

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського**

На правах рукопису

**КЛИМ ЕДУАРД ІГОРОВИЧ**

**Теорія фракталів та її застосування для  
нелінійної динаміки**

Спеціальність 104 «Фізика та астрономія»

Освітня програма «Фізика та астрономія»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

**ТРОХИМЧУК ПЕТРО ПАВЛОВИЧ**

кандидат фізико–математичних наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ**

Протокол № \_\_\_\_\_

засідання кафедри теоретичної та комп'ютерної  
фізики імені А. В. Свідзинського

від \_\_\_\_\_ 20\_\_ р

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ доц. Сахнюк В. Є.

Луцьк–2023

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Розділ 1. Фрактали та фрактальні множини	
1.1. Функція Вейерштраса.....	5
1.2. Самоподібні множини.....	7
1.3. Канторові множини.....	10
1.4. Фрактальні множини на площині і в просторі.....	12
Розділ 2. Основні положення фрактальної динаміки	
2.1. Довжина берегової лінії.....	21
2.2. Визначення лінії.....	25
2.3. Топологічна розмірність.....	29
2.4. Фрактальні розмірності.....	35
2.5. Клітинні автомати.....	40
2.6. Фрактальні структури в точкових відображеннях.....	48
2.7. Системи ітерованих функцій.....	56
Розділ 3. Застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії	
3.1. Вступні зауваження .....	63
3.2. Застосування методів фрактальної динаміки для підвищення завадозахисту каналів управління радіотелекомунікаційних засобів .....	65
3.3. Методика застосування функції Вейерштраса в радіоінженерії.....	76
3.4. Вибір методу розрахунку фрактальної розмірності .....	90
3.5. Застосування методу сегментації на основі фрактальних характеристик сигналу .....	96
3.6. Аналіз ефективності застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії.....	101
Висновки.....	117
Джерела та література.....	121

## ВСТУП

**Актуальність дослідження.** У сучасному світі, який характеризується високим рівнем складності та невизначеності, вивчення нелінійних систем та їхньої динаміки стає актуальним завданням для розуміння природних явищ, соціальних процесів та технічних систем. Одним із потужних інструментів для аналізу складних структур і нелінійних процесів є теорія фракталів.

Теорія фракталів, яка виникла у другій половині 20 століття, визначає математичні об'єкти, що виявляють властивості самоподібності на різних масштабах. Застосування фрактальної геометрії та ідей до дослідження нелінійної динаміки дозволяє отримати глибше розуміння структури та поведінки систем, які не можуть бути повністю описані за допомогою класичних лінійних моделей.

Актуальність теми визначається кількома ключовими факторами, які варто врахувати в контексті сучасної науки та технологій [1-56]. Сучасний світ характеризується величезною складністю явищ, починаючи від погодних умов та екосистем до соціальних та економічних систем. Традиційні методи аналізу нерідко недостатньо ефективні для розуміння цих складних взаємодій.

Багато явищ в природі мають нелінійний характер, що означає, що зміни в одному компоненті можуть призводити до неспівмірних змін в інших. Теорія фракталів може стати потужним інструментом для аналізу та моделювання таких нелінійних систем. Застосування теорії фракталів в технологічних галузях, таких як телекомунікації, обробка зображень, створення комп'ютерних графіків та інші, свідчать про потужність цих математичних концепцій у реальних технічних задачах.

Але, незважаючи на це, сьогодні існує потреба у дослідженні, яке б узагальнило, систематизувало існуючі відомості з даної проблеми.

Враховуючи все вищесказане, нами і була обрана тема дипломної роботи:

"Теорія фракталів та її застосування для нелінійної динаміки".

**Об'єкт дослідження.** Об'єктом дослідження є теорія фракталів та її застосування в контексті аналізу нелінійної динаміки. Тут "об'єкт" визначає область або явище, до якого застосовується теорія фракталів.

**Предмет дослідження.** Предметом дослідження є математичні концепції та властивості теорії фракталів, а також їхнє використання для аналізу нелінійних динамічних систем. В цьому контексті "предмет" вказує на конкретні аспекти або елементи, що досліджуються в роботі.

**Мета дослідження.** Метою дипломної роботи є розкриття та систематизація основ теорії фракталів, а також визначення її прикладних можливостей у вивченні нелінійної динаміки. Мета визначає об'єктив, досягнення якого має на меті автор роботи.

Відповідно до мети були визначені наступні **завдання**:

- 1) дати загальну характеристику фракталів та фрактальних множин у науковій літературі;
- 2) проаналізувати основні положення фрактальної динаміки;
- 3) провести особливості застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії.

Для розв'язання поставлених завдань нами були використані такі **методи дослідження**: теоретико-критичний аналіз літератури з теми дослідження; зіставлення, узагальнення і синтезування здобутої інформації тощо.

**Особистий внесок автора:** проведений системний аналіз проблеми та підібрані та наведені приклади реалізації фрактальної динаміки.

**Наукова новизна:** системний аналіз основних методів фрактальної динаміки та методів її реалізації в радіоінженерії.

Робота може бути використана студентами ВНЗ для підготовки до семінарських занять, також може бути використана викладачами для проведення лекції, практик тощо.

**Структура роботи.** Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 56 найменувань. Повний обсяг роботи 124 сторінки.

## РОЗДІЛ 1. ФРАКТАЛИ ТА ФРАКТАЛЬНІ МНОЖИНИ

### 1.1. Функція Вейерштраса

Функція Вейерштрасса це неперервна функція, яка не має похідної в жодній своїй точці.

Ця особливість функції Вейерштрасса розкривається через те, що вона демонструє, як функція може бути неперервною у всій своїй області визначення, але при цьому вона не має локального нахилу чи градієнту в жодній конкретній точці. Цей факт суперечить одному із основних положень класичного інтегро-диференціального числення, що будь-яка неперервна функція має визначену похідну хоча б в деякій підмножині своєї області визначення [32].

Сама функція визначається на всій дійсній прямій єдиним аналітичним виразом:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

де  $a$  – довільне непарне число, а  $b$  – додатне число, менше одиниці.

Функція  $w$  неперервна і визначена на всіх дійсних  $x$ , але не має

похідної принаймні при  $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$ .

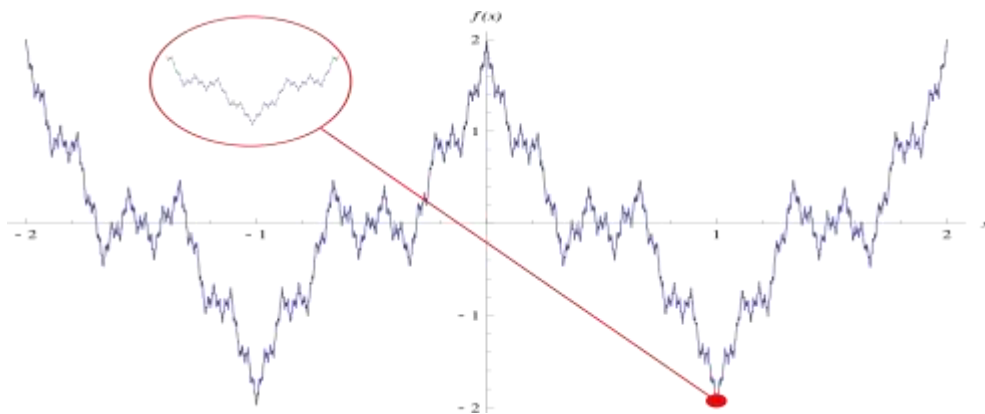


Рис. 1.1. Функція Вейерштрасса [32].

Отже, функція Вейєрштрасса є прикладом функції для якої неперервність і диференційованість не завжди є взаємозалежними властивостями.

## 1.2. Самоподібні множини

Сутність геометричної самоподібності можна визначити так: при поділі відрізка на  $N$  рівних частин отримуємо  $N$  менших відрізків, кожен із яких є зменшеною копією оригіналу у  $r$  разів, де  $N$  та  $r$  пов'язані відношенням  $Nr = 1$ .

Цей принцип вказує на те, що при послідовному поділі відрізка на рівні частини, виникає аналогічна структура, де кожна нова частина масштабується відносно попередньої з фіксованим коефіцієнтом зменшення  $r$ . Важливою характеристикою є взаємозв'язок між кількістю поділів  $N$  та коефіцієнтом масштабування  $r$ , який визначається рівнянням  $Nr = 1$ . Такий геометричний підхід дозволяє вивчати структурні властивості системи на різних масштабах, що має широкі застосування в галузі фізики, економіки та природничих наук.

Загальна формула співвідношення виглядає так [8]:

$$Nr^D = 1$$

Самоподібний фрактал представляє собою набір, для якого індекс  $D$  у наведеному рівнянні не приймає ціле значення.

Ця формула дозволяє описати самоподібність фрактала, де логарифмічний відсоток змінюється залежно від кількості підмножин  $N$  та коефіцієнта масштабування  $r$ . Важливою особливістю є те, що степінь  $D$  може бути нецілою, що підкреслює складні структури самоподібних фракталів, які не обов'язково відповідають стандартним геометричним поняттям цілих чисел.

Процеси самоподібності подібні один до одного, за винятком одного аспекту. Вони не повторюються в буквальному розумінні; замість цього, повторюються лише їхні статистичні властивості. Це означає, що при

масштабуванні процесів важливі статистичні характеристики залишаються незмінними. Саме ця стійкість статистичних властивостей робить самоподібні процеси важливими та цікавими для вивчення [16].

Необхідною складовою самоподібності є показник Херста, який є показником самоподібності випадкового процесу. Він відображає властивість тривалої залежності в даному контексті. Показник Херста надає нам поняття того, наскільки далеко поширюється взаємозв'язок між подіями в часі, що є критично важливим для розуміння динаміки та властивостей самоподібних процесів. Таким чином, вивчення самоподібних процесів та їхніх статистичних характеристик, зокрема показника Херста, допомагає розкрити складність та взаємозв'язки у природних та випадкових явищах.

Цей підхід до розгляду самоподібних процесів стає ключовим у вивченні природних явищ, економічних та фінансових ринків, а також в багатьох інших галузях. Зокрема, в аналізі фінансових ринків показник Херста може бути використаний для прогнозування довготривалих змін, аналізу ризиків та розвитку ефективних стратегій управління портфелем.

Важливість статистичної стійкості властивостей самоподібних процесів розкриває їхню універсальність та застосовність в різних контекстах. Це стає особливо важливим у світі науки та технології, де розвиток нових методів аналізу та передбачення базується на розумінні структури та динаміки самоподібних явищ.

Таким чином, дослідження самоподібності та використання показника Херста вносить значний внесок у розуміння складних систем, роблячи можливим розвиток нових методів передбачення та управління в різних областях наукового дослідження.

Таким чином, вивчення самоподібних процесів та їхніх статистичних властивостей є важливим напрямком для розширення нашого розуміння природних явищ та випадкових подій. Показник Херста, як ключовий інструмент



у цьому аналізі, дозволяє нам краще розуміти структуру та властивості тривалих залежностей в часі [29].

У підсумку, вивчення самоподібних процесів та їхніх статистичних властивостей є ключовим напрямком досліджень у різних галузях науки. Показник Херста, як важливий інструмент у цьому контексті, дозволяє аналізувати та передбачати тривалі залежності в часі, що є критичним для розуміння різноманітних явищ.

Використання цих концепцій розширює наше розуміння фізичних, економічних та соціальних систем, а також дозволяє розвивати нові методи передбачення та управління. Самоподібні процеси виявляються універсальними та застосовними в різноманітних областях, що відкриває перспективи для інновацій та вдосконалення в науці та технології.

### 1.3. Канторові множини

Множина Кантора є прикладом особливої математичної конструкції – ніде не щільною, незліченною та досконалою множиною. Іншими словами, це множина, яка не займає жодної області, не є зліченною (не може бути впорядкована послідовністю натуральних чисел) і є точною копією своїх граничних точок.

Множина Кантора будується за допомогою процесу видалення відкритих інтервалів з вихідного відрізка. На кожному кроці цей процес ефективно видаляє половину відстані між залишеними відрізками, створюючи таким чином самоподібну множину, [19, с. 65].

Множина Кантора визначається не лише своєю геометричною природою, але і числовими властивостями, що робить її об'єктом інтенсивного вивчення в математичних дисциплінах. Її особливості роблять її об'єктом для більш глибокого розуміння концепцій топології та теорії міри.



Рис. 1.2. Ітерації перетворення прямої на множину Кантора [4, 27].

Множина Кантора створюється шляхом ітеративного видалення з лінійного сегменту середнього проміжку розміром у його третину. Спочатку видаляється проміжок  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  з інтервалу  $[0, 1]$ , що залишить два лінійних сегменти:  $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  Потім видаляються середні третинні проміжки утворених сегментів, що утворить нам наступні чотири сегменти:  $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup$

$\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ . Цей процес продовжується до нескінченності, де  $n$ -на множина буде такою:

$$C_n = \frac{n-1}{3} \cup \left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{3}\right) \text{ для } n \geq 1, C_0 = [0,1].$$

Множина Кантора складається з усіх точок, які можна знайти на відрізку  $[0,1]$  і які не були виключені протягом будь-якого етапу цього нескінченного процесу [4].

Початковий відрізок  $[0,1]$  піддається процесу видалення відкритих інтервалів, і точки, які залишаються після кожного кроку, утворюють множину Кантора. Ця конструкція дозволяє множині Кантора "зберігати" точки, які відповідають границям видалених інтервалів.

Множина Кантора, як така, відображає властивості неперервності та нескінченності, що робить її цікавою як об'єкт для вивчення в контексті топології та фрактальної геометрії.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Отже, множина Кантора, як важливий математичний об'єкт, відображає в собі синтез теорії множин, топології та математичного аналізу. Її унікальна конструкція, що базується на послідовному видаленні відрізків, створює нескінченно-дробову та неперервну структуру, яка має фундаментальне значення для розуміння математичних понять.

Множина Кантора також слугує прикладом для вивчення властивостей фракталів та самоподібних структур.

У підсумку, множина Кантора, будуючи свою особливу структуру шляхом послідовного видалення відрізків на відрізку  $[0,1]$ , виконує важливі ролі в різних математичних та наукових контекстах. Її ніде не щільна, незліченна та досконала природа робить її важливим об'єктом для вивчення топології, теорії міри та фрактальної геометрії.

#### 1.4. Фрактальні множини на площині і в просторі

Фрактал – це неправильна та самоподібна структура, яка в математиці визначається як множина точок в евклідовому просторі. Важливою характеристикою фракталів є їхні нерегулярні та самоподібні властивості. У широкому сенсі, фрактал є фігурою, частини якої при будь-якому збільшенні масштабу є подібними до фрактала в цілому. Це може включати множини точок, які мають дробові метричні розмірності (Мінковського або Хаусдорфа), відзначаючись неперевершеною складністю та структурою, що відрізняється від традиційних геометричних об'єктів.

Фрактал може визначатися принаймні однією з наступних характеристик [27]:

- Виявляє нетривіальну структуру при будь-якому масштабуванні, незважаючи на відмінності від регулярних геометричних фігур [30].
- Є самоподібним або приблизно самоподібним, що вказує на те, що його частини в подальшому масштабуються відносно всього фрактала.
- Має дробову метричну розмірність або метричну розмірність, що переважає топологічну, що вказує на складність його геометричних властивостей.

Зокрема, трикутник Серпінського є одним із фракталів, який подібно до множини Кантора відображає ці властивості на площині.

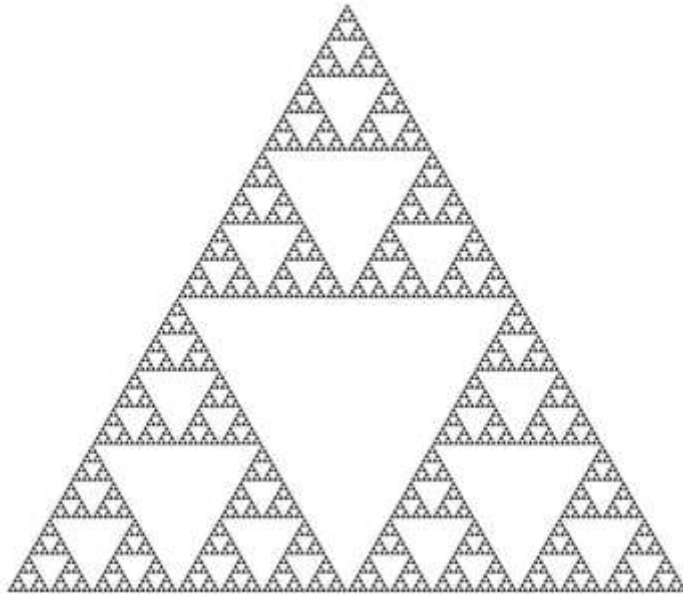


Рис. 1.3. Трикутник Серпінського [27, 28]

Будуємо множину ітеративним методом, розпочавши з рівностороннього трикутника  $T_0$ . Спочатку з'єднуємо середини його сторін відрізками, утворюючи чотири нових трикутники. З вихідного трикутника видаляємо внутрішній «серединний» трикутник, залишаючи лише три трикутники, і отримуємо множину  $T_1$ .

Продовжуючи цей процес для кожного з отриманих трикутників множини  $T_1$ , ми знову з'єднуємо середини сторін і видаляємо внутрішність серединного трикутника. Це призводить до утворення множини  $T_2$ , яка включає в себе дев'ять рівносторонніх трикутників. Продовжуючи цей процес нескінченно, ми отримуємо послідовність множин, кожна з яких містить все більше та більше рівносторонніх трикутників [15, с. 87].

Цей ітеративний підхід розкриває структуру, яка стає більш деталізованою на кожному кроці, внаслідок чого утворюється послідовність множин, яка розширюється та демонструє властивості самоподібності для рівносторонніх трикутників.

$$T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_n \supset \dots,$$

Ітерації побудови зображені на Рис. 1.4.



Рис. 1.4. Ітерації побудови трикутника Серпінського [27].

Губка Менгера, як тривимірний аналог множини Кантора, конструюється за ітеративним методом, розпочинаючи з куба  $C_0$  з ребром одиничного розміру. Цей куб поділяється площинами, паралельними його граням, на двадцять сім рівних кубів, що утворюють початкову множину.

Далі, ітеративний процес передбачає видалення центрального куба та всіх прилягаючих до нього двомірних граней кубів. Такий вибір створює множину  $C_1$ , що складається з двадцяти кубів. Повторюючи аналогічний процес для кожного з отриманих кубів в множині  $C_1$ , отримуємо множину  $C_2$ , що вже включає в себе чотириста кубів [13].

Продовжуючи цей ітеративний процес нескінченно, ми будемо отримувати послідовність множин, кожна з яких міститиме все більше і більше кубів, що дозволяє нам спостерігати властивості самоподібності та деталізації структури на кожному новому етапі цього конструктивного методу. Таким чином, Губка Менгера є розширенням ідеї множини Кантора на тривимірний простір.

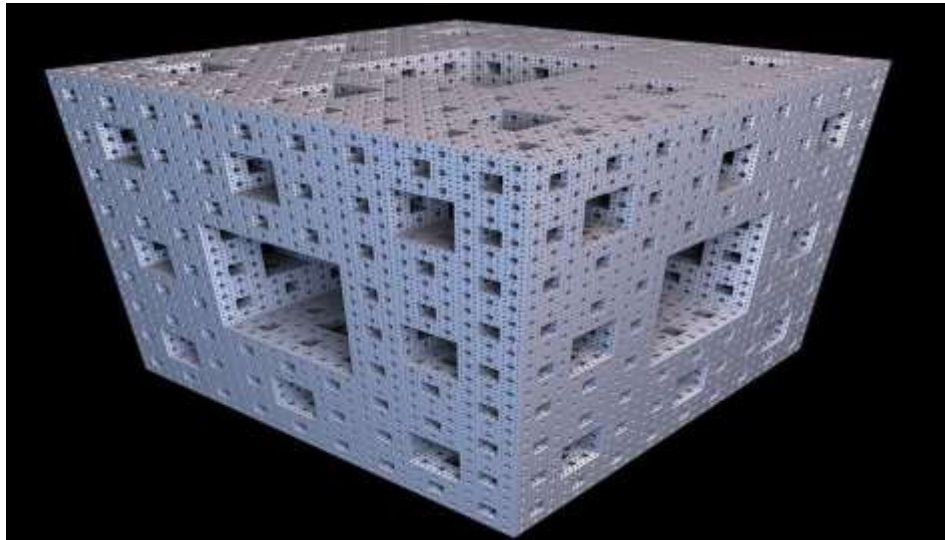


Рис. 1.5. Губка Менгера (після 6 ітерацій) [28].

Крива Коха [27] представляє собою фрактал, який визначається тим, що він є всюди неперервним, але в той же час ніде не має похідної.

Побудова кривої Коха починається з одиничного відрізка. Цей відрізок поділяється на три рівні частини, і середній інтервал замінюється на рівносторонній трикутник, в якому відсутній відповідний сегмент. В результаті цього простого операційного кроку утворюється ламана, що складається з чотирьох відрізків, кожен з яких довжиною  $1/3$  від початкового відрізка.

Далі, на кожному з отриманих відрізків застосовується той самий процес, ділення і заміна середніх інтервалів на рівносторонні трикутники. Цей процес повторюється нескінченно багато разів, і в кінцевому результаті утворюється крива Коха, яка є граничною для цього ітеративного процесу [20, 27].

Така конструкція кривої Коха ілюструє фундаментальний аспект фрактальної геометрії, в якій деталізація структури відбувається на кожному етапі побудови, в результаті чого отримується математичний об'єкт із властивістю всюди неперервної, але ніде не диференційовної функції.

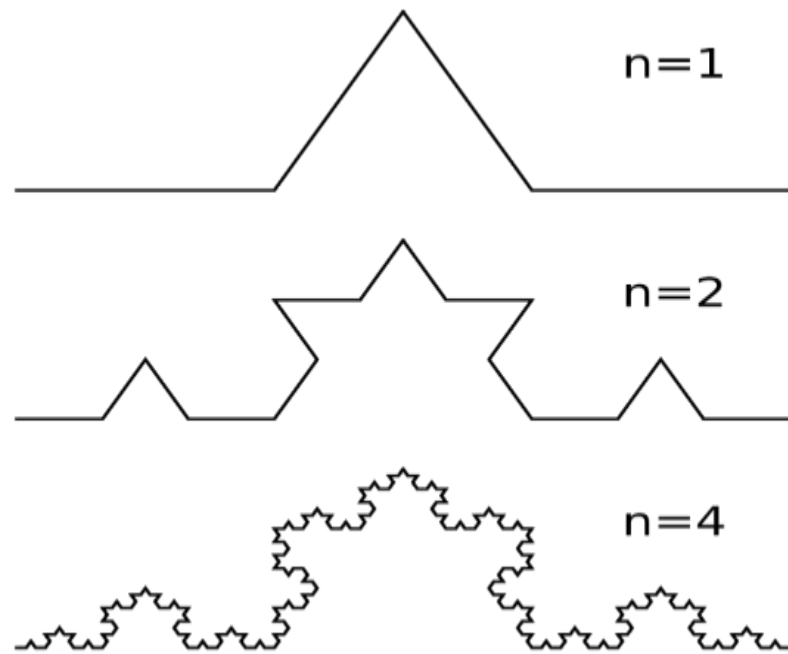


Рис. 1.6. Ітерації утворення кривої Коха [27].

Точна самоподібність, яка є вищим рівнем самоподібності, виявляється як найсильніший тип у фрактальних структурах. Виділяється вона тим, що фрактал виглядає ідентично при будь-якому збільшенні масштабу. Це явище часто виявляється в фракталах, що генеруються за допомогою ітеративних функцій.

Один із видатних прикладів точної самоподібності – це множина Мандельброта. Вона представляє собою множину комплексних точок  $c$ , для яких функція  $f_c(z) = z^2 + c$  не розходиться при ітерації від початкової точки  $z_0 = 0$ . Для елементів цієї множини існує таке дійсне число  $R$ , що для будь-якого натурального числа  $n$  виконується нерівність  $|z_n| < R$ .

Отже, множина Мандельброта відображає точну самоподібність, бо при будь-якому збільшенні чи зменшенні масштабу її структура залишається незмінною [32].



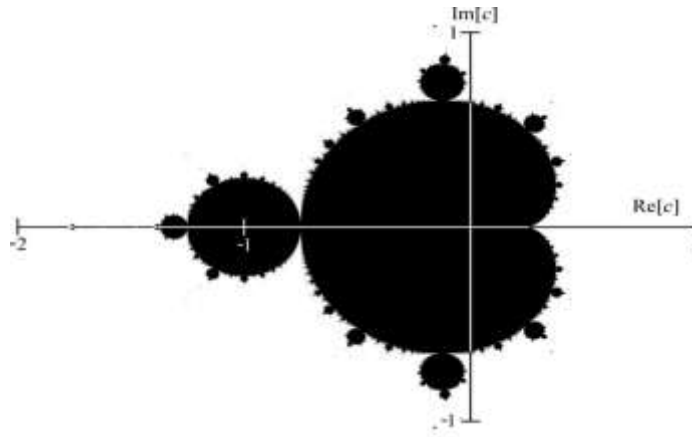


Рис. 1.7. Множина Мандельброта [46].

Іншими словами, можна розглядати множину Мандельброта як сукупність комплексних чисел  $c$ , для яких орбіта числа нуль при ітерації квадратичного полінома  $z_n = z_n^2 + c$  залишається обмеженою. Іншими словами, якщо при початковій точці  $z_0 = 0$  і повторних ітераціях функції, абсолютне значення  $z_n$  залишається обмеженим для будь-якого натурального числа  $n > 0$ , то комплексне число  $c$  належить множині Мандельброта.

Орбіта точки в контексті динаміки функції визначається як послідовність значень, отриманих при послідовному застосуванні функції до визначеної точки. Наприклад, орбіта точки  $z$  при дії відображення  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  є послідовністю  $z, f(z), f(f(z)), \dots$  [21].

Ми можемо розкрити вищевказану послідовність для кожної точки  $c$  наступним чином:

$$\begin{aligned}
 c &= x + iy \\
 z_0 &= 0, \\
 z_1 &= z_0^2 + c = x + iy \\
 z_2 &= z_1^2 + c = (x + iy)^2 + x + iy = x^2 + 2xiy - y^2 + x + iy = \\
 &= x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i, \\
 z_3 &= z_2^2 + c = \dots
 \end{aligned}$$

Якщо звести ці вирази до виду ітеративної послідовності значень координат комплексної площини  $(x, y)$ , тобто поклавши [18]

$$z_n = x_n + iy_n,$$

$$c = x_0 + iy_0,$$

то отримуємо формули, за якими можемо порахувати значення координат точки в наступній ітерації за значенням в попередній.

