \exp\left\{-a\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right\}.$$

На основі цього для інтегралів  $I_n(a)$ ,  $n = 0, 1, 2$  можемо написати

$$I_n(a) = \rho \left( \frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{n+1}{2}} \exp\left(-a\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \quad \lambda \ll 1.$$

І А для струму одержуємо такий асимптотичний вираз:

$$j \cong 0,5 \frac{env_0}{p_0\xi_0} \sqrt{\frac{l}{\xi_0}} e^{-d\sqrt{3/\xi_0 l}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \sin \varphi, \quad d \gg \sqrt{\frac{\xi_0 l}{3}}. \quad (3.82)$$

В границі  $\lambda \gg 1$  основний внесок в (3.80) дає інтегральний член, на основі якого для інтегралів  $I_n(a)$ ,  $n = 0, 1, 2$  маємо

$$I_n(a) \cong \rho \frac{\xi_0}{d} \exp\left(-\frac{d}{\xi_0}\right), \quad \lambda \gg 1,$$

що приводить до виразу для струму (3.65), одержаного раніше.

### 3.7 Висновки та обговорення

Спираючись на лінійне інтегральне рівняння, одержане в другому розділі, досліджено поведінку ПВ поблизу  $NS$  – границі в  $SNS$  – контакті. Показано, що на відстанях від границі набагато більших довжини когерентності асимптотика ЛІР є лінійною, а відношення коефіцієнтів цієї асимптотики є величина стала і повністю визначається ядром ЛІР. Це досягається шляхом запровадження симетричної та антисиметричної частин ПВ, що дозволяє записати ЛІР так, щоб інтегрування відбувалося на півосі. Використовуючи метод квазіортогональності до асимптотики, одержано наближений вираз для відношення коефіцієнтів асимптотики розв'язку ЛІР.

Якщо відійти вглиб надпровідника, на відстань порядку  $\xi(T)$ , то ПВ задовольняє нелінійне диференціальне рівняння – РГЛ. Розв'язок цього рівняння одержано з врахуванням впливу струму на просторову зміну ПВ, тобто доданок в РГЛ, який містить надпровідну швидкість, не був відкинутий (як це прийнято робити у випадку широких  $d \gg \xi_0$  контактів). Показано, як наявність струму приводить до зменшення модуля ПВ. При знаходженні сталої в розв'язку РГЛ використано ту обставину, що існує область спільної чинності обох рівнянь: РГЛ і ЛІР. Тому зшиваючи асимптотики розв'язків цих рівнянь вдається одержати вираз для ПВ  $NS$  – границі, а разом і зафіксувати невідому сталу в розв'язку РГЛ.

Побудовано струмові стани в  $SNS$  – контакті, беручи за вихідну загальну формулу для струму в теорії Гінзбургі-Ландау. Одержаний вираз є справедливим для контактів з довільною (в масштабі довжини когерентності) товщиною нормального прошарку. З одержаних рисунків струм-фазової залежності випливає, що при зменшенні товщини нормального прошарку залежність струму від різниці фаз є достатньо складною і

суттєво відрізняється від синусоїдальної, яка справедлива для широких контактів. Причиною ускладнення струм-фазової залежності при малій товщині нормального прошарку є збільшення критичного струму контакту, а отже його і впливу на просторову поведінку ПВ, що в свою чергу приводить до складнішої залежності струму від різниці фаз між берегами контакту.

## Розділ 4

### НАДПРОВІДНІ ПРОСТОРОВО - НЕОДНОРІДНІ КОМПОЗИЦІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ВІДБИТТЯ ЕЛЕКТРОНІВ ТА НЕМАГНІТНИХ ДОМІШОК

В даному розділі техніка, викладена в двох попередніх розділах, буде застосована до опису контактів інших типів. Зокрема побудовано струмові стани в тунельному SIS – контакті за наявності немагнітних домішок та широкому інтервалі значень коефіцієнта прозорості діелектрика, тобто охоплено випадок і не "слабкої" надпровідності, коли коефіцієнт проходження електронів близький до одиниці. Це є предметом дослідження першого і другого пункту. В третьому і четвертому пункті розглядається симетричний SNINS – контакт (плівка діелектрика розміщена посередині нормального металу).

#### 4.1 Тунельний SIS – контакт при неповній прозорості ізолятора та за наявності немагнітних домішок

Досліджуватимемо струмові стани в просторово-неоднорідній структурі, яка сконструйована з двох масивних надпровідників, поєднаних через плівку діелектрика. Нехай надпровідники займають область  $|z| > 0$ , а плівка діелектрика розміщена в площині  $z = 0$ . Метою дослідження є

одержати вираз для густини струму, який годився б практично на весь інтервал значень коефіцієнта проходження електронів (від нуля і до значень, близьких до одиниці).

#### 4.1.1 Просторова поведінка ПВ.

При температурах, близьких до критичної і поблизу границі, ПВ описується системою лінійних інтегральних рівнянь [12], яка в безрозмірній формі і з врахуванням геометрії нашої задачі, має вигляд

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \int d\zeta' \Delta_n(\zeta') \left\{ \exp \left( -\frac{|2n' + 1|}{x} |\zeta - \zeta'| \right) + \text{sign}\zeta\zeta' R(x) \exp \left( -\frac{|2n' + 1|}{x} (|\zeta| + |\zeta'|) \right) \right\}, \quad (4.1)$$

$$\Delta_n(\zeta) = \Delta(\zeta) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int d\zeta' \Delta_n(\zeta') \left\{ \exp \left( -\frac{|2n' + 1|}{x} |\zeta - \zeta'| \right) + \text{sign}\zeta\zeta' R(x) \exp \left( -\frac{|2n' + 1|}{x} (|\zeta| + |\zeta'|) \right) \right\}. \quad (4.2)$$

Тут  $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$  – безрозмірна змінна,  $\rho = |g|N(0)$  – безрозмірна константа зв'язку,  $N(0)$  – густина електронних станів на поверхні фермі-сфери,

$$|2n' + 1| = |2n + 1| + \frac{1}{\lambda},$$

$\lambda = \frac{l}{\xi_0}$  – безрозмірна довжина вільного пробігу електронів,  $\xi_0$  – ДК. Величина  $\lambda$  визначає ступінь забруднення надпровідника, при  $\lambda \ll 1$  надпровідник є гранично брудний, а при  $\lambda \gg 1$  – достатньо чистий.

Система рівнянь (4.1) і (4.2) в границі  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  має асимптотично



точний розв'язок у вигляді лінійних функцій

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) &\stackrel{\text{as}}{=} \Delta'_+\zeta + \Delta_+, & \Delta_n(\zeta) &= \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| (\Delta'_+\zeta + \Delta_+), & \zeta \rightarrow +\infty, \\ \Delta(\zeta) &\stackrel{\text{as}}{=} \Delta'_-\zeta + \Delta_-, & \Delta_n(\zeta) &= \left| \frac{2n'+1}{2n+1} \right| (\Delta'_-\zeta + \Delta_-), & \zeta \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Перепишемо рівняння (4.1) і (4.2) так, щоб інтегрування відбувалося на півосі  $\zeta > 0$ . Для здійснення цього перейдемо до розгляду симетричної та антисиметричної частин ПВ  $\Delta(\zeta)$ , тобто

$$\Delta_s(\zeta) = \frac{1}{2}[\Delta(\zeta) + \Delta(-\zeta)] \text{ і } \Delta_a(\zeta) = \frac{1}{2}[\Delta(\zeta) - \Delta(-\zeta)]$$

відповідно, а також симетричної та антисиметричної частин функції  $\Delta_n(\zeta)$ .

В результаті одержимо такі дві системи:

$$\begin{cases} \Delta_s(\zeta) = \int_0^\infty d\zeta' \Delta_{n,s}(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta')\}, \\ \Delta_{n,s}(\zeta) = \Delta_s(\zeta) + \int_0^\infty d\zeta' \Delta_{n,s}(\zeta') \{\tilde{K}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}(\zeta + \zeta')\}, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \Delta_a(\zeta) = \int_0^\infty d\zeta' \Delta_{n,a}(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K_D(\zeta + \zeta')\}, \\ \Delta_{n,a}(\zeta) = \Delta_a(\zeta) + \int_0^\infty d\zeta' \Delta_{n,a}(\zeta') \{\tilde{K}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D(\zeta + \zeta')\}, \end{cases} \quad (4.5)$$

де

$$K(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta| \right\}, \quad (4.6)$$

$$K_D(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \tau(x) \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta| \right\},$$

$$\tilde{K}(\zeta) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta| \right\}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{K}_D(\zeta) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{x} \tau(x) \exp \left\{ -\frac{|2n'+1|}{x} |\zeta| \right\},$$

$$\tau(x) = 1 - 2D(x).$$

Точним розв'язком системи (4.4) є константи

$$\Delta_s = A, \quad \Delta_{n,s} = \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| A. \quad (4.8)$$

Переконатись в цьому можна безпосередньою підстановкою (4.8) в (4.4) з використанням співвідношень

$$\int_0^{\infty} d\zeta' K(\zeta - \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| = 1 - \int_0^{\infty} d\zeta' K(\zeta + \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right|, \quad (4.9)$$

$$\int_0^{\infty} d\zeta' \cdot \zeta' K(\zeta - \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| = \zeta + \int_0^{\infty} d\zeta' \cdot \zeta' K(\zeta + \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \quad (4.10)$$

Із системи (4.5), незважаючи на те, що відшукати її точний аналітичний розв'язок неможливо, одержимо результати необхідні для написання граничної умови для ПВ. Ці умови знадобляться нам при одержанні виразу для густини струму, який може протікати через контакт.

Якщо спрямувати  $\zeta$  до нескінченності, то безпосередньою перевіркою із залученням співвідношень

$$\int_0^{\infty} d\zeta' \tilde{K}(\zeta - \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| = \frac{1}{\lambda|2n + 1|} - \int_0^{\infty} d\zeta' \tilde{K}(\zeta + \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right|, \quad (4.11)$$

$$\int_0^{\infty} d\zeta' \cdot \zeta' \tilde{K}(\zeta - \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| = \frac{\zeta}{\lambda|2n + 1|} + \int_0^{\infty} d\zeta' \cdot \zeta' \tilde{K}(\zeta + \zeta') \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \quad (4.12)$$

знаходимо точний асимптотичний розв'язок системи (4.5)

$$\begin{aligned} \Delta_a(\zeta) &= C(\zeta + q_{\infty}), \\ \Delta_{n,a}(\zeta) &= \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| C(\zeta + q_{\infty}), \end{aligned} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Підставимо вирази для  $\Delta_a(\zeta)$  і  $\Delta_{n,a}(\zeta)$  з виділеною асимптотикою

$$\begin{aligned}\Delta_a(\zeta) &= \zeta + q_\infty + \psi_a(\zeta), & \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_a(\zeta) &= 0, \\ \Delta_{n,a}(\zeta) &= \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| (\zeta + q_\infty) + \psi_{n,a}(\zeta), & \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_{n,a}(\zeta) &= 0,\end{aligned}$$

в систему (4.5), покладаючи глобальну сталу рівною одиниці, оскільки вона всеодно не фіксується системою. В результаті маємо

$$\begin{aligned}\psi_a(\zeta) - \int_0^\infty \{K(\zeta - \zeta') + K_D(\zeta + \zeta')\} \psi_{n,a}(\zeta') d\zeta' = \\ \int_0^\infty \{K(\zeta + \zeta') + K_D(\zeta + \zeta')\} \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \zeta' d\zeta' - \\ q_\infty \int_0^\infty \{K(\zeta + \zeta') - K_D(\zeta + \zeta')\} \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| d\zeta', \quad (4.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{n,a}(\zeta) - \psi_a(\zeta) - \int_0^\infty \{\tilde{K}(\zeta - \zeta') + \tilde{K}_D(\zeta + \zeta')\} \psi_{n,a}(\zeta') d\zeta' = \\ \int_0^\infty \{\tilde{K}(\zeta + \zeta') + \tilde{K}_D(\zeta + \zeta')\} \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \zeta' d\zeta' - \\ q_\infty \int_0^\infty \{\tilde{K}(\zeta + \zeta') - \tilde{K}_D(\zeta + \zeta')\} \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| d\zeta'. \quad (4.15)\end{aligned}$$

Для знаходження сталої  $q_\infty$ , як і в попередньому розділі, використовується метод квазіортогональності до асимптотики. Проінтегруємо рівняння (4.14) і (4.15) по  $\zeta$  на півосі, тоді, використовуючи співвідношення

