

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики  
імені А.В. Свідзинського**

На правах рукопису

**ПАВЛОВСЬКА ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА**

**ХАОС В МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМАХ**

Спеціальність 104 «Фізика та астрономія»  
Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»  
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

**САХНЮК ВАСИЛЬ ЄВГЕНОВИЧ,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № \_\_\_\_\_

засідання кафедри теоретичної та  
комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського

від \_\_\_\_\_ 2023

Завідувач кафедри

доц. Сахнюк В.Є. \_\_\_\_\_

**ЛУЦЬК – 2023**

## АНОТАЦІЯ

### **Павловська Юлія Володимирівна. Хаос в маятникових системах.**

У кваліфікаційній роботі досліджується питання стійкості руху механічних систем з одним ступенем вільності, та, зокрема, перехід до стану хаосу в маятникових системах.

У загальному випадку математичні моделі коливальних процесів, в переважній більшості, приводять до нелінійних диференціальних рівнянь і відповідно до нелінійних коливань. Такі системи можуть проявляти досить цікаву та незвичайну поведінку. Для того щоб виявити всі ці особливості коливального процесу в роботі розв'язуються нелінійні рівняння для плоского маятника із затуханням та наявністю зовнішньої гармонічної сили. Показано, що залежно від відношення амплітуди зовнішньої сили до ваги тіла (параметр  $\gamma$ ) в системі може відбуватися подвоєння амплітуди, яке зі збільшенням параметра  $\gamma$  повторюється. В результаті при скінченному  $\gamma$  в системі настає стан хаосу, коли повторюваність руху вже не відбувається.

Виконані в роботі розрахунки супроводжуються відповідним моделюванням в СКМ Maple, одержані моделі для спостереження еволюції елемента площі у фазовій площині, що відображає похибку в початкових умовах, побудовані відповідні графіки залежності кута від часу, які чітко демонструють подвоєння періоду, а також створені відповідні анімації досліджуваних моделей, які дозволяють спостерігати за самим процесом.

**Ключові слова:** механічна система, плоский маятник, стійкість руху, подвоєння періоду, хаос в механічних системах.

## SUMMARY

### **Pavlovs'ka Yulia Volodymyrivna. Chaos in pendulum systems.**

The qualification work examines the issue of stability of motion of mechanical systems with one degree of freedom, and, in particular, the transition to a state of chaos in pendulum systems.

In the general case, the corresponding mathematical models of oscillatory processes, in the vast majority, lead to nonlinear differential equations and, accordingly, to nonlinear oscillations. Such systems can exhibit quite interesting and unusual behavior. In order to reveal all these features of the oscillatory process, nonlinear equations for a plane pendulum with damping and the presence of an external harmonic force are solved in the paper. It is shown that depending on the ratio of the amplitude of the external force to the body weight (parameter  $\gamma$ ), a doubling of the amplitude can occur in the system, which is repeated as the parameter  $\gamma$  increases. As a result, at a finite  $\gamma$ , a state of chaos occurs in the system, when the repeatability of movement no longer occurs.

The calculations performed in the work are accompanied by the appropriate modeling in SCM Maple, models for observing the evolution of the area element in the phase plane, reflecting the error in the initial conditions, were obtained, the corresponding graphs of the dependence of the angle on time, which clearly demonstrate the doubling of the period, and also the corresponding animations of the studied models were created, which allow one to observe the process itself.

**Keywords:** mechanical system, plane pendulum, stability of motion, period doubling, chaos in mechanical systems....

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
РОЗДІЛ 1 ПРОБЛЕМА СТІЙКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ .....	9
1.1. Загальні властивості стійкості руху.....	9
1.2. Стійкість руху механічних систем.....	12
1.2.1. Лінійний аналіз стійкості .....	12
1.2.2. Гармонічний осцилятор.....	16
1.2.3. Плоский маятник.....	18
1.2.4. Осцилятор із згасанням .....	21
РОЗДІЛ 2 ВИКОРИСТАННЯ СКМ MAPLE ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ.....	24
2.1. Гармонічний осцилятор .....	24
2.2. Математичний маятник.....	29
2.3. Маятник із загасанням.....	33
2.4. Поведінка в околі нерухомих точок .....	38
2.4.1. Поведінка в околі точки із дійсними власними значення протилежаного знаку .....	38
2.4.2. Поведінка в околі точки із уявними власними значення протилежаного знаку.....	41
2.4.3. Поведінка в околі точки із комплексно спряженими власними значення і від’ємною дійсною частиною.....	44
РОЗДІЛ 3 ХАОС В МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМАХ.....	48
3.1. Нелінійність рівнянь руху, як необхідна умова виникнення хаосу .....	48
3.2. Маятник із затуханням та періодичною зовнішньою силою .....	50
3.3. Можливі типи руху маятника із тертям та зовнішньою силою.....	53
3.3.1. Лінійний осцилятор.....	53
3.3.2. Слабко нелінійний осцилятор.....	55
3.4. Хаос в маятникових системах .....	57