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_0,$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + y_0$$

Хоча термін "множина Мандельброта" асоціюється із вищезгаданою множиною, будь-яка функція комплексної змінної може мати свою власну відповідну множину Мандельброта [46]. Наприклад, у контексті побудови цієї множини можна використовувати не лише квадратичну функцію, але й іншу.

Замість того, щоб базувати побудову множини Мандельброта на квадратичній функції  $f(z) = z^2 + c$ , можна використовувати кубічну функцію, де кожен член у виразі має ступінь 3:  $f(z) = z^3 + c$ . Такий підхід відкриває можливість дослідження інших видів фрактальних структур, які можуть мати унікальні властивості та вигляд в порівнянні з традиційною множиною Мандельброта, розширюючи тим самим область застосування цього концепту в математиці та комп'ютерній графіці [11].

Це розширення може вивести на створення нових геометричних утворень у світі множин Мандельброта. Варіюючи ступені функції та її параметри, можна отримати різноманітні форми, які не лише розширюють спектр можливостей для вивчення фрактальної геометрії, але й надають додатковий інсайт у властивості та структури математичних об'єктів.

Важливим аспектом є те, що такий підхід підкреслює універсальність ідеї множини Мандельброта. Вона виявляється не прив'язаною до конкретної функції чи алгоритму, а є універсальним інструментом для вивчення динаміки складних систем, де краса і складність виникають із простих математичних правил.

Такий підхід також може знайти своє застосування у різних галузях науки та технології, від фізики до комп'ютерної графіки.

Універсальність концепції множини Мандельброта [46], яка може бути адаптована до різноманітних функцій, підкреслює її значущість як інструмента для дослідження хаосу та самоподібності у великому спектрі наукових галузей. Ця універсальність розширює наше розуміння внутрішньої структури та складності природних явищ, а також надає технологічній галузі нові можливості для створення нових математично обґрунтованих образів.

## РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ

### 2.1. Довжина берегової лінії

В наш час теорія фракталів широко використовується та має широкий спектр застосувань у різних галузях людської діяльності, зокрема, для визначення довжини берегової лінії. Вважаючи, що форма берегової лінії є фракталом, можна визначити її фрактальні розмірність і фрактальну довжину. Рзв'язування таких задоц має важливе практичне значення, оскільки дозволяє оцінити економічні витрати на будівництво прибережних комунікацій, доріг та інших споруд.

Бенуа Мандельброт, працюючи в американському дослідницькому центрі ІВМ, виявив зацікавленість застосування математики в різних областях. Зокрема, його зацікавила проблема виміру довжини берегової лінії Великої Британії, яка виявилася вкрай складною. Він опублікував свої дослідження в журналі "Science" у 1967 році, в яких розглядався парадокс берегової лінії, що полягає в тому, що довжина залежить від методу вимірювання. Було виявлено, що чим менше відрізок для вимірювань, тим більше кінцева довжина. Щоб визначити довжину берегової лінії, потрібні інші методи кількісної оцінки [34].

Мандельброт використав емпіричний закон, виведений Льюїсом Річардсоном, для визначення довжини берегової лінії. Згідно з цим законом, обмірювана довжина  $L(\delta)$  різних географічних границь є функцією шкали виміру  $\delta$ . Аналізуючи дані з різних прикладів, Річардсон припустив, що  $L(\delta)$  може бути апроксимована функцією певного виду.

$$L(\delta) = A\delta^{1-D}$$

Тут  $A$  – позитивна константа, а  $D$  – константа, яку називають фрактальною розмірністю [1]. Терміни "фрактальна розмірність" і "фрактал" були введені Мандельбротом у 1975 році [3], приблизно через 10 років після того, як він опублікував статтю про самоподібність узбережжя Великої Британії. Фрактальна

розмірність – це десятковий показник, який, у цьому випадку, може бути більшим або рівним 1. Якщо берегова лінія виглядає гладкою, то її розмірність повинна бути близькою до 1, а чим більше вона порізана, тим ближче її розмірність до значення 2. Річардсон у своїх дослідженнях вказує, наприклад, розмірність 1,02 для узбережжя Південної Африки та 1,25 – для західного узбережжя Великої Британії. Таким чином, вимірювання довжини берегової лінії можливо лише приблизно, виходячи з параметра  $\delta$ , тобто довжини відрізка прямої, якою "згладжуються" вигини узбережжя [21].

У 1988 році норвезький учений Енс Федер запропонував інший спосіб виміру довжини берегової лінії Норвегії. Згідно з цим методом, карту покривали квадратною сіткою, комірки якої мали розміри  $\delta \times \delta$ . Здається, що число  $m(\delta)$  таких гнізд, які покривають берегову лінію на карті, приблизно дорівнює числу кроків, за які можна обійти берегову лінію циркулем з розхилом  $\delta$ . Зменшуючи  $\delta$ , число  $m(\delta)$  зростатиме.

У своїй книзі Е. Федер [27] описує методику визначення фрактальної розмірності  $D$  берегової лінії за допомогою квадратних сіток різного масштабу. Він використовує формулу, де визначено

$$m(\delta) = m\delta, \text{ тоді } m\delta = A\delta^{1-D}.$$

Поступово накладаючи на об'єкт вивчення, яким є берегова лінія, квадратні сітки із сторонами  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , ми реєструємо відповідну кількість квадратів  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Кількість  $n$  різних сіток повинна бути достатньою, щоб можна було побудувати графік за  $n$  точками. Обираючи процедуру раціональним чином, рекомендується взяти  $n \geq 5$ . Далі вводяться відомості про величини.

$$x = \lg \delta, y = \lg(m\delta).$$

Після проведення обчислень отримуємо набір пар значень  $(x, y)$ , за якими будується графік лінійної функції у вигляді  $y = ax + b$ . Оскільки точки з координатами  $(x, y)$  не завжди розташовані вздовж прямої, застосовується метод найменших квадратів для лінеаризації залежності  $y(x)$ . Цей метод дозволяє

визначити коефіцієнти  $a$  і  $b$  у функції  $y = ax + b$ . Інакше ці коефіцієнти можна визначити безпосередньо з графіка  $y(x)$  [10, с. 67].

Оскільки  $L(\delta) = m\delta$ , то  $y = \log(m\delta) = \log(L)$ . Тоді, враховуючи вираз (3), функцію  $y(x)$  можна записати у вигляді

$$y = ax + b \Rightarrow \lg L = a \cdot \lg \delta + b$$

Потенціюючи вираз перетворимо його до вигляду

$$10 \lg L = 10a \cdot \lg \delta + b \Rightarrow L = 10^b \cdot \delta^a$$

Порівнюючи отримане вираз із відповідною формулою, маємо

$$A = 10^b, a = 1 - D$$

Звідси випливає, що фрактальна розмірність берегової лінії

$$D = 1 - a$$

Застосовуючи згаданий вище метод, Енс Федер визначив фрактальну розмірність берегової лінії Норвегії, яка має значення  $D = 1,52$ . Слід відзначити, що узбережжя Норвегії відрізняється значним розрізанням фіордами. Для берегової лінії Великої Британії, контури якої мають більш гладкі форми, фрактальна розмірність виявилася значно меншою, всього  $D = 1,3$ .

У зв'язку з фрактальною природою узбережжя, парадокс полягає в труднощах точного вимірювання його довжини. Чим детальніше вимірювати контур берегової лінії, тим більше отримується довжина через врахування безлічі вигинів та дрібних деталей. Фрактальні властивості узбережжя проявляються в тому, що його структура залишається подібною на будь-якому масштабі вимірювань [45].

Цей феномен служить не лише об'єктом географічного дослідження, але також стає об'єктом вивчення теорії фракталів. Мандельброт, розглядаючи узбережжя як фрактальну криву, вніс суттєвий внесок у цю концепцію та розширив розуміння складності географічних форм [46].

Застосування теорії фракталів до аналізу берегової лінії розкриває не тільки визначення її довжини, але і висвітлює важливі зв'язки між різноманітним

природних форм та їх фрактальним характером. Це допомагає у розумінні взаємозв'язку між географічними особливостями та математичними моделями, розширюючи уявлення про те, які фрактальні структури властиві рельєфу прибережної зони [15].

Отже, з погляду теорії фракталів, вимірювання берегової лінії не лише відкриває проблему точності вимірювань у географії, але й розкриває фундаментальні принципи, що стоять за складністю та варіабельністю природних форм.

## **2.2. Визначення лінії**

Лінія виникає з точки, але лише при застосуванні до неї зовнішньої сили. Іншими словами, лінія представляє собою слід зміщення точки і є другорядним елементом. При цьому можливі різноманітні способи прикладання зовнішніх сил, що робить різноманітність ліній нескінченною.

Основні характеристики лінії [27]:

Лінія є, в суті, нескінченною. Лінія може мати початок і кінець, або тільки початок, або тільки кінець, залежно від прикладеної сили чи обмежень зовнішніх елементів. Проте суть лінії залишається незмінною – вона зберігає потенціал безкінечності.

Лінія має нескінченний потенціал руху, що робить її максимально динамічним елементом [8].

Кожен вид лінії може мати свої характеристики, які можуть зменшити або збільшити динамізм лінії, але не можуть його знищити.

До характеристик лінії належать напрямок і напруження, які змінюються в залежності від характеру лінії.

Пряма лінія:

Пряма лінія є простим слідом від руху точки при прикладенні до неї однієї сили. Напруження всередині цієї лінії є максимальне, роблячи її найкоротшою формою потенціального руху. Пряму лінію можна поділити на вертикальну, горизонтальну та вертикальну.

Горизонталь:

Горизонталь сприймається людським оком зліва направо та асоціюється з основою. Тому вона є найменш динамічною прямою лінією.

Вертикаль:

Вертикаль – протилежність горизонталі. Вона сприймається знизу вгору і асоціюється з висотою. Рух вгору є сильнішим, ніж рух по горизонталі, тому вертикаль є більш динамічною [2, с. 56].

Діагональ:

Діагональ відхиляється під кутом від горизонталі і вертикалі, і є прилеглою до обох напрямків. Її характер залежить від кута діагоналі та відстані до горизонталі чи вертикалі, підсилюючи властивості обох.

Непрямі лінії:

Непрямі лінії можуть бути ламані або кривими, виникаючи при застосуванні мінімум двох сил.

Ламані лінії:

Ламані лінії виникають після прикладення до точки мінімум двох сил по черзі.

Криві лінії:

Криві лінії виникають внаслідок одночасного прикладення мінімум двох сил. Характеристики ламаних і кривих ліній залежать від кількості та напрямків сил.

Ліризм і драматизм:

Натискування:



Натискування – важлива характеристика лінії, визначає внутрішнє напруження або розслаблення прикладеної сили.

Час:

Час відіграє важливу роль в лінії, оскільки вона не може сприймати так само швидко, як точка. Крива лінія потребує більше часу, ніж пряма.

У теорії фракталів, лінія представляє собою об'єкт зі складною геометрією, що має самоподібність на різних масштабах. Одне з ключових понять у теорії фракталів – це фрактальна розмірність, яка відрізняється від традиційних понять розмірності для евклідового простору [14].

Лінії в теорії фракталів можуть мати різні форми і структури, і їхні характеристики можуть визначатися через фрактальні розмірності та інші параметри. Фрактальна розмірність лінії вказує на те, як змінюється її довжина при зменшенні масштабу вимірювань.

Основна ідея тут полягає в тому, що лінії фрактальні, та їхній контур заповнений деталями на будь-якому масштабі. Таким чином, при визначенні довжини чи розмірності лінії важливо враховувати не тільки гладкі відрізки, але й найменші деталі, що утворюють її структуру.

Дослідження фрактальних ліній може включати в себе визначення фрактальної розмірності за допомогою різних методів, таких як метод боксів чи метод Хаусдорфа. Одним із способів вимірювання фрактальної розмірності може бути подібний до описаного раніше.

В теорії фракталів, для подальшого вивчення ліній, важливо розглядати їхню самоподібність та структурну складність на різних масштабах. Самоподібність означає, що частини лінії або її структура виглядають подібно до всього об'єкта. Це вказує на те, що фрактальні лінії мають деяку внутрішню структурну регулярність, яка повторюється на різних рівнях деталізації.

Вивчення ліній в теорії фракталів дозволяє краще розуміти природу складних геометричних об'єктів, таких як природні форми, рельєфи, або інші об'єкти, які можуть мати неправильні або хаотичні форми [32].

Однією з ключових ідей є використання фрактальної розмірності для характеристики та класифікації ліній. Ця розмірність визначає, наскільки "заповнена" просторова структура лінії на різних масштабах. Якщо лінія має фрактальну розмірність, відмінну від класичної розмірності, це свідчить про її фрактальну природу.

Дослідження фрактальних ліній є важливою галуззю для розуміння природних явищ, проектування штучних структур, а також для розвитку математичних методів для аналізу та моделювання фрактальних об'єктів.

У завершення, вивчення ліній у теорії фракталів є важливим елементом для глибокого розуміння складних геометричних структур у природі та в інших областях. Аналіз фрактальних ліній допомагає визначати їхню структурну складність, самоподібність та властивості на різних масштабах, що має практичне значення в наукових, інженерних та художніх дослідженнях.

### **2.3. Топологічна розмірність**

Топологічна розмірність геометричної фігури визначається кількістю координат, які потрібні для опису положення точки на цій фігурі [27]. Одинична точка потребує лише однієї координати, площина – двох, а об'ємна фігура – трьох. З цього випливає, що розмірність  $n$ -мірної фігури завжди є цілим числом  $n$ .

Метрична розмірність визначає зв'язок між розміром фігури та вимірювальною одиницею. Це число вказує, скільки об'єктів потрібно для покриття даної фігури. Наприклад, розмірність прямої обчислюється шляхом визначення кількості сантиметрів, метрів, міліметрів тощо, які повністю

покривають її. При вимірюванні об'єму фігури розраховується кількість одиничних кубів, які повністю заповнюють її об'єм. Зменшення величини одиниць виміру призводить до зменшення метричної розмірності. У найпростішому випадку можна вивести формулу розрахунку розміру фігури:

$$N(\delta) = (1/\delta)D,$$

де  $\delta$  – кількість метричних об'єктів, які покривають фігуру;  $D$  – метрична розмірність.

Іншими словами, при вимірюванні плоскої фігури в метрах ( $\delta = 1$ ) та подальших замінах метрів дециметрами, сантиметрами, міліметрами і так далі, значення  $\delta$  буде змінюватися, наприклад, на  $\delta = 1/10$ ,  $\delta = 1/100$  і так далі. Для лінії завжди буде справедлива рівність  $N(\delta) = (1/\delta)_1$ , для площини  $N(\delta) = (1/\delta)_2$  і так далі. Таким чином, можна легко виділити метричну розмірність для різних об'єктів: для лінії розмірність дорівнюватиме одиниці, для площини двійці, для об'ємних фігур трійці і так далі [18].

Якщо розмірність об'єкта виражається цілим числом в одному масштабі, то при переході до менших або більших значень  $\delta$ , розмір об'єкта залишиться незмінним. Однак для фракталів це правило не виконується.

Для прикладу, розглянемо берегову лінію, яка має фрактальну природу. Вимірюючи довжину всіх її вигинів, ми помічаємо, що це значення змінюється зі збільшенням масштабу через виявлення нових, дрібніших вигинів. Таким чином, довжина берегової лінії в різних масштабах завжди буде відмінною [10].

Цей ефект виникає тому, що при збільшенні масштабу ми можемо враховувати лише ті вигини, які порівнянні з одиницею виміру. Це означає, що довжина берегової лінії в метрах, наприклад, може дорівнювати 126 метрам, а при збільшенні масштабу (зменшенні одиниці виміру) це значення може стати, наприклад, 134213 міліметрам.

Лінії, розмір яких змінюється в залежності від масштабу, є чимось середнім між математичною лінією і площиною, і їх розмірність лежить у діапазоні  $1 < D$

$< 2$ . Якщо одиниця виміру  $\delta$  знаближається до нуля, розмір фігури асимптотично наближається до величини  $\delta^{-1}$ .

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D.$$

Розмірність  $D$  має свій математичний зміст, що вказує на те, наскільки рівномірно елементи множини заповнюють собою весь простір. Наприклад, для лінії на площині фрактальна розмірність  $D$  прямує до одиниці, що пояснює "гладкість" множини, тоді як хвилястість при різних масштабах вказує на те, що  $D$  прямує до двійки [15].

Отже, розмірність може служити методом визначення розмірності фрактальної множини в метричному просторі. Існує декілька підходів до розрахунку розмірності фрактальних множин, проте вони всі, в певному розумінні, базуються на розмірності Хаусдорфа.

Приклад обчислення розмірності Хаусдорфа для двовимірної множини зображений на Рис. 2.1.

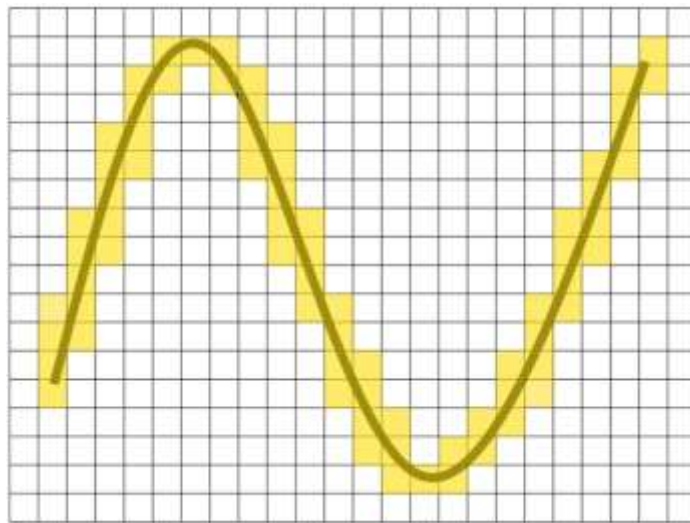


Рис. 2.1. Приклад обчислення розмірності Хаусдорфа для двовимірної множини [18, 28].

При зміні масштабу відбувається модифікація сітки побудови, внаслідок чого змінюється і кількість одиничних кубів, що знаходяться на множині. Отже,

для отримання більш точного значення розмірності важливо мати мінімально можливий масштаб сітки [18].

Також існують інші аспекти розмірності, такі як розмірність Мінковського. Ця розмірність часто визначається як "груба розмірність" обмеженої множини в метричному просторі.

У випадку відсутності межі важливо розглядати верхню та нижню межі та відповідно говорити про верхню та нижню розмірності Мінковського. Ця розмірність має тісний зв'язок з розмірністю Хаусдорфа, хоча існують множини, де вони можуть відрізнитися одна від одної. У багатьох випадках ці розмірності збігаються, тому в контексті розмірностей часто не визначається конкретно, яка з них мається на увазі.

Іноді розмірність Мінковського отримує назву дробової розмірності, хоча варто зауважити, що дробова розмірність  $D$  не є єдиною необхідною умовою фрактальності. Існують фрактальні об'єкти, розмірність яких може виражатися цілим числом. Як вже було сказано, Мандельброт визначив ключовий критерій для визначення фракталу: розмірність  $D$  повинна бути строго більшою за топологічну розмірність [40].

Мінковський вніс вагомий внесок у розробку теорії, узагальнюючи розмірність для компактних множин  $A$  у  $R_n$ . Цю теорію можна ілюструвати наочно через апроксимацію  $A$  за допомогою об'єднання куль з наступним обчисленням їх об'ємів та мір (Рис. 2.2).

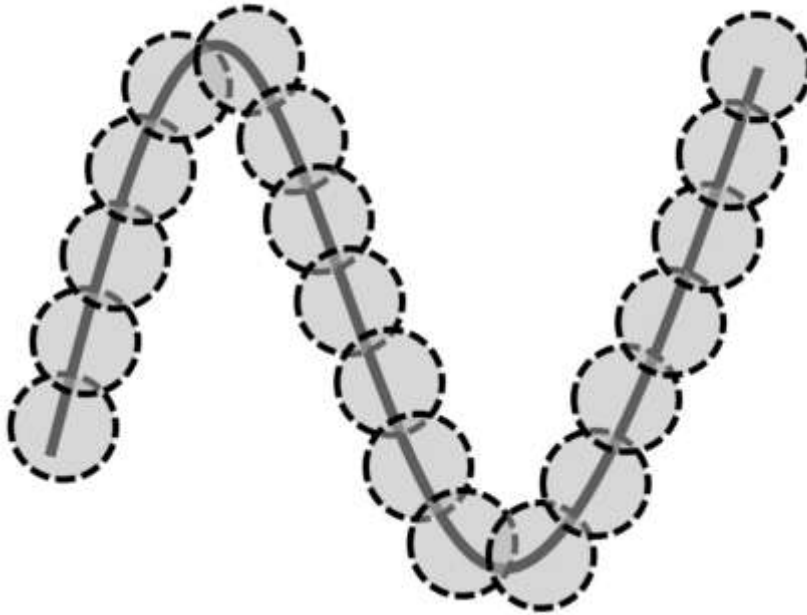


Рис. 2.2. Апроксимація  $A$  через об'єднання куль розмірністю Мінковського [40].

Нехай  $N(\epsilon)$  представляє собою мінімальну кількість куль заданого радіусу, необхідних для покриття компактної множини  $A$ . Тоді міра  $D$  цієї множини, що буде позначена як  $V_d(A)$ , повинна задовольняти таку умову:

$$V_d(A) = N(\epsilon)\epsilon^D$$

Вважаючи, що  $V_d(A) > 0$ , ми можемо припустити, що для деякого  $c > 0$  наступна рівність буде дійсною:

$$N(\epsilon) = c / \epsilon^D$$

Візьмемо логарифм лівої та правої частини, та отримаємо такий вираз:

$$\log(N(\epsilon)) = \log(c) - D \log(\epsilon),$$

яке ми можемо записати в такому форматі:

$$D = - \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\epsilon)} = \frac{\log(c)}{\log(\epsilon)} + \dots$$

Так як, при  $\log(\epsilon) \rightarrow -\infty$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , то розмірність Мінковського для множини  $A$  повинна задовольняти рівності (9).

Якщо існує ліміт, вираз (9) визначає розмірність Мінковського для множини  $A$  [11].

Давайте проілюструємо це на прикладі вимірювання розмірності Хаусдорфа для сніжинки Коха, що представлена на Рис. 1.1, де  $n$  – крок побудови сніжинки. В якості одиниці виміру візьмемо сторону багатокутника, яка буде обчислюватися на кожному кроці побудови [33].

На Рис. 2.3 представлена п'ята ітерація кривої Коха. Для розрахунку розмірності ми використовуватимемо три різні масштаби.

Для верхньої сітки на Рис. 2.3, довжина відрізка дорівнює одиниці (оскільки ми взяли всю криву за одиничний відрізок), і вона розділена на дев'ять частин, отже,  $\delta = 1/9$ . Загалом зафарбовано 12 квадратів, тому після підстановки  $D = 1.1309$ .

Розглянемо середню сітку на Рис. 2.3. Тепер значення  $\delta = 1/18$ , і кількість «зафарбованих» квадратів дорівнює 30. Звідси отримуємо значення  $D = 1.1767$ .

Розглянемо останню сітку на Рис. 2.3. Значення  $\delta = 1/36$ , кількість «зайнятих» фракталом клітин дорівнює 72. Разом отримуємо значення  $D = 1.1934$ .

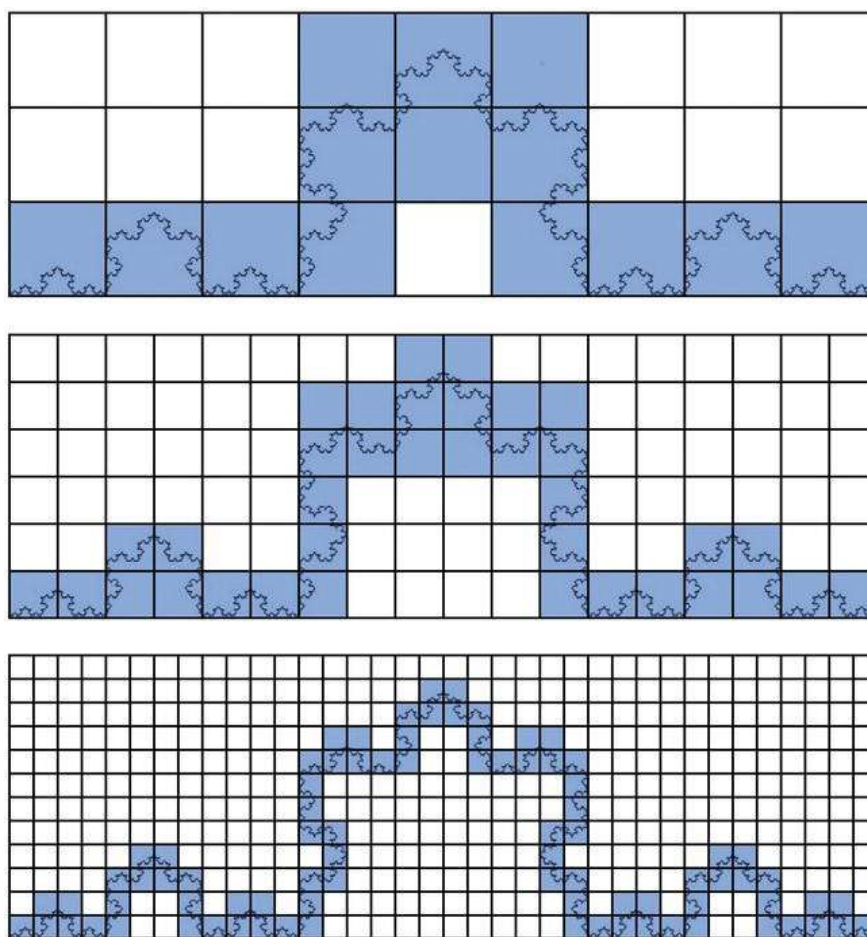


Рис. 2.3. П'ята ітерація побудови кривої Коха у трьох масштабах [28, 33].

Отже, в результаті розгляду трьох різних масштабів для сніжинки Коха ми отримали значення розмірності Хаусдорфа, яке змінюється від 1.1309 до 1.1934 в залежності від обраного масштабу. Ця змінність підкреслює фрактальний характер сніжинки, де її розмірності не обмежуються цілими числами.

Важливо зазначити, що при зміні масштабу сітки, яка використовується для вимірювань, змінюється і кількість одиничних кубів, розташованих на фракталі. Отже, для отримання більш точного значення розмірності важливо мати мінімально можливий масштаб сітки [23].

Крім того, існують інші види розмірності, такі як розмірність Мінковського, яка визначає грубу розмірність обмеженої множини в метричному просторі. Враховуючи різні підходи до визначення розмірностей, важливо



розрізняти їхні властивості та застосування для різноманітних фрактальних об'єктів.

У даному контексті були розглянуті різні аспекти фрактальної геометрії, зокрема поняття фракталів та розмірностей. Фрактал – це геометрична структура, яка виявляє нерегулярні та самоподібні властивості на різних масштабах. Його визначення пов'язане із множинами, що мають деякі характеристики, такі як точна самоподібність, дробова метрична розмірність та ітеративні методи побудови [31].