(4.9) і (4.11), знайдемо

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta - \rho \sum_n \frac{1}{|2n' + 1|} \int_0^{\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta = \\
& -\rho \sum_n \frac{1}{|2n' + 1|} \int_0^1 dx D(x) \int_0^{\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) d\zeta + \\
& \rho \sum_n \frac{1}{|2n + 1|(2n' + 1)^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - q_{\infty} \rho \sum_n \frac{1}{|2n' + 1||2n + 1|} \int_0^1 x D(x) dx,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \psi_{n,a}(\zeta) d\zeta = \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \int_0^{\infty} \psi_a(\zeta) d\zeta - \\
& \frac{1}{\lambda|2n + 1|} \int_0^1 dx D(x) \int_0^{\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) d\zeta + \\
& \frac{1}{\lambda|2n' + 1|(2n + 1)^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - q_{\infty} \frac{1}{\lambda(2n + 1)^2} \int_0^1 x D(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Підставляючи (4.17) в (4.16), одержимо одне з необхідних співвідношень

$$\begin{aligned}
& \sum_n \frac{1}{|2n + 1|} \int_0^1 dx D(x) \int_0^{\infty} \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|\zeta}{x}\right) d\zeta = \\
& \sum_n \frac{1}{|2n' + 1|(2n + 1)^2} \int_0^1 x^2 R(x) dx - q_{\infty} \sum_n \frac{1}{(2n + 1)^2} \int_0^1 x D(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

При цьому було використане рівняння для критичної температури

$$\rho \sum_n \frac{1}{|2n + 1|} = 1.$$

Щоб одержати друге співвідношення, домножимо рівняння (4.14) і (4.15) на  $\zeta$  і знову проінтегруємо по  $\zeta$  на півосі. Виконуючи перетворення, подібні до виконаних вище при знаходженні (4.18), із залученням

співвідношень (4.10) і (4.12), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{|2n' + 1||2n + 1|} \int_0^1 xR(x)dx \int_0^\infty \psi_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x}\zeta\right) d\zeta = \\ q_\infty \sum_n \frac{1}{(2n' + 1)^2|2n' + 1|} \int_0^1 x^2D(x)dx - \sum_n \frac{1}{(2n' + 1)^2(2n + 1)^2} \int_0^1 x^3R(x)dx. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Запровадимо нову функцію

$$q_{n,a}(\zeta) = \psi_{n,a}(\zeta) + \frac{|2n' + 1|}{|2n + 1|} q_\infty,$$

тоді рівняння (4.18) і (4.19) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{|2n + 1|} \int_0^1 dx D(x) \int_0^\infty q_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x}\zeta\right) d\zeta = \\ \sum_n \frac{1}{|2n' + 1|(2n + 1)^2} \int_0^1 x^2R(x)dx, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{|2n' + 1||2n + 1|} \int_0^1 xR(x)dx \int_0^\infty q_{n,a}(\zeta) \exp\left(-\frac{|2n' + 1|}{x}\zeta\right) d\zeta = \\ \frac{1}{3}q_\infty \sum_n \frac{1}{(2n + 1)^2|2n' + 1|} - \sum_n \frac{1}{(2n' + 1)^2(2n + 1)^2} \int_0^1 x^3R(x)dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Візьмемо замість  $q_{n,a}(\zeta)$  пробну функцію, яку покладемо рівною сталій

$$q_{n,a}(\zeta) = \left| \frac{2n' + 1}{2n + 1} \right| \Gamma.$$

Тоді з рівнянь (4.20) та (4.21) одержуємо вираз для коефіцієнта  $q_\infty$

$$q_\infty = \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3R(x)dx + \frac{3\chi(\lambda)}{S_2} \frac{\left( \int_0^1 x^2R(x)dx \right)^2}{\int_0^1 xD(x)dx}, \quad (4.22)$$

де

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|2n' + 1|(2n + 1)^2},$$

$$\chi_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n' + 1)^2(2n + 1)^2},$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Виразу (4.22) можна надати іншої форми, беручи до уваги, що

$$D(x) = \frac{p_0^2 x^2}{p_0^2 x^2 + K^2}, \quad R(x) = \frac{K^2}{p_0^2 x^2 + K^2} \quad (4.23)$$

та обчислюючи інтеграли і суми:

$$\int_0^1 x^2 R(x) dx = \frac{K^2}{p_0^2} \left\{ 1 - \frac{K}{p_0} \operatorname{arctg} \frac{p_0}{K} \right\},$$

$$\int_0^1 x D(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\},$$

$$\int_0^1 x^3 R(x) dx = \frac{K^2}{2p_0^2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\}.$$

$$\chi(\lambda) = \frac{\lambda \pi^2}{4} - \lambda^2 \Psi \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) - \lambda^2 (\gamma + 2 \ln 2), \quad (4.24)$$

$$\chi_1(\lambda) = \frac{\lambda^2 \pi^2}{4} - 2 \lambda^3 \Psi \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \Psi \left( 1, \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) - 2 \lambda^3 (\gamma + 2 \ln 2). \quad (4.25)$$

В результаті маємо

$$q_{\infty} = \frac{\frac{\lambda^2 \pi^2}{4} - 2 \lambda^3 \Psi \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \Psi \left( 1, \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) - 2 \lambda^3 (\gamma + 2 \ln 2)}{\frac{\lambda \pi^2}{4} - \lambda^2 \Psi \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) - \lambda^2 (\gamma + 2 \ln 2)} \times$$

$$\frac{3K^2}{2p_0^2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\} +$$

$$\frac{24}{\pi^2} \frac{\frac{\lambda \pi^2}{4} - \lambda^2 \Psi \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) - \lambda^2 (\gamma + 2 \ln 2)}{\frac{p_0^4}{K^4} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\}} \left( 1 - \frac{K}{p_0} \operatorname{arctg} \frac{p_0}{K} \right)^2 \quad (4.26)$$

Вираз (4.22) є одним із основних результатів даного пункту, він буде ви-

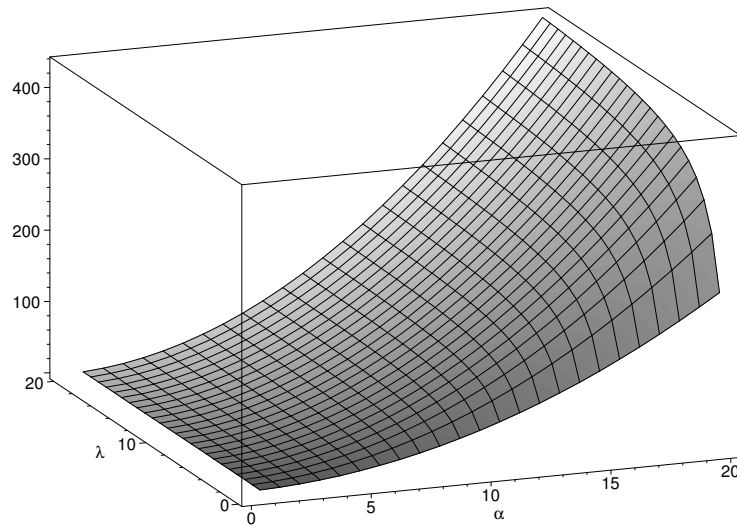


Рис. 4.1: Залежність значення  $q_{\infty}$  від коефіцієнта прозорості ( $D(1) = \frac{p_0^2}{p_0^2 + K^2}$ ,  $\alpha = K/p_0$ .) та довжини вільного пробігу електронів ( $\lambda = l/\xi_0$ ).

користуватись при одержанні граничної умови і знаходженні формули для густини струму.

Між коефіцієнтами правих і лівих асимптотик можна встановити та-

кий зв'язок:

$$\begin{aligned}\Delta'_+ - \Delta'_- &= 0, & \Delta_+ + \Delta_- &= A, \\ \Delta'_+ + \Delta'_- &= C, & \Delta_+ + \Delta_- &= Cq_\infty,\end{aligned}\tag{4.27}$$

звідки маємо співвідношення

$$\begin{aligned}\Delta'_+ &= \Delta'_-, \\ \Delta_+ &= \Delta_- + 2q_\infty \Delta'_-, \end{aligned}\tag{4.28}$$

які можна записати і в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \Delta'_+ \\ \Delta_+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta'_- \\ \Delta_- \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2q_\infty & 1 \end{pmatrix}.\tag{4.29}$$

Як вже говорилося в розділі II, ПВ в теорії Гінзбурга-Ландау за наявності струму в контакті дається формулою

$$\Delta(\zeta) = \exp\{\pm i\varphi/2\} \Delta_\infty f(\zeta) \exp\{2im\chi(\zeta)\},\tag{4.30}$$

де  $\chi(\zeta)$  – неперервна складова фази параметра впорядкування  $\chi(-0) = \chi(+0) = 0$ , яка визначає надплинну швидкість  $\frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta} = \xi_0 v_s(\zeta)$ ;  $\varphi$  – стрибок фази при переході через контакт,  $f(\zeta)$  задовольняє рівняння

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} f''(\zeta) - \xi^2(T) 4m^2 v_s^2(\zeta) f(\zeta) + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0,\tag{4.31}$$

$$v_s(\zeta) f^2(\zeta) = \text{const}.\tag{4.32}$$

Підставимо (4.30) в (4.28) і відокремимо уявну і дійсну частини. В результаті одержимо систему із чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} f'_+ \cos \varphi - 2mv_s(0)\xi_0 f_+ \sin \varphi = f'_-, \\ f'_+ \sin \varphi + 2mv_s(0)\xi_0 f_+ \cos \varphi = 2mv_s(0)\xi_0 f_-, \\ f_+ \cos \varphi = f_- + 2q_\infty f'_-, \\ f_+ \sin \varphi = 4mv_s(0)\xi_0 q_\infty f_-, \end{cases}\tag{4.33}$$

яка відрізняється від аналогічної для SNS – контакту.



Дана система має нетривіальний розв'язок за умови

$$4mv_s(0)\xi_0q_\infty = \sin \varphi, \quad (4.34)$$

беручи її до уваги, з (4.33) отримаємо

$$f_+ = f_-, \quad f'_+ = -f'_-, \quad \frac{f'_+}{f_+} = \frac{1}{2q_\infty}(1 - \cos \varphi) = \frac{\sin^2(\varphi/2)}{q_\infty}. \quad (4.35)$$

Співвідношення (4.35) разом із першим інтегралом РГЛ визначають граничну умову для ПВ, що дає можливість обчислити невідому сталу, яка міститься у розв'язку РГЛ.

#### 4.1.2 Розрахунок струму в брудному SIS – контакті при неповній прозорості ізолятора, поблизу критичної температури.

Випишемо перший інтеграл рівняння (4.31) на IS – границі

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} f'_+ - \frac{f_\infty^2 - f_+^2}{f_+} \sqrt{f_\infty^2 - 1 + \frac{1}{2}f_+^2} = 0, \quad (4.36)$$

тут  $f_\infty$  значення функції  $f(\zeta)$  на нескінченності.  $f_\infty$  задовольняє рівнянню

$$f_\infty^6 - f_\infty^4 + \left( \frac{\xi(T)}{2\xi_0q_\infty} \right)^2 \sin^2 \varphi f_+^4 = 0. \quad (4.37)$$

Справді, з рівняння (4.31) на нескінченності маємо

$$f_\infty^2 = 1 - 4m^2v_s^2(\infty)\xi^2(T). \quad (4.38)$$

А на основі (4.32) із залученням (4.34) знаходимо

$$v_s(\infty)f_\infty^2 = \frac{\sin \varphi}{4m\xi_0q_\infty} f_+^2. \quad (4.39)$$

Тоді, виражаючи із (4.39)  $v_s$  і підставляючи в (4.38), приходимо до (4.37).

Для  $f_+$  маємо з (4.35) і (4.36) наступне рівняння:

$$f_+^6 - 2 \left( 1 + \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2q_\infty^2} \sin^4 \frac{\varphi}{2} \right) f_+^4 + f_\infty^2 (4 - 3f_\infty^2) f_+^2 + 2f_\infty^4 (f_\infty^2 - 1) = 0 \quad (4.40)$$

Його розв'язок

$$f_+^2 = \pm \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - 3b} \times \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arctan \sqrt{\frac{4(a^2 - 3b)^3}{(9ba - 27c - 2a^3)^2} - 1} \right) - \frac{a}{3}, \quad (4.41)$$

де

$$a = -2 \left( 1 + \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2 q_\infty^2} \sin^4 \frac{\varphi}{2} \right), \quad b = f_\infty^2 (4 - 3f_\infty^2), \quad c = 2f_\infty^4 (f_\infty^2 - 1).$$

Знак (+) ставимо, якщо  $27c - 9ab + 2a^3 \geq 0$  і знак (-), якщо  $27c - 9ab + 2a^3 < 0$ .