	5
3.4.1. Подвоєння періоду .....	59
3.4.2. Подальше подвоєння періоду, рух до хаосу.....	61
ВИСНОВКИ.....	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	70

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Коливання є одним із найпоширеніших рухів у фізиці та лежать в основі багатьох корисних технологічних процесів. Уміння досліджувати ці процеси на основі створення та вивчення їх математичних моделей шляхом зміни відповідних параметрів базується в першу чергу на глибокому знанні теорії коливань – науки про основні закономірності коливальних процесів. Коливання – як процес почергового зростання та зменшення величини певного параметра фізичної системи, яку досліджують, порівняно з його стаціонарним значенням, мають свою широку різноманітність.

Звичайно найпростішими є коливальні процеси, що описуються лінійними рівняннями, в багатьох випадках такі задачі вдається довести до кінцевого аналітичного розв'язку. Однак, в реальності, лінійні коливання реалізуються не так часто і є радше певною ідеалізацією, виправданою переважно в асимптотичних випадках. В загальному випадку відповідні математичні моделі коливальних процесів, в переважній більшості, приводять до нелінійних диференціальних рівнянь і відповідно до нелінійних коливань. Такі системи можуть проявляти досить цікаву та незвичайну поведінку. Однак, для того щоб виявити всі ці особливості в коливальному процесі нелінійних систем необхідно розв'язати відповідні рівняння. На жаль, при розв'язанні таких рівнянь виникають труднощі і отримати їх розв'язок у звичній формі та загальноприйнятими методами, найчастіше, не вдається [1-4].

В сучасному світі, в епоху швидкого розвитку комп'ютерних технологій та їх широкого впровадження у всі сфери діяльності людини, а особливо сферу наукових досліджень, можливості дослідження нелінійних систем, вивчення їх математичних моделей є значно ширшими і дозволяють виявити цікаві, а інколи й неочікувані, закономірності в поведінці таких систем. Існують численні прикладні програми, що можна використовувати для дослідження нелінійних динамічних систем. Проте, найпотужнішою, з широкими графічними можливостями для моделювання руху досліджуваної системи є система

комп'ютерної математики Maple (СКА Maple) [5-9]. Саме ця система і використовується в нашому дослідженні, як основний інструмент для вивчення нелінійних коливань на прикладі, на перший погляд, простої системи – математичного маятника, але, як виявляється, ця система демонструє дуже цікаву поведінку в залежності від зовнішньої сили та початкових умов. При певних значеннях параметрів можемо спостерігати подвоєння періоду, яке зрештою приводить до хаосу. Такі самі ефекти можуть проявлятися і в багатьох системах зовсім немеханічної природи. Тому вивчення цих процесів на прикладі простої механічної системи є хорошим містком для переходу, перенесення відповідних результатів до інших систем, з подібними властивостями, у фізиці, біології, хімії і т. д.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає у вивченні особливостей нелінійних коливань в маятникових системах, умов переходу в стан хаосу та моделювання відповідних процесів в СКМ Maple.

Для досягнення мети були поставлені наступні завдання:

- сформулювати загальну схему дослідження стійкості руху в механічних системах;
- дослідити стійкість нелінійних коливань в маятникових системах;
- змодельовати еволюцію похибки в початкових умовах, використовуючи СКМ Maple;
- з'ясувати умови виникнення хаосу в нелінійних системах;
- представити теоретичне дослідження подвоєння періоду маятникових систем;
- продемонструвати виникнення хаосу в коливальних системах;
- змодельовати перехід до хаосу маятникових систем в СКМ Maple;

**Об'єктом дослідження** є нелінійні коливання в маятникових системах.

**Предметом дослідження** є стійкість руху та умови виникнення хаосу в маятникових системах.

**Наукова новизна одержаних результатів.** У кваліфікаційній роботі систематизовано основні підходи до вивчення стійкості руху механічних систем. Продемонстровано можливості СКМ Maple для моделювання стійкості руху механічних систем та з'ясовано умови виникнення хаосу. Знайдено значення керуючого параметра, при якому плоский маятник переходить в стан хаосу та здійснено моделювання такого руху.