Розглянуто конкретні приклади фракталів, такі як трикутник Серпінського, губка Менгера, крива Коха та множина Мандельброта. Зазначено, що фрактали можуть виникати у різних просторових вимірах та математичних конструкціях.

Також обговорено поняття розмірностей, зокрема топологічної та метричної розмірностей, а також розмірностей Хаусдорфа та Мінковського. Розглянуті властивості фрактальних розмірностей, такі як їхній зв'язок із нерегулярністю та самоподібністю фракталів.

У контексті теорії фракталів важливо враховувати, що розмірність фракталу може бути нецілим числом, що свідчить про їхню складність та неперервність.

## **2.4. Фрактальні розмірності**

Не завжди можна однозначно визначити, чи система є фракталом, розглядаючи її зовнішній вигляд [27]. Оцінка фрактальних властивостей таких систем є суттєвим завданням у вивченні фракталів. Розроблено безліч методів для визначення фрактальної природи, причому кожен з них має свої обмеження щодо типів фракталів, які можна аналізувати. Деякі методи підходять лише до самоподібних фракталів, інші – до самоафінних, а деякі можуть бути непридатні для самоподібних. Крім того, важливо враховувати, що точність розрахунків

фрактальної розмірності визначається конкретним методом, і різні типи фракталів можуть вимагати різних підходів [24].

Метод Мінковського визначається як найточніший для аналізу фрактальної розмірності самоафінних кривих. Його суть полягає в покритті фрактальної кривої колами та оцінці залежності цього покриття від радіусу кола. Цей метод може бути успішно застосований до визначення фрактальної розмірності часових рядів, коли замість колів використовуються квадрати, що полегшує реалізацію комп'ютерного алгоритму. Такий підхід передбачає визначення відношення кількості квадратів  $N(\epsilon)$ , які покривають фрактальну криву, до розміру одного осередку  $\epsilon$ .

Обчислення розмірності Мінковського зазвичай описується таким виразом:

$$\log(N(\epsilon)) = \log(c) - d \cdot \log(\epsilon)$$

де  $\epsilon$  – сторона одиничного квадрата.

$N(\epsilon)$  – найменше число клітин, необхідних для покриття фрактальною кривою.

Не важко виявити, що графік залежності (вираженого формулою 16) від  $\log(N(\epsilon))$  і  $\log(\epsilon)$  представляє собою пряму лінію, де константа позначена як  $c$ , а кутовий коефіцієнт – як  $d$ . Використовуючи клітини лише двох розмірів,  $\epsilon_1$  та  $\epsilon_2$ , невідомі параметри  $c$  та  $d$  можна визначити, розв'язавши систему рівнянь:

$$\log(N(\epsilon_1)) = \log(c) - d \cdot \log(\epsilon_1)$$

$$\log(N(\epsilon_2)) = \log(c) - d \cdot \log(\epsilon_2)$$

У такому випадку, оскільки значення  $N(\epsilon)$  можуть бути визначені лише приблизно, розумно оцінювати  $N(\epsilon)$  для різних значень  $\epsilon$ . Це дозволяє створити систему рівнянь з більшою кількістю рівнянь, ніж невідомих, і, отже, система не буде мати чіткого розв'язку. У таких випадках варто використовувати стандартні методи, такі як метод найменших квадратів, для знаходження значень  $\log c$  і  $d$ , які мінімізують суму квадратів відхилень [20].

Розглянемо приклад, де необхідно провести інтерполяцію  $\xi_i, \eta_i, i = 1, \dots, n$  за допомогою прямої лінії. Припустимо, що  $\eta_i = b + m\xi_i$ , тоді пряма  $y = b + mx$  буде вважатися найкращим наближенням до  $\eta(\xi)$ , якщо сума квадратів відхилень  $y_i - \eta_i$  буде мінімальною. Іншими словами, необхідно знайти значення  $b$  та  $m$ , при яких рівняння досягає свого мінімуму:

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b - m\xi_i - \eta_i)^2.$$

R/S аналіз є одним з найбільш поширених методів визначення фрактальної розмірності. Спочатку цей метод був представлений Херстом для аналізу витікання води з різних водойм. Проте виявилось, що цей метод також можна успішно використовувати для обчислення фрактальної розмірності  $D$  фрактальних часових рядів, а також для самоафінних і однозначних кривих.

У цьому методі фрактальний часовий ряд перетворюється в дискретний набір даних  $M$  довжиною  $M$ . Далі ряд  $M$  конвертується у часовий ряд  $N$  довжиною  $N = M - 1$  згідно з логарифмічним відношенням [25].

Після цього час розділяється на  $A$  прилеглих підперіодів довжиною  $n$ , де  $A \cdot n = N$ , і кожен період позначений як  $I_a, a=1, 2, 3, \dots, A$ . Кожен елемент  $I_a$  позначений як  $N_k, k=1, 2, 3, \dots, n$ .

Кожен діапазон  $R_a$  нормалізується, ділячись на відповідне значення  $S_a$ , і таким чином отримується повторно нормований розмах протягом кожного  $I_a$ . За допомогою двох суміжних  $I_a$  обчислюється середнє значення R/S для довжини  $n$ :

Довжина  $n$  збільшується до наступного значення, поки вона не стане цілим числом  $D-1$ . Потім виконується лінійна регресія методом найменших квадратів на  $\ln(n)$  як незалежній змінній і  $\ln(R/S)$  як залежній змінній. Відрізок, що відсікається на координатній осі, є оцінкою  $\ln(c)$  і константи. Показник Херста  $H$  є нахилом прямої, і він пов'язаний з фрактальною розмірністю  $D$  фрактальної кривої відношенням  $D = 2 - H$ .

Метод визначення показника Херста за алгоритмом полягає у визначенні середнього значення та середньостатистичного відхилення, обчисленні відхилень та їх суму. Потім визначається розмах, і за його допомогою визначається показник Херста за емпіричною формулою. Зауважте, що показник Херста для більшості природних процесів має симетричний розподіл в околі середнього значення 0.73 зі стандартним відхиленням приблизно 0.09.

Метод визначення показника Херста за алгоритмом розпочинається розділенням вихідного ряду на  $k$  прилеглих інтервалів з довжинами  $m_1, m_2, \dots, m_k$  так, що їхня сума становить  $Z$ , де кожне  $m_{k+1}$  визначено як  $m_k + \Delta$ .

Отже, максимальна величина інтервалу  $m_k$  повинна забезпечити поділ часового ряду  $Z$  довжиною  $n - 1$  на два інтервали однакової довжини (з однаковою кількістю рівнів). Встановлено емпіричне правило, відповідно до якого довжина інтервалу  $m_k$  повинна бути більше або рівно 10, а кількість інтервалів  $k$  повинна бути більше або рівно 5. Крім того, рекомендується вибирати значення  $m_k$ , які є дільниками числа  $n - 1$ , щоб кількість рівнів у кожному інтервалі  $m_k$  була кратною  $(n - 1)$  [24].

Очевидно, що для коротких часових рядів обсягом 100 – 300 рівнів можна забезпечити виконання цього правила, але забезпечення кратності для значень інтервалів при значно більших довжинах практично неможливо.

На другому етапі для кожного інтервалу визначають середнє значення  $\bar{z}^k$  та стандартне відхилення  $S_k$ . Третім етапом є створення для кожного інтервалу  $z^k(m_k)$  ряду накопичених відхилень, використовуючи формулу:

$$z^{k*} = \sum_{j=1}^{m_k} (z_j^k - \bar{z}^k) \quad ,$$

де,  $j = 1, 2, \dots, m_k$ .

Іншими словами, для кожного рівня  $z^k(m_k)$  в інтервалі  $z^k(m_k)$  віднімається середнє значення  $\bar{z}^k$ , і це відхилення додається до суми попередніх

відхилень. Зокрема, послідовність таких сум є елементами кумулятивного ряду  $z_{@}^*$  для визначеного інтервалу  $z_{@}(m_{@})$ .

На четвертому етапі розмах елементів кумулятивного ряду  $z_{@}^*$  визначається за допомогою формули:

$$R_{@} = \max z_{jk}^* - \min$$

На п'ятому етапі нормують значення розмаху діленням  $R_k / S_k$  і обчислюють середнє зі всіх  $k$  нормованих розмахів [24].

На шостому етапі для кожного  $k$  обчислюється логарифм довжини інтервалу  $m_k$ , представлений абсцисою  $\log(m_k)$ , і логарифм нормованого розмаху  $\log(R / S)$ , що виступає ординатою точки на площині для побудови графіка регресії  $\log(R / S) = f[\log(m_k)]$  в подвійних логарифмічних координатах. Потім початковий ряд  $Z = \{z_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ , знову розбивається на кілька інтервалів, але з іншою кількістю даних  $m$ , і процедура повторюється. Щодо цього алгоритму слід відзначити його емпіричний характер, оскільки на сьогоднішній день відсутнє точне математичне обґрунтування вибору кількості підінтервалів. Також невизначено, скільки таких ітерацій слід провести. Таким чином, у цьому дослідженні показник Херста визначений лише для однієї ітерації, з дотриманням умови – мінімальна величина підінтервалу  $m$  не менше 10.

У підсумку, метод визначення показника Херста є ефективним інструментом для аналізу фрактальних часових рядів, а також самоафінних і однозначних кривих. Незважаючи на емпіричний характер деяких його аспектів, таких як вибір кількості підінтервалів та кількість ітерацій, метод надає можливість отримувати важливі відомості про фрактальні властивості досліджуваних об'єктів. Враховуючи його потужний інструментарій та широкий спектр застосувань, метод Херста стає важливим інструментом для наукових досліджень у різних галузях, де вивчається структура та динаміка складних систем.

## 2.5. Клітинні автомати

Клітинний автомат представляє собою дискретну модель, що включає регулярну решітку комірок, кожен з яких може перебувати в одному з кінцевого безлічі станів, таких як 1 і 0. Розмір решітки може бути будь-яким. Для кожної комірки визначено безліч окільних комірок. Наприклад, окіл може включати всі комірки, розташовані на відстані не більше 2 від поточної комірки [38].

Для роботи клітинного автомата необхідно встановити початковий стан всіх клітин на першій ітерації і визначити правила переходу клітини з одного стану в інший. На кожній ітерації автомата правило для кожної комірки оцінюється синхронно, змінюючи відповідним чином стани сітки. Поведінка простого правила показана на Рис. 2.4.

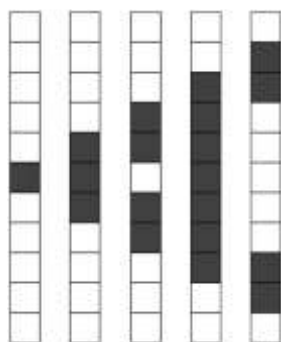


Рис. 2.4. Чотири ітерації простого одновимірного клітинного автомату [38].

Початковий стан кінцевої одновимірної сітки ініціалізується, маючи одну сіру комірку (стан 1) посередині. На кожній ітерації комірка стає сірою, якщо у неї є дві сірі сусідні клітини. В іншому випадку вона залишається білою (стан 0).

Важливо врахувати, що кожна комірка включена до свого околу. Розширюючи цю концепцію до двох або трьох вимірів, ми отримуємо більше можливостей для вибору сусідства. Найбільш поширеними є околи фон Неймана

і Мура, які мають своїх «послідовників», що ілюструються на рисунках 2.5. та 2.6.

Можна використовувати тривимірний варіант околу Мура, що включає 26 сусідніх клітин [24].

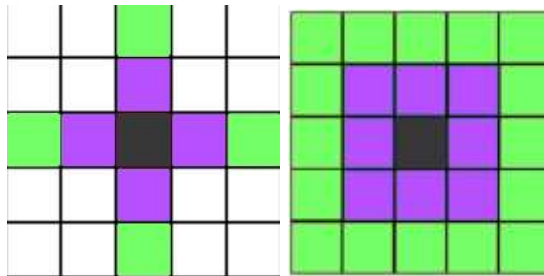


Рис. 2.5. Окіл фон Неймана та Мура в двовимірній решітці [24].

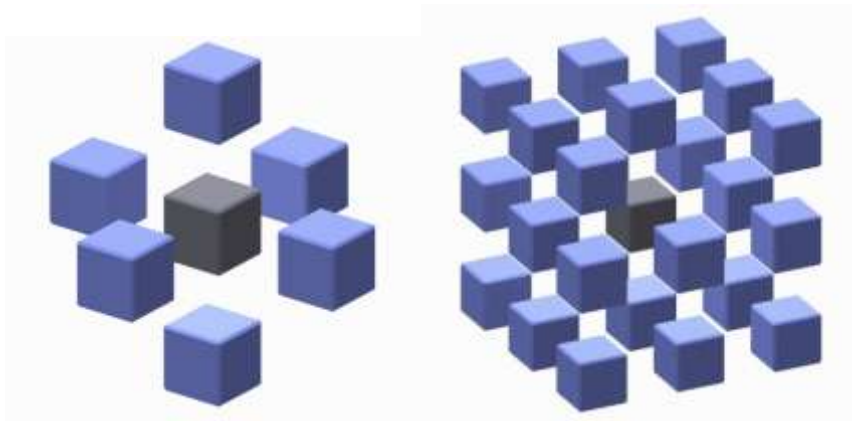


Рис. 2.6. Окіл фон Неймана та Мура в тривимірній решітці [24].

Класичні клітинні автомати відповідають ряду характеристик:

- Зміна значень всіх клітин відбувається одночасно після обчислення нового стану кожної клітинки (комірки) решітки, що сприяє ефективності обчислень на кожній ітерації.
- Сітка вважається однорідною, але в реальності, через обмежену пам'ять, можуть виникати граничні ефекти. Щоб їх уникнути, можна використовувати періодичні граничні умови.

- Взаємодії є лише місцевими, тобто тільки оточуючі клітини можуть впливати на даний елемент.
- Кількість станів комірки є скінченною, щоб забезпечити кінцеве значення для нового стану комірки [33].

Клітинний автомат вважається повним, якщо будь-який початковий стан можна змінити у будь-яку задану конфігурацію, змінивши значення загального вхідного параметра.

На кожній ітерації кожен елемент клітинного автомату приймає один стан з кінцевого набору станів, що може призвести до нового стану для набору елементів у більш пізній момент часу. Якщо елементи клітинного автомату відрізняються кількістю можливих станів, його називають полігенним. З еквівалентними наборами станів використовуються в алгебраїчних структурах, таких як лінійні клітинні автомати.

Елементи клітинного автомату можуть бути розташовані геометрично різними способами, а розмір простору і кількість елементів може бути як нескінченною, так і кінцевою. У динамічних клітинних автоматах геометрія може змінюватися з часом, а неоднорідні клітинні автомати відрізняються геометрією в різних частинах простору.

Для клітинних автоматів важливим є поняття сусідів, що визначає елементи, від яких залежить конкретний елемент автомату. Сусідство є ключовим аспектом клітинних автоматів. Важливо зауважити, що тут сусідство розглядається не в геометричному сенсі, а в інформаційному, хоча зазвичай інформаційне сусідство відображає геометричні зв'язки.

Сусідство кожного автомата задається окремим вектором-індексом сусідства, який є постійним для кожної окремої ґраткової машини. Зазвичай вивчаються  $d$ -розмірні регулярні решітки, де точки розташовані як копії автомата Мура. Стан елемента наступного моменту часу обчислюється на основі його



поточного стану та станів його сусідів, що визначається сусідством, що в основному залежить від геометрії клітинного автомату.

Для різних цілей можна змінювати кількість станів введення кожного елемента. Клітинний автомат називається збалансованим, якщо для кожного елемента кількість входів і виходів однакова [50].

У клітинних автоматах існують локальні правила, визначені для кожного елемента. Згідно з цими правилами, стан кожного елемента змінюється з часом. Клітинний автомат може бути неоднорідним, якщо локальні правила відрізняються для різних елементів, і можуть бути недетермінованими, тобто змінюватися з часом або мати випадковий характер. Ці правила встановлюють взаємозв'язок між поточним станом елемента та його сусідів і майбутнім станом на наступних етапах.

Одним з основних напрямків дослідження клітинних автоматів є алгоритмічна розв'язність окремих задач. Вивчаються конфігурації початкових станів, при яких клітинний автомат вирішує певні проблеми. Наприклад, питання щодо можливості побудови машини Тьюринга в грі "Життя" залишається відкритим.

У своїй книзі "A New Kind of Science", Стівен Вольфрам вперше запропонував класифікацію клітинних автоматів на основі їхньої еволюції, розділяючи їх на 4 класи. Ця класифікація стала першою спробою систематизувати самі правила, а не окремі типи поведінки цих правил. Нижче подано цю класифікацію у порядку зростання складності.

Клас 1: Під впливом еволюції майже будь-яких початкових умов відбувається швидка стабілізація стану та його гомогенізація. Всі випадкові конструкції у таких правилах швидко припиняють своє існування.

Клас 2: Під впливом еволюції майже будь-яких початкових умов відбувається швидка стабілізація стану або поява коливань. Більшість випадкових структур у початкових умовах швидко зникає, але деякі можуть

залишитися. Локальні зміни в початкових умовах надають системі локальний характер протягом подальшої еволюції [23].

Клас 3: Під впливом еволюції майже будь-яких початкових умов виникають псевдовипадкові, хаотичні послідовності. Будь-які стабільні структури, що виникають, майже миттєво руйнуються під впливом оточуючого шуму. Локальні зміни в початкових умовах мають широкий і невизначений вплив на розвиток всієї системи.

Клас 4: Під впливом еволюції майже всі правила породжують структури, які взаємодіють ускладненим чином, формуючи локальні, стійкі структури, здатні виживати тривалий період. Результатом еволюції правил цього класу можуть бути певні послідовності, що відповідають Класу 2, який був описаний раніше. Локальні зміни в початкових умовах мають широкий і невизначений вплив на розвиток всієї системи. Деякі клітинні автомати цього класу обладнані властивістю універсальності за Тьюрінгом. Цей факт був доведений для Правила 110 та гри "Життя".

Клітинні автомати поділяються за кількістю вимірів, які охоплюють. Найпоширенішими є одно – та двовимірні моделі.

У одновимірних (лінійних) клітинних автоматах, решітка представляє собою ланцюжок клітинок, де кожна має по два сусіди, за винятком крайніх клітин. Щоб уникнути ефектів на краях, решітка "загортається" у тор, де крайні клітини мають два сусіди. Це дозволяє використовувати однакове відношення для всіх клітин автомата.

Двовимірні клітинні автомати використовують решітку, де кожна клітина має визначену кількість сусідів у залежності від обраного типу сітки – трикутничної, чотирикутної чи шестикутної [46].

Важливим аспектом деяких клітинних автоматів є їх структура. Наприклад, моделі КА-ЗДР (з диференціальними рівняннями) стоять на межі між звичайними клітинними автоматами і ймовірнісними клітинними автоматами. Вони

використовують розв'язання системи диференціальних рівнянь для кожної клітини окремо, дозволяючи їм існувати в просторі з різними початковими умовами.

Класифікація за порядком переходу [46]:

Клітинні автомати поділяються на синхронні та асинхронні залежно від того, чи всі клітини переходять у новий стан одночасно чи ні. У синхронних КА, всі клітини переходять у новий стан одночасно за сигналом глобального таймера. У асинхронних КА, клітинки переходять у новий стан стохастично, і новий стан може використовуватися її сусідами як вхідний відразу.

Класифікація за ступенем детермінованості:

Клітинні автомати поділяються на детерміновані та ймовірнісні. У детермінованих КА, стан комірки в наступний момент часу визначається однозначно від стану цієї клітинки і суми станів її найближчих сусідів у попередній момент часу. У ймовірнісних КА, правила переходів мають абстрактний характер і не пов'язані однозначно з реальними процесами, дозволяючи станам комірок визначатися на основі ймовірностей.

$$y'_i = f(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}),$$

де  $f$  – функція переходу клітинки;  $y'_i$  – стан  $i$ -ої клітинки в наступний момент часу;  $y_{i-1}$  – стан  $(i-1)$ -ої клітинки в даний момент часу;  $y_i$  – стан  $i$ -ої клітинки в даний момент часу;  $y_{i+1}$  – стан  $(i+1)$ -ої клітинки в даний момент часу.

У двовимірних (площинних) клітинних автоматах решітка представляє собою двовимірний масив, де кожна клітина має вісім сусідів. Для уникнення ефектів на краях, решітка аналогічно попередньому "загортається" у тор. Це дозволяє використовувати наступне співвідношення для всіх клітин автомата:

$$y'_{i,j+1} = f(y_{i,j}, y_{i-1,j}, y_{i-1,j+1}, y_{i,j+1}, y_{i+1,j+1}, y_{i+1,j}, y_{i+1,j-1}, y_{i,j-1}, y_{i-1,j-1}).$$

Змінюючи різні параметри, можна отримати клітинні автомати з потрібною конфігурацією. Гнучкість конфігурації та універсальність обчислень призвели до

широкої застосовності клітинних автоматів у різних галузях. Свобода у виборі параметрів конфігурації є зручною для використання, але вносить додаткову складність у класифікацію та систематизацію теорії клітинних автоматів. Тим не менше, на практиці використовується лише обмежена кількість конфігурацій клітинних автоматів, кожна з яких, як правило, має власну назву. Ось деякі з найпоширеніших конфігурацій [29, с. 65]:

Мозаїчний автомат: Клітинний автомат, який використовує загальний вхідний параметр у локальному правилі для кожного елемента. Зміна цього параметра призводить до перевизначення правил зміни станів у всьому просторі елементів клітинного автомата. Якщо з будь-якого початкового стану можна привести клітинний автомат в будь-яку задану конфігурацію, такий автомат вважається повним.

- Ітеративний автомат: Клітинний автомат, в якому лише один елемент використовує значення вхідного параметра для зміни свого стану.
- Односторонній клітинний автомат: Автомат, який допускає лише односторонню взаємодію елементів. Наприклад, в одновимірному масиві елементів значення кожного елемента залежить лише від його стану і від стану лівого (або правого) сусіда.
- Л-система: Клітинний автомат, використовуваний для моделювання біологічних систем, де з часом один елемент може замінюватися або видалятися з системи відповідно до заданих правил.
- Відмовностітка система: Система, що моделює роботу клітинного автомата в реальних умовах, де з деякою ймовірністю кожен елемент може перейти в стан, що не відповідає локальним правилам. Завданням є створення алгоритмів, які забезпечують правильну роботу клітинного автомата навіть при наявності помилок.

Різноманітні конфігурації клітинних автоматів відкривають широкі можливості в їх використанні. Гнучкість у виборі параметрів та універсальність

обчислень роблять їх ефективним інструментом в різних областях науки та технологій. Незважаючи на складнощі класифікації, визначення певних типів клітинних автоматів допомагає в розумінні їхніх особливостей та застосування в конкретних випадках. Такий різноманітний спектр конфігурацій свідчить про потужний потенціал клітинних автоматів у вирішенні різноманітних завдань та дослідження нових аспектів теорії автоматів.

## **2.6. Фрактальні структури в точкових відображеннях**

Фрактальні структури в точкових відображеннях можуть виникати при застосуванні ітеративних або рекурсивних алгоритмів для створення графічних образів на площині. Точкове відображення може бути реалізоване через послідовне визначення координат точок і їх властивостей.

Одним із відомих методів створення фрактальних структур є точкове відображення атракторів [27]. Атрактор – це множина точок, яка представляє собою стабільний стан динамічної системи. Для створення фрактальних атракторів можна використовувати різні функції та рекурсивні правила для розміщення нових точок.

Отримаємо граничне узагальнення, обираючи замкнуту криву, яка може бути розділена на конгруентні сегменти. Змінюючи кожен сегмент будь-яким чином, ми можемо забезпечити, щоб весь процес повторювався на менших сегментах у наступних поколіннях і прогресував до межі. Такі операції можна також виконувати на поверхнях просторових тіл, при цьому можуть виникати складні криві або поверхні з самоперетинами.

Щодо отримання дуже складних кривих рекурсивно, це відбувається через багаторазове "ускладнення" простої кривої, що в теорії алгоритмів називається рекурсією. Для опису та побудови таких кривих використовуються L-системи.

Поняття L-систем тісно пов'язане з самоподібними фракталами. Вони застосовуються в комп'ютерній графіці для конструювання фрактальних дерев, рослин і інших фракталів. Графічна реалізація L-систем використовує черепащачу графіку, де точка (черепашка) рухається по екрану, креслячи слід, і виконує послідовність команд, що визначаються L-системою [19, с. 65].

Розмір кроку та приріст по куту  $\theta$  задаються наперед і залишаються сталими для всіх переміщень черепашки. У випадку, якщо початковий напрямок руху  $\alpha$  (кут, відлічуваний від додатного напрямку осі X) не вказано, вважається, що  $\alpha = 0$ . Таким чином, рядок " $F - F + +F - F$ " при  $\theta = 60^\circ$  служить командою для малювання першого покоління кривої Коха.

Процес перетворення простого рядка в більш складний базується на наборі інструкцій створення рядків, який включений до підпрограми *producestring()*. Правило для кривої Коха формулюється як:

$$'F' \rightarrow 'F - F + +F - F',$$

де символ  $\rightarrow$  позначає, що кожен символ 'F' замінюється групою символів 'F - F + +F - F'. Для символів '+' або '-' інструкція відсутня, тому ці символи передаються без змін. Формально, детермінована L-система включає алфавіт, слово ініціації, таке як аксіома (ініціатор чи атом), і набір породжувальних правил, які визначають, як перетворювати слово під час переходу від рівня до рівня (від ітерації до ітерації).

Наприклад, для сніжинки Коха породне правило  $newf = F - F + +F - F$ ;

Аксіома:  $F + +F + +F$  - рівносторонній трикутник;  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

На першій стадії вихідний рядок називається атомом, в даному випадку це "F",

«генерує рядок першого покоління  $S_1 = 'F - F + +F - F'$ », потім цей рядок подається на вхід того ж самого процесу, який генерує рядок другого покоління

$$S_2 = \underline{F - F + +F - F - F - F + +F - F + +F - F + +F - -F - F + +F - F}$$

У цьому рядку можна виділити чотири групи (кластера)

$$F - F + +F - F$$

розділених символами ' - ', потім ' + +' і нарешті знову ' - '. Тепер перо намалює другу генерацію  $K_2$  кривої Коха.

Для сніжинки Коха  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Аксиома:  $F + +F + +F$  - рівносторонній

трикутник; правило:  $newf = F - F + +F - F$ .

Представимо алгоритм роботи L-системи у вигляді псевдокоду.

Алгоритм L-системи

Призначення: Реалізація правила  $F = newf$ ;  $b = newb$ .

Вхід:

- *axiom* - слово ініціації ( $F + +F + +F$ ),
- *newf* - породне правило ( $F - F + +F - F$ ),
- *newb* - породне правило,
- *level* - кількість ітерацій (задається).