При написанні виразу для струму, який може протікати через контакт, за вихідну береться загальна формула для струму в теорії Гінзбурга-Ландау [10] за наявності домішок

$$j(\zeta) = i \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0 \xi_0 T_c^2} \left( \Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \chi(\xi_0/l). \quad (4.42)$$

Тут  $\chi(\xi_0/l) = \frac{8}{7\zeta(3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+1+\xi_0/l)}$ . Струм обчислюється в області  $z \gg \xi_0$ , де асимптотика ПВ є лінійною. Підставляючи (4.3) в (4.42), використовуємо співвідношення (4.28) і представлення для ПВ (4.30). В результаті вираз для струму (4.42) набуде форми

$$j = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0 \Delta_\infty^2}{p_0 \xi_0 T_c^2} \frac{f_+ f_-}{q_\infty} \chi(\xi_0/l) \sin \varphi, \quad (4.43)$$

$f_+$  і  $f_-$  – значення функції  $f(\zeta)$  при  $\zeta = +0$  і  $\zeta = -0$ , відповідно, і, як слідує із (4.35), вони є однакові та даються виразом (4.41). Таким чином, остаточно для струмових станів, які можуть існувати в SIS – контакті за наявності домішок довільної концентрації і при значеннях коефіцієнта проходження електронів крізь діелектрик від нуля до значень, близьких

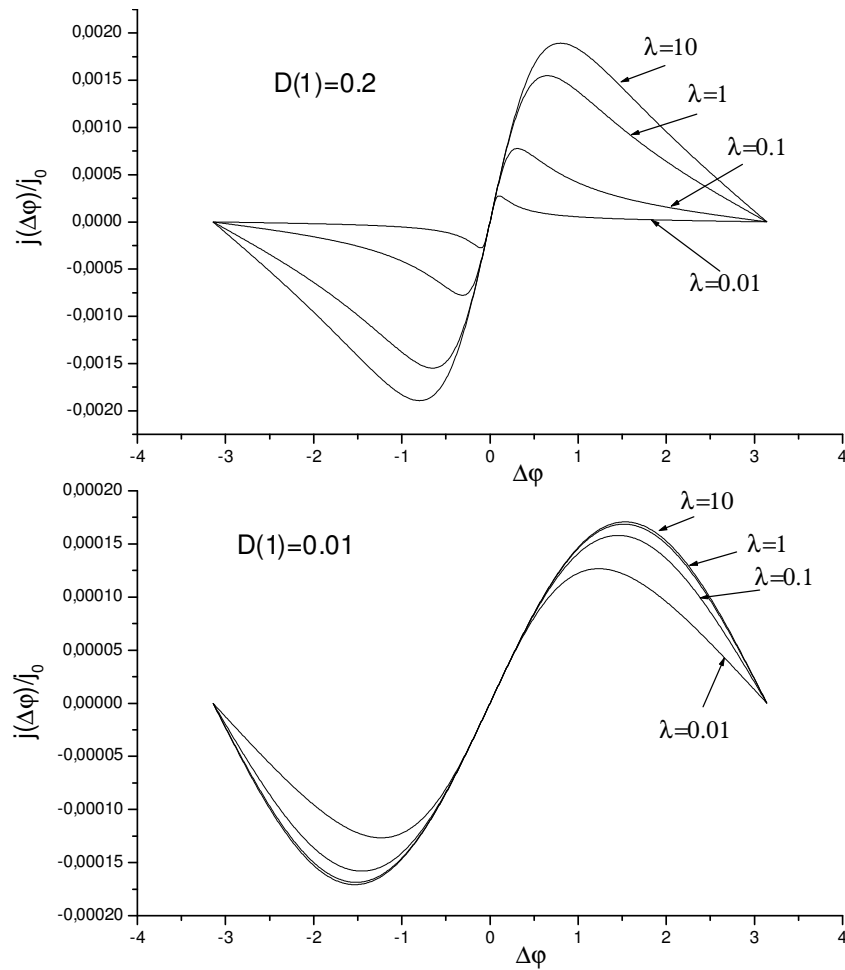


Рис. 4.2: Залежність густини струму від різниці фаз між берегами контакту при різних довжинах вільного пробігу електронів.  $T = 0.98T_c$ ,  $j_0 = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0\xi_0}$ .

до одиниці, маємо

$$j = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \frac{\chi(\xi_0/l)}{q_\infty} \left\{ \mp \sqrt{a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)} \times \right. \quad (4.44)$$

$$\left. \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4(a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2))^3}{(9f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)a - 54f_\infty^4(f_\infty^2 - 1) - 2a^3)^2} - 1} \right) - \frac{a}{2} \right\} \sin \varphi.$$

$q_\infty$  дається формулою (4.26), а  $f_\infty$  задовольняє рівнянню (4.37). Одержана формула виявляє складну струм-фазову залежність при не малих прозоростях діелектрика, яка переходить в синусоїдальну, коли коефіцієнт проходження електронів крізь діелектрик є малим.

## 4.2 Асимптотичні форми виразу для струму в SIS – контакті без врахування впливу струму на просторову зміну ПВ

Значення  $f_+$  і  $f_-$  знайдемо, використовуючи перший інтеграл рівняння Гінзбурга-Ландау (в якому покладемо  $v_s = 0$ )

$$f'_+ = \frac{\xi_0}{\sqrt{2\xi(T)}}(1 - f_+^2),$$

і третє із співвідношень (4.35). На їх основі маємо

$$f_+ = \sqrt{1 + \frac{\xi^2(T)}{2\xi_0^2} \frac{1}{q_\infty^2} \sin^4 \frac{\varphi}{2} - \frac{\xi(T)}{\sqrt{2}\xi_0} \frac{1}{q_\infty} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad (4.45)$$

тут

$$\xi^2(T) = \frac{7\zeta(3)}{12} \frac{\xi_0^2}{1 - T/T_c} \chi(\xi_0/l).$$

Тоді кінцевий вираз для струму

$$j = \frac{7\zeta(3)}{48} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{3\chi(\lambda)}{S_2} \frac{\left( \int_0^1 x^2 R(x) dx \right)^2}{\left( \int_0^1 x D(x) dx \right)^{-1}} \right)^{-3} \times$$

$$\left( \left[ \frac{24}{7\zeta(3)\chi(\xi_0/l)} \frac{(1 - T/T_c)}{\sin^4 \varphi/2} \left( \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{3\chi(\lambda)}{S_2} \left( \int_0^1 x^2 R(x) dx \right)^2 \right. \right. \right. \right. \times$$

$$\left. \left. \left. \left( \int_0^1 x D(x) dx \right)^{-1} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - 1 \right]^2 \frac{\sin \varphi}{\sin^{-4} \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.46)$$

Розглянемо достатньо чистий контакт, тобто для довжини вільного пробігу електронів виконується нерівність  $l \gg \xi_0$  ( $\lambda \gg 1$ ). Тоді для  $\chi(\lambda)$  та  $\chi_1(\lambda)$  в границі  $\lambda \rightarrow \infty$  матимемо

$$\chi_1(\lambda) \cong \frac{\pi^4}{48}, \quad \chi(\lambda) \cong \frac{7\zeta(3)}{4}.$$

Вираз для  $q_\infty$  набуде форми

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left( \int_0^1 x^2 R(x) dx \right)^2}{\int_0^1 x D(x) dx}, \quad (4.47)$$

а після обчислення інтегралів

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} \frac{K^2}{p_0^2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\} + \frac{42\zeta(3) K^4}{\pi^2} \frac{\left( 1 - \frac{K}{p_0} \operatorname{arctg} \frac{p_0}{K} \right)^2}{p_0^4 \left\{ 1 - \frac{K^2}{p_0^2} \ln \left( \frac{K^2 + p_0^2}{K^2} \right) \right\}}. \quad (4.48)$$

З формули (4.46) можна одержати результати для випадків малої прозорості ( $D \gtrsim 0$ ) і прозорості, близької до одиниці ( $D \lesssim 1$ ).

В першому випадку можна знехтувати першим доданком у формулі (4.22), а в другому  $R$  покласти рівним одиниці. Тоді

$$q_\infty = \frac{4\chi(\lambda)}{3\pi^2} \left( \int_0^1 x D(x) dx \right)^{-1}, \quad (4.49)$$

а вираз для густини струму матиме вигляд

$$j = \frac{3\pi^2}{14\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \int_0^1 dx \cdot x D(x) \sin \varphi. \quad (4.50)$$

З даної формули бачимо, що наявність домішок не впливає на струм при малій прозорості діелектрика.

У випадку прозорості близької до одиниці нехтуємо другим доданком

у (4.22), тобто  $q_\infty$  дається формулою

$$q_\infty = \frac{3\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \int_0^1 x^3 R(x) dx. \quad (4.51)$$

Тоді, виконуючи в (4.46) спрощення пов'язані з мализною  $q_\infty$ , одержимо такий вираз для струму

$$j = \frac{18}{7\zeta(3)} \frac{\chi_1(\lambda)}{\chi(\lambda)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \int_0^1 x^3 R(x) dx \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}, \quad (4.52)$$

при умові, що  $\sin(\varphi/2)$  не є малим. Отримаємо асимптотичний вигляд формули (4.52) для чистого контакту ( $\lambda \gg 1$ ) та гранично брудного ( $\lambda \ll 1$ )

У випадку чистого контакту, беручи до уваги значення сум  $\chi_1(\lambda)$ ,  $\chi(\lambda)$  з попереднього підпункту, маємо

$$j = \frac{3\pi^4}{98\zeta^2(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \int_0^1 x^3 R(x) dx \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.53)$$

При ( $\lambda \ll 1$ ) вирази для  $\chi_1(\lambda)$  і  $\chi(\lambda)$  можна обчислити наближено:

$$\chi_1(\lambda) \cong S_2\lambda^2, \quad \chi(\lambda) \cong S_2\lambda.$$

Підставляючи останні формули в (4.52), одержимо

$$j = \frac{18}{7\zeta(3)} \frac{l}{\xi_0} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \int_0^1 x^3 R(x) dx \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.54)$$

Отже в даному пункті одержано загальний вираз (4.44) для густини струму в тунельному SIS – контакті за наявності домішок довільної концентрації, коефіцієнт проходження електронів може змінюватись в інтервалі від нуля до значень близьких до одиниці. Одержані із загальної формули асимптотичні результати узгоджуються із результатами в монографії [12], в якій ці асимптотичні випадки були досліджені.

### 4.3 Симетричний SNINS – контакт при довільній товщині нормального прошарку та прозорості діелектрика

Розглянуто поведінку ПВ поблизу границі розділу нормальної та надпровідної області в *SNINS* – контакті. Для цього одержано ЛІР, яке є справедливим поблизу границі, і досліджено його розв’язок. Далі знайдено граничну умову для РГЛ з врахуванням впливу струму на просторову зміну ПВ. При обчисленні потрібних параметрів використовується метод квазіортогональності до асимптотики.

На заключному етапі виконано розрахунок для густини струму, який може протікати через *SNINS* – контакт, і знайдено його асимптотичні форми при великій та малій товщині нормального прошарку в порівнянні з ДК.

При цьому товщина нормального прошарку вважається довільною, а температура близькою до критичної.

#### 4.3.1 Побудова і дослідження ЛІР для ПВ поблизу NS - границі в SNINS – контакті

Для одержання явного вигляду ЛІР

$$\Delta(\vec{r}) = \int K(\vec{r}, \vec{r}') \Delta(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (4.55)$$

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = |g|T_c \sum_{\omega_n} \overline{G_{-\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}')} G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}', \vec{r}),$$

що описує поведінку ПВ поблизу границі розділу нормального металу й надпровідника в *SNINS* – контакті, необхідно мати вираз для функції Гріна  $G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}')$ . Ця функція шукається з рівняння

$$(i\omega_n - \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mu - U(z))G_{\omega_n}^{(0)}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (4.56)$$

де потенціал приймається  $\delta$ -функційним:  $U(z) = U_0\delta(z)$ .

Найпростіше побудувати функцію Гріна методом склеювання з відповідних розв'язків одночастинкової задачі. Після нескладних розрахунків, з деталями яких можна ознайомитись в [11,12,27], одержуємо наступне рівняння

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \int d\zeta' \Delta(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \left\{ \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}|\zeta - \zeta'|\right) + \text{sign}\zeta\zeta' R(x) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}(|\zeta| + |\zeta'|)\right) \right\}. \quad (4.57)$$

Тут враховано, що просторова однорідність порушена лише в напрямку осі  $0Z$ . Крім того, всі величини взяті в безрозмірній формі:  $\rho = |g|N(0)$  – безрозмірна константа зв'язку,  $N(0)$  – густина електронних станів на поверхні фермі-сфери;  $\zeta = \frac{z}{\xi_0}$  – безрозмірна змінна;  $R(x)$  – коефіцієнт відбиття електронів.

Рівняння (4.57) розглядатимемо окремо в областях  $\zeta > \frac{a}{2}$  та  $\zeta < -\frac{a}{2}$ , тобто в правому й лівому надпровідниках. В області  $\zeta > \frac{a}{2}$  маємо

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \int_{a/2}^{\infty} d\zeta' \Delta(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \times \left\{ \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}|\zeta - \zeta'|\right) + R(x) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}(\zeta + \zeta')\right) \right\} + \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{-a/2} d\zeta' \Delta(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} D(x) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}(\zeta - \zeta')\right), \quad (4.58)$$



а при  $\zeta < -\frac{a}{2}$  –

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) = & \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{-a/2} d\zeta' \Delta(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \times \\ & \left\{ \exp\left(\frac{|2n+1|}{x} |\zeta - \zeta'|\right) + R(x) \exp\left(\frac{|2n+1|}{x} (\zeta + \zeta')\right) \right\} + \\ & \frac{\rho}{2} \int_{a/2}^{\infty} d\zeta' \Delta(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} D(x) \exp\left(\frac{|2n+1|}{x} (\zeta - \zeta')\right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

У другому доданку правої частини (4.58) і в першому (4.59) виконаємо заміну змінної інтегрування  $\zeta' \rightarrow -\zeta'$ , а в рівнянні (4.59) замінимо незалежну змінну  $\zeta \rightarrow -\zeta$ . Тоді, додаючи і віднімаючи (4.58) і (4.59), одержуємо рівняння для симетричної  $\Delta_s(\zeta) = \Delta(\zeta) + \Delta(-\zeta)$  і антисиметричної  $\Delta_a(\zeta) = \Delta(\zeta) - \Delta(-\zeta)$  частин параметра впорядкування  $\Delta(\zeta)$

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) = & \frac{\rho}{2} \int_{a/2}^{\infty} d\zeta' \Delta_s(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \left\{ \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x} |\zeta - \zeta'|\right) + \right. \\ & \left. \exp\left(\frac{|2n+1|}{x} (\zeta + \zeta')\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \Delta_a(\zeta) = & \frac{\rho}{2} \int_{a/2}^{\infty} d\zeta' \Delta_a(\zeta') \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \left\{ \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x} |\zeta - \zeta'|\right) + \right. \\ & \left. \tau(x) \exp\left(\frac{|2n+1|}{x} (\zeta + \zeta')\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

де  $\tau(x) = 1 - 2D(x)$ .  $D(x)$  – коефіцієнт проходження електронів крізь ізолятор. В прийнятому наближенні  $D(x)$  дається формулою

$$D(x) = \frac{K^2 x^2}{p_0^2 + K^2 x^2}, \quad (4.62)$$

де  $K = mU_0$ .