Вихід:

- *word* - результуюче слово.

Ініціація:

scss

$W = axiom$

$n = length(W)$  (кількість букв у слові W)

$T = \{\cdot\}$  - пуста множина

Цей алгоритм запускається із визначеними вхідними параметрами, такими як слово ініціації, породні правила та кількість ітерацій. У процесі виконання алгоритму створюється та модифікується результуюче слово  $W$ , а також використовується множина  $T$  для збереження поточного стану [41, с. 57].

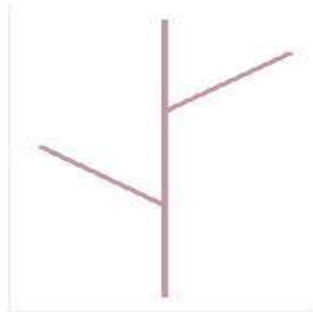


Рис. 2.8. Фрактали

Кроки:

*while level > 0*

*for j = 1 to n*

*if W(j) = +, T = {T +}, end if*

*if W(j) = -, T = {T -}, end if*

*if W(j) = [, T = {T [}, end if*

*if W(j) = ], T = {T ]}, end if*

*if W(j) = F, T = {Tnewf}, end if*

*if W(j) = b, T = {Tnewb}, end if*

*end for W = T*

*level = level - 1*

*end while*

*word = W.*

Зауваження:  $W(j)$  –  $j$ -а буква в слові,

$\{T +\}$ - рядок  $T$ , до якого приєднано знак +.

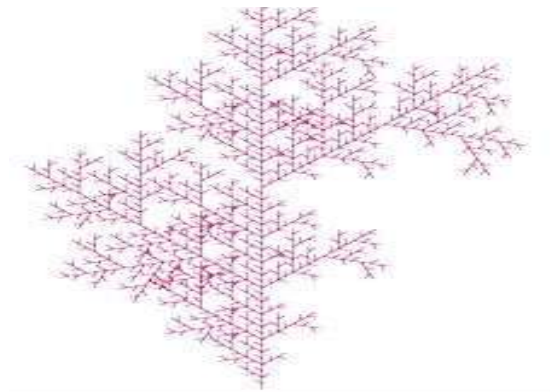

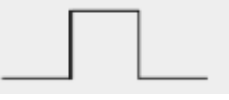



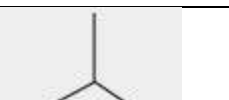





Рис. 2.7. Крок 5 [50].

Таблиця 2.1.

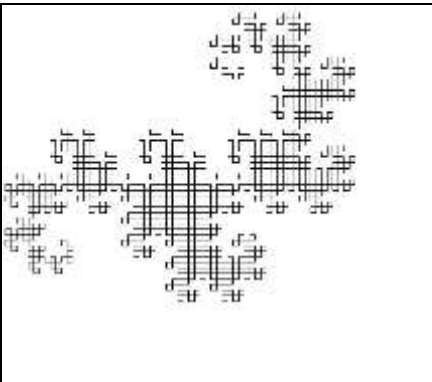
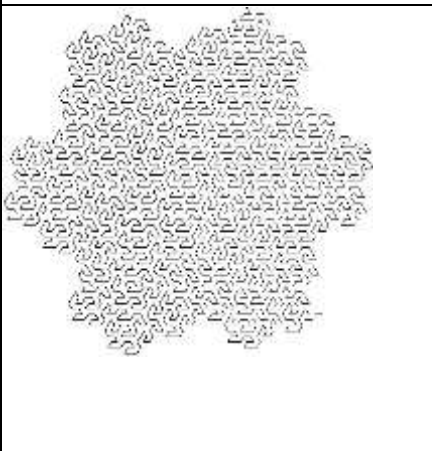
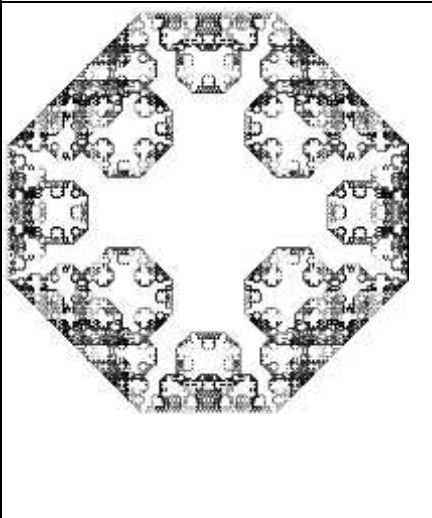
## Конструкції генераторів (аксіом) фрактальних форм

Крива Коха(трикутна)		$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618\dots$ $N=4, b=1/3$
Видозмінена крива Коха (прямокутна)		Одиничний сегмент має три відрізка довжиною $1/3$ . два відрізка довжиною $1/4$ . Зі співвідношення $3(1/3)^D + 2(1/4)^D = 1$ $D= 1.34.$
Видозмінена крива Коха (меандр)		$D = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 3/2$ $N=8, b=1/4$
Канторівський пил		$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots$ $N=2, b=1/3$
Дерево		$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1,465\dots$ $N=5, b=1/3$
Сніжинка		$D = \frac{\ln 3}{\ln(3)^{1/2}} = 2$ $N=3, b=1/(3)^{1/2}$
Прокладка Серпінського		$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,585\dots$ $N=3, b=1/2$

Приклади таких кривих (Табл. 2.2):

Таблиця 2.2.

Приклади кривих

крива дракона		Аксиома: FX Правила: $X \rightarrow X+YF+ Y \rightarrow -FX-Y$ $\theta = \frac{\pi}{2}$
крива Госпера		Аксиома: XF Правила: $X \rightarrow X+YF++YF-FX--FXFX-YF$ $Y \rightarrow -FX+YFYF++YF+FX--FX-Y$ $\theta = \frac{\pi}{3}$
крива Леві		Аксиома: F++F+ Правило: $F \rightarrow -F++F-\theta = \frac{\pi}{4}$

Один з фракталів стохастичного типу може бути початково визначений трикутником, розташованим в довільній площині. Середні точки сторін трикутника з'єднуються, утворюючи чотири менші трикутники. Потім кожна середня точка зсувається вгору або вниз на випадкову величину. Цей процес повторюється для кожного з отриманих менших трикутників, і так далі до нескінченності. Після багатьох ітерацій виникає все більш деталізована поверхня

[3]. У цьому методі випадкові величини для зміщення середніх точок управляються певним законом розподілу, який підбирається для наближеної апроксимації бажаної поверхні. Для забезпечення відносно гладкої поверхні впроваджено правило, за яким зміщення середніх точок стає дуже малим вже після кількох перших ітерацій. Це дозволяє додавати лише невеликі "купини" до загальних контурів ландшафту [23].

Для представлення порізаної поверхні, типової для гірського хребта або берегової лінії, використовується правило поступового зменшення зсувів після кожної ітерації. Цей метод знаходить застосування в різних областях, включаючи моделювання ерозії ґрунту, аналіз сейсмічних явищ і створення реалістичних зображень планет, супутників, хмар і гірських хребтів, які представлені на Рис. 2.8 і були розроблені Р. Воссом в Дослідницькому центрі корпорації ІВМ.

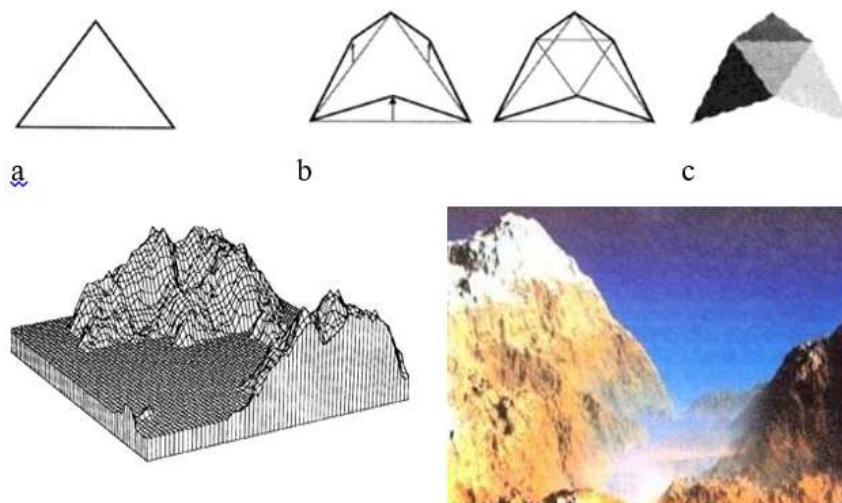


Рис. 2.8. Створення фрактальних ландшафтів методом випадкового зміщення середньої точки [24, 50].

Середні точки сторін трикутника (а) рухаються вгору або вниз від площини зображення і з'єднуються з вершинами (b), утворюючи чотири менших трикутника, до яких застосовується та ж процедура. Величина зсуву, а отже,

ступінь гладкості фрактального ландшафту визначається функцією розподілу ймовірності. Після цього графічна програма комп'ютера надає різні відтінки трикутникам, фарбуючи їх (с). Цей процес призводить до створення реального зображення [24].

Отже, в процесі цього складного алгоритму, що базується на ітеративному розбитті та фарбуванні трикутників, нам вдається створити вражаючий фрактальний ландшафт. Функція розподілу ймовірності виступає важливим елементом, що визначає форму та деталі цього ландшафту.

## 2.7. Системи ітерованих функцій

У галузі математики існує метод побудови фракталів, відомий як система ітераційних функцій (скор. СІФ, англ. Iterated function system, IFS). Отримані фрактали за допомогою цього методу часто виявляються самоподібними. Фрактали СІФ більше спрямовані на теорію множин, ніж на фрактальну геометрію, і цей підхід був введений у 1981 році.

Фрактали СІФ можуть мати будь-яку розмірність, хоча їх зазвичай обчислюють та зображують у двовимірному просторі. Суть фракталу полягає в об'єднанні декількох власних копій, кожна з яких піддається трансформації функцією (відсюди "система функцій"). Один із класичних прикладів – трикутник Серпінського. Функції зазвичай є стискуючими, тобто зближують точки та зменшують розміри фігури. У результаті форма фракталу СІФ складається з декількох менших власних копій, які можуть накладатися одна на одну, і кожна з цих копій також містить свої власні копії, утворюючи таким чином нескінченну ієрархію. Це визначає самоподібність фракталів, що є основою природного вигляду цих структур [32].

Формально, система ітераційних функцій є скінченою множиною стискуючих відображень на повний метричний простір. У символічній формі,  $S$

є системою ітераційних функцій, якщо кожна  $F_i$  є стискующим відображенням на повний метричний простір.

Метод системи ітераційних функцій (IFS) з'явився в середині 80-х років як ефективний спосіб створення фрактальних структур. IFS представляє собою систему фіксованого класу функцій, які відображають одну багатовимірну множину в іншу.

У 1988 році вчені Барнслі та Слоан представили ідеї, засновані на теорії динамічних систем, для стискання та зберігання графічної інформації. Цей метод, який вони назвали "методом фрактального стискання інформації", отримав свою назву через фрактальну природу геометричних фігур, що виникають в результаті цього процесу за Мандельбротовим сенсом [31].

За цими ідеями вони розробили алгоритм, який, за їх ствердженням, може стискувати інформацію в 500–1000 разів. У короткому вигляді метод можна описати так: зображення кодується кількома простими афінними перетвореннями з використанням коефіцієнтів (наприклад, A, B, C, D, E, F). Наприклад, якщо використати два афінні перетворення для кодування зображення, це визначиться 12 коефіцієнтами. Запустивши ітераційний процес, відбувається розмноження точок з кожною ітерацією, що дозволяє описати закодоване зображення. Однак виявляється викликом знайти коефіцієнти IFS, які б ефективно кодували довільне зображення.

Для побудови IFS використовують різні класи простих геометричних перетворень, такі як афінні та інші, які визначаються невеликою кількістю параметрів. Наприклад, серед таких перетворень можуть бути проєктивні або квадратичні [31].

Як приклад використання IFS для побудови фрактальних структур, розглянемо "дракон" Хартера-Хейтуея (Рис.2.9) і криву Коха. Виділимо в цих структурах подібні частини і для кожної з них обчислимо коефіцієнти афінного

перетворення. У афінний колаж буде включено стільки афінних перетворень, скільки існує частин подібних цілому зображенню.

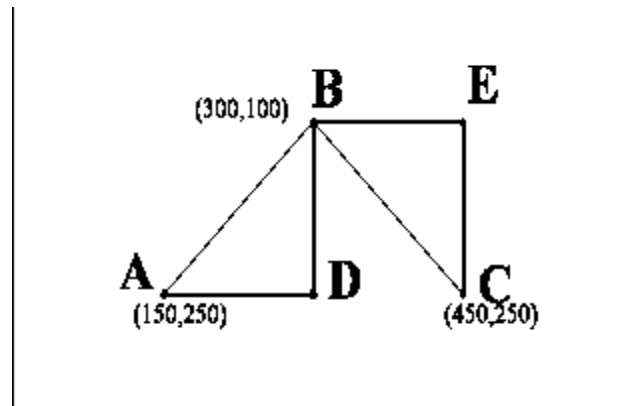


Рис. 2.9. Заготовка для побудови IFS "дракона" Хартера-Хейтуея [31].

Створимо систему ітераційних функцій (IFS) для фрактала "дракон" Хартера-Хейтуея. Для цього спершу розташуємо перше покоління цього фрактала на координатній сітці дисплея розміром 640 на 350 (див. Рис. 2.9). Позначимо отримані точки ламаної як A, B, C.

Згідно правилам побудови цього фрактала, дві частини отриманої ламаної подібні цілому. На Рис. 2.9 ці частини відображають ламані ADB і BEC. З відомими координатами кінців цих відрізків можна розрахувати коефіцієнти двох афінних перетворень, які перетворюють ламану ABC у ламані ADB і BEC.

$$X' = -0.5X - 0.5Y + 490;$$

$$Y' = 0.5X - 0.5Y + 120;$$

$$X' = 0.5X - 0.5Y + 340;$$

$$Y' = 0.5X + 0.5Y - 110.$$

Встановивши початкову точку (наприклад,  $X=0$ ,  $Y=0$ ) і впливаючи на неї ітеративно системою ітераційних функцій (IFS), після проведення десятої ітерації ми отримуємо на екрані фрактальну структуру, яка зображена на Рис. 2.10 і представляє собою "дракона" Хартера-Хейтуея. Кодом цього фрактала, що є його стислим описом, є набір коефіцієнтів двох афінних перетворень

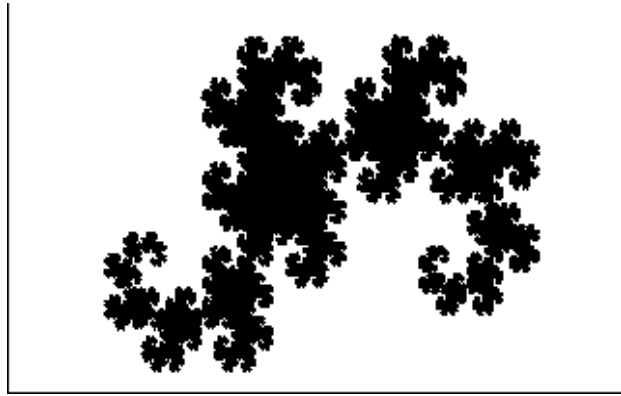


Рис. 2.10. “Дракон” Хартера-Хейтуея, побудований за допомогою IFS в прямокутнику  $640 \times 350$  [29].

Аналогічно можна створити систему ітераційних функцій (IFS) для кривої Коха. Відзначимо, що ця крива складається з чотирьох частин, які подібні до всієї кривої. Для побудови IFS знову розмістимо перше покоління цього фрактала на координатній сітці дисплея розміром 640 на 350 [29]..

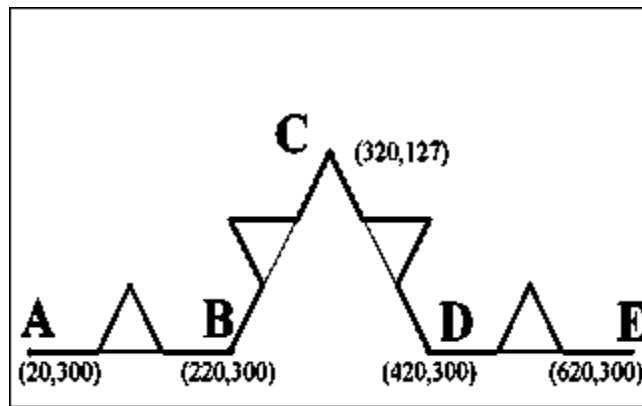


Рис. 2.11. Заготовка для побудови IFS кривої Коха [29].

Для її побудови потрібний набір афінних перетворень, що складається з чотирьох перетворень:

$$\begin{aligned} X' &= 0.333X + 13.333; \\ Y' &= 0.333Y + 200; \\ X' &= 0.333X + 413.333; \\ Y' &= 0.333Y + 200; \\ X' &= 0.167X + 0.289Y + 130; \\ Y' &= -0.289X + 0.167Y + 256; \\ X' &= 0.167X - 0.289Y + 403; \\ Y' &= 0.289X + 0.167Y + 71. \end{aligned}$$

Результат застосування цього афінного колажа після десятої ітерації наведений на Рис. 2.12.

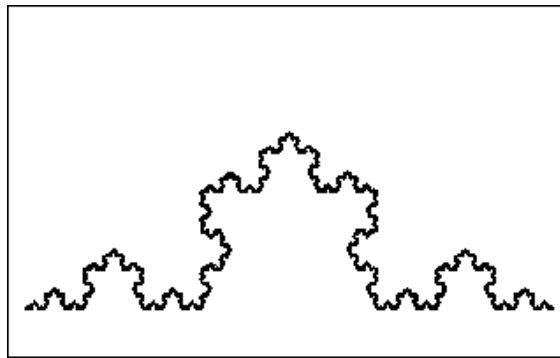


Рис. 2.13. Крива Коха, побудована за допомогою IFS у прямокутнику 640×350 [29].

Використання системи ітераційних функцій (IFS) для стискання звичайних зображень, таких як фотографії, ґрунтується на виявленні локальної самоподібності, що відрізняється від фракталів, де присутня глобальна самоподібність. За алгоритмом Барнслі відбувається виділення пар областей в зображенні, де менша область подібна більшій, і зберігання кількох коефіцієнтів, які кодують перетворення для переведення великої області в меншу. Для повного покриття всього зображення необхідно, щоб безліч "менших" областей утворювали його структуру. Крім коефіцієнтів, що описують знайдені перетворення, в файлі, що кодує зображення, також фіксуються місцезнаходження та лінійні розміри "великих" областей, що разом із



коефіцієнтами визначають локальну самоподібність кодованого зображення. У випадку відновлення алгоритм застосовує кожне перетворення не до всієї множини точок, що з'явилися на попередньому етапі алгоритму, а до певної підмножини, яка входить в область, що відповідає даному перетворенню.

Як було зазначено раніше, процес конструювання фракталів представляє собою ітеративний процес, що включає перетворення однієї множини в іншу.

Один з менш відомих видів фракталів, але потенційно ефективний, є фрактал, побудований на основі системи ітераційних функцій (Iterated Function System – IFS). Метод IFS, який використовується для створення фрактальних зображень, був розроблений Майклом Барнслі. Він базується на ідеї самоподібності елементів зображення та полягає в моделюванні малюнка за допомогою кількох його менших частин. Один із найвідоміших прикладів IFS-зображень - чорний папоротник, де кожен листок насправді є мініатюрною копією самого папороті [4]. Система IFS також складається зі стискаючих афінних перетворень, які включають в себе масштабування, обертання та паралельний перенос. Афінне перетворення вважається стискаючим, якщо коефіцієнт масштабування менший за одиницю [37].

Давайте розглянемо більш детально побудову кривих Коха з використанням афінних перетворень. Кожен новий елемент цієї кривої складається з чотирьох відрізків, отриманих з вихідного елемента за допомогою масштабування, повороту та паралельного переносу.

1. Перший відрізок отримуємо, стискаючи вихідний відрізок у три рази. Важливо відзначити, що одне й те ж саме масштабування застосовується до всіх відрізків.

2. Наступний відрізок будується за допомогою трьох можливих перетворень: стиск у три рази, поворот на  $-60$  градусів і паралельний перенос на  $1/3$  по осі X.

3. Третій відрізок будується аналогічно другому: стиск у три рази, поворот на 60 градусів, паралельний перенос на  $2/3$  по осі X.
4. Останній відрізок: стиск у три рази, паралельний перенос на  $2/3$  по осі X.

Для синтезу фрактала обирається початкова точка, до якої випадковим чином застосовується обране перетворення з IFS, переміщуючи точку в інший кінець екрана. Ця операція повторюється багато разів (зазвичай 100 ітерацій), і з часом точка починає блукати по атрактору (безліч можливих траєкторій), утворюючи зображення фрактала. Кожне нове положення точки фарбується кольором, відмінним від фону. Теорема стверджує, що отриманий атрактор буде замкнутим. Для того щоб блукаюча точка фарбувала нові пікселі, використовується сьомий параметр – ймовірність вибору конкретного афінного перетворення з набору IFS. Якщо початкова точка вибирається так, щоб вона відразу опинилася на атракторі, вона починає блукати в межах цього атрактора, не переміщуючись в інші області екрана. Розглядаючи кожне перетворення окремо, можна помітити, що незалежно від початкового положення точки, після кількох ітерацій точка припинить рухатися по екрану. Точка зупинки називається нерухомою точкою, і це є розв'язком системи лінійних рівнянь з двома змінними, який знаходиться методом простої ітерації. Нерухома точка кожного перетворення входить до складу атрактора, тому початковою точкою при побудові фрактала можна обрати нерухому точку першого перетворення з набору IFS.

Система ітераційних функцій (IFS) є ще одним методом для конструювання фракталів. Вона базується на ідеї самоподібності та включає в себе серію стискаючих афінних перетворень. Фрактали, отримані за допомогою IFS, можуть мати різні розмірності та виглядати реалістично завдяки випадковому вибору афінного перетворення та його ітеративному застосуванню [12].

Процес побудови фракталів включає в себе вибір початкової точки, до якої застосовуються афінні перетворення або IFS, що призводить до створення послідовності точок. Ця послідовність, при достатньо великій кількості ітерацій, формує фрактальну структуру. Точки можуть блукати по атрактору, утворюючи замкнутий атрактор, і їхні нові положення можуть бути зафарбовані для створення кольорових фракталів.

Всі ці методи дозволяють створювати доволі складні фрактали, які мають важливе значення в математиці, комп'ютерному мистецтві та інших галузях.

## РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ФРАКТАЛЬНОЇ ДИНАМІКИ В РАДІОІНЖЕНЕРІЇ

### 3.1. Вступні зауваження

Фрактальна динаміка, яка виникла як галузь математики та фізики, стала потужним інструментом для аналізу та моделювання нерегулярних та складних систем. За останні десятиліття вона знайшла широке застосування у різних галузях науки і техніки. Однією з таких галузей є радіоінженерія, де методи фрактальної динаміки знаходять своє застосування в аналізі та оптимізації різноманітних радіоінженерних систем.

Фрактальна динаміка дозволяє краще розуміти і моделювати складність радіохвильового середовища, а також взаємодію радіохвиль із зовнішніми об'єктами. В даному контексті, використання фрактальних методів може привести до розробки більш ефективних та стійких систем передачі інформації, а також вдосконалення антенних систем та радіочастотних пристроїв [24, с. 76].

Загалом, використання методів фрактальної динаміки в радіоінженерії відкриває нові перспективи для розробки ефективних та інтелектуальних радіоінженерних систем, що відповідають сучасним вимогам зв'язку та передачі інформації.

Ефективність використання методів фрактальної динаміки в радіоінженерії проявляється у багатьох аспектах. По-перше, ці методи надають можливість моделювати нерегулярні топології, що є важливим для точного відтворення складних антенних та радіочастотних систем. Фрактальні антени, наприклад, виявляють високу адаптивність до різних радіохвильових умов, забезпечуючи підвищену ефективність та стійкість.

Другий аспект полягає в точному моделюванні розподілу спектральних складових в радіочастотному діапазоні. Це важливо для оптимізації

використання радіоресурсів та уникнення перешкод між різними пристроями. Застосування фрактальної динаміки дозволяє ефективно аналізувати та моделювати спектральні характеристики складних систем.

Третій аспект полягає в здатності аналізувати розповсюдження сигналу в зоні перешкод, таких як міські райони з великою кількістю перешкод. Фрактальна динаміка дозволяє враховувати особливості розповсюдження сигналу в складних топологіях, що важливо для розробки адаптивних систем зв'язку, які забезпечують ефективну роботу в умовах змінних умов зв'язку.

Четвертий аспект пов'язаний зі стійкістю до зниження якості сигналу. Використання фрактальних методів дозволяє розробляти більш стійкі та ефективні системи зв'язку, що особливо важливо в умовах обмеженої якості сигналу або при зниженні передавальної здатності антенних систем [12].

Загалом, використання фрактальної динаміки в радіоінженерії відкриває нові перспективи для розробки ефективних та інтелектуальних радіоінженерних систем, що відповідають сучасним вимогам зв'язку та передачі інформації.

П'ятий аспект застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії пов'язаний з розробкою антенних систем для нових технологій, таких як Інтернет речей (IoT). Фрактальні антени можуть бути оптимально адаптовані для роботи з низькопотужними та малорозмірними пристроями, що характерно для IoT-засобів. Їхня висока ефективність та адаптивність роблять їх ідеальними для використання в розумних сенсорах та пристроях, які вимагають зв'язку в умовах обмежених ресурсів.

Таким чином, використання методів фрактальної динаміки в радіоінженерії відкриває широкий спектр можливостей для розвитку та вдосконалення технологій зв'язку та передачі даних. Застосування фрактальних структур у створенні антен, оптимізація енергоспоживання та вдосконалення систем RFID підвищують ефективність та надійність радіоінженерних систем.

Здатність фрактальних антен адаптуватися до різноманітних умов роботи, включаючи роботу з малопотужними пристроями та розумними сенсорами, робить їх ключовим елементом для майбутніх технологій, таких як Інтернет речей. Оптимізація споживання енергії та покращення ідентифікації в системах RFID відкривають нові перспективи для розвитку сучасних технологій та їхнього впровадження в реальні галузі.

Усе це свідчить про великий потенціал методів фрактальної динаміки у вдосконаленні та розвитку радіоінженерних систем, що відкриває шлях для створення більш продуктивних та динамічних засобів зв'язку, а також сприяє вирішенню сучасних завдань у сфері бездротових технологій [14].

### **3.2. Застосування методів фрактальної динаміки для підвищення завадозахисту каналів управління радіотелекомунікаційних засобів**

Особливості експлуатації засобів радіотелекомунікацій (РТЗ) визначаються необхідністю доставки сигналів і повідомлень в будь-яких умовах застосування. Це вимагає створення складних систем, де важливу роль відіграє підсистема управління якістю зв'язку. Канали управління завадозахищеністю (КУЗ) є об'єктами впливу завад, які можуть негативно впливати на функціонування комплексу РТЗ. Забезпечення надійного керування РТЗ визначається ефективністю КУЗ у протистоянні впливу завад. Відсутність режимів завадозахисту КУЗ є загальним недоліком більшості РТЗ. Застосування обладнання завадозахисту поліпшує боротьбу з завадами, але це тимчасове рішення, діє лише на першому циклі протидії РТЗ. Тому пошук методів підвищення завадозахисту КУЗ визнається актуальним та вчасним.

Обґрунтування використання методів фрактального аналізу для підвищення завадозахищеності КУЗ базується на властивостях складних систем РТЗ. Комплекси РТЗ розглядаються як системи з різними видами і параметрами

цифрової модуляції, що може використовувати сигнали зміненими під час одного сеансу зв'язку. Це призводить до створення складних структур, які володіють властивостями нелінійних динамічних систем і використовують різні методи адаптації до змінних умов функціонування. Збурення ефекту «метелика» може призводити до значних змін у стані всієї системи. Оцінка впливу таких збурень виконується за допомогою методів фрактального аналізу [9].

Методи фрактального аналізу вирізняються можливістю розкриття локальної структури сигналів, поряд з загальними характеристиками випадкових процесів. Властивості фракталів включають подібність частин структурі в цілому, наявність великої кількості елементів навколо кожного елемента та послідовне збільшення роздільної здатності для виявлення все дрібніших самоподібних об'єктів.

Вимоги до функціонування радіотелекомунікаційних засобів (РТЗ) визначаються необхідністю надсилання сигналів та повідомлень в будь-яких умовах застосування, що призводить до створення складних систем. У такій системі важливу роль відіграє підсистема управління якістю зв'язку, а саме канали управління завадозахищеністю (КУЗ). КУЗ є об'єктами впливу завад, які можуть нашкодити чи уражати функціонування комплексу РТЗ. Мінімізація впливу завад [3] залежить від здатності КУЗ протистояти цьому впливу, оскільки відсутність режимів завадозахисту КУЗ у більшості РТЗ є серйозним недоліком. Застосування обладнання завадозахисту поліпшує боротьбу з завадами, але є тимчасовим рішенням, яке працює лише на першому циклі протидії РТЗ. Тому пошук методів підвищення завадозахисту КУЗ є важливим і актуальним напрямком розвитку надійного керування РТЗ [9].

Використання методів фрактального аналізу для рішення задачі підвищення завадозахищеності КУЗ обґрунтовується властивостями складних систем РТЗ. Комплекс РТЗ розглядається як система із різними видами цифрової модуляції та можливістю зміни сигналів під час сеансу зв'язку. Це призводить до

створення складних структур з властивостями нелінійних динамічних систем, які використовують різні методи адаптації до змінних умов функціонування.

Методи фрактального аналізу відрізняються можливістю розкриття локальної структури сигналів, а також загальними характеристиками випадкових процесів, що виникають внаслідок процедур усереднення за великими тимчасовими інтервалами. Такі методи дозволяють виявляти специфічні риси фрактальних структур, такі як подібність частин структурі в цілому, наявність великої кількості елементів поряд кожного елемента та послідовне збільшення роздільної здатності для виявлення все дрібніших самоподібних об'єктів.

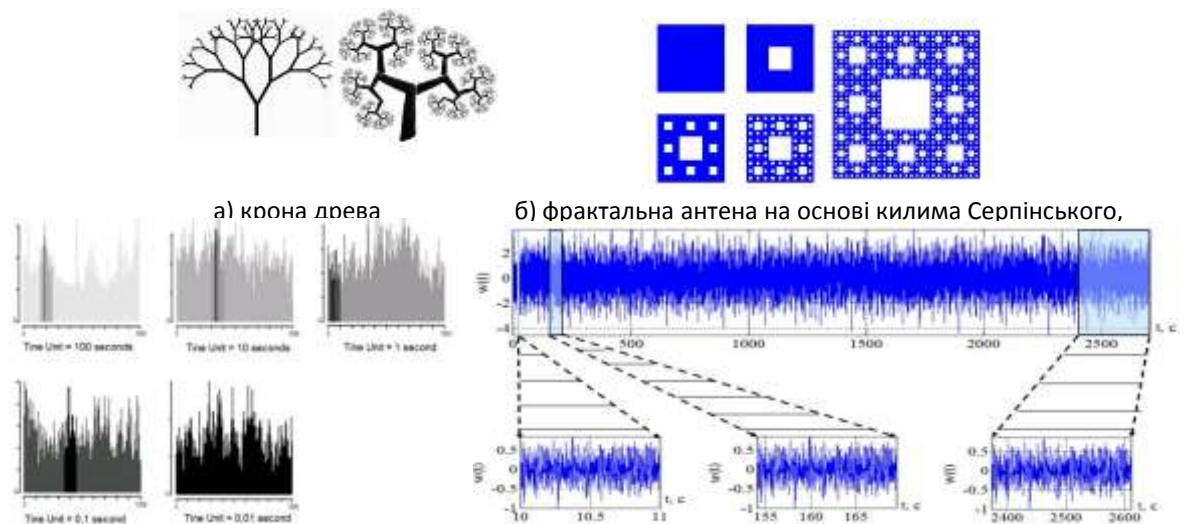


Рис. 3.1. Фракталоподібні структури.

З Рис. 3.1 можна визначити приклади фракталоподібної структури, такі як крони дерев. В кронах дерева кожна велика гілка поділяється, як мінімум, на дві менші гілки, і цей процес поділу повторюється. У результаті кожен з гілок можна розглядати як окремий фрактальний елемент, що повторюється. У сфері телекомунікацій також існують приклади фракталів, наприклад, у конструкції антено-щоголових пристроїв це фрактальні антени на основі килима Серпінського.



У галузі мережевих технологій спостерігається явище самоподібного трафіку, а в обробці сигналів це фрактальна обробка зображень (радіосигналів, зображень).

Методи фрактального аналізу є зручним інструментом для вивчення різноманітних фізичних процесів у телекомунікаціях, якщо ці процеси відповідають властивостям самоподібності та дотримуються вищезгаданих закономірностей подібності в різних просторових і часових масштабах. Оцінка фрактальних структур виконується за допомогою критеріїв складності, таких як критерій самоподібності (скейлінгу), що визначається інваріантністю – фізичною величиною, значення якої в певному фізичному процесі не змінюється з часом, та критерій фрактальної розмірності, що характеризує не тільки топологію об'єктів, але також відображає процеси еволюції динамічних систем і пов'язаний з їх властивостями [14].

Для вивчення процесу завадозахисту каналів управління якістю зв'язку (КУЗ) слід уявити функціонування радіотелекомунікаційного засобу (РТЗ) під час збурень як фазову траєкторію розвитку стану завадозахисту КУЗ. Приклади таких збурень можна отримати при спостереженні за функціонуванням каналів зв'язку під час дії випадкового сигналу збурення, який заважає сигналу, або впливу декількох цілеспрямованих шумоподібних сигналів на структуру сигналу КУЗ, заважаючи цифровій обробці сигналів на приймальній стороні. Аналіз впливу завад показує, що фазові траєкторії розвитку стану КУЗ прагнуть до фракталів, що дозволяє використовувати методи фрактального аналізу для вивчення властивостей самоподібності цих процесів завадозахисту [28].

Такий підхід до вирішення проблеми підвищення завадозахисту КУЗ є новим і актуальним. Визначивши початковий стан системи відносно завадостійкості і знаючи її структурно-функціональні особливості, можна оцінити ймовірність завадозахисту КУЗ системи в будь-який момент часу внаслідок взаємодії з навколишнім середовищем в умовах конфліктного інформаційного впливу (пригнічення каналів). Крім того, можна оцінити заходи

протидії завадам, змінюючи структуру КУЗ. Формалізація процесу завадозахисту КУЗ в термінах фрактального аналізу відкриває можливість дослідження властивостей самоподібності цих процесів завадозахисту [31].

Внаслідок припущення, що комплекс РТЗ розглядається як складна система, виникає необхідність розбиття системи на різні рівні, на кожному з яких дані збираються і агрегуються, передаючись на більш високі рівні або обмінюючись інформацією на одному рівні. Інформація на кожному рівні обробляється з відповідною швидкістю елементом системи управління - процесором. Час реакції на різних рівнях суттєво різниться і збільшується з підвищенням рівня і обсягу обробки інформації. У такій складній системі об'єктивно існують критичні елементи, які можуть сильно впливати на функціонування системи при виникненні порівняно малих збурень.

З теорії нелінійних систем відомо, що складна система є нестійкою динамічною системою. Таким чином, якість зв'язку значно змінюється під впливом завад зовнішнього та внутрішнього середовища відносно заданих початкових значень параметрів. Динамічний діапазон значень повинен обиратись з достатньою точністю, щоб забезпечити необхідний рівень якості зв'язку. Таким чином, навіть невеликі збурення можуть значно впливати на поведінку об'єктів, розташованих на різних рівнях ієрархічної структури. Зміну значень параметрів у часі можна представити як траєкторію зміни кожного параметра. Отже, завданням системи управління є утримання цієї траєкторії в межах заданого діапазону навколо обраної нормованої траєкторії.

Під час прийому сигналів джерелом невизначеності є неповне апріорне знання часу появи і характеру демодульованого сигналу, а також неоптимальні умови прийому. Це проявляється в випадкових змінах рівня сигналу на вході, які обумовлені зовнішніми і внутрішніми факторами. Інформація про відхилення реальної фазової траєкторії від нормованої є необхідною для прийняття рішення та оцінки якості сигналу [23].

Припустимо, що в РТЗ за заводозахист КУЗ відповідають так звані процесори КУЗ – елементи системи управління, які мають інтелектуальні властивості для прийняття рішень на зміну фазової траєкторії на основі інформації про відхилення. Процесори КУЗ функціонально призначені для управління обробкою сигналів на своєму рівні та спільної взаємодії з аналогічними процесорами на різних рівнях і центральним процесором. Така ієрархічна структура спрощує спостереження за складним процесом обробки сигналів і дозволяє його формалізувати, але вносить деяку ступінь невизначеності в функціонування кожного процесора.

В теорії фракталів такі властивості процесорів КУЗ мають назву аттрактор. Аттрактор є місцем, де процесор своїми діями створює стан РТЗ, який можна розглядати як крапку, що притягує всі траєкторії розвитку інших параметрів у вигляді фазового простору динамічної системи. Точка біфуркації передбачає зміну усталеного режиму роботи системи, викликаючи невизначеність та можливий перехід до нового рівня впорядкованості. Такий підхід може привести до передачі сигналів невизначеності від одного рівня до іншого, викликаючи лавиноподібний ефект.

Щодо аспекту заводозахисту КУЗ, це означає, що може виникнути втрата зв'язку через вплив завади. Ця завада може бути такою, яку процесор КУЗ на певному рівні не може подолати, або ж система може своєчасно відновитися завдяки спільній роботі всіх інтелектуальних процесорів, забезпечуючи необхідну якість зв'язку. Таким чином, з точки зору нелінійних динамічних систем, вибір траєкторії в точках біфуркації буде визначатися станом внутрішніх ступенів свободи системи.

Зрозуміло, що для такого вибору важливі лише інформаційні вказівки процесорам КУЗ певного рівня, якій траєкторії вони вважають найкращою. Формалізацію заводозахисту КУЗ можна розглядати як систему управління, що визначається станом внутрішньої динамічної системи і керується центральним

процесором. Згідно з цим формальним описом динамічної системи, на основі моделей нелінійної безперервної динаміки, слід розбити безліч просторових станів кожного ієрархічного рівня на дискретні елементи [46].

У термінах простору-часу, загальний опис фрактальної математичної моделі завадозахищеності КУЗ включає в себе набір динамічних змінних і параметрів в фазовому просторі, що відповідає цьому ієрархічному рівню. Фазовий простір обгрунтовано представити як нелінійну систему. Поведінка нелінійних систем  $n$ -го порядку, де визначено  $n$  змінних стану і  $r$  входів, описується системою  $n$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, \dots) \end{aligned}$$

де компонентами внутрішнього стану системи є змінні вектору станів  $x$ :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

сигналами управління (змінними управління) є змінні вектору управління  $u$ :

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T,$$

сигналами збурення управління є змінні вектору впливу  $g$  з початковими умовами

$$x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n = x_{n0} \quad \text{при} \quad t = 0$$

Змінні вектору станів можуть мати різний фізичний зміст, але, при умовному розгляді, можна уявити їх як координати певної точки  $S$ . Оскільки ці змінні зазначаються як-небудь змінювані, це відповідає переміщенню точки у просторі у вигляді конкретної траєкторії  $L(S)$ . Таким чином, траєкторія руху  $L(S)$  точки  $S$  може послужити графічним зображенням поведінки системи під час управління, і ця траєкторія відома як фазовий простір. Значенням прямих частин (1) в кожний момент часу можна визначити напрямок руху точки  $S$  і відповідно

передбачити поведінку реальної системи. Метою системи управління для забезпечення заводозахисту є обчислення сигналів управління на основі таких даних, які дозволять системі виконувати визначені завдання, незважаючи на вплив збурень. Цей опис відомий як рівняння точки  $S$  в просторі станів [17].

Основною перевагою його є можливість використання чисельних методів лінійної алгебри для його розв'язання. Один із методів розв'язання системи полягає у використанні апроксимації похідних за часом різницевиими рівняннями.

$$x[(k + 1)\tau] \approx x(k\tau) + \tau f(x, u, \dots),$$

де  $\tau$  – інтервал вибірки,  $k$  – її порядковий номер.

Якщо відомі початкові умови, то можна розрахувати в моменти часу  $t_i$  значення параметрів стану  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$ , ...,  $x(t_N)$  які є наближеннями точного розв'язку в моменти часу  $t_i$ .

Важливо зазначити, що правильний вибір інтервалу вибірок є ключовим. На Рис. 3.1. подані часові інтервали вибірки (Time Unit – вузол зубів, елемент самоподібності (скейлінгу)). Для вирішення даного питання, процесору рекомендується використовувати метод вибору інтервалу часу, який базується на обчисленні середньої взаємної інформації між двома станами. Цей метод визначається необхідністю оцінювання ступеня зміни конкретного параметра. У випадку, якщо задані дві множини вимірів  $A$  і  $B$ , то взаємна інформація між елементами  $A_i$  і  $B_j$  визначається як кількість інформації, яку вони мають один відносно одного.

$$I_{A_i B_j} = \log \left[ \frac{P_{AB}(A_i, B_j)}{P_A(A_i)P_B(B_j)} \right]$$

У разі коли стани  $A_i$  і  $B_j$  незалежні, то взаємна інформація дорівнює нулю. Тоді усереднюючи по всіх вимірах, отримуємо:

$$I_{AB} = P_{AB}(A_i, B_j) \log \left[ \frac{P_{AB}(A_i, B_j)}{P_A(A_i)P_B(B_j)} \right]$$

Замінюючи  $A_i$  і  $B_j$  на  $x(k\tau)$  і  $x((k\tau + 1))$ , отримуємо середню взаємну інформацію як функцію зміни траєкторії.

Система рівнянь може мати кілька розв'язків, кожен з яких у фізичному сенсі відповідає певній точці стійкості. Для динамічно нестійкої системи розв'язки будуть залежати не тільки від вибору початкових умов, але і від стану внутрішніх ступенів свободи [12].

Отже, знайдені розв'язки представляють собою траєкторії системи в фазовому просторі, які відповідають аттракторам. У загальному випадку система може прямувати до будь-якого аттрактору. Аналіз отриманих траєкторій дозволяє визначити вигляд аттрактора, наприклад, рівноваги, періодичних коливань або стрибкового аттрактора. Це дозволяє побудувати більш точну модель поведінки системи. У випадку стрибкового аттрактора, який є фрактальним та нестійким, можна зробити висновок, що заводо захищеність КУЗ недостатня і вимагає підвищення.

Таким чином, виникає задача – як вивести систему з такого аттрактора. Наприклад, для збереження цілісності і функціональної працездатності радіосистеми можна змінити її енергетичні параметри – підвищити потужність сигналу або, якщо це неможливо, змінити структуру сигналу або вид модуляції.

При отриманні такої інформації в складних фізичних системах може виникнути процес упорядкування, а саме – самоорганізація. Це означає, що в системі, яка знаходиться в нестійкому однорідному стані, можуть спонтанно виникати нові структури. Подальша взаємодія цих елементів призводить до розвитку нової ієрархії взаємодії структурних елементів РТЗ [25].

Для формалізації процесу з'яви нових структур висувається припущення, що будь-який детермінований об'єкт, який фізично охоплений межами спостереження, залишається незмінним, і оцінка його характерних властивостей завжди схиляється до певної межі. Однак при зміні масштабу відображення цього детермінованого об'єкта площа фрактальних утворень також змінюється. Таким чином, вимірюючи певний параметр при різних масштабах фізичного об'єкта,

можна отримати цінну інформацію про процеси функціонування багатofункціонального комплексу РТЗ.

Для отримання корисної інформації про зміну траєкторії необхідно мати та оцінювати різні аспекти інформації щодо фрактальної структури. За визначенням Шеннона, кількість інформації визначається як  $\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$ , де  $p_i$  – ймовірність появи  $i$ -го символу,  $N$  – т число можливих станів системи.

Чим більше станів може приймати об'єкт, тим більше інформації можна отримати на основі його поточного стану. Визначення фрактальної розмірності за методом Хаусдорфа-Безиковича базується на математичній абстракції практичного способу вимірювання об'єктів, коли об'єкт покривається еталонами певної міри.

$$d_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}},$$

де  $N$  – кількість елементів,  $d_H$  – розмір еталонного елемента  $r$ .

Такий перехід є неможливим, оскільки мінімальне значення обмежене фізичними розмірностями нескінченно малого елемента [11].

Максимальне число елементів  $N$  і мінімальна довжина елемента на максимальному кроці визначаються фізично та обмежуються мінімальним масштабом середовища вимірювань. Таким чином, розмірність інформаційної системи при урахуванні цих припущень визначається наступним чином:

$$d_I = \frac{\log \frac{I_n}{I_0}}{\log \left( \frac{r_0}{r_n} \right)},$$

де  $I_i$  – кількість інформації одного стану.

Числове визначення фрактальної розмірності (6) об'єктів, при покриванні їх одиничними зразками, є неефективним і не зручним. Тому більш часто використовується [8] визначення кореляційної розмірності [32]:

$$d_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=0}^{N(r)} p_i^2}{\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r},$$

де  $C(r)$  – кореляційна сума (або кореляційний інтеграл), яка є відношенням числа точок, попарні відстані між якими менші за  $r$ , до квадрату загального числа точок  $N$ :

$$d_H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i,j} \theta[r - |x_i - x_j|]}{N^2},$$

Останній вираз вказує на те, що коефіцієнт вибору траєкторії, представлений як  $\theta(\beta)\theta(\beta)$ , приймає значення 1, якщо  $\beta \geq 0$ , та 0, якщо  $\beta < 0$ . Згідно цієї умови, вираз  $d_H$  вважається кореляційною розмірністю системи.

Область значень  $C(r)$  з (останньої формули приблизно визначається, тому розумно виконати серію обчислень для різних значень одиничного еталону. Застосування даного методу ефективно лише при невеликих значеннях  $r$ . З виразу (9) випливає, що при збільшенні  $r$ , значення  $C(r)$  наближатиметься до 1. Важливо враховувати, що при дуже малих значеннях  $r$  кількість пар точок, відстань між якими не перевищує  $r$ , стає дуже малою. Таким чином, практичне використання цього методу обмежено лише в певному діапазоні значень  $r$ , що може використовуватися для визначення кореляційної розмірності [29, с. 64].

Висновки дослідження свідчать, що виконавча (інформаційна) частина системи управління в системі РТЗ впливає на керовані параметри для адаптації окремих елементів КУЗ до впливу завади на канал управління. Отримані результати також підтверджують, що завадостійкість РТЗ все більше визначається інформаційними властивостями елементів структури. Фракталоподібна модель КУЗ для РТЗ, разом з алгоритмом взаємодії ієрархічних рівнів, дозволяє використовувати методи теорії нелінійних динамічних систем для аналізу завадозахищеності та забезпечення належного функціонування РТЗ у сучасних умовах.

### 3.3. Методика застосування функції Вейерштраса в радіоінженерії



Один із перспективних підходів у дослідженні недиференційовних функцій розглядається в контексті фрактального аналізу. За допомогою засобів фрактального аналізу, вивчаються властивості безперервно недиференційовної функції, яка має деяку схожість із відомою функцією Вейерштрасса. Підхід до вивчення недиференційованих функцій, основні ідеї якого пов'язані з  $\gamma/\phi$ -алгоритмом для сумування розбіжних безперервних дробів [20].

Для вивчення властивостей функції Вейерштрасса застосовується нестандартний підхід, пов'язаний із конструюванням відповідних ланцюгових дробів. Слід відзначити, що ланцюгові дроби останнім часом знаходять різноманітне застосування в обчислювальній математиці. Для сумування розбіжних, в класичному розумінні, неперервних дробів використовується  $\gamma/\phi$ -алгоритм], який значно розширює область застосування ланцюгових дробів.

Підхід представлення функції Вейерштрасса у вигляді ланцюгових дробів дозволяє докладніше дослідити її властивості і відкриває нові можливості для використання цієї функції в математичних та обчислювальних дослідженнях.

$$w(x) = \sum b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.1)$$

де  $0 < b < 1$ ,  $a$  – непарне натуральне число. Ряд (3.1) рівномірно збігається в будь-якому інтервалі, що забезпечує всюди неперервність функції Вейерштрасса. Карл Вейерштрасс довів [16], що якщо  $ab > 1$ , то функція  $w$  не має скінченних похідних при будь-якому значенні  $x$ .

Функція Вейерштрасса є періодичною з періодом, рівним 2. На Рис. 3.2. наведений графік функції Вейерштрасса на інтервалі  $-2 \leq x \leq 2$  при  $a=7$  і  $b=0,9$ .

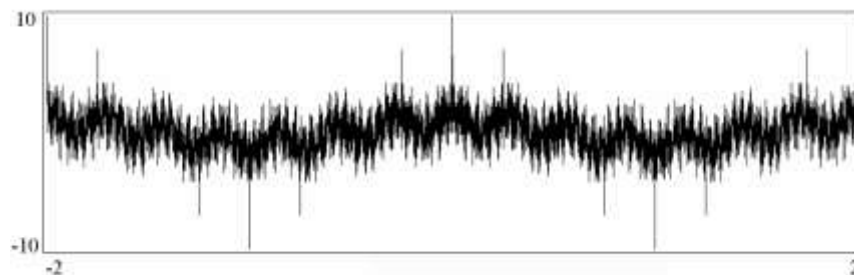


Рис. 3.2. Графік функції Вейерштрасса [27].

У таблиці 1 подані значення функції Вейерштрасса в різних точках  $x$ , обчислені за рядом (3.11) при  $a=7$  та  $b=0,9$ .

Давайте побудуємо відповідний ланцюговий дріб для ряду Вейерштрасса. Ці відповідні ланцюгові дроби, як правило, охоплюють функції в більш широкому діапазоні, ніж ряди, і відрізняються вищою швидкістю збіжності. Встановлення відповідних ланцюгових дробів може виконуватися на основі статистичних рядів, що представляють функції. Окрім формул Хейлерманна-Стильтьєса та формул Хлопоніна, існують відомі рекурентні алгоритми для визначення коефіцієнтів відповідних неперервних дробів, такі як алгоритми Висковатова, Никипорца, Рутісхаузера [24].

Таблиця 3.1.

Значення функції Вейерштрасса, визначені за допомогою ряду для різних значень  $x$ .

Аргумент, $x$	Значення функції Вейерштрасса
0,1	2.3317667913366174357160440563768e-1
0,2	2.7942194707236565390012070616751e+0
0,3	7.9764426351276869838314991971299e-1
0,4	-2.205780529276343460998792938324e+0
0,6	2.2057805292763434609987929383248e+0
0,7	-7.9764426351276869838314991971291e-1
0,8	-2.7942194707236565390012070616756e+0
0,9	-2.3317667913366174357160440563768e-1
1,0	-1.000000000000000000000000000000e+1
1,1	-2.33176679133661743571604405637681e-1

На Рис. 3.2 наведена схема алгоритму Рутісхаузера.

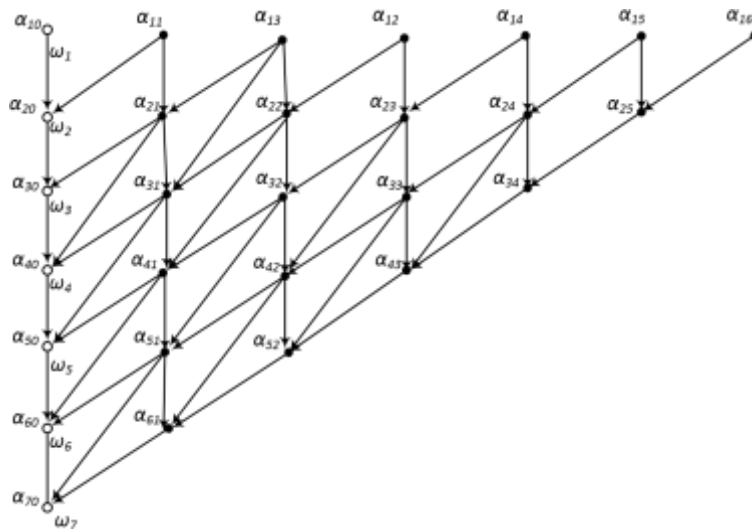


Рис. 3.2. Схема алгоритму Рутісхаузера

У Таблиці 3.2 наведені результати визначення значень функції Вейерштрасса за допомогою відповідних ланцюгових дробів, які були побудовані з вихідних рядів (3.1). Ці ряди представляють функцію Вейерштрасса з параметрами  $a=7$ ;  $b=0,9$  для тих самих раціональних точок  $x$ , які використовувалися при обчисленні функції Вейерштрасса рядами [25].

Таблиця 3.2.

Значення функції Вейерштрасса, отримані через ланцюгові дроби для різних значень  $x$  [25].