Щоб інтегрування виконувалось на півосі, зробимо зсув змінних:  $\zeta \rightarrow \zeta + \frac{a}{2}$ ,  $\zeta' \rightarrow \zeta' + \frac{a}{2}$  і зсунуті функції позначатимемо тими самими літерами, тобто

$$\Delta_s\left(\zeta + \frac{a}{2}\right) \rightarrow \Delta_s(\zeta), \quad \Delta_a\left(\zeta + \frac{a}{2}\right) \rightarrow \Delta_a(\zeta).$$

В результаті одержимо

$$\Delta_s(\zeta) = \int_0^{\infty} d\zeta' \Delta_s(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\}, \quad (4.63)$$

$$\Delta_a(\zeta) = \int_0^{\infty} d\zeta' \Delta_a(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K_D(\zeta + \zeta' + a)\}, \quad (4.64)$$

де

$$K(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}|\zeta|\right),$$

$$K_D(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \tau(x) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}|\zeta|\right).$$

З (4.63) і (4.64) випливає, що асимптотика  $\Delta_s(\zeta)$  і  $\Delta_a(\zeta)$  є лінійною на нескінченності ( $\zeta \rightarrow \infty$ ). Переконаємось в цьому безпосередньою підстановкою лінійної функції  $\Delta_s(\zeta) = A\zeta + B$  в рівняння (4.63). Залучаючи співвідношення

$$\int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') d\zeta' = 1 - \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') d\zeta',$$

$$\int_0^{\infty} K(\zeta - \zeta') \zeta' d\zeta' = \zeta + \int_0^{\infty} K(\zeta + \zeta') \zeta' d\zeta',$$

які легко перевірити, отримаємо

$$A\zeta + B = A\zeta + B + A \int_0^{\infty} d\zeta' \cdot \zeta' K(\zeta + \zeta') - \\ B \int_0^{\infty} d\zeta' K(\zeta + \zeta') + \int_0^{\infty} d\zeta' (A\zeta + B) K(\zeta + \zeta' + a). \quad (4.65)$$

Якщо тепер спрямувати  $\zeta$  до нескінченності, то доданки з  $K$  прямують до нуля, а отже, лінійна функція є асимптотично точним розв'язком рівняння (4.63) при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Аналогічно можна показати, що лінійною є асимптотика розв'язку рівняння (4.64).

Підставимо вирази для  $\Delta_s(\zeta)$  і  $\Delta_a(\zeta)$  з виділеною асимптотикою

$$\begin{aligned} \Delta_s(\zeta) &= C_1(\zeta + q_{1,\infty} + \psi_s(\zeta)), \\ \Delta_a(\zeta) &= C_2(\zeta + q_{2,\infty} + \psi_a(\zeta)), \end{aligned} \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_{s,a}(\zeta) = 0 \quad (4.66)$$

в (4.63) та (4.64), відповідно. Нам важливо знати коефіцієнти  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$ . Для їх знаходження знову використаємо метод квазіортогональності до асимптотики. Після нескладних перетворень, маємо

$$\begin{aligned} \psi_s(\zeta) - \int_0^{\infty} \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \psi_s(\zeta') d\zeta' = \\ \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} \zeta' d\zeta' - \\ q_{1,\infty} \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} d\zeta', \quad (4.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_a(\zeta) - \int_0^{\infty} \{K(\zeta - \zeta') + K_D(\zeta + \zeta' + a)\} \psi_a(\zeta') d\zeta' = \\
\int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K_D(\zeta + \zeta' + a)\} \zeta' d\zeta' - \\
q_{2,\infty} \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K_D(\zeta + \zeta' + a)\} d\zeta'. \quad (4.68)
\end{aligned}$$

Проінтегруємо рівняння (4.67) і (4.68) на півосі по  $\zeta$ , один раз домноживши на одиницю, а другий – на  $\zeta$ . В одержаних рівняннях введемо нові функції:

$$q_s(\zeta) = q_{1,\infty} + \psi_s(\zeta), \quad q_a(\zeta) = q_{2,\infty} + \psi_a(\zeta).$$

У висліді приходимо до двох систем

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K(\zeta + \zeta' + a)\} q_s(\zeta') d\zeta' = I_1 + I_1(a), \\
\int_0^{\infty} d\zeta \zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K(\zeta + \zeta' + a)\} q_s(\zeta') d\zeta' = \\
2q_{1,\infty} I_1 - I_2 - I_2(a), \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') - K_D(\zeta + \zeta' + a)\} q_a(\zeta') d\zeta' = I_1 + I_1(D, a), \\
\int_0^{\infty} d\zeta \zeta \int_0^{\infty} \{K(\zeta + \zeta') + K_D(\zeta + \zeta' + a)\} q_a(\zeta') d\zeta' = \\
2q_{2,\infty} I_1 - I_2 - I_2(D, a). \quad (4.70)
\end{aligned}$$

Візьмемо замість  $q_s(\zeta')$ ,  $q_a(\zeta')$  пробні функції, які оберемо сталими  $\Gamma_s$ ,  $\Gamma_a$ , відповідно. Тоді з (4.69) і (4.70) остаточно маємо

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{2I_1} \left\{ I_2 + I_2(a) + \frac{(I_1 + I_1(a))^2}{I_0 - I_0(a)} \right\}, \quad (4.71)$$

$$q_{2,\infty} = \frac{1}{2I_1} \left\{ I_2 + I_2(D, a) + \frac{(I_1 + I_1(D, a))^2}{I_0 - I_0(D, a)} \right\}. \quad (4.72)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}
 I_0(D, a) &= \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' K_D(\zeta + \zeta' + a), \\
 I_1(D, a) &= \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' \zeta' K_D(\zeta + \zeta' + a), \\
 I_2(D, a) &= \int_0^\infty d\zeta \zeta \int_0^\infty d\zeta' \zeta' K_D(\zeta + \zeta' + a), \\
 I_k(a) &= I_k(0, a), \quad I_k = I_k(0, 0), \quad k = 0, 1, 2.
 \end{aligned}$$

Зауважимо також, що

$$I_0 = \frac{\rho}{4} S_2, \quad I_1 = \frac{\rho}{6} S_3, \quad I_2 = \frac{\rho}{8} S_4, \quad S_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2n+1|^\alpha}. \quad (4.73)$$

Після обчислення інтегралів по  $\zeta, \zeta'$  у виразах для  $q_{1,\infty}$  та  $q_{2,\infty}$  останні набудуть такої форми

$$\begin{aligned}
 q_{1,\infty}(a) &= \frac{12\zeta(3)}{7} \left\{ \frac{\pi^4}{384} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^3}{(2n-1)^4} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\left[ \frac{7\zeta(3)}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^2}{(2n-1)^3} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} \right]^2}{\frac{\pi^2}{16} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x}{(2n-1)^2} \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\}} \right\}, \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{2,\infty}(a) &= \frac{12\zeta(3)}{7} \left\{ \frac{\pi^4}{384} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^3}{(2n-1)^4} (1-2D(x)) \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\left[ \frac{7\zeta(3)}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x^2}{(2n-1)^3} (1-2D(x)) \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\} \right]^2}{\frac{\pi^2}{16} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx x}{(2n-1)^2} (1-2D(x)) \exp \left\{ -\frac{2n-1}{x} a \right\}} \right\}. \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

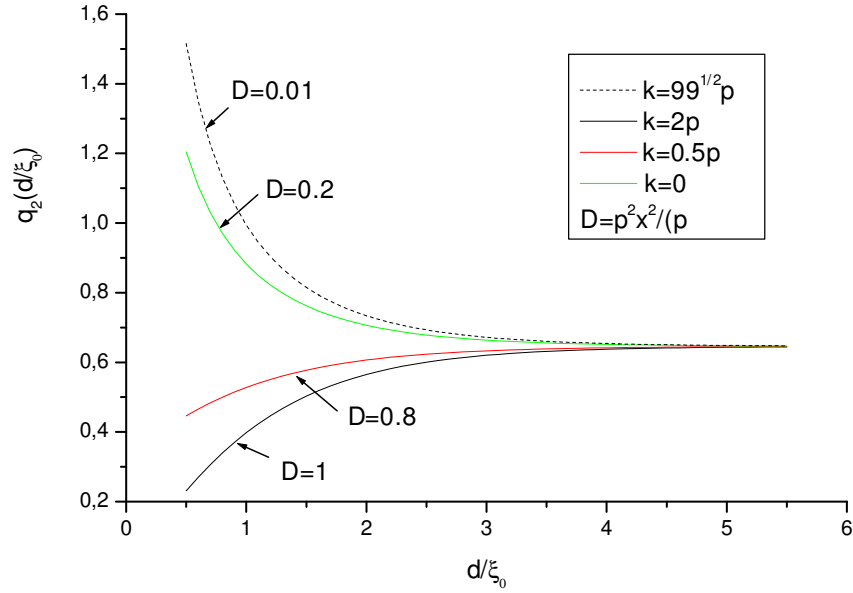


Рис. 4.3: Залежність значення  $q_2$  від товщини нормального прошарку при певних значеннях коефіцієнта прозорості, які зазначені на кресленні (коефіцієнти прозорості подані для електронів, хвильовий вектор яких перпендикулярний до площини границі розділу нормального металу і надпровідника).

Якщо покласти в (4.72) коефіцієнт проходження електронів  $D$  рівним одиниці, то відтворимо результат для  $SNS$  – контакту, одержаний в розділі III.

### 4.3.2 Розрахунок струму в SNINS – контакті

Струм обчислюватиметься в області  $\xi_0 \ll z \ll \xi(T)$ , де є чинними як ЛІР так і РГЛ. Тоді можна скористатися асимптотикою розв'язку ЛІР для  $\Delta(z)$  при  $|z| \gg \xi_0$ , яка є лінійною

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) &= \Delta'_+ \zeta + \Delta_+, & \zeta \rightarrow +\infty, \\ \Delta(\zeta) &= \Delta'_- \zeta + \Delta_-, & \zeta \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Підставимо (4.76) у (3.45) і використаємо представленням (3.21), в результаті приходимо до такого вираз для струму:

$$j = \frac{3}{7\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \left(\frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}}\right) f_+^2 \sin \varphi. \quad (4.77)$$

Подальший хід обчислень такий самий як і для SNS – контакту, тому проміжні викладки можна опустити, а одразу виписати кінцевий вираз для струму

$$j = \frac{1}{3} \frac{env_0}{p_0 \xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \left(\frac{1}{q_{2,\infty}} - \frac{1}{q_{1,\infty}}\right) \left\{ \mp \sqrt{a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)} \times \right. \quad (4.78)$$

$$\left. \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4(a^2 - 3f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2))^3}{(9f_\infty^2(4 - 3f_\infty^2)a - 54f_\infty^4(f_\infty^2 - 1) - 2a^3)^2} - 1} \right) - \frac{a}{2} \right\} \sin \varphi,$$

тут

$$a = -2 \left[ 1 + \frac{7\zeta(3)}{12(1 - T/T_c)} \left( \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{1,\infty}} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{q_{2,\infty}} \right)^2 \right].$$

У формулі (4.78) на товщину нормального прошарку не накладено ніяких умов, а отже, вона є справедлива і для контактів, в яких  $d \simeq \xi_0$ . На кресленні зображено залежності струму від різниці фаз, з якого видно, що при зменшенні товщини нормального прошарку ця залежність суттєво відрізняється від синусоїдальної.