Аргумент, $x$	Значення функції Вейерштрасса	Значення кінцевих ланок ланцюговому дроби	Номер кінцевої ланки дроби
0,1	2.331766791336617435716044056376e-1	-2.52539e-1202	5

0,2	2.794219470723656539001207061675e+0	-1.13488e- 1201	5
0,3	7.976442635127686983831499197129e-1	2.80477e- 1201	5
0,4	-2.20578052927634346099879293832e+0	9.60665e- 1201	5
0,6	2.205780529276343460998792938324e+0	-1.25450e- 1200	5

Зі стовпчика 3 таблиці 3.2 видно, що ланцюгові дроби, представлені для функції Вейерштрасса в тоосках  $x=0,1; 0,2; 0,3;$  і так далі, є скінченними. Це через те, що п'яті чисельники ланцюгових дробів прямують до нуля. Порівнюючи другі стовпчики таблиці 1 та таблиці 3, можна зазначити, що значення функцій Вейерштрасса, отримані як рядами, так і ланцюговими дробами, збігаються. Для обчислення функції Вейерштрасса  $w(7;0,9;0,1)$  з точністю 45 десяткових знаків необхідно використати 1024 члени ряду, тоді як відповідний ланцюговий дріб, використовуючи "точний" підрахунок цієї функції, має всього чотири члени. Це демонструє очевидну обчислювальну ефективність ланцюгових дробів порівняно з рядами.

Відповідні ланцюгові дроби для функції Вейерштрасса завжди є скінченними в довільних раціональних точках  $x$  [24, с. 88].

У таблиці 3.3 представлені коефіцієнти відповідного ланцюгового дроби, побудованого для функції Вейерштрасса  $w(7;0,9)$  у точці  $x=0,111$ .

Таблиця 3.3

Значення коефіцієнтів ланцюгового дроби, що представляє функцію Вейерштрасса  $w(7;0,9;0,111)w(7;0,9;0,111)$ .

Номер ланки дробу, $n$	Значення коефіцієнтів ланцюговому дробу, $\omega_n$	Значення підходящих дробів, $P_n/Q_n$
0	0.939811951086	0.939811951086
1	-0.688024378281	0.251787572805
2	0.224232938784	0.052916370340
3	4.825758794111	0.224245482975
4	4.357264191278	0.484961931198
5	-0.255710922537	0.958313937066
...	...	...
31	-19.071794834810	-0.093790187744
32	-18.717927452156	-0.131787400445
33	0.37484e-9004	-0.131787400445

У таблиці 3.4 наведені результати визначення значень функції Вейерштрасса через відповідні ланцюгові дроби, побудованих з вихідних рядів (1) з параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$ . Змінні  $x$  мають три десяткові розряди:  $x = 0,111$ ;  $x = 0,222$ ;  $x = 0,333$ ; ...

Таблиця 3.4.

Значення функції Вейерштрасса, установлені через ланцюгові дроби при різних значеннях  $x$

Аргумент, $x$	Значення функції Вейерштрасса	Значення кінцевих ланок ланцюговому дробу	Номер кінцевої ланки дробу

0,111	- 0.1317874004452739846525173072027e0	0.37484e- 9004	33
0,222	- 0.1530569770194524217559734019612e0	0.10853e- 9004	33
0,333	0.12088194190984092396183752849618e 1	0.19338e- 9005	33
0,444	0.11463808279503072984087704261067e 1	0.23072e- 9018	17
0,555	0.89346677457495307448235913713774e 0	0.32041e- 9024	9
0,666	- 0.9164091146439475946496679047149e0	-0.18714e- 9004	33
0,777	- 0.1190665946146215174923275561407e1	-0.66182e- 9005	33
0,888	0.10228533583044874671171509840906e 0	0.195129e- 9017	17
0,999	- 0.23351462022290565773815456526942e 1	-0.58527e- 9005	33
1,111	0.131787400445273984652517307202751 e0	-0.48127e- 9005	33

У таблиці 3.5 наведені значення функції Вейерштрасса  $w(7; 0,9)$ , певні за допомогою ряду (1) у тих же крапках  $x$ , у яких значення функції встановлювалися кінцевими ланцюговими дробами [25].

Таблиця 3.5.

Значення функції Вейерштрасса, установлені за допомогою ряду для різних значень  $x$

Аргумент, $x$	Значення функції Вейерштрасса
0,111	-0.1317874004452739846525173072027e0
0,222	-0.1530569770194524217559734019612e0
0,333	0.12088194190984092396183752849618e1
0,444	0.11463808279503072984087704261067e1
0,555	0.89346677457495307448235913713774e0
0,666	- 0.91640911464394759464966790471491e0

Порівнюючи другі стовпчики Наблиць 3.4 і 3.5 можна відзначити збіг значень функцій Вейерштрасса, обчислені по різних алгоритмах за допомогою рядів і ланцюгових дробів.

Визначення похідної функції Вейерштрасса

Як ми вже відзначали, установлене, що при  $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$  функція Вейерштрасса (3.1) не має похідній у класичному змісті, ні при якому значенні  $x$ .

Побудуємо відповідний ланцюговий дріб для розбіжного ряду з параметрами  $a=7, b=0,9, x=0,1$ . Такий ланцюговий дріб існує і є скінченним. Кількість ланок у ланцюговому дробі, що представляє похідну функції Вейерштрасса, така ж, як і у випадку ланцюгового дроби, побудованого за збіжним рядом (3.1). У таблиці 3.6 наведені значення коефіцієнтів для кінцевого ланцюгового дроби, що представляє похідну функції Вейерштрасса з параметрами  $a=7, b=0,9$  у точці  $x=0,1$ .

Таблиця 3.6.

Значення коефіцієнтів ланцюгового дроби, що представляє похідну функції Вейерштрасса в точці  $x=0,1$ .

Номер ланки дроби, $n$	Значення коефіцієнтів ланцюговому дроби, $\omega_n$	Значення підходящих дробів, $P_n/Q_n$
0	-0.970805519363	-0.970805519363
1	-16.012091630793	-16.982897150156
2	2.406385870876	10.414470714125
3	-14.087228258249	-14.495984106989
4	-16.493614129124	0.438947974933
5	1.30211e-1501	0.438947974933

У таблиці 3.7 наведені значення похідної функції Вейерштрасса з параметрами  $a=7$ ;  $b=0,9$  у серії раціональних крапок:  $x=0,1$ ;  $x=0,2$ ;  $x=0,3$ ;...

Таблиця 3.7

Значення похідної функції Вейерштрасса, обчислені через ланцюгові дроби для різних  $x$

Аргумент, $x$	Значення похідної функції Вейерштрасса	Значення кінцевих ланок ланцюгових дробів	Номер кінцевої ланки дроби
0.1	4.3894797493294912660825500663464e-1501	1.30211e-1501	5
0.2	4.1722194169037467909295703880070e-1501	1.16618e-1501	5



0.3	2.2377039591994958972725203517714e-1	-1.06706e-1501	5
0.4	-3.593339320921954660888005192150e-1	-5.53924e-1502	5
0.5	-4.303551580259990737620059429150e-1	-3.39830e-1504	3
0.6	-3.593339320921954660888005192150e-1	9.51526e-1502	5
0.7	2.2377039591994958972725203517714e-1	2.279132e-1501	5
0.8	4.1722194169037467909295703880070e-1	-4.66134e-1501	5
0.9	4.3894797493294912660825500663464e-1	-1.10445e-1500	5
1.1	- 4.3894797493294912660825500663464e-1	1.761655e-1500	5
1.2	- 4.1722194169037467909295703880070e-1	8.08202e-1501	5

Знайдемо ланцюгові дроби для похідної функції Вейерштрасса для інших точок.

У таблиці 3.8 наведені коефіцієнти ланцюгового дроби похідної функції Вейерштрасса з параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  у точці  $x = 0,111$ .

Таблиця 3.8.

Значення коефіцієнтів ланцюговому дробу, що представляє похідну функції  
Вейерштрасса в точці  $x = 0,111$

Номер ланки дробу, $n$	Значення коефіцієнтів ланцюговому дробу, $\omega_n$	Значення підходящих дробів, $P_n/Q_n$
0	-1.073457415941	-1.073457415941
1	-12.759082751230	-13.832540167172
2	-9.593730933009	-2.277856775517
3	-8.134837372902	35.948877318004
4	-5.228667081790	-0.653042714684
5	-2.259478771726	-4.541690470137
...	...	...
31	3.633816638510	82.596798624171
32	3.980892708365	0.152651178956
33	-4.25646e-1479	0.152651178956

У таблиці 3.9 наведені значення похідної функції Вейерштрасса з параметрами  $a = 7$ ;  $b = 0,9$  для точок:  $x = 0,111$ ;  $x = 0,222$ ;  $x = 0,333$ ; ....

Таблиця 3.9

Значення похідної функції Вейерштрасса, установлені через ланцюгові дробу  
точках  $x = 0,111$ ;  $x = 0,222$ ;  $x = 0,333$ ...

Аргумент, $x$	Значення похідної функції Вейерштрасса	Значення кінцевих	Номер кінцевого ланки дробу

		ланок ланцюгових дробів	
0.111	1.5265117895643695651893300367688e-1	-4.25646e- 1479	33
0.222	-4.280751136738788011443515128863e-1	-5.66595e- 1479	33
0.333	3.8168174156937645757911787896376e-1	-1.79850e- 1478	33
0.444	-5.7206810595214165787580600646831e-1	-3.14017e- 1492	17
0.555	4.06753571884962122796039998907642e-1	-3.87306e- 1498	9
0.666	-3.51320072330524248711259977317545e- 1	-1.11563e- 1478	33
0.777	1.946204118885606310829540765236901e- 1	-4.23894e- 1478	33
0.888	7.845499378410084300481309181648014e- 2	-1.75835e- 1491	17
0.999	-1.47952828187020001075038197627132e- 1	1.29550e- 1477	33
1.111	-1.52651178956436956518933003676885e- 1	3.67141e- 1479	33

Використання ланцюгових дробів дозволило виявити наявність похідної функції Вейерштрасса в раціональних точках. Цей самий метод сумування розбіжних рядів за допомогою побудови так званих відповідних дробів можна

успішно використовувати для дослідження інших швидко осцилюючих функцій, які не мають похідних у класичному розумінні [21].

Перспективним підходом до аналізу швидко осцилюючих функцій є метод, пов'язаний з  $r/\varphi$ -алгоритмом, який, як вже зазначалося вище, отримав різноманітні застосування в обчислювальній математиці. Цей алгоритм дозволяє визначити комплексні значення розбіжних у класичному розумінні ланцюгових дробів і відкриває нові підходи до дослідження похідних швидко осцилюючих функцій.

Застосування методів фрактальної динаміки, зокрема використання ланцюгових дробів і  $r/\varphi$ -алгоритму, в радіоінженерії відкриває нові можливості для аналізу та оптимізації радіотехнічних систем. Ці методи дозволяють ефективно досліджувати та моделювати швидко осцилюючі сигнали та функції, які є важливим аспектом у радіосистемах.

Зокрема, застосування фрактальної динаміки дозволяє аналізувати характеристики сигналів з високою ступенем складності та нелінійності, що є типовими для радіоінженерних задач. Це може бути корисним у вивченні властивостей та моделюванні різноманітних сигналів, таких як радіохвилі з великою змінливістю амплітуди та частоти [8, с. 39].

Застосування фрактальної динаміки також може полегшити розуміння та оптимізацію антенних систем, що є важливою складовою радіоінженерних систем. Вивчення фрактальних властивостей антен та їх впливу на характеристики сигналів може допомогти розробляти більш ефективні та адаптивні антенні системи для різноманітних застосувань, включаючи безпроводні мережі та зв'язок.

Таким чином, застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії дозволяє не лише розширювати наше розуміння складних сигналів, а й сприяє вдосконаленню проектування та функціонування бездротових технологій.

### 3.4. Вибір методу розрахунку фрактальної розмірності

Існує досить багато методів розрахунку фрактальної розмірності, і для використання в задачах ідентифікації мовної інформації потрібно оцінити ці методи та вибрати раціональний підхід для їх обчислення. Розглянемо кожен з них докладніше.

Метод мірила (Yard Stick Method): спочатку вибирається фіксований розмір вікна  $r$ , який розділяє мовний сигнал на фрагменти. Сигнал представляється у вигляді  $(r)$ . Потім для кожного фрагменту обчислюється довжина кривої  $L_i$ , і кожен  $r_i$  ставиться у відповідність отриманій довжині. Графік  $(r_i, L_i)$  будується на логарифмічній шкалі, і застосовується метод найменших квадратів для аналізу даних. Фрактальна розмірність обчислюється як  $D = 1 - \alpha$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт регресії [15].

Метод Хаусдорфа: основний принцип полягає в покритті профілю сигналу квадратними сітками. При зміні ширини сітки  $r$  кількість елементів сітки  $N(r)$  також змінюється. Відношення між  $N(r)$  і  $r$  представляються у вигляді:  $N(r) = kr^{-D}$ . Графік  $(r_i, N(r_i))$  будується на логарифмічній шкалі, і лінійно-регресійний метод використовується для аналізу даних. Фрактальна розмірність обчислюється як  $D = -\alpha$ .

Варіаційний метод: для розрахунку за цим методом профіль покривається прямокутниками з шириною  $r$ . Для кожного прямокутника обирається еталонна точка, і розраховується відхилення  $H_i$  між найвищою та найнижчою позицією. Якщо ширина  $r$  дуже мала,  $H_i$  приблизно дорівнює довжині кривої  $V(r)$ . Таким чином, міра дорівнює

$$V(r) = \sum \frac{1}{2} = \sum r^H H/r.$$

Будується графік отриманого ряду  $(r_i, V(r_i))$  на логарифмічній шкалі за обома координатами, і проводиться лінійний підбір. Фрактальна розмірність обчислюється як  $D = 2 - \alpha$ , де  $\alpha$  визначає нахил отриманої функції.

Метод структурної функції, також відомий як метод збільшення, розглядає профіль як послідовність функції висоти  $z(x)$ . Для будь-яких двох точок на відстані  $r$  у послідовності  $z(x)$  визначається функція структури  $S(r)$ , яка є середнім арифметичним значенням квадрата різниці висот. Відношення між послідовністю  $z(x)$  і функцією структури  $S(r)$ :  $S(r) = E[z(x+r) - z(x)]^2 = cr^{2-D}$ , де  $r$  – інтервальний масштаб. При обчисленні фрактальної розмірності вибираються різні масштаби  $r$ , і отримуються значення функції  $S(r)$ . Будується графік отриманого ряду  $(r_i, S(r_i))$  на логарифмічній шкалі за обома координатами. Фрактальна розмірність обчислюється як  $D = 2 - \alpha/2$ , де  $\alpha$  – нахил отриманої функції [24 ,с. 87].

Середньоквадратичний метод використовує принцип, схожий до методу структурної функції. Дослідження показало, що масштабному співвідношенню функції  $z(x)$  з фрактальними характеристиками відповідає наступна формула.

$$z(x) - z(x_0) = |x - x_0|^{2-D} \quad ($$

Нехай  $x_0 = 0$  к  $z(0) = 0$ , Тоді ми можемо обчислити дисперсію або кореляційний момент послідовності функції  $z(x)$

$$S(r) = D(r)^{1/2} = cr^{2-D}$$

Де  $r$  є інтервальним масштабом, і  $r = x - x_0 = x$ . Рівняння вказує на те, що відношення між кореляційним моментом  $S(r)$  і масштабом інтервалу  $r$  є експонентою потужності, а потужність є функцією фрактальної розмірності. Обчислення фрактальної розмірності виконується за допомогою наступного методу для кожного інтервального масштабу  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Розраховується дисперсія  $S(r)$ . Будується графік отриманого ряду  $(r_i, S(r_i))$  на логарифмічній

шкалі за обома координатами. Фрактальна розмірність обчислюється як  $D = 2 - \alpha$ , де  $\alpha$  це нахил лінії.

Метод Херста. Для функції висоти  $z(x)$ , при фіксованому масштабі  $r$ , обчислюється середнє значення у вигляді:  $\bar{z}_r = \frac{1}{r} \sum_{x=0}^r z(x)$ , накопичувальне відхилення:  $S(r)$ , максимальна різниця  $R(r) = \max z(x, r) - \min z(x, r)$ , і стандартне відхилення  $0 \leq x \leq r$

$$S(r) = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{x=0}^r [z(x) - \bar{z}_r]^2}$$

Дослідження Херста виявило, що статистичний закон  $R/S$  дорівнює

$$R/S = cr^H \quad (3.3)$$

де  $c$  це постійна,  $H$  це індекс Херста. Беручи логарифм з обох сторін до рівняння (3.3), отримаємо

$$\ln(R/S) = \ln(c) + H * \ln(r)$$

Після визначення максимальної різниці  $R(r)$  та стандартного відхилення  $S(r)$  при різних масштабах  $r$ , згідно з рівнянням (3.4), індекс Херста  $H$  може бути обчислений за допомогою методу найменших квадратів. Обчислення фрактальної розмірності має вигляд:  $D = 2 - H$ .

Метод Хігучі. Оригінальне формулювання методу, обчислює фрактальну розмірність Хігучі (HFD) для кожного  $r \in \{1, \dots, r_{max}\}$  та  $m \in \{1, \dots, r\}$ . Довжина  $L_m(r)$  визначається так [19, с. 43].

Довжина  $L(r)$  визначається середнім значенням  $r$  довжин

$$L(r) = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^r L_m(r).$$

Нахил лінії, яка найкраще апроксимується через точки даних  $\{(\log 1, \log L(r))\}$ , слугує визначенням фрактальної розмірності Хігучі [53].

Для визначення того, який метод краще всього підходить для оцінки фрактальної розмірності мовного сигналу, було проведено попереднє налаштування методів за допомогою двох тестових мовних сигналів,

представлених. Тут Рис. 3.2. відображає вокалізований фрагмент, а Рис. 3.1б) – невокалізований фрагмент або паузу.

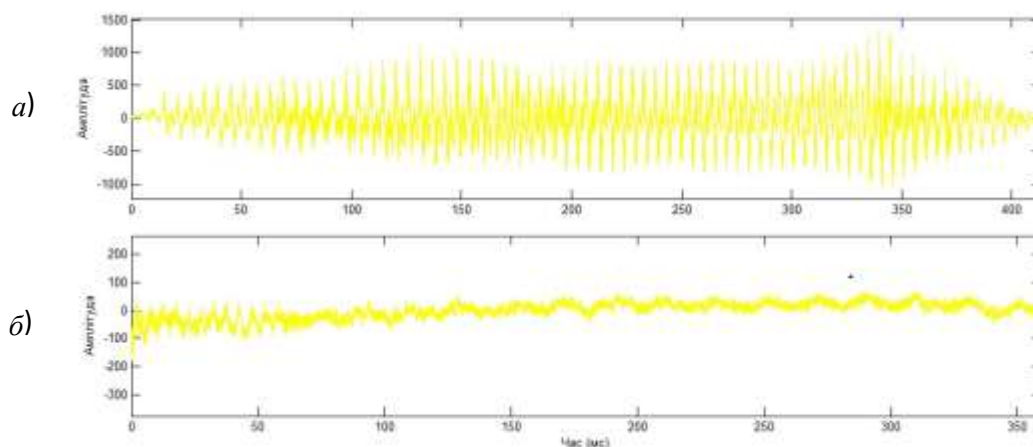


Рис. 3.2. Тестові мовні сигнали а) вокалізований фрагмент; б) невокалізований фрагмент [53].

Для кожного варіанту розрахунку вибирався оптимальний показник  $r$ , при якому досягався рівень значущості коефіцієнта кореляції на рівні 0,03. Цього досягалося шляхом варіювання значення  $r$  з кроком 0,1 та обчислення відповідної фрактальної розмірності методу  $D(r)$ , з урахуванням покриття кривої мовного сигналу відповідно до встановленого рівня значущості коефіцієнта кореляції.

Результати обчислення фрактальної розмірності для кожного з вищезазначених методів представлені у таблиці 3.10.

Таблиця 3.10

Порівняння методів розрахунку фрактальної розмірності для мовного сигналу

Метод обчислення фрактальної розмірності	Вокалізований фрагмент		Невокалізований фрагмент	
	Фрактальна розмірність	Кореляційний коефіцієнт	Фрактальна розмірність	Кореляційний коефіцієнт
Хігучі	1.75	0.995	1.221	0.981



Метод Херста	1.72	0.968	1.181	0.979
Середньоквадратичний метод	1.657	0.979	1.119	0.982
Метод структурної функції	1.701	0.997	1.199	0.998
Метод «мірила» (Yard Stick Method)	1.422	0.993	1.011	0.992
Варіаційний метод	1.353	0.996	1.154	0.999
Метод Хаусдорфа	1.68	0.998	1.197	0.995

Попередні дослідження, проведені на тестових фрагментах мови та пауз, вказують на низькі показники кореляції при використанні методів Хігучі, Херста та середньоквадратичного методу [27, 53]. Натомість, найвищі показники кореляції спостерігаються при використанні варіаційного методу та методу Хаусдорфа.

Наступним етапом дослідження було проведення аналізу роботи цих методів на більшому обсязі тестових даних, враховуючи налаштування, відповідно до тестових фрагментів. Дослідження включало 300 підготовлених вокалізованих і невокалізованих фрагментів. Результати дослідження представлені на Рис. 3.3.

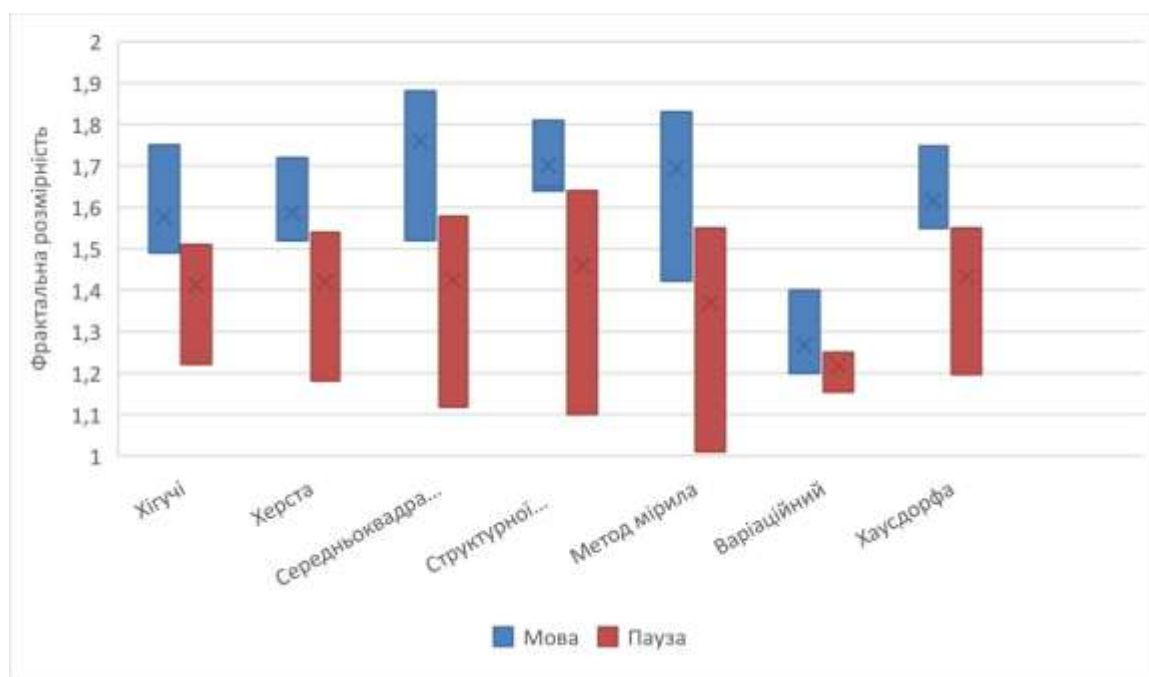


Рис. 3.3. Порівняння методів розрахунку фрактальної розмірності для фрагментів мовного сигналу [53].

Після аналізу отриманих результатів можна зробити висновок, що найбільш підходящими для використання в сегментації мовного сигналу є методи Хаусдорфа та структурної функції. Це обумовлено тим, що вони демонструють менші значення перекриття діапазонів фрактальної розмірності для як вокалізованих, так і невокалізованих фрагментів. Варіаційний метод не є оптимальним для сегментації через обмежений діапазон варіації фрактальної розмірності в даному контексті. Методи "Yard Stick" та середньоквадратичний мають широкий діапазон перекриття значень фрактальної розмірності, що може призвести до зниження точності сегментації при їх використанні.

Методи Хігучі та R/S-аналізу можуть бути задовільно використані для сегментації мовного сигналу, проте їхній рівень ефективності значно нижчий порівняно з методами Хаусдорфа та структурної функції [25, 26].

Підводячи підсумок, можна визначити, що методи Хаусдорфа та структурної функції є більш підходящими для обчислення фрактальної

розмірності у контексті завдань сегментації мовного сигналу. З урахуванням вищої обчислювальної складності методу структурної функції для сегментації мовного сигналу, вибір робиться на користь методу розрахунку фрактальної розмірності за Хаусдорфом.

### **3.5. Застосування методу сегментації на основі фрактальних характеристик сигналу**

Для аналізу мовних сигналів та апроксимації графіків часових рядів амплітуд звукової хвилі за допомогою конструкції певних сум (розбивки у формі клітин) ми звернемося до розмірності Хаусдорфа. Визначення фрактальної розмірності  $D_x$  за методом Хаусдорфа здійснюється за наступним принципом:

$$S(p) \sim p^{2-D_x} \text{ при } p \rightarrow 0$$

де  $S(p)$  – повна площа комплексу, з масштабом розбиття  $p$ .

З практичної точки зору, при спробі обчислення фрактальної розмірності  $D_x$ , виникають різні труднощі. Це пояснюється тим, що реальні часові ряди завжди мають мінімальний масштаб  $p_0$ , і одночасно перехід до асимптотичного представлення відбувається досить повільно [9].

В порівнянні зі звичайними часовими рядами, які використовуються в більшості завдань обробки сигналів, мовні сигнали виявляються значно відмінними. Одна з ключових відмінностей полягає в тому, що амплітуда звукової хвилі може бути добре описана як сума гармонічних коливань (з фізичної і математичної точок зору). Цей підхід значно зменшує кількість відліків, необхідних для проведення відповідного аналізу фрактальної розмірності.

Ще однією важливою рисою є можливість визначення мінімальних фрактальних масштабів для завдань мовних технологій. На підставі попередніх досліджень відомо, що всю важливу мовну інформацію можна знайти в певному

діапазоні частот до 4500 Гц. Це надає можливість ефективно оцінювати мінімально раціональні фрактальні масштаби для мовних фрагментів [31 ,с. 54].

Розглянемо приклад мовного сигналу з частотою дискретизації  $F_s$  і розрядністю  $r$  біт. Це означає, що  $F_s$  знаходиться в діапазоні від 8000 Гц до 44100 Гц, а  $r$  від 8 до 24 біт. Для того щоб регулярно покрити графік досліджуваної звукової хвилі, необхідно використовувати мінімальні значення, подібні до розміру прямокутника  $a * b$ . Тут  $a$  визначається як мінімальна зміна амплітуди звукової хвилі для конкретної розрядності звукового файлу. Наприклад, для 8-розрядного звукового файлу  $a = 2/256$ . Варто відзначити, що всі звукові файли конвертувалися у формат WAV, тому значення амплітуди розглядаються в діапазоні від -1 до +1 і представлені у вигляді чисел з плаваючою комою. Для загального випадку:

$$a = 2/2^r$$

Мінімальна довжина часової осі  $b_0$  визначається як  $1/F_s$ , адже це відповідає найменшому розміру прямокутника для відображення на часовій шкалі. У цьому випадку, оскільки розмірність не має великого значення, ми можемо прийняти  $b_0 = 1$ . Метод розрахунку фрактальної розмірності за Хаусдорфом використовує такий підхід: кожне вікно мовного сигналу представляється набором прямокутників розміром  $a \times b$ , що покривають графічне представлення мовного сигналу. Припустимо, що масштаб відображення позначено як  $p$ :

$$p = k \cdot b$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$  – це коефіцієнт масштабу представлення.