## 4.4 Асимптотичні форми виразу для струму в SNI-NS – контакті

### 4.4.1 Товщина нормального прошарку $d \gg \xi_0$ .

Одержимо асимптотичну форму виразу (4.78) при умові, що товщина нормального прошарку набагато більша від довжини когерентності ( $d \gg \xi_0$ ), тобто  $a \gg 1$ . За такої умови інтегральні вирази  $I_k(a)$ , а отже і  $q_{1,\infty}, q_{2,\infty}$  можна обчислити наближено. Крім того можна не враховувати

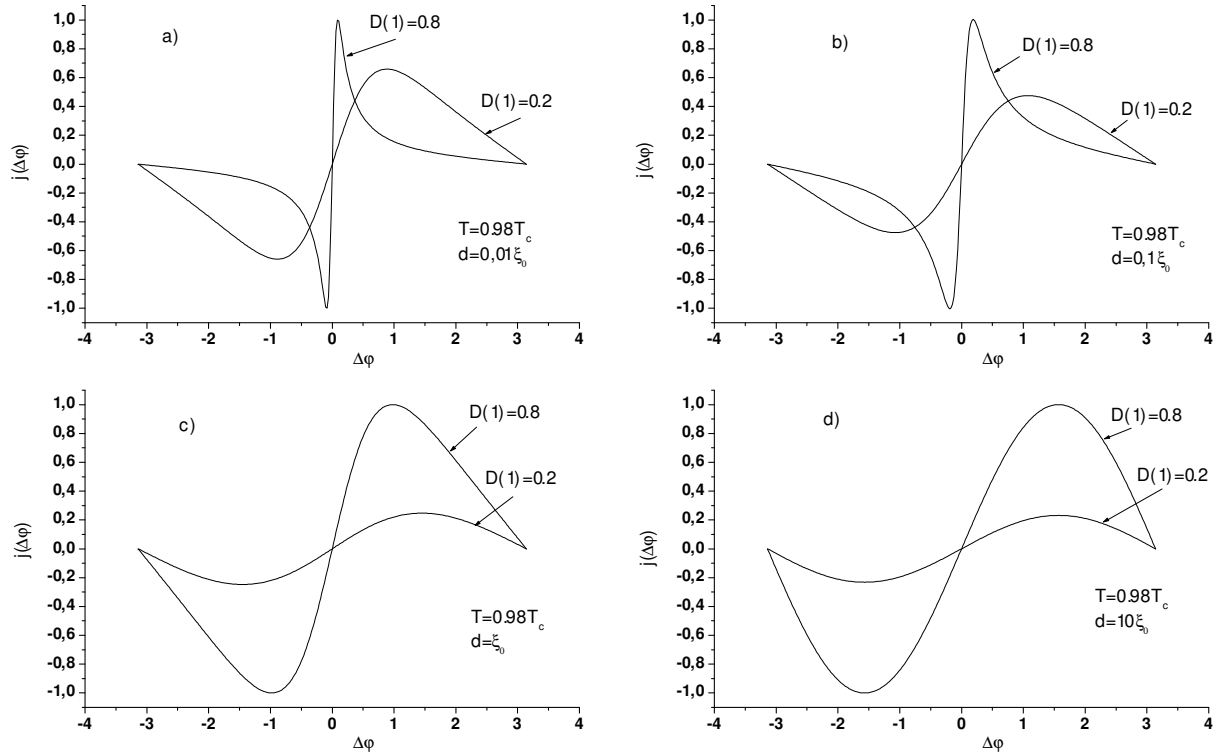


Рис. 4.4: На кресленнях зображено залежність величини густини струму від різниці фаз між берегами контакту при різних значеннях товщини нормального прошарку. Значення коефіцієнта проходження електронів  $D(1) = 0.8, 0.2$ , температура  $T = 0.98T_c$ .

$v_s$  в РГЛ. Розглянемо цей наближений підхід на прикладі  $I_0(a)$

$$I_0(a) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^\infty d\zeta \int_0^\infty d\zeta' \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}(\zeta + \zeta' + a)\right) =$$

$$\frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{x^2}{(2n+1)^2} \exp\left(-\frac{|2n+1|}{x}a\right). \quad (4.79)$$

При  $a \gg 1$  основний внесок в суму по  $n$  дають  $n = 0$  та  $n = -1$ . Отже,

$$I_0(a) \cong \rho \int_0^1 dx x \exp\left(-\frac{a}{x}\right) \cong \rho \frac{e^{-a}}{a}. \quad (4.80)$$

Аналогічно обчислюємо інтегральні вирази  $I_1(a)$  та  $I_2(a)$ , а також  $I_0(D, a)$ ,  $I_1(D, a)$ ,  $I_2(D, a)$ . В результаті одержимо

$$I_0(a) = I_1(a) = I_2(a) \cong \rho \frac{e^{-a}}{a},$$



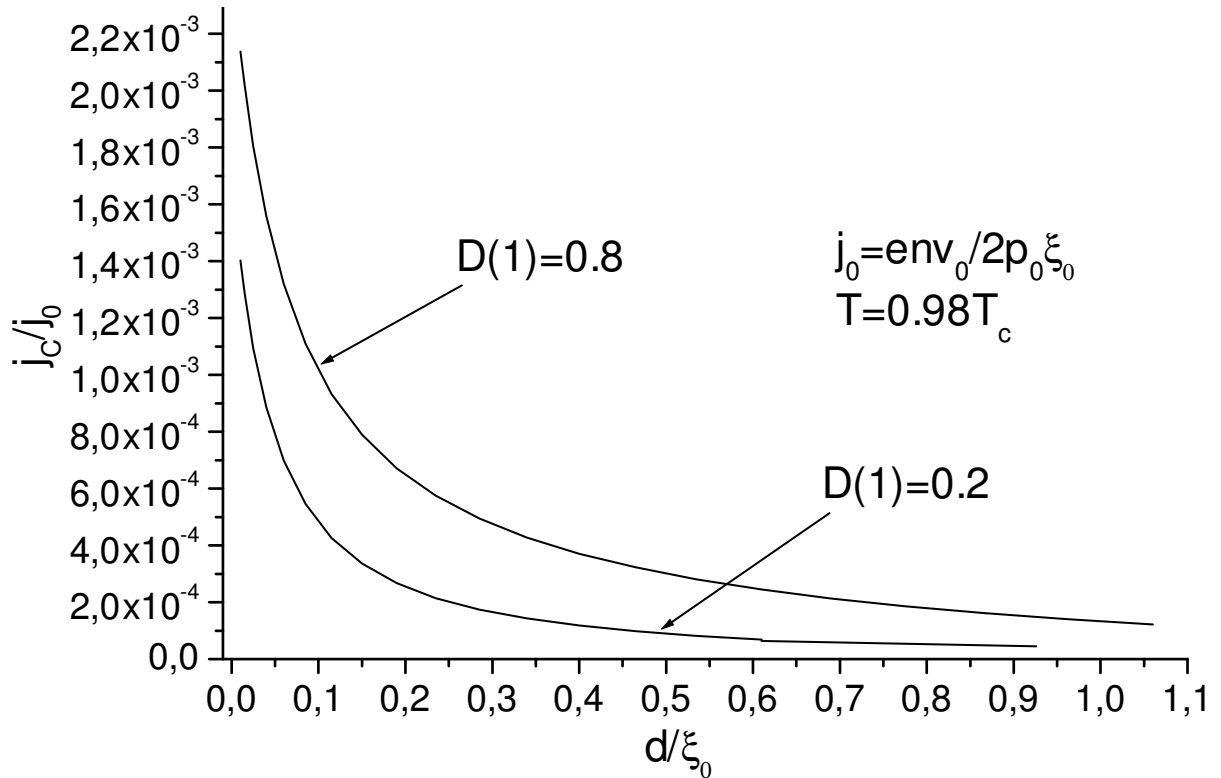


Рис. 4.5: Залежність критичного струму від товщини нормального прошарку  $d$  при різних значеннях коефіцієнта проходження електронів крізь плівку діелектрика  $D(1)$ .

$$I_0(D, a) = I_1(D, a) = I_2(D, a) \cong \rho \frac{e^{-a}}{a} - 2D(1)\rho \frac{e^{-a}}{a}.$$

Оскільки у виразах для  $q_{1,\infty}$ ,  $q_{2,\infty}$  виникає мала величина  $\frac{e^{-a}}{a}$ , по якій можемо виконати розклад, то, обмежуючись першим наближенням, маємо

$$q_{1,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_1} \right) + \frac{\rho}{2I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2, \quad (4.81)$$

$$q_{2,\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_1} \right) + \frac{\rho}{2I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2 - D(1) \frac{\rho}{I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2. \quad (4.82)$$

Підставимо вирази для  $q_{1,\infty}$  і  $q_{2,\infty}$  в формулу для струму (4.77), тоді в потрібному наближенні матимемо

$$j = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^2} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \frac{\Delta_\infty^2}{T_c^2} \frac{\xi_0^2}{\xi^2(T)} D(1) \frac{\rho}{I_1} \frac{e^{-a}}{a} \left( 1 + \frac{I_1}{I_0} \right)^2 \sin \varphi. \quad (4.83)$$

Беручи до уваги (2.26) і (2.27), з (4.83) одержимо остаточний вираз для густини струму в широкому  $SNINS$  – контакті ( $d \gg \xi_0$ )

$$j = \frac{2S_3}{7\zeta(3)} \left( \frac{3}{S_3} + \frac{2}{S_2} \right)^2 \frac{env_0}{p_0 d} D(1) e^{-\frac{d}{\xi_0}} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \sin \varphi. \quad (4.84)$$

З останньої формули бачимо, що температурна залежність струму в широкому  $SNINS$  – контакті така ж само як і в широкому  $SNS$  – контакті. Проте на відміну від  $SNS$  – контакту, струм зменшується завдяки множнику  $D(1)$ . Оскільки формула (4.84) є справедливою при довільній прозорості ізолятора, то покладаючи  $D(1) = 1$  одержуємо формулу для густини струму в  $SNS$  – контакті, при умові, що товщина нормального прошарку набагато більша від довжини когерентності. Зауважимо також, що формула (4.84) узгоджується з результатом отриманим в роботі [25], де з самого початку до розгляду брався асимптотичний випадок  $a \gg 1$ .

#### 4.4.2 Граничний випадок малої товщини нормального металу, перехід до тунельного $SIS$ – контакту.

Далі розглянемо інший граничний випадок  $a \ll 1$ . Тоді  $q_{1,\infty} \rightarrow \infty$ , або  $q_{1,\infty} \gg q_{2,\infty}$ . Використовуючи дану умову, спростимо формулу (3.55) для  $f_+$ , як результат маємо

$$f_+ = \sqrt{1 + \frac{\xi^2(T)}{2\xi_0^2 q_{2,\infty}^2} \sin^4 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\xi(T)}{\sqrt{2}\xi_0 q_{2,\infty}} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.85)$$

Підставляючи (4.85) у (3.51), одержимо

$$j = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0 \Delta_\infty^2}{p_0 \xi_0 T_c^2} \frac{1}{q_{2,\infty}} \left[ \sqrt{1 + \frac{\xi^2(T)}{2\xi_0^2 q_{2,\infty}^2} \sin^4 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\xi(T)}{\sqrt{2}\xi_0 q_{2,\infty}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]^2 \sin \varphi. \quad (4.86)$$

Формула (4.86) містить в собі і крайній граничний випадок:  $d = 0$ , тобто нормальний метал взагалі відсутній, а наші результати описуватимуть  $SIS$  – контакт – два надпровідники з'єднані через ізоляційну

плівку. Випишемо вираз для  $q_{2,\infty}$  в розгорнутому вигляді покладаючи  $a = 0$

$$q_{2,\infty} = \frac{3S_4}{S_3} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) + \frac{3S_3}{S_2} \frac{\int_0^1 dx \cdot x^2 R(x)}{\int_0^1 dx \cdot x D(x)} \quad (4.87)$$

Підставимо (4.87) в (4.86) і використаємо співвідношення (2.26), (2.27), тоді після нескладних перетворень одержимо остаточну формулу для струму в *SIS* - контактi, при довільній прозорості

$$j = \frac{7\zeta(3)}{48} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left( \frac{3S_4}{S_3} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) + \frac{3S_3}{S_2} \frac{\int_0^1 dx \cdot x^2 R(x)}{\int_0^1 dx \cdot x D(x)} \right)^{-3} \sin^4 \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \times$$

$$\left[ \left( \frac{24 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}{7\zeta(3) \sin^4 \frac{\varphi}{2}} \left( \frac{3S_4}{S_3} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) + \frac{3S_3}{S_2} \frac{\int_0^1 dx \cdot x^2 R(x)}{\int_0^1 dx \cdot x D(x)} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} - 1 \right]^2.$$

Отримаємо асимптотичну форму виразу для струму в граничному випадку, коли коефіцієнт прозорості є малим. Тоді першим доданком в (4.87) можна знехтувати, а в чисельнику другого  $R$  покласти рівним одиниці. Таким чином одержимо

$$q_{2,\infty} = \frac{S_3}{3S_2} \left( \int_0^1 dx \cdot x D(x) \right)^{-1} = \frac{7\zeta(3)}{3\pi^2} \left( \int_0^1 dx \cdot x D(x) \right)^{-1}, \quad (4.88)$$

тут враховано, що  $S_2 = \frac{\pi^2}{4}$ ,  $S_3 = \frac{7\zeta(3)}{4}$ .

Для отримання формули для струму будемо виходити з (4.86). Підставимо вираз для  $q_{2,\infty}$  в (4.86) і виконаємо спрощення пов'язані з тим, що  $q_{2,\infty} \gg 1$ . В результаті одержимо

$$j = \frac{3}{16} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \frac{\Delta_\infty^2}{T_c^2} \int_0^1 dx \cdot x D(x) \sin \varphi = \frac{\pi \Delta_\infty^2}{4eR_N T_c} \sin \varphi, \quad (4.89)$$

де  $R_N^{-1} = e^2 v_0 N(0) \int_0^1 dx \cdot x D(x)$  опір контакту в нормальному стані. Якщо врахувати співвідношення (2.26), то формулу (4.89) можна переписати у вигляді

$$j = \frac{3}{14\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \int_0^1 dx \cdot x D(x) \sin \varphi. \quad (4.90)$$

Перейдемо до розгляду випадку прозорості близької до одиниці. При  $D \leq 1$   $R$  є малим, тому другим доданком в (4.87) можна знехтувати, оскільки він на порядок менший за перший. Отже для  $q_{2,\infty}$  маємо

$$q_{2,\infty} = \frac{3S_4}{S_3} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x). \quad (4.91)$$

Підставляючи (4.91) в (4.86) і враховуючи, що  $q_{2,\infty} \ll 1$  одержимо

$$j = \frac{\pi^2}{16} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \frac{\Delta_\infty^2 \xi_0^2}{T_c^2 \xi^2(T)} \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.92)$$

Беручи до уваги (2.26) вираз для струму (4.92) можемо подати у вигляді

$$j = \frac{6\pi^4}{49\zeta(3)} \frac{env_0}{p_0\xi_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \int_0^1 dx \cdot x^3 R(x) \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (4.93)$$

Як бачимо температурна залежність струму дається фактором  $\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2$  при малій прозорості. Ця залежність змінюється із збільшенням коефіцієнта  $D$  і в протилежному граничному випадку дається множителем  $\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$ . При проміжних значеннях  $D$  температурна залежність струму є більш складною.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kamerlingh Onnes H. The superconductivity of mercury Leiden Comm. 1991. Vol.122b. P.124.
2. Bardeen J., Cooper J., Schrieffer J. Theory of Superconductivity Phys. Rev. 1957. Vol.108. P.1175-1204.
3. Frolih H. Phys. Rev. 1950. Vol.79. P.847.
4. Cooper L. Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas Phys. Rev. 1956. Vol.104. P.1189-1190.
5. Nevirkovets I. P. and Shafranjuk S. E. Resonant Josephson tunneling in SIS IS multilayered devices Phys. Rev. B. 1999. Vol. 59, no. 2. P.1311—1317.
6. Josephson B.D. Possible New Effect in Superconductive Tunneling Phys Lett. 1962. Vol.1. P.251.
7. Anderson P., Rowell J. Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect Phys. Rev. Lett. 1963. Vol.10. P.230-232.
8. Josephson B.D. Possible New Effect in Superconductive Tunneling Phys Lett. 1962. Vol.1. P.251.
9. Brinkman A. and Golubov A. A. Coherence effects in double-barrier Josephson junctions Phys. Rev. B. 2000. Vol. 61, no. 17. P.11297—11300.

10. Свідзинський А.В. Мікроскопічна теорія надпровідності: У 2-х частинах. Луцьк: РВВ "Вежа"Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2001. Ч.1. С.256.
11. Свідзинський А.В. Мікроскопічна теорія надпровідності: У 2-х частинах. Луцьк: РВВ "Вежа"Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2003. Ч.2. С. 170.
12. Xi X. X. Two-band superconductor magnesium diboride Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71, no. 11. P. 116501.
13. Giubileo F., Roditchev D., Sacks W., Lamy R., Thanh D. X., Klein J., Miraglia S., Fruchart D., Marcus J., and Monod Ph. Two-Gap State Density in MgB<sub>2</sub>: A True Bulk Property Or A Proximity Effect Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87, no. 17. P. 177008.
14. Stewart G. R. Superconductivity in iron compounds Reviews of Modern Physics. 2011. Vol. 83, no. 4. P. 1589—1652.
15. Pastukh O. Yu., Shutovskii A. M., and Sakhnyuk V. E. The effect of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration Low Temp. Phys. 2017. Vol. 43, no. 6. P. 664—669.
16. Shutovskyi A. M., Svidzinskyi A. V., Sakhnyuk V. E., and Pastukh O. Yu. Microscopic Calculation of Josephson Current in Tunnel Junctions with TwoGap Superconductors Ukr. J. Phys. 2018. Vol. 63, no. 11. P. 1001—1005.
17. Зайцев Р.О. Граничные условия и поверхностная сверхпроводимость // ЖЭТФ. - 1966. - **50**, № 4. - С.1055-1063.

18. ШУТОВСЬКИЙ А. М., СВІДЗИНСЬКИЙ А. В., САХНЮК В. Є. і ПАСТУХ О. Ю. Метод функціонального інтегрування в теорії двошліпної надпровідності Журн. фіз. досл. 2019. Т. 23, № 3. С. 3709.
19. Shutovskyi A. M. and Sakhnyuk V. E. Current-phase relation in layered superconducting structures of SIS? IS type Condensed Matter Physics. 2021. Vol. 24, no. 2. P. 23701.
20. Shutovskyi Arsen and Sakhnyuk Vasyl. Current density dependence on phase differences in superconducting tunnel junctions based on two-gap superconductors Physica C: Superconductivity and its Applications. 2021. Vol. 588. P. 1353915.
21. Shutovskyi A, Sakhnyuk V, and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation The European Physical Journal B. 2022. Vol. 95, no. 8. P. 134.
22. Van Duzer T. and Turner C. W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. New York : Elsevier North Holland, 1981.
23. Barone A. and Paterno G. Physics and Application of the Josephson Effect. New York : John Wiley Sons, 1982.
24. Gallop J. C. SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics. Bristol : Adam Hilger, 1991.
25. Orlando T. P. and Delin K. A. Foundations of Applied Superconductivity. New York : Addison-Wesley, 1991.
26. Kupriyanov M.Yu., Brinkman A., Golubov A.A., Siegel M. and Rodalla H. Double-barrier Josephson structures as the novel elements for superconducting large-scale integrated circuits Physica. 1999. Vol.16. C.326-327.

27. Свідзинский А.В. Математичні методи теоретичної фізики. Київ: Олени Теліги, 1998. С. 444.
28. Svidzinsky A.V., Sakhnyuk V.E. Current states in SNS junction for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities *Condens. Matter Phys.* 2000. Vol.3. No 3(23). P.683-696.
29. Sakhnyuk V.E., Svidzinsky A.V. Current states in SNS junction for arbitrary thickness of the normal layer and at the temperature close to the critical *Condens. Matter Phys.* 2003. Vol.6. No 1(33). P.159-167.
30. Свідзинский А.В., Вілігурський О.М., Бірук О.М., Ракуцький А.В. До теорії струмових станів у надпровідних контактах *Журнал фізичних досліджень.* 1999. Том.3. №3. С.359-369.
31. Сахнюк В. і Головій В. Вплив прозорості діелектричного прошарку на форму залежності струму від різниці фаз у контактах типу SIS *Журн. фіз. досл.* 2011. Т. 15, № 2. С. 2702.
32. Barash Yu. S. Anharmonic Josephson current in junctions with an interface pair breaking *Phys. Rev. B.* 2012. Vol. 85, no. 10. P. 100503.
33. Сахнюк В. Є. Розсіяння електронів на послідовно розміщених  $\delta$  - функційних бар'єрах *Науковий вісник ВДУ.* 2003. №9. С.50-57.
34. Sakhnyuk V.E. Current states in SNS junction for arbitrary thickness of the normal layer and the temperature close to the critical *Proc. of the Second International Young Scientists' Conference on Applied Physics.* Kyiv. 2002. P.46-47.
35. Сахнюк В.Є. Розсіяння електронів на послідовно розміщених  $\delta$  - функційних бар'єрах // *Зб. тез Всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "ЕВРИКА -2003".* Львів. 2003. С.172.



36. Сахнюк В.Є. III робоча нарада-семінар молодих вчених з статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, 5-6 червня 2003 року.
37. Sakhnyuk V.E. To theory of the current states in an SNINS junction // Proc. of the Third International Young Scientists' Conference on Applied Physics. Kyiv. 2003. P.96-97.
38. Сахнюк В.Є. Вплив струму на просторову поведінку параметра впорядкування в надпровідних контактах 36. тез Всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики "ЕВРИКА -2004". Львів. 2004. С.35-36.
39. Niemeyer J. Josephson arrays for dc and ac metrology Supercond. Sci. Technol. 2000. Vol. 13, no. 5. P. 546—550.
40. Ohta Hiroshi, Matsui Toshiaki, Uchikawa Yoshinori, Kobayashi Koichiro, and Aono Masakazu. Nanometer SNS junctions and their application to SQUIDs Physica C. 2001. Vol. 352, no. 1—4. P. 186—190.
41. Ishii C. Progr. Theor. Phys. 1970. **44**. P. 1525.
42. Ishii C. //Progr. Theor. Phys. 1970. **47**. P. 1464.
43. Hadfield R. H., Burnell G., Booij W. E., Lloyd S. J., Moseley R. W., and Blamire M. G. Nanoscale SNS junction fabrication in superconductor-normal metal bilayers IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2001. Vol. 11, no. 1. P. 1126—1129.
44. Bardeen J., Johnson J. Phys. Rev. 1972. **135**. P.72.
45. Svidzynsky A.V., Anzygina T.N., Bratus' E.N. Journ. Low. Temp. Phys. 1973. **10**. P. 131.

46. Hadfield Robert H., Burnell Gavin, Kang Dae-Joon, Blamire Mark G., Dresselhaus Paul, and Benz Samuel P. Nanofabricated SNS junction series arrays in superconductor-normal metal bilayers *Supercond. Sci. Technol.* 2001. Vol. 14, no. 12. P. 1086—1089
47. Svidzinskii A. V. and Golubev L. V. Methods of the theory of current states in superconducting SNS sandwiches at near critical temperatures *Theor. Math. Phys.* 1984. Vol. 59, no. 1. P. 404—410.
48. Zhou F., Spivak B. Superconducting Glass State in Disordered Thin Films in a Parallel Magnetic Field *Phys. Rev. Lett.* 1998. **80**. P.5647-5650.
49. Svidzinsky A. V. and Sakhnyuk V. E. Current states in SNS junction for arbitrary concentrations of nonmagnetic impurities *Condensed Matter Physics.* 2000. Vol. 3, no. 3. P. 683—696.
50. Голуб А.А., Беззуб О.П. *ФHT.* 1982. **8**, № 1. С.54-58.
51. Haberkorn W., Richter J. Berechnung der Kritischen Josephson Strome in Proximity System *Experimentelle Technik der Physik.* 1978. **26**. S.337-341.
52. Knauer H., Richter J., Seidel P. *Annalen der Physik.* 1979. 7 Folge, 36, Heft 3. P.181.
53. Sols Fernando and Ferrer Jaime. Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, no. 22. P. 15913—15919.
54. Likharev K.K. Superconducting weak links *Rev. Mod. Phys.* 1979. **51**. P.101-159.

55. Ivanov Z. G., Kupriyanov M. Yu., Likharev K. K., Meriakri S. V., and Snigirev O. V. Boundary conditions for the Usadel and Eilenberger equations *Sov. J. Low Temp. Phys.* 1981. Vol. 7. P. 274.
56. Usadel Klaus D. Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 25, no. 8. P. 507—509.
57. Cohen M., Falicov L., Phillips J. Superconductive Tunneling *Phys. Rev. Lett.* 1962. Vol.8. P.316-318.
58. Brinkman A., Cassel D., Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., Siegel M., and Rogalla H. Double-barrier Josephson junctions: theory and experiment *IEEE Transactions on Applied Superconductivity.* 2001. Vol. 11, no. 1. P. 1146—1149
59. Balashov D., Buchholz F.-Im., Schulze H., Khabipov M. I., Dolata R., Kupriyanov M. Yu., and Niemeyer J. Stationary properties of SINIS doublebarrier Josephson junctions *Supercond. Sci. Technol.* 2000. Vol. 13, no. 2. P. 244—250.
60. Furusaki Akira, Takayanagi Hideaki, and Tsukada Masaru. Josephson effect of the superconducting quantum point contact *Phys. Rev. B.* 1992. Vol. 45, no. 18. P. 10563—10575.
61. Stephen M. Noise in the ac Josephson Effect *Phys. Rev.* 1969. Vol.182. P.531-538.
62. Schmid A. *Phys. Stat. Sol.* 1964. Vol.7 P.3.
63. Josephson P. *Adv. Phys.* 1965. Vol.14. P.419.
64. Chrestin A., Matsuyama T., and Merkt U. Critical currents and supercurrent oscillations in Josephson field-effect transistors *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, no. 1. P. 498—504.