Відомо, що обчислення фрактальної розмірності по Хаусдорфу, виконується, як

$$D = 2 - \lim[\ln(N(p))/ \ln(p)]$$

де  $\ln(N(p))$  представляє собою натуральний логарифм кількості прямокутників  $N(p)$ , які охоплюють хоча б одне значення амплітуди мовного сигналу, і  $\ln(p)$  є натуральним логарифмом масштабу представлення. Фрактальну розмірність  $D$  визначаємо згідно [36].

$$D = 2 - Dx \quad (3.10)$$

В залежності від частоти дискретизації цей часовий інтервал відповідає кількості відліків  $N = Fs * 2/100$ . Вводячи мінімальний фрактальний масштаб  $k \geq 3$ , після численних досліджень різних фрагментів у різних аудіофайлах було оцінено значення фрактальної розмірності, яке виявило значну варіабельність при мінімальних значеннях  $k \geq 2$ . Одночасно з цим оцінки фрактальної розмірності слабко змінювалися в межах певних часових інтервалів у 20 мс. Для конкретної реалізації часового вікна паузи аудіофайлу будемо змінювати масштаб. Для цього будемо графік залежності  $\ln(N(p)) = f(\ln(p))$ . Наступним етапом, після побудови графіка, проведемо апроксимацію перших точок графіка за допомогою лінійної залежності [25, 26].

$$f = c * \ln(p) + c_0$$

де  $c$ ,  $c_0$  – це коефіцієнти апроксимації.

Попередні дослідження виявили, що є необхідність апроксимації перших декількох точок МС. Таким чином, було вирішено використовувати апроксимацію для перших 10 точок, хоча це значення може бути виправлено під час подальшого детального аналізу. У межах цього методу величина виражається як  $Dx$ .

$$Dx = ab(c)$$

Також важливо відзначити, що під час розрахунку фрактальної розмірності за вищезгаданим методом з використанням мінімального фрактального масштабу ( $k = 1$ ) значення фрактальної розмірності значно відрізняються. Отже, у

запропонованій методиці оцінки фрактальної розмірності на основі Хаусдорфа величина не відповідає строгому визначенню розмірності Хаусдорфа. Однак після численних досліджень аудіофайлів, використовуючи модифікований підхід, було виявлено ефективність використання параметра (3.11) у задачах мовних технологій [24, 25].

Розрахунок фрактальної розмірності дозволив побудувати графік на Рис. 3.4, на якому представлена величина  $D$  – фрактальної розмірності для фрагмента МС за весь часовий період. Аналіз графіка підтверджує високу чутливість фрактальної розмірності до змін амплітудних значень мовного сигналу, що може бути використано для сегментації мовного сигналу.

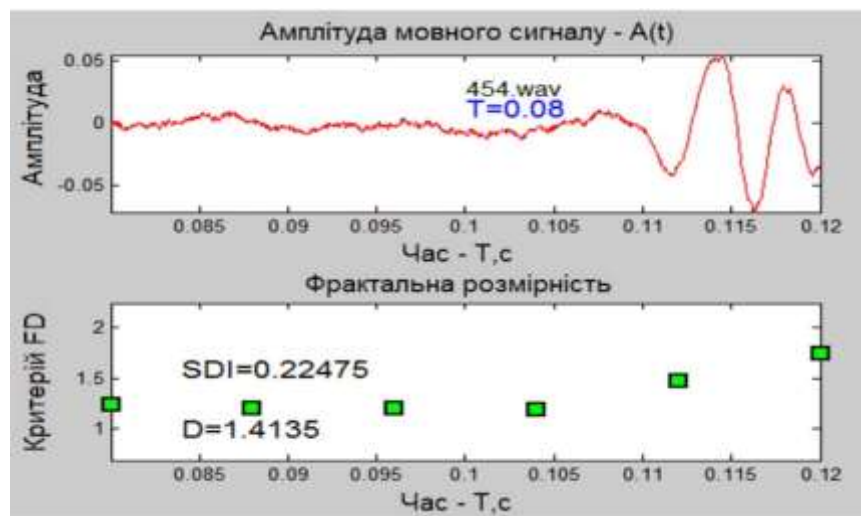


Рис. 3.4. Фрактальна розмірність при переході з паузи на мову [30].

На основі проведеного дослідження пропонується наступний метод сегментації мовного сигналу, використовуючи фрактальну розмірність:

1. Розділення на часові фрагменти.
2. Попередня апроксимація мовного сигналу за допомогою виразу.
3. Визначення фрактальної розмірності з заданим часовим вікном у кожному часовому фрагменті за допомогою виразу.

4. Класифікація часових фрагментів на вокалізовані та невокалізовані відповідно до встановленого порогу значень фрактальної розмірності.

Застосування методів фрактальної динаміки у радіоінженерії виявляється у великому спектрі задач, включаючи аналіз і моделювання радіоспектральних сигналів, розпізнавання звукових сигналів, а також сегментацію мовного сигналу.

Методи фрактальної розмірності в радіоінженерії можуть допомагати у розумінні структури і характеру радіочастотних сигналів, забезпечуючи новий підхід до аналізу їхніх фрактальних властивостей. Це дозволяє вдосконалити методи спектрального аналізу і виявлення аномалій у радіоспектрах [23, 24].

У контексті сегментації мовного сигналу методи фрактальної розмірності можуть бути використані для автоматичного виділення різних частин мовного потоку, таких як вокалізовані та невокалізовані фрагменти. Це може бути особливо корисним у сучасних системах бездротового зв'язку, де оптимізація передачі аудіосигналів важлива для забезпечення ефективності та якості зв'язку.

Таким чином, застосування методів фрактальної динаміки у радіоінженерії може принести користь для удосконалення різноманітних аспектів обробки сигналів і підвищення продуктивності бездротових комунікаційних систем.

### **3.6. Аналіз ефективності застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії**

Задача полягає в визначенні характеристик самоподібних структур у часовому ряді, які можуть виявлятися різними геометрично подібними об'єктами. Ці структури спостерігаються в графіках зміни амплітуди звукової хвилі. Поняття самоподібності визначається як наявність близької геометричної форми об'єктів мовного сигналу, які можуть відрізнятися часовими або амплітудними характеристиками, але зберігають форму. Один із способів представлення цих

структур – використання вейвлет-перетворення мовного сигналу. У роботі аргументовано використання комплексного вейвлету Морле для опису мовного сигналу [29, 30].

$$(t_i, T_k, F_b, F_c) = (\pi F_b)^{0.5} \exp(2j\pi F_c t_i) \exp(-(t_i - T_k)^2 / F_b)$$

де  $F_b$  – параметр ширини вейвлета,  $F_c$  – центральна частота вейвлета,  $t_i$  – дискретні часові відліки,  $T_k$  – часовий відлік, що відповідає центральній частині часового вікна,  $j$  – комплексна одиниця. Нехай  $A(t_i)$  – амплітуда звукової хвилі фрагмента промови в аудіо файлі в момент часу  $t_i$ . Розглянемо часове вікно фрагмента промови з інтервалом  $\delta T$ , який, як вже зазначено, в дослідженнях обирався в діапазоні 10-30 мс. Параметр ширини комплексного вейвлета Морле  $F_b$  буде постійним для всіх перетворень, вибраним так, щоб забезпечити практичне загасання абсолютних значень вейвлета Морле при значеннях  $t_i - T_k$ , рівних  $\delta T/2$ . Для кожного фрагмента промови будемо обчислювати згортку вейвлета Морле з фрагментом часового ряду амплітуди звукової хвилі у вигляді:

$$(T_k, F_b, F_c) = (1/N) \text{abs} \left( \sum C_{mor}(t_i, T_k, F_b, F_c) A(t_i) \right), \quad t_{ij}=0$$

де  $C(T_k, F_b, F_c)$  – модуль коефіцієнта вейвлет-перетворення,  $N$  – кількість дискретних відліків на інтервалі  $\delta T$  часового вікна. При фіксованому параметрі ширини  $F_b$  комплексного вейвлета Морле, значення модуля стає функцією частоти  $F_c$  вейвлета Морле і положення часового вікна за часом –  $T_k$ . Типовий графік просторової скейлограми  $C(T_k, F_b, F_c)$  у функції  $F_c$  та  $T_k$  подано на Рис. 3.5. Запропоноване подання фрагмента мови у формі просторової скейлограми володіє важливими особливостями, які дозволяють істотно підвищити ефективність виявлення самоподібних структур. Зокрема, локальні максимуми вейвлет-перетворення є досить інформативними для аналізу атомарних складових мультифракталів у мовному сигналі. На Рис. 3.5 представлено поєднання фрагментів аудіозапису мови і скейлограми, побудованої на основі даної моделі [23].



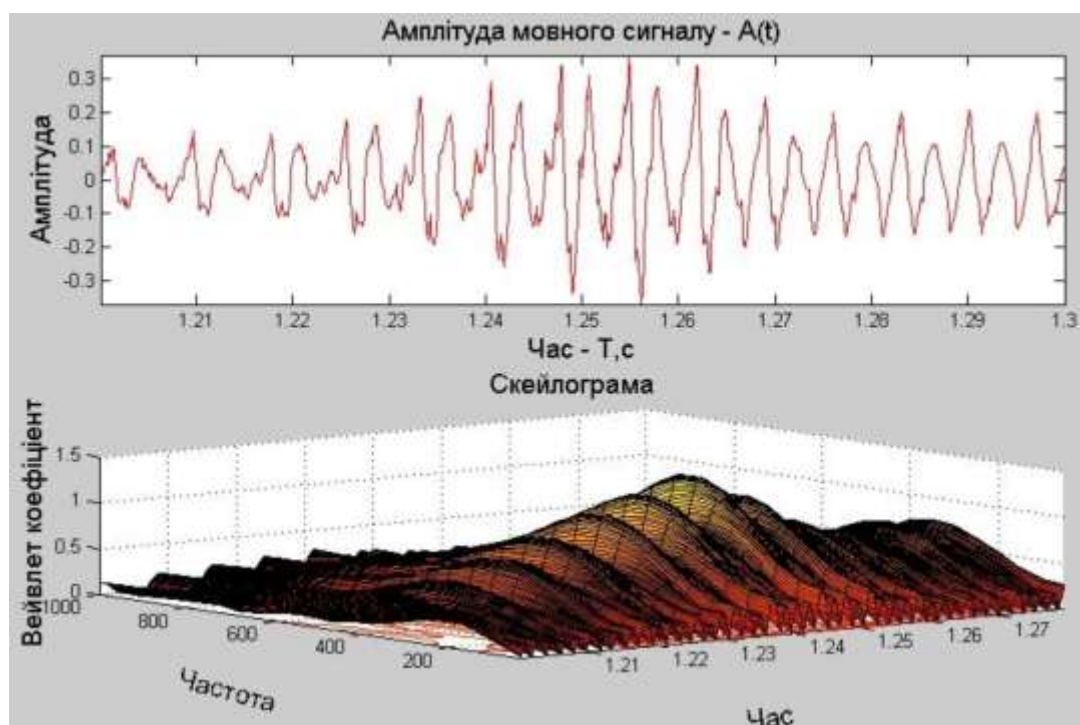


Рис. 3.5. Ілюстрація виявлення самоподібних структур [7].

Важливо зауважити кілька ключових аспектів наших досліджень для подальшого аналізу. Крок за частотою  $F_c$  розглядається як незалежний від розмірів вікна перетворень і встановлюється на рівні 1 Гц. Це не обмежує значущість аналізу формантної структури на коротких часових інтервалах, враховуючи принцип Гейзенберга [35, 36].

Цей принцип дозволяє зберігати точність оцінок відстаней між формантними максимумами на невеликих часових інтервалах. Таким чином, відстані між максимумами формант в спектрі мови на коротких часових інтервалах, що відповідають частоті основного тону мови (приблизно 85-600 Гц), і дозвіл по частоті (близько 50 Гц) дозволяють отримати достовірні оцінки цих відстаней.

Також важливо відзначити, що використання вейвлету Морле не порушує фізичне трактування частотних перетворень, оскільки цей вейвлет є віконним

перетворенням Фур'є з функцією Гауса. Аналіз показує, що розташування "гребнів" скейлограм по часовому параметру строго відповідає локальним максимумам амплітуди звукової хвилі в часовій області. Використання базису Морле дозволяє ефективно аналізувати параметри "гребнів", оскільки він володіє більшою ступенем гладкості, порівняно з аналогічним перетворенням Фур'є, що полегшує математичний аналіз цих параметрів [7].

Також, варто зауважити, що максимуми формант по частоті можуть істотно відрізнятися від їх максимумів у спектрі Фур'є. Відстані між локальними частотними максимумами скейлограми у цьому методі є оцінкою частоти основного тону мови. Важливим елементом стійкості і достовірності оцінок частоти основного тону є можливість оцінювати їх не тільки на основі локальних максимумів, але й на основі кореляції між фрагментами областей максимумів, які приблизно є самоподібними структурами на коротких часових інтервалах.

Характеристиками "гребенів" виявляється їх форма, яка, як вказують дослідження, має високий ступінь геометричної подоби після раціонального нормування функції ( $T_k$ ,  $F_b$ ,  $F_c$ ) при фіксованих  $T_k$  та  $F_b$ . Ці "гребні" мають індивідуальну форму, що відрізняється відмінностями мовних характеристик. Подібність структур типу "гребінь" на скейлограмі для однакових мовних характеристик виникає внаслідок специфіки вейвлета Морле, який ефективно виділяє ці структури в областях локальних максимумів [40, 41].

Ця схожість легко пояснюється фізично. Структури амплітуди звукової хвилі в області локальних максимумів, які відповідають частоті основного тону, виявляють виразну геометричну симетрію щодо амплітуди локального максимуму. Використання вейвлета Морле дозволяє точно виділяти цю симетрію у вигляді явно виражених екстремумів на скейлограмі.

Початковий рівень вейвлет-декомпозиції МС дозволяє отримати перші самоподібні структури. Однак, оскільки особливості сигналу, що характеризують особливості конкретної людини, можуть бути на наступних рівнях розкладання

сигналу, запропоновано розглянути також наступні рівні декомпозиції МС для визначення характеристик самоподібних структур за допомогою аналізу мультифрактального спектру.

Одним із принципів визначення максимумів вейвлет-коефіцієнтів, які використовуються для отримання характеристик самоподібних структур, є використання компактних вейвлетів для часової локалізації вершин. Для кількісного оцінювання локальних особливостей самоподібних структур розумно використовувати експоненту Гельдера. Вейвлет-спектр особливостей вказує на величину показника Гельдера у мовному сигналі. Максимуми самоподібних структур, що визначаються характерними екстремумами (Рис.3.6), оцінюються як [15, 16].

$$(j, k) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda} |d_x(j, k)|$$

де  $j$  – ступінь вейвлет декомпозиції,  $k$  – час,  $d_x(j, k)$  – вейвлет коефіцієнти.

При визначенні максимумів вважаємо їх за допомогою сусідніх елементів.

$$3\lambda, k = \lambda_{j, k-1} \cup \lambda_{j, k} \cup \lambda_{j, k+1}.$$

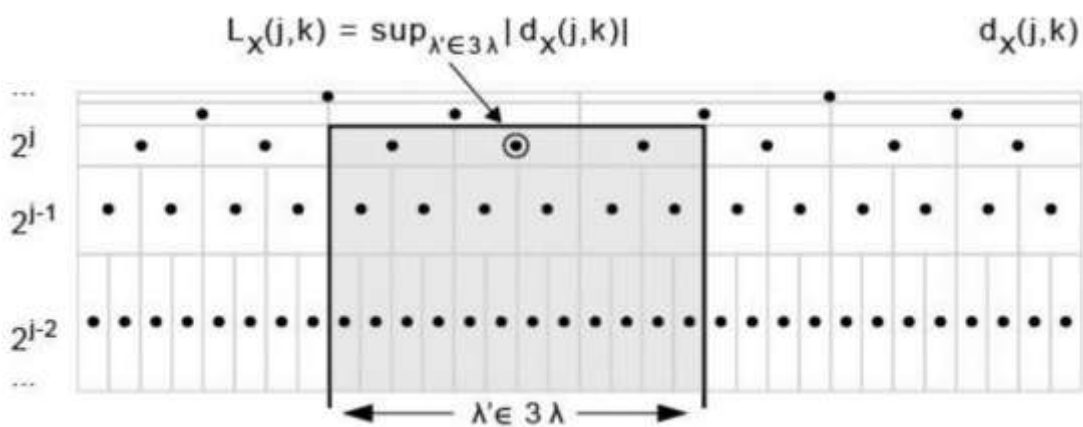


Рис. 3.6. Визначення характерних вейвлет максимумів [7, 16, 40].

Для виокремлення самоподібних структур  $L_x(j, k)$  ми використовуємо наступний алгоритм згідно з теорією мультифрактального спектру [16].

За допомогою дискретного вейвлет-перетворення обчислюємо вейвлет-коефіцієнти  $dx(j, k)$  та зберігаємо їх значення для кожної шкали. Важливою особливістю виконання вейвлет-перетворення є подвоєння кількості коефіцієнтів між шкалами (Рис. 3.7).

6		2		7		5	
4	3	5	2	1	0	4	3

Рис. 3.7. Приклад коефіцієнтів вейвлет перетворення на двох рівнях декомпозиції [16].

1. Починаємо розгляд зі шкали, яка на 1 рівень грубіша ніж шкала самої точної декомпозиції.
2. Порівнюємо перше значення з усіма інтервалами і отримуємо максимальне значення (Рис.3.8).

6		2		7		5	
4	3	5	2	1	0	4	3
	6		5		7		5

Рис. 3.8. Приклад визначення максимуму для двох рівнів вейвлет декомпозиції [16].

Переходимо до наступного значення та порівнюємо це значення з усіма його сусідніми значеннями вейвлет декомпозиції (Рис.3.9).

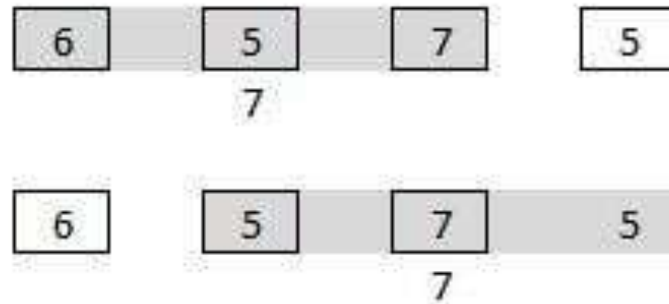


Рис. 3.9. Приклад покрокового визначення максимумів уздовж вейвлет-коєфіцієнтів [16].

З максимальних значень, отриманих для певної шкали, вибираються три найвищі значення. Цей максимум представляє особливість самоподібної структури на поточному рівні вейвлет-декомпозиції [24,25].

Переходимо до наступного рівня декомпозиції і повторюємо процес визначення максимумів самоподібних структур. Для визначення характерних особливостей самоподібних структур використовуємо опис МС у вигляді мультифрактального спектру. Алгоритм визначення характеристик самоподібних структур МС наведено на Рис. 3.10.



Рис. 3.10. Алгоритм визначення характеристик самоподібних структур МС.

У більшості джерел термін "мультифрактальний спектр" відноситься до залежності  $\tau(q)$ , але деякі дослідження також використовують термін "мультифрактальний спектр" для опису залежності показника Гельдера  $h$  від сингулярності мультифрактального спектру  $D(h)$ . В результаті застосування запропонованого алгоритму отримані залежності сингулярності мультифрактального спектру МС матимуть наступний вигляд). Ці залежності є характеристиками самоподібних структур МС [13] (Рис. 3.11).

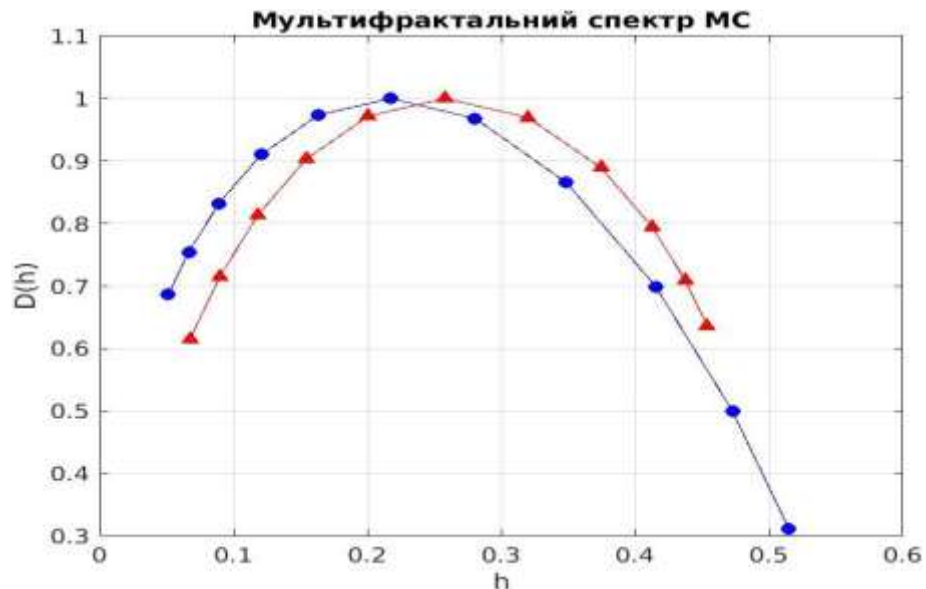


Рис. 3.11. Залежність сингулярності мультифрактального спектру двох МС [16].

Згідно проведеного нами аналізу поточного стану досліджень у сфері ідентифікації мовної інформації визначено, що ключовими характеристиками, які більш точно визначають особливості мови особи, є частота основного тону (ОТ) та частоти формант. Відомо, що мовні експерти для ідентифікації мовних сигналів осіб використовують аналіз ударних голосних та порівняння їх

спектрограм. Отже, вершини піків спектрограм несуть в собі основну та найважливішу інформацію [31].

Враховуючи це, пропонується наступний метод для підвищення інформативності частоти основного тону, який враховує характеристики самоподібних структур:

1. Розділити вокалізований мовленнєвий сигнал на часові інтервали довжиною 20 мс.
2. Визначити мультифрактальний спектр кожного інтервалу мовлення.
3. Обчислити коефіцієнти вейвлету Морле для кожного інтервалу мовлення згідно з формулою.
4. Для визначення положення кожної окремої вершини піку тривимірного спектру Морле на даному інтервалі здійснити порівняльний аналіз площини під кривою кожного зрізу тривимірного спектру Морле для кожного інтервалу.

$$S_{i-1} < S_i < S_{i+1}$$

де  $S$  – площа зрізу тривимірного спектру Морле на відповідному часовому вікні  $t$ .

В контексті радіоінженерії застосування методів фрактальної динаміки виявляється надзвичайно корисним. Ці методи можуть знайти застосування в аналізі та оптимізації радіохвильового середовища, вдосконаленні систем зв'язку та розвитку бездротових технологій.

Зокрема, використання фрактальної динаміки може сприяти удосконаленню процесів антенного проектування, дозволяючи більш точно адаптувати антени до різноманітних топологій місцевості та розсіювати сигнали ефективніше. Аналіз фрактальних характеристик може допомогти в розумінні поведінки бездротових каналів та оптимізації передачі даних у зоні поганого прийому [24, 25].

Крім того, в радіоінженерії важливо враховувати змінність та непередбачуваність радіохвильового середовища. Застосування методів фрактальної динаміки дозволяє краще розуміти цю непередбачуваність та розробляти більш адаптивні системи зв'язку, які здатні ефективно працювати в різних умовах.

Отже, високий рівень аналізу та моделювання, який надають методи фрактальної динаміки, може значно покращити якість та надійність бездротових систем у радіоінженерії, роблячи їх більш пристосованими до змінюючогося оточення та забезпечуючи ефективніший обмін інформацією.

Запропонований метод обчислення фрактальної розмірності може знайти застосування в різних областях аналізу мовних сигналів. Давайте розглянемо використання цього методу в контексті завдання сегментації мови. У зв'язку зі складністю структури цього завдання, була розроблена наступна методологія досліджень (Рис. 3.12).

Під час аналізу ефективності сегментації як ознаки для прийняття рішення про "вокалізований/не вокалізований фрагмент" були вибрані наступні показники:

1. середньоквадратичне відхилення фрактальної розмірності;
2. діапазон розмірів часового вікна.





Рис. 3.12. Методологія проведення досліджень сегментації МС [24, 30].

З урахуванням того, що фрактальна розмірність залежить від розмірів вікна, наступний етап передбачає встановлення довільного значення вікна для оцінки фрактальної розмірності. На цьому етапі обчислюється фрактальна розмірність для кожного вікна мовного сигналу. Далі мовний сигнал розділяється на паузи і фрагменти мови (візуально). Важливо врахувати, що суб'єктивність методу розділу пауз і фрагментів мови на цьому етапі досліджень не повинна значно впливати на висновки і результати, оскільки фрактальна розмірність пауз і фрагментів мови має істотні відмінності. Зокрема, використання цього підходу ілюструє зміну фрактальної розмірності при переході від мови до пауз і навпаки.

На Рис. 3.13 представлено значення  $D$  – фрактальної розмірності для фрагмента мовного сигналу за весь часовий інтервал.  $SDI$  – середньоквадратичне відхилення фрактальної розмірності для часових фрагментів протягом 20 мс від середнього значення. На цьому етапі дослідження вибір оптимального порогу вікна сканування для оцінки фрактальної розмірності здійснюється на підставі достатньої точності ідентифікації пауз для оператора. У випадку необхідності послідовний процес задання вікна фрактальної розмірності і обчислення його

параметрів може бути повторений. Таким чином, за допомогою оцінки точності виявлення пауз на основі порога відбувається відокремлення пауз і мови.