65. Johansson G., Bratus E. N., Shumeiko V. S., and Wendin G. Resonant multiple Andreev reflections in mesoscopic superconducting junctions *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 60, no. 2. P. 1382—1393.
66. Balashov D., Khabipov M. I., Buchholz F.-Im., Kessel W., and Niemeyer J. SINIS fabrication process for realizing integrated circuits in RSFQ impulse logic *Supercond. Sci. Technol.* 1999. Vol. 12, no. 11. P. 864—867
67. Kupriyanov M. Yu., Brinkman A., Golubov A. A., Siegel M., and Rogalla H. Double-barrier Josephson structures as the novel elements for superconducting large-scale integrated circuits *Physica C: Superconductivity*. 1999. Vol. 326—327. P. 16—45.
68. Svidzinsky A.V., Slyusarev V.A. *Phys. Lett.* 1968. Vol.27A. P.22.
69. Feynman R. P. *Quantum mechanics The Feynman Lectures on Physics*. New York : Addison-Wesley, 1965. Vol. 3.
70. Sols F., Ferrer J. Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow *Phys. Rev. B*. 1994. Vol.49. № 22. P.15913.
71. Zapata I., Sols F. Supercurrent flow through an effective double barrier structure
72. Ferrer J., Sols F. *Proc. XX Int. Conf. Low. Temp. Phys. Eugene(USA)*. 1993. P.252.
73. Baratof A., Blackburn J.A., Schwartz B.B. Current-Phase Relationship in Short Superconducting Weak Links *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol.25. P.1096-1099.
74. Kupriyanov M.Yu. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1992. Vol.56. P.414.
75. Jacobson D.A. *Phys. Rev.* 2015 Vol.A138. P.1066.

76. Mei T. Tunneling effect of Cooper pairs in a superconductor — insulator — superconductor — insulator — superconductor structure *International Journal of Modern Physics B*. 2002. Vol. 16, no. 24. P. 3697—3705
77. Usadel K. *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol.25. P.57.
78. De Luca R. and Romeo F. Sawtooth current-phase relation of a superconducting trilayer system described using Ohta's formalism *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79, no. 9. P. 094516.
79. Agterberg D. F., Demler Eugene, and Janko B. Josephson effects between multigap and single-gap superconductors *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66, no. 21. P. 214507.
80. Nagamatsu Jun, Nakagawa Norimasa, Muranaka Takahiro, Zenitani Yuji, and Akimitsu Jun. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride *Nature*. 2001. Vol. 410, no. 6824. P. 63—64.
81. Fernandes Rafael M. and Millis Andrew J. Nematicity as a Probe of Superconducting Pairing in Iron-Based Superconductors *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 111, no. 12. P. 127001.
82. Hirschfeld P. J., Korshunov M. M., and Mazin I. I. Gap symmetry and structure of Fe-based superconductors *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74, no. 12. P. 124508.
83. Lee Patrick A. and Wen Xiao-Gang. Spin-triplet p-wave pairing in a three-orbital model for iron pnictide superconductors *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, no. 14. P. 144517.
84. Barzykin V. and Gor'kov L. P. On superconducting and magnetic properties of iron-oxypnictides *JETP Letters*. 2008. Vol. 88, no. 2. P. 142—146.

85. Chubukov A. V., Efremov D. V., and Eremin I. Magnetism, superconductivity, and pairing symmetry in iron-based superconductors *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 78, no. 13. P. 134512.
86. Chen C.-T., Tsuei C. C., Ketchen M. B., Ren Z.-A., and Zhao Z. X. Integer and half-integer flux-quantum transitions in a niobium–iron pnictide loop *Nature Phys.* 2010. Vol. 6, no. 4. P. 260–264
87. Testa G., Monaco A., Esposito E., Sarnelli E., Kang D.-J., Mennema S. H., Tarte E. J., and Blamire M. G. Midgap state-based  $\pi$ -junctions for digital applications *Appl. Phys. Lett.* 2004. Vol. 85, no. 7. P. 1202–1204.
88. Sarnelli E., Adamo M., De Nicola S., Cibella S., Leoni R., and Nappi C. Amplitude sensitive experiment of pairing symmetry in d<sub>0</sub>–d<sub>0</sub> submicron Y–Ba–Cu–O bicrystal grain boundary junctions *Supercond. Sci. Technol.* 2013. Vol. 26, no. 10. P. 105013.
89. Mahmoodi R., Shevchenko S. N., and Kolesnichenko Yu. A. Josephson effect in point contacts between “f-wave” superconductors *Low Temp. Phys.* 2002. Vol. 28, no. 3. P. 184–189.
90. Ambegaokar V., Baratoff A. *Phys. Rev. Lett.* 1963. **10**. P.486.
91. Anderson P.W. Weak Superconductivity: Josephson Tunneling Effect, Preprint. 1963.
92. Haberkorn W., Knauer H., Richter S. *Phys. Status Solidi.* 1978. **47**. P.161.
93. Kolesnichenko Yu. A., Omelyanchouk A. N., and Shevchenko S. N. Josephson and spontaneous currents at the interface between two d-wave superconductors with transport current in the banks *Low Temp. Phys.* 2004. Vol. 30, no. 3. P. 213–217.

94. Arnold G.B. J. Low. Temp. Phys. 1985. **59**. P.143.
95. Kolesnichenko Yu. A. and Shevchenko S. N. Josephson effect in a weak link between borocarbides Low Temp. Phys. 2005. Vol. 31, no. 2. P. 137–138.
96. Eilenberger G. Z. Phys. 1968. **214**. P.195.
97. Beenakkar C.W.J., van Houten H. Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P.3056.
98. Martin-Rodero A., Garcia-Vidal F.J., Levy Yeyati A. Phys. Rev. Lett. 1994. **72**. P.554.
99. Levy Yeyati A., Martin-Rodero A., Garcia-Vidal F.J. Self-consistent theory of superconducting mesoscopic weak links Phys. Rev. Lett. 1994. **72**. P.554.)

## Додаток А

### ТУНЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОНІВ КРІЗЬ ПОСЛІДОВНО РОЗМІЩЕНІ $\delta$ – ФУНКЦІЙНІ БАР'ЄРИ

Будемо розглядати квантово-механічний рух електрона в полі, потенціал якого є скомбінований з  $\delta$ -функційних бар'єрів. Стан електрона описується хвильовою функцією, яка задовольняє рівняння Шредінгера

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (\text{A.1})$$

де  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ ,  $U(\vec{r})$  – потенціальна енергія. Принципове питання, яке буде тут розглядатись – це знаходження коефіцієнтів проходження  $D$  та відбиття  $R$  електронів крізь послідовно розміщені  $\delta$ -функційні потенціальні бар'єри (найпростіший випадок  $U(z) = U_0\delta(z)$ ), та представлення їх через парціальні коефіцієнти проходження та відбиття на кожному окремому  $\delta$ -функційному бар'єрі. Це питання є важливим при розгляді струмових станів в надпровідних структурах, які містять пропарки ізоляторів (для прикладу це контакти типу  $SINS$ ,  $SI_1NI_2S$ ,  $SI_1NI_0NI_2S$ , де  $S$  - надпровідник,  $N$  - нормальний метал,  $I$  - ізолятор). В таких контактах ізолятор моделюється  $\delta$ -функційним потенціальним бар'єром, а в кінцевий вираз для струму входить коефіцієнт проходження електронів через ці  $\delta$ -функційні бар'єри. В загальному для означення коефіцієнта проходження та відбиття частинок на бар'єрі використовують поняття



густини потоку ймовірності, формула для якої має вигляд

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi). \quad (\text{A.2})$$

Нехай густина потоку ймовірності падаючої на бар'єр хвилі дорівнює  $j_0$ , відбитої –  $j_R$  і  $j_D$  – хвилі, яка пройшла крізь бар'єр. Очевидно, що  $j_0 = j_R + j_D$ . Коефіцієнт проходження  $D$  дорівнює відношенню густини потоку ймовірності хвилі, яка пройшла крізь бар'єр, до густини потоку ймовірності падаючої хвилі. Аналогічно можна визначити коефіцієнт відбиття  $R$  як відношення густини відбитого потоку до падаючого, тобто

$$D = \frac{j_D}{j_0}, \quad R = \frac{j_R}{j_0}. \quad (\text{A.3})$$

Звичайно, виконується рівність  $R+D = 1$ . Перейдемо до опису розсіяння в явно заданих потенціальних полях.

## A.1 Проходження електронів крізь один $\delta$ -функційний бар'єр

Найпростіший випадок розглядуваної задачі – розсіяння електронів на потенціалі  $U(z) = U_0\delta(z)$ . Рівняння Шредінгера для хвильової функції частинки, яка поширюється в такому потенціальному полі має вигляд

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + U_0\delta(z) \right) \psi = E\psi. \quad (\text{A.4})$$

Розв'язуючи рівняння в областях  $z < 0$  і  $z > 0$ , в яких воно має форму  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi$ , знаходимо

$$\psi(z) = \begin{cases} \exp(ipz) + C_1 \exp(-ipz), & z < 0, \\ C_2 \exp(ipz), & z > 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Ми обрали для розгляду хвилю, яка поширюється зліва на право. Доданок  $\exp(ipz)$  описує падаючу на бар'єр хвилю, причому нормування

хвильової функції вибрано так, щоб коефіцієнт перед цим доданком був рівним одиниці,  $C_1 \exp(-ipz)$  – відбита хвиля,  $C_2 \exp(ipz)$  – хвиля, яка пройшла крізь бар'єр. На підставі (A.2) і (A.3) маємо  $D = |C_2|^2$ ,  $R = |C_1|^2$ . Коефіцієнти  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо з умов: неперервності хвильової функції на бар'єрі

$$\psi(+0) = \psi(-0), \quad (\text{A.6})$$

а також умови стрибка для хвильової функції, яка одержується інтегруванням рівняння (A.4) в малому околі нуля  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  з граничним переходом  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2k_0\psi(0), \quad (\text{A.7})$$

тут введено позначення  $k_0 = mU_0$ . Підставимо вираз для хвильової функції в умови (A.6) і (A.7), з яких для коефіцієнтів  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо

$$C_1 = -\frac{ik}{p+ik}, \quad C_2 = \frac{p}{p+ik}, \quad (\text{A.8})$$

а для коефіцієнтів проходження і відбиття маємо

$$D = |C_2|^2 = \frac{p^2}{p^2 + k^2}, \quad R = |C_1|^2 = \frac{k^2}{p^2 + k^2}. \quad (\text{A.9})$$

Розглянемо формально дещо інший підхід для знаходження коефіцієнтів проходження та відбиття.

Нехай функція

$$\psi_1(z) = C_0 \exp(ipz) + C_1 \exp(-ipz) \quad (\text{A.10})$$

є загальний розв'язок рівняння Шредінгера ліворуч від бар'єру, а

$$\psi_2(z) = C_2 \exp(ipz) + C_3 \exp(-ipz) \quad (\text{A.11})$$

– праворуч від бар'єру. Оскільки функції  $\psi_1(z)$ ,  $\psi_2(z)$  є розв'язками одного і того ж рівняння, то між коефіцієнтами цих розв'язків існує зв'язок

$$C_2 = \alpha C_0 + \beta C_1, \quad C_3 = \beta^* C_0 + \alpha^* C_1, \quad (\text{A.12})$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  - деякі комплексні сталі, які залежать від конкретного вигляду потенціалу. З умови сталості потоку вздовж осі  $Oz$  випливає співвідношення для коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (\text{A.13})$$

Через сталі  $\alpha$  і  $\beta$  коефіцієнти проходження і відбиття виражаються наступним чином

$$D = \frac{1}{|\alpha|^2}, \quad R = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}. \quad (\text{A.14})$$

Для прикладу розглянемо рівняння (A.4), застосуємо до коефіцієнтів його розв'язку систему (A.12), в результаті маємо

$$C_2 = \alpha + \beta C_1, \quad 0 = \beta^* + \alpha^* C_1. \quad (\text{A.15})$$

Звідки

$$C_1 = -\frac{\beta^*}{\alpha^*}, \quad C_2 = \frac{1}{\alpha^*} \quad (\text{A.16})$$

і з уваги на (A.9) одержуємо (A.14).