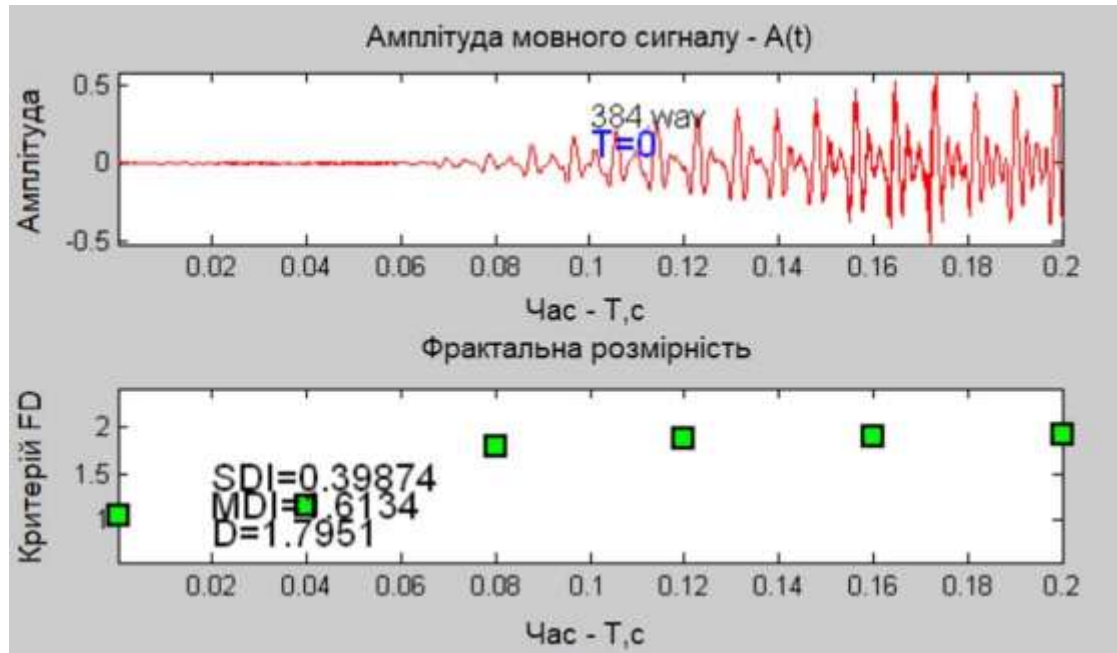


Рис. 3.13. Зміна фрактальної розмірності при переході з паузи на мову [24, 30].

Проаналізувавши 300 різних мовних сигналів, можна помітити значну різницю фрактальної розмірності пауз від фрагментів мови (Рис. 3.14).

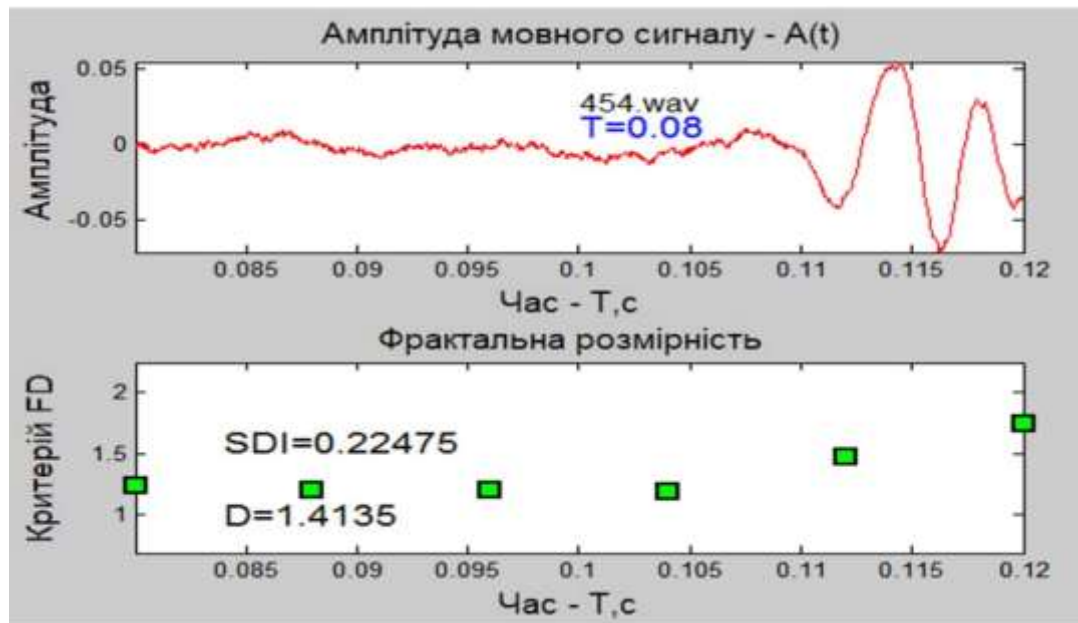


Рис. 3.14. Типовий розподіл фрактальної розмірності для фрагмента мовного сигналу з початковою паузою і починається промовою з 0,11 с [24, 30].

Фрактальна розмірність для пауз на 99% знаходилася в інтервалі  $1,04 \leq D \leq 1,45$ , тоді як для фрагментів мови не спостерігалось значень менше, ніж  $D = 1,55$  (див. Рис. 3.15) при часовому вікні розміром 20 мс. Зменшення часового вікна дозволяє виокремити окремі фонемні компоненти в фрагменті мови, але використання цього факту вимагає додаткового дослідження [35].

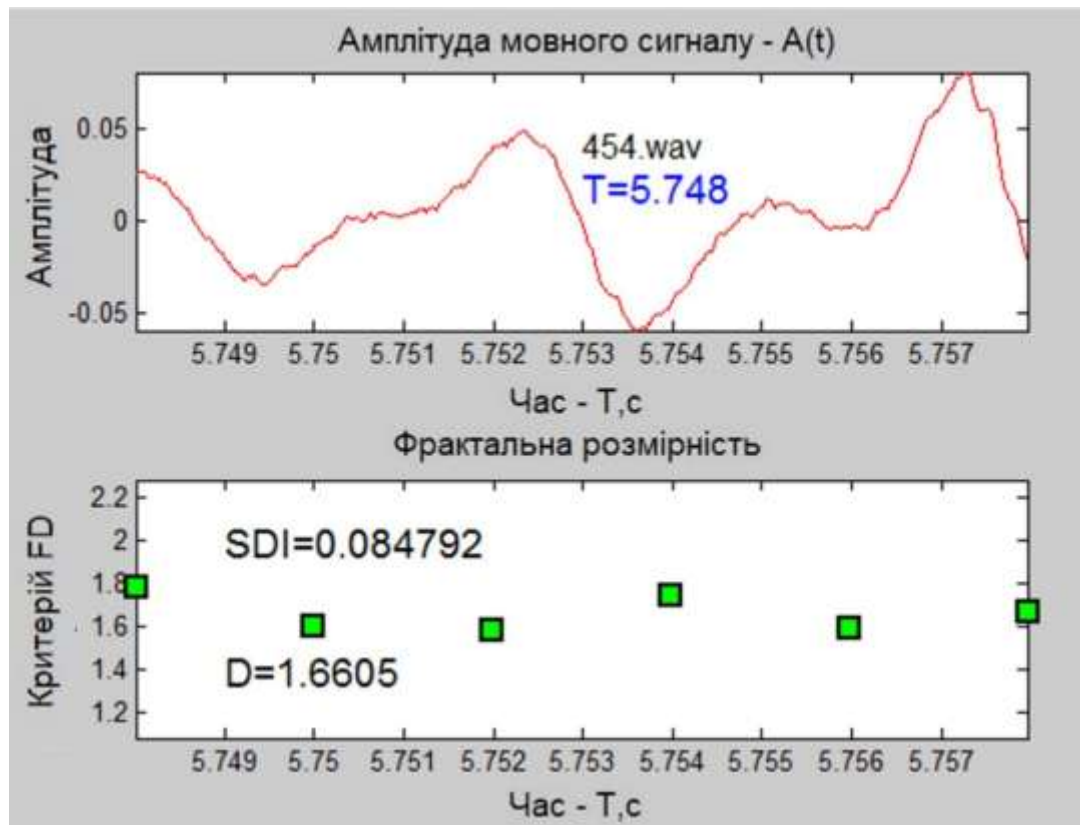


Рис. 3.15. Зміна фрактальної розмірності при переході між фонемічними складовими мови [35].

Стабільність фрактальної розмірності важлива як для фрагментів пауз, так і для фрагментів мови на інтервалах приблизно 150-200 мс. На даному етапі дослідження вибір оптимального порогу вікна сканування при оцінці фрактальної розмірності здійснюється на підставі достатньої точності ідентифікації пауз особи. Якщо необхідно, послідовність операцій щодо визначення вікна фрактальної розмірності та обчислення його параметрів може бути повторена. Таким чином, відокремлення пауз та мови відбувається шляхом оцінювання точності виявлення пауз на основі встановленого порогу [19, 20].

У дослідженні, спрямованому на визначення оптимальних параметрів ознак для прийняття рішень, використовувалося 300 мовних фрагментів, спеціально відібраних для налаштування параметрів ознак. Результати дослідження дозволили визначити раціональні параметри діапазону розмірів

мовного вікна від 20 до 40 мс, при чому середньоквадратичне відхилення обчисленої фрактальної розмірності становило  $\partial D = 0,01 - 0,08$ .

Під час оцінювання фрактальної розмірності діапазон розмірів вікна для визначення фрактальної розмірності коливався від 20 до 40 мс. Після багатьох досліджень та проведених експериментів початкове значення 20 мс було обрано не випадково. Це значення вибрано з урахуванням нелінійного характеру графіку до цієї конкретної кількості точок. Представлені графіки (Рис. 3.16) показали, що часове вікно для визначення фрактальної розмірності у розмірі 20 мс є оптимальним для сегментації мовного файлу на вокалізовані та невокалізовані фрагменти.

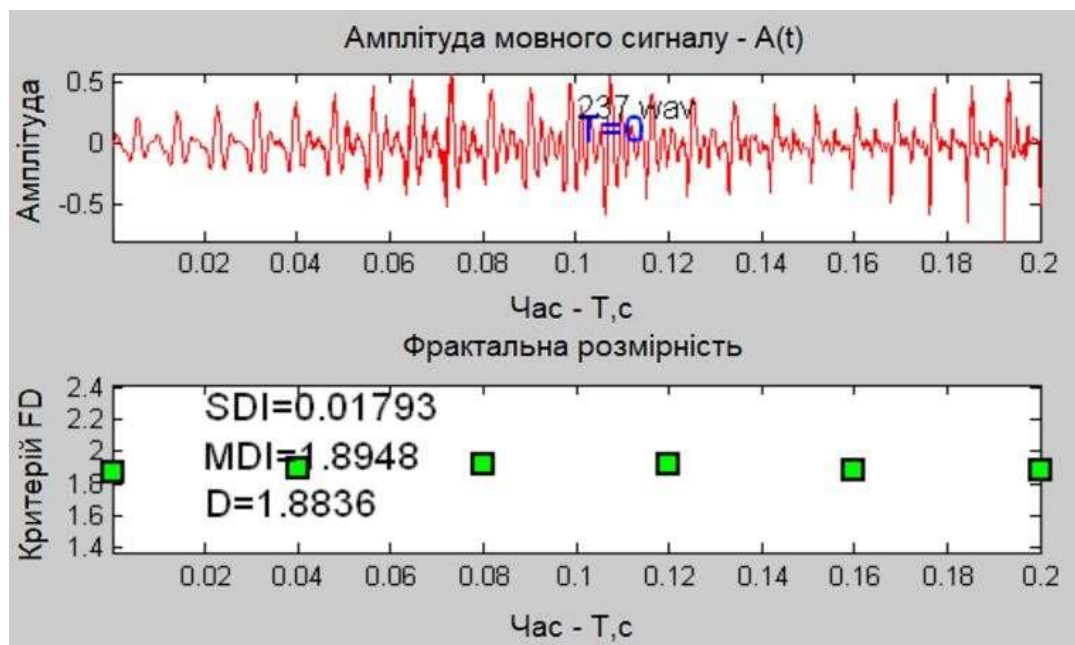


Рис. 3.16. Типовий розподіл фрактальної розмірності для фрагмента мовного файлу без пауз [35].

Середньоквадратичне відхилення фрактальної розмірності на таких фрагментах у середньому не перевищує 0,02. Суттєві зміни фрактальної розмірності відбуваються для фрагментів промови, особливо на ділянках мовних

сигналів, які можна ідентифікувати з фонемічними складовими мови. Значні зміни величини фрактальної розмірності також можуть відбутися на фрагментах пауз, зокрема при візуально помітних змінах характеристик пауз [15 , 16].

Для проведення порівняльного аналізу методів сегментації мовних сигналів були реалізовані наступні методи: покадровий; сингулярний; відхил від середнього; блокування чорної області; аналізу спектральної форми, а також запропонований в розділі 3 власний метод. У дослідженні взяли участь 50 осіб (чоловіків і жінок з різними мовними характеристиками), які вимовляли однаковий набір слів. В створеному тестовому наборі автоматично була виконана розмітка на вокалізовані фрагменти та паузи. При порівнянні всі методи використовували свої стандартні налаштування, рекомендовані розробниками. Кожен метод виконував сегментацію розміченого мовного сигналу, і для кожного поміченого фрагменту встановлювалося значення 0 або 1 в залежності від співпадіння розмітки та рішення методу сегментації. При визначенні помилок 1 та 2 роду проводився аналіз і підсумок відповідності значень попередньої розмітки 0 та 1, встановлених кожним методом сегментації, відносно загальної кількості пауз та вокалізованих фрагментів. Результати дослідження представлені в Таблиці 3.11.

Таблиця 3.11.

## Результати дослідження ефективності методів сегментації МС

Метод	Похибка 1-го роду	Похибка 2-го роду
Покадровий	0,177	0,1
Сингулярний	0,133	0,1
Відхилу від середнього	0,180	0,17
Блокування чорної області	0,156	0,11
Аналізу спектральної форми	0,141	0,1
Запропонований метод	0,108	0,1

Отже, розроблений метод сегментації мовних сигналів виявився більш ефективним у виконанні поставлених задач і може бути рекомендований для впровадження в розроблювану систему ідентифікації особи [14, 15].

Розроблений метод сегментації мовних сигналів, оснований на аналізі фрактальної розмірності, виявився ефективним і просувається як потенційно важливий інструмент у радіоінженерії. Застосування методів фрактальної динаміки в радіоінженерії може включати в себе аналіз та обробку різноманітних сигналів, таких як радіохвильові сигнали, радіочастотні сигнали та інші.

Зокрема, використання фрактальної розмірності для сегментації мовних сигналів може знайти застосування в системах радіоінженерії для розпізнавання і ідентифікації голосових команд, що важливо у визначених видах технічних інтерфейсів.

Крім того, відомості про фрактальну розмірність можуть бути корисними при обробці радіохвильових зображень, у визначенні їх структури та характеристик. Це може мати значення в області радіолокації, де точні та швидкі алгоритми обробки сигналів грають ключову роль у визначенні розташування та ідентифікації об'єктів.

Отже, застосування розробленого методу фрактальної сегментації мовних сигналів у радіоінженерії може відкривати нові можливості для вдосконалення систем ідентифікації та обробки сигналів, покращуючи їхню точність та продуктивність.

Цей підхід також може знайти застосування в аналізі та оптимізації бездротових комунікаційних систем. Аналізуючи фрактальні властивості сигналів у бездротових мережах, можна визначити оптимальні параметри передавання даних, сприяючи покращенню якості зв'язку та оптимізації ресурсів.

Додатково, використання методів фрактальної динаміки може стати корисним у сфері розробки антен та передавачів. Аналізуючи фрактальні характеристики радіохвильових сигналів, інженери можуть оптимізувати антени

для підвищення ефективності передачі сигналів та зменшення електромагнітних спотворень [10].

Загалом, використання фрактальних методів у радіоінженерії відкриває широкий спектр можливостей для покращення технологій бездротового зв'язку, розробки антен та оптимізації сучасних систем зв'язку. Результати дослідження в області фрактальної динаміки мовлять про потенційне впровадження цих методів у різноманітні рішення радіоінженерних завдань.

У підсумку, розроблений метод сегментації мовних сигналів, оснований на фрактальній динаміці, виявився ефективним і відкриває перспективи для застосування в радіоінженерії. Цей метод може бути корисним в системах розпізнавання та ідентифікації особи, в технічних інтерфейсах та інших областях. Застосування фрактальних методів також обіцяє покращення бездротових комунікацій, аналізу сигналів у радіолокації та оптимізації передавачів та антен. Ці дослідження сприяють розвитку нових технологій та покращують якість та продуктивність радіоінженерних систем.



## ВИСНОВКИ

1. Наведені основні поняття фрактальних множин та прикладів їхт реалізації.
2. Проаналізовано множини Мандельброта.
3. Описані основні методи визначення розмірності фрактальних множин.
4. Відмічена роль клітинних автоматів в дослідженні фрактальної динаміки.
5. Проаналізовано системи ітерованих функцій.
6. Показано доцільність використання ланцюгових дробів при вивченні функцій Вейерштраса.
7. Досліджено використання фрактальної динаміки для аналізу довжини берегової лінії.
8. Досліджено основні особливості використання фрактальної динаміки в радіоінженерії.

## ДЖЕРЕЛА ТА ЛІТЕРАТУРА

1. Акустико-емісійна діагностика конструкцій. М.: Радіо та зв'язок 2000. 280с.
2. Арістов А. О. Теорія квазіклітинних мережей: наукова монографія: М.:МІСіС,2014. 140 с.
3. Бендат Дж. Застосування кореляційного та спектрального аналізу. М.: Світ, 1983. 312 с.
4. Бендат Дж., Прикладний аналіз випадкових даних/Дж. Бендат А. Пірсол. - М.: Світ 1989. 540 с.
5. Афанасьєв В.М., Юзбашев М.М. Аналіз часових рядів та прогнозування – Москва: «Фінанси та статистика», 2001. 231с.
6. Вурста С.Ю. Літнарівич Р.М. Побудова фрактальних поверхонь в комп'ютерній графіці. МЕНУ Рівне 2010. 250 с.
7. Грибунін, В.Г. Введення в аналіз даних із застосуванням неперервного вейвлет-перетворення. СПб.: АВТЕКС 2005. 30 с.
8. Ковзанка А.Б., Хасселблат Б. Введення у сучасну теорію динамічних систем. Твер: Факторіал 1999. 767 с.
9. Козлов П.В. Вейвлет-перетворення та аналіз часових рядів/П.В. Козлов Б.Б. Вісник КРСУ. № 2, 2002.
- 10.Купер Дж. Імовірнісні методи аналізу сигналів та систем. Макгіллем. М.: Світ 1989. 376 с.
- 11.Максимов В. П. Вимірювання обробка та аналіз швидкозмінних процесів в машинах / В. П. Максимов І. В. Єгоров В. А. Карасьов. М.: Машинобудування 1987. 208 с.
- 12.Марпл С.Л. Цифровий спектральний аналіз та його застосування. М.: Світ 1990. 584 с
- 13.Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифрова обробка сигналів. М.: Зв'язок 1979. 416 с.

- 14.Отнес Р. Прикладний аналіз часових рядів. М.: Світ 1982. 428 с.
- 15.Отнес Р. Прикладний аналіз часових рядів/Р.Отнес Л Еноксон. М.: Світ 1982. 428 с.
- 16.Петухов А. П. Періодичні дискретні сплески / А.П. Півнів // Алгебра та аналіз. 1996. С. 151-183.
- 17.Пітерс Е. Фрактальний аналіз фінансових ринків: Застосування теорії хаосу в інвестиціях та економіці / Пітерс Е.: Інтернет-Трейдинг 2004. 304с.
- 18.Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова 1998. 47 с.
- 19.Серих С. О. Оцінка можливостей постановників завад та впливу їх енергетичних показників на функціонування засобів зв'язку / С.О.Серих Ю.І. Катков // Сучасний захист інформації. №1, 2017. С.66-72.
- 20.Серих С. О. Скритність повідомлень в мережах із радіодоступом та напрямки її підвищення. Сучасний захист інформації. №2. 2015. С. 77-83.
- 21.Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории М. : Постмаркет 2000. 352 с.
- 22.Старченко Н.В. Індекс фрактальності та локальний аналіз хаотичних часових рядів / Дисертація на здобуття наукового ступеня к.т.н. М.: Московський інженерно-фізичний інститут 2005. 122 с.
- 23.Стаховський І.Р. Вейвлетний аналіз тимчасових сейсмічних рядів. ДАН Росії. Т.350, № 3, 1996. С. 393-396.
- 24.Стрихалюк Б.М. Фрактальний спосіб прогнозування потоків у мультисервісних мережах // Радіоелектроніка та телекомунікації. Вісник НУ «Львівська політехніка». 2009. № 645. С. 88-95.
- 25.Сучасні методи дослідження нелінійних динамічних систем. Посібник для студентів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 151

- «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Краматорськ : ДДМА, 2018. 120 с.
26. Гофолі Т. Марголус Н. Машина клітинних автоматів: Світ 1991. 96 с.
27. Трохимчук П. П. Нелінійні динамічні системи. Луцьк : Вежа-Друк 2015. 275 с. 2-е вид. Луцьк : Вежа-Друк 2020. 316 с
28. Федер Е. Фрактали. М.: Мир 1991. 254с.
29. Чураков Є. П. Прогнозування економетричних часових рядів: навчальний посібник/Є. П. Чураков. М.: Фінанси та статистика 2008. 208 с.
30. Шоберг А.Г. Сучасні методи обробки зображень: модифіковане вейвлет-перетворення. Хабаровськ: Вид-во Тихоокеан. держ. ун-ту 2014. 125 с.
31. Andrade J.S. Saulo Jr. Reis D.S. et all. Ubiquitous fractal dimension of optimal paths // Computing in Science and Engineering. - 2011. - V. 13 No. 1. - P. 74-81. - [www.comphys.ethz.ch/hans/p/528.pdf](http://www.comphys.ethz.ch/hans/p/528.pdf).
32. Anis, A.A. Lloyd E.H. (1976) The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands. Peters E.E. (1994) Fractal Market Analysis. Wiley New York. ISBN 0-471-5854-6.
33. Apostolos L. Simulating Urban Growth through Cellular Automata: A New Way of Exploring the Fractal Nature of Urban Systems. <http://users.auth.gr/~alagaria/SI-MULATION.pdf>.
34. Batty M. Cities as Fractals: Simulating Growth and Form // Fractal and Chaos / Ed. By A.Grilly R Earnshaw H. Jones. N.Y.: Springer 1991. P. 43-69.
35. Batty M. Longley P. Fotheringham A. Urban growth and form: scaling fractal geometry and diffusion-limited aggregation // Environment and Planning. - 1989. - A 21. P. 1447-1472.
36. Benguigui L. Daoud M. Is the Suburban Railway System a Fractal? // Geographical Analysis. - 1991. - V. 23. - P. 363-368.
37. Benguigui L. Daoud M. Is the Suburban Railway System a Fractal? // Geographical Analysis. - 1991. - V. 23 № 4. - P. 362-368.

38. Bourke P. Fractal Dimension Calculator. [local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracdi](http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracdi).
39. Braess's paradox. - [en.wikipedia.org/wiki/Braess%27\\_paradox](http://en.wikipedia.org/wiki/Braess%27_paradox).
40. Chen Y. Luo J. The fractal features of the transport network of Henan Province // J. of Xinyang Teachers College. - 1998. - V. 11 No 2. - P. 172-177.
41. Cieplak M. Maritan A. Banavar J. Invasion percolation and Eden growth: Geometry and universality // Phys. Rev. Lett. - 1996. - V. 76. - P. 3754-3757.
42. Cieplak M. Maritan A. Banavar J. Optimal paths and domain walls in the strong disorder limit // Phys. Rev. Lett. - 1994. - V. 72. - P. 2320-2324.
43. Cieplak M. Maritan A. Banavar J. Optimal paths and domain walls in the strong disorder limit // Phys. Rev. Lett. - 1994. - V. 72. - P. 2320-2324.
44. Dobrin R. Duxbury P.M. Minimum Spanning Trees on Random Networks // Phys. Rev. Lett. - 2001. - V. 86. - P. 5076.
45. Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // Mathematische Annalen. - 1919. - V. 79. - P. 157-179.
46. Lu Y, Tang J. Fractal dimension of a transportation network and its relationship with urban growth: a study of the Dallas - Fort Worth area // Environment and Planning B: Planning and Design. - 2004. - V. 31 No 6. - P. 895-911.
47. Mandelbrot B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension // Science. Vol. 156, 1967. P. 636-638.
48. Morency C. Chapleau R. Fractal geometry for the characterisation of urban-related states: Greater Montreal Case // HarFA - Harmonic and Fractal Image Analysis (e-journal). 2003. P. 30-34. <http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci> ([www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download\\_ejournal/09...](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/09...)).
49. Rodin V. Rodina E. The fractal dimension of Tokyo's streets // Fractals. - 2000. - V. 8. - P. 413-418.

50. Roy A. Perfect E. Dunne W. M. McKay L. D. (2007) Fractal characterization of fracture networks: An improved box-counting technique *J. Geophys. Res.* 112 B12201 doi:10.1029/2006JB004582.
51. Shen G. A fractal dimension analysis of urban transportation networks // *Geographical and Environmental Modelling*. - 1997. - V. 1. - P. 221-236.
52. Song C. Havlin S. Makse H.A. Origins of fractality in the growth of complex networks // *Nature Physics*. - 2006. - V. 2. - P. 275-281.
53. Song C. Havlin S. Makse H.A. Self-similarity of complex networks // *Nature (London)*. - 2005. - V. 433. - P. 392- 395.
54. Sun Z. Jia P. Kato H. Hayashi Y. Distributive Continuous Fractal Analysis for Urban Transportation Network // *Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*. - 2007. - Vol. 6. - P. 1519-1531. - [www.u-nagoya-u.ac.jp/sustain/paper/2007/kokusai/...](http://www.u-nagoya-u.ac.jp/sustain/paper/2007/kokusai/)
55. Tang J. Evaluating the relationship between urban road pattern and population using fractal geometry. - [www.ucgis.org/summer03/studentpapers/junmeitang.pdf](http://www.ucgis.org/summer03/studentpapers/junmeitang.pdf).
56. Werner, D. H. On the Synthesis of Fractal Radiation Patterns / D. H. Werner P. L. Werner // *Radio Sci.* – 1995. – Vol. 30 No.1 – P.29-45.

### **Анотація**

Проаналізовано основні поняття теорії фракталів та фрактальної динаміки. Наведені основні типи фракталів та фрактальних множин. Показана роль розмірності та методи її визначення. Досліджено використання методів фрактальної динаміки для визначення берегової лінії та розв'язання задач радіоінженерії.

Ключові слова: множини Мандельброта, криві Коха, килим Серпінського, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, топологічна розмірність, ланцюгові дроби, радіоінженерія.

### **Summary**

The main concepts of the theory of fractals and fractal dynamics are analyzed. The main types of fractals and fractal sets are given. The role of dimensionality and methods of its determination are shown. The use of fractal dynamics methods for determining the coastline and solving radio engineering problems was investigated.

Key words: Mandelbrot sets, Koch curves, Sierpinski carpet, Hausdorff-Bezykovich dimension, topological dimension, chain fractions, radio engineering.