## A.2 Розсіяння на подвійному $\delta$ -функційному бар'єрі

Випишемо рівняння Шредінгера для хвильової функції частинки, яка рухається в такому потенціалі

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + U_1 \delta\left(z + \frac{d}{2}\right) + U_2 \delta\left(z - \frac{d}{2}\right) \right) \psi = E\psi. \quad (\text{A.17})$$

Розв'язок рівняння (A.17) має вигляд

$$\psi(z) = \begin{cases} \exp(ipz) + C_1 \exp(-ipz), & z < -\frac{d}{2}, \\ C_2 \exp(ipz) + C_3 \exp(-ipz), & |z| < \frac{d}{2}, \\ C_4 \exp(ipz), & z > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Випишемо умови неперервності і стрибка хвильової функції на бар'єрах

$$\begin{aligned} \psi\left(-\frac{d}{2}-0\right) &= \psi\left(-\frac{d}{2}+0\right), \\ \psi\left(\frac{d}{2}-0\right) &= \psi\left(\frac{d}{2}+0\right), \\ \psi'\left(-\frac{d}{2}+0\right) - \psi'\left(-\frac{d}{2}-0\right) &= 2k_1\psi\left(-\frac{d}{2}\right), \\ \psi'\left(\frac{d}{2}+0\right) - \psi'\left(\frac{d}{2}-0\right) &= 2k_2\psi\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned}$$

тут введено позначення  $k_1 = mU_1$ ,  $k_2 = mU_2$ . З даних умов одержуємо систему рівнянь для коефіцієнтів  $C_1, C_2, C_3, C_4$

$$\begin{cases} 1 + C_1 e^{ipd} = C_2 + C_3 e^{ipd}, \\ C_2 + C_3 e^{-ipd} = C_4, \\ C_2 - C_3 e^{ipd} + C_1 e^{ipd} - 1 = -\frac{2ik_1}{p}(1 + C_1 e^{ipd}), \\ C_4 - C_2 + C_3 e^{-ipd} = -\frac{2ik_2}{p}C_4. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Розв'язавши яку, знаходимо:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{(ik_1 p + k_1 k_2 e^{2ipd} - k_1 k_2 + ik_2 p e^{2ipd})e^{-ipd}}{p^2 + ipk_2 + ik_1 p + k_1 k_2 e^{2ipd} - k_1 k_2}, \\ C_3 &= \frac{-ipk_2 e^{ipd}}{h^2 + ipk_2 + ik_1 p + k_1 k_2 e^{2ipd} - k_1 k_2}, \\ C_2 &= \frac{p(p + ik_2)}{h^2 + ipk_2 + ik_1 p + k_1 k_2 e^{2ipd} - k_1 k_2}, \\ C_4 &= \frac{p^2}{h^2 + ipk_2 + ik_1 p + k_1 k_2 e^{2ipd} - k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Для коефіцієнта проходження електронів маємо

$$\begin{aligned} D^{-1} &= p^{-4} \left\{ (2k_1 k_2 p^2 - 2k_1^2 k_2^2) \cos(2pd) + \right. \\ &\left. (2k_1 k_2^2 + 2k_1^2 k_2) p \sin(2pd) + p^4 + (k_2^2 + k_1^2) p^2 + 2k_1^2 k_2^2 \right\} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Вираз для коефіцієнта відбиття знаходимо з умови  $R + D = 1$ . У випадку коли бар'єр є симетричним вираз для коефіцієнта проходження має вигляд

$$D = \frac{p^4}{4k^3p \sin(2pd) + (2k^2p^2 - 2k^4) \cos(2pd) + 2k^2p^2 + p^4 + 2k^4}. \quad (\text{A.20})$$

Якщо ввести позначення  $\chi = \frac{k}{p}$ , то (A.20) можна привести до форми

$$D^{-1} = 1 + \chi^2(2 \cos(pd) + 2\chi \sin(pd))^2. \quad (\text{A.21})$$

Представимо глобальний коефіцієнт проходження електронів  $D$  через коефіцієнти проходження та відбиття на окремих бар'єрах:  $D_1, R_1$  на першому бар'єрі  $U_1\delta\left(z + \frac{d}{2}\right)$ ;  $D_2, R_2$  на другому –  $U_2\delta\left(z - \frac{d}{2}\right)$ . Вихідним буде вираз для коефіцієнта  $C_4$ , який перепишемо в дещо іншому вигляді, запровадивши нові коефіцієнти

$$C_1^{(n)} = -\frac{ik_n}{p + ik_n}, \quad C_2^{(n)} = \frac{p}{p + ik_n}, \quad n = 1, 2. \quad (\text{A.22})$$

В термінах цих коефіцієнтів для  $C_4$  одержуємо

$$C_4 = \frac{C_2^{(1)}C_2^{(2)}}{1 - C_1^{(1)}C_1^{(2)}e^{2ipd}}. \quad (\text{A.23})$$

Його квадрат модуля дорівнює

$$|C_4|^2 = \frac{|C_2^{(1)}|^2|C_2^{(2)}|^2}{1 + 2|C_1^{(1)}||C_1^{(2)}| \cos(2pd + \varphi) + |C_1^{(1)}|^2|C_1^{(2)}|^2}. \quad (\text{A.24})$$

Враховуючи, що  $D_1 = |C_2^{(1)}|^2$ ,  $R_1 = |C_1^{(1)}|^2$ ,  $D_2 = |C_2^{(2)}|^2$ ,  $R_2 = |C_1^{(2)}|^2$  маємо остаточно для глобального коефіцієнта проходження електронів  $D$  через подвійний  $\delta$ -функційний бар'єр

$$D = \frac{D_1D_2}{1 + R_1R_2 + 2\sqrt{R_1R_2} \cos(2pd + \varphi)}, \quad (\text{A.25})$$

де  $\varphi$  фаза добутку  $(-C_1^{(1)}C_1^{(2)})$ . При значенні фази  $2pd + \varphi = \pi$  коефіцієнт проходження має максимальне значення

$$D = \frac{D_1D_2}{(1 - \sqrt{R_1R_2})^2} \quad (\text{A.26})$$

і при  $2pd + \varphi = 0$  – мінімальне

$$D = \frac{D_1 D_2}{(1 + \sqrt{R_1 R_2})^2} \quad (\text{A.27})$$

В деяких випадках при розгляді струмових станів в надпровідних контактах можна використати формулу (A.25), усереднену по фазі ( $2pd + \varphi$ )

$$D = \frac{D_1 D_2}{1 - R_1 R_2} \quad (\text{A.28})$$

У випадку симетричного потенціального бар'єру ( $k_1 = k_2$ ) маємо

$$D = \frac{D_1^2}{1 + R_1^2 + 2R_1 \cos(2pd + \varphi)}. \quad (\text{A.29})$$

Остання формула має цікавий частинний випадок, при значенні фази  $2pd + \varphi = \pi$  коефіцієнти проходження  $D = 1$ . Вираз (A.25) для коефіцієнта проходження одержується дещо простіше, якщо використати для невідомих  $C_1, C_2, C_3, C_4$  умови, подібні умовам (A.12). В результаті маємо систему

$$\begin{aligned} C_2 &= \alpha_1 + \beta_1 C_1, \\ C_3 &= \beta_1^* + \alpha_1^* C_1, \\ C_4 &= \alpha_2 C_2 + \beta_2 C_3, \\ 0 &= \beta_2^* C_2 + \alpha_2^* C_3. \end{aligned}$$

З якої для коефіцієнтів  $C_i$  знаходимо

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\beta_2^* \alpha_1 + \alpha_2 \beta_1^*}{\beta_2^* \beta_1 + \alpha_2^* \alpha_1^*}, \\ C_2 &= \frac{\alpha_2^*}{\beta_2^* \beta_1 + \alpha_2^* \alpha_1^*}, \\ C_3 &= -\frac{\beta_2^*}{\beta_2^* \beta_1 + \alpha_2^* \alpha_1^*}, \\ C_4 &= \frac{1}{\beta_2^* \beta_1 + \alpha_2^* \alpha_1^*}. \end{aligned}$$

Обчислимо квадрат модуля  $C_4$

$$D = |C_4|^2 = \frac{1}{|\beta_1|^2 |\beta_2|^2 + |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 + 2R\beta_1 \beta_2^* \alpha_1 \alpha_2^*}. \quad (\text{A.30})$$

Після ділення чисельника і знаменника на добуток  $|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2$  і враховуючи, що

$$D_1 = \frac{1}{|\alpha_1|^2}, R_1 = \frac{|\beta_1|^2}{|\alpha_1|^2}, D_2 = \frac{1}{|\alpha_2|^2}, R_2 = \frac{|\beta_2|^2}{|\alpha_2|^2} \quad (\text{A.31})$$

одержуємо для глобального коефіцієнта проходження електронів вираз аналогічний (A.25). В якому  $(2pd + \varphi)$  є фаза добутку  $\beta_1\beta_2^*\alpha_1\alpha_2$ .

Подібно до схеми викладеної вище можна дослідити проходження електронів крізь послідовність з трьох  $\delta$ -функційних бар'єрів

$$U(z) = U_1\delta(z + d_1) + U_0\delta(z) + U_2\delta(z - d_2). \quad (\text{A.32})$$

Розв'язок рівняння Шредінгера з таким потенціалом у випадку хвиль, які падають зліва, має вигляд

$$\psi(z) = \begin{cases} \exp(ipz) + C_1 \exp(-ipz), & z < -d_1, \\ C_2 \exp(ipz) + C_3 \exp(-ipz), & -d_1 < z < 0, \\ C_4 \exp(ipz) + C_5 \exp(-ipz), & 0 < z < d_2, \\ C_6 \exp(ipz), & d_2 < z. \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

З умов неперервності та стрибка хвильової функцій на бар'єрах можна знайти значення для коефіцієнтів  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ . Випишемо тут результат лише для  $C_6$ , оскільки саме він нам потрібен для знаходження коефіцієнта прозорості

$$C_6^{-1} = p^{-3} \{ p^3 + i(k_0 + k_1 + k_2)p^2 + (k_1k_2(e^{2ip(d_2+d_2)} - 1) + k_0k_2(e^{2ipd_2} - 1) + k_0k_1(e^{2ipd_1} - 1))p - i(e^{2ip(d_1+d_2)} - e^{2ipd_2} - e^{2ipd_1} + 1)k_2k_1k_0 \}.$$

Скориставшись раніше введеними коефіцієнтами (A.22),  $C_6$  можна представити у вигляді

$$C_6^{-1} = \frac{1}{C_2^{(0)}C_2^{(1)}C_2^{(2)}} \{ 1 - (C_1^{(0)} + C_2^{(0)})C_1^{(1)}C_1^{(2)} \exp(2ip(d_1 + d_2)) - C_1^{(0)}C_1^{(2)} \exp(2ipd_2) - C_1^{(0)}C_1^{(1)} \exp(2ipd_1) \}$$

## Додаток В

### КУБІЧНЕ РІВНЯННЯ. ФОРМУЛА КАРДАНО-ТАРТАЛЬЯ

#### Б.1 Загальний розв'язок кубічного рівняння

Дослідимо кубічне рівняння в загальному випадку і одержимо вирази для його коренів.

Загальна форма кубічного рівняння

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0. \quad (\text{Б.1})$$

Перепишемо його в іншому вигляді

$$\left(y + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c - \frac{a^3}{27} = 0, \quad (\text{Б.2})$$

і введемо нову змінну  $x = y + \frac{a}{3}$ :

$$x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = 0,$$

а також позначення для коефіцієнтів:  $p = b - \frac{a^2}{3}$ ,  $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$ .

В результаті маємо зведене кубічне рівняння

$$x^3 + px + q = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Нехай  $x_0$  є коренем цього рівняння. Розглянемо допоміжне рівняння

$$u^2 - x_0u - \frac{p}{3} = 0.$$



Це рівняння має два корені  $\alpha$  і  $\beta$ . За формулами Вієта

$$\alpha + \beta = x_0, \quad \alpha\beta = -\frac{p}{3}. \quad (\text{Б.4})$$

Підставимо  $x_0$  в зведене кубічне рівняння, тоді

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + (\alpha + \beta)p + q = 0, \quad (\text{Б.5})$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \underbrace{3\alpha\beta(\alpha + \beta)}_{=0} + (\alpha + \beta)p + q = 0, \quad (\text{Б.6})$$

оскільки  $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ . Отже для знаходження  $\alpha$  і  $\beta$  маємо систему

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 + q = 0, \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3}. \end{cases} \quad (\text{Б.7})$$

З системи (Б.7) для  $z \equiv \beta^3$  одержуємо рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Його розв'язок:

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad (\text{Б.9})$$

тобто

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (\text{Б.10})$$

В аналогічний спосіб знаходимо

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (\text{Б.11})$$

Тепер можемо легко написати корені для вихідного кубічного рівняння, беручи можливі лінійні комбінації  $\alpha$  і  $\beta$ , при цьому маємо слідкувати за

тим, щоб добуток доданків в цих комбінаціях був рівним  $-\frac{p}{3}$ . Можливи-ми комбінаціями, які задовольняють вище вказаним умовам є:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_1^2, \\x_2 &= \alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_2^2, \\x_3 &= \alpha\varepsilon_3 + \beta\varepsilon_3^2,\end{aligned}\tag{Б.12}$$

де  $\varepsilon_i$  – корені кубічні з 1

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\tag{Б.13}$$

Отже

$$x_1 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\tag{Б.14}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) = \\&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) + \\&+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right),\end{aligned}\tag{Б.15}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) = \\&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) - \\&- i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right).\end{aligned}\tag{Б.16}$$

Зауважимо, що має місце така тотожність

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} \equiv \frac{p/3}{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}}.$$

Повертаючись до змінної  $y$  і беручи до уваги вирази для  $p$ ,  $q$ , напишемо остаточні формули для коренів рівняння (Б.1)

$$y_1 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left\{ \left[ -\sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} + \left[ \sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} \right\},$$

$$y_2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ \left[ -\sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} + \left[ \sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} \right\} +$$

$$i \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ \left[ \sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} - \left[ -\sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} \right\},$$

$$\begin{aligned}
y_3 = & -\frac{a}{3} - \\
& \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ \left[ -\sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} + \right. \\
& \left. \left[ \sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} \right\} - \\
& i \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt[3]{2}} \left\{ \left[ \sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} - \right. \\
& \left. \left[ -\sqrt{(27c - 9ab + 2a^3)^2 + 4(3b - a^2)^3} - (27c - 9ab + 2a^3) \right]^{1/3} \right\}
\end{aligned}$$