**Практичне значення одержаних результатів.**

Одержані в роботі теоретичні результати можуть бути використані при експериментальному дослідженні проблем виникнення хаосу в маятникових системах. Представлена схема дослідження відповідних моделей в СКМ Maple може використовуватись при дослідженні стійкості і хаосу в інших механічних системах, так і системах немеханічного характеру. Особливу користь від представленого в роботі дослідження можуть мати здобувачі освіти, які вивчають механічні коливання.



# РОЗДІЛ 1

## ПРОБЛЕМА СТІЙКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

### 1.1. Загальні властивості стійкості руху

В експериментальних дослідженнях для кількісної оцінки якоїсь події часто необхідно мати змогу повторювати її для того, щоб згодом можна було оцінити результати вимірювання за допомогою статистичних методів. Щоб кожне повторення відбулося, якщо це звісно можливо, за тих самих умов, необхідно:

- а) зберігати зовнішні умови, за яких воно відбувається (це може бути, наприклад, сила тертя);
- б) завжди починати з тих самих значень динамічних змінних (наприклад, для гармонічного осцилятора положення координати  $x$  та швидкості  $v = \dot{x}$ ).

Як у першому, так і в другому випадку відповідні параметри можна налаштувати на одне і теж саме значення лише в межах технічних можливостей. Навіть коли, як буде розглянуто у наступних прикладах, зовнішні умови точно повторюються, залишається неточність у вимірюванні або підготовці початкових умов. Якщо розвиток у часі цієї відмінності в початкових умовах залишається скінченним, тобто він знаходиться у межах точності вимірювання, то такий рух називається стійким (стабільним). Дослідимо трохи детальніше розвиток у часі розкиду початкових умов.

Розглянемо одновимірний рух матеріальної точки. Нехай розв'язок  $x(t)$  із початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0$$

відповідає першій експериментальній реалізації руху. Повторюючи експеримент і починаючи рух з початковими умовами  $\bar{x}(0)$ ,  $\bar{v}(0)$ , близькими до початкових умов  $x_0$ ,  $v_0$ :

$$\bar{x}(0) = x_0 + \delta x_0, \quad \bar{v}(0) = v_0 + \delta v_0,$$

де  $\delta x_0, \delta v_0$  менші від точності похибки приходимо до розв'язку  $\bar{x}(t)$ . Як поводить ся різниця між двома розв'язками

$$\delta x = \bar{x}(t) - x(t) \quad \text{і} \quad \delta v = \bar{v}(t) - v(t)$$

з часом?

Для матеріальної точки з гармонічним потенціалом взаємодії з

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t$$

маємо

$$v(t) = v_0 \cos \omega t - \omega x_0 \sin \omega t.$$

Тоді

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cos \omega t + (\delta v_0/\omega) \sin \omega t, \quad (1.1)$$

$$\delta v(t) = \delta v_0 \cos \omega t - \omega \delta x_0 \sin \omega t, \quad (1.2)$$

тобто для довільного моменту часу неточність залишається величиною того ж порядку, що і на початку

$$|\delta x| \leq |\delta x_0| + |\delta v_0/\omega| \quad \text{і} \quad |\delta v| \leq |\delta v_0| + |\omega \delta x_0|,$$

отже, неточність є обмеженою. Наслідок у дійсності: два однакові осцилятори з дещо відмінними початковими станами (умовами) коливаються завжди в такт.

Іншою є поведінка плоского маятника, рівняння якого має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \text{де} \quad \omega^2 = g/l.$$

Рис. 1.1 узагальнює чисельні результати для еволюції з часом області невизначеності, що має форму прямокутника  $\{x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x, v_0 - \delta v \leq v \leq v_0 + \delta v\}$ , описаного навколо точки  $(x_0, v_0)$ : з часом форма зазначеної області змінюється, так як це зображено на рисунку, при цьому одиницею виміру часу  $t$  є період  $T$  середньої точки, яка рухається у фазовій площині за заштрихованою

траєкторією (енергія, що відповідає довільній точці у прямокутнику, менша від  $E=1,45$ ; граничне значення енергії для обмеженого руху  $E=2$ ). Після достатньо великої кількості періодів обертання середньої точки область невизначеності розподіляється вздовж всієї траєкторії. Це означає, що два однакові маятники, у яких початкові стани лише трохи відрізняються, рухаються цілком не в такт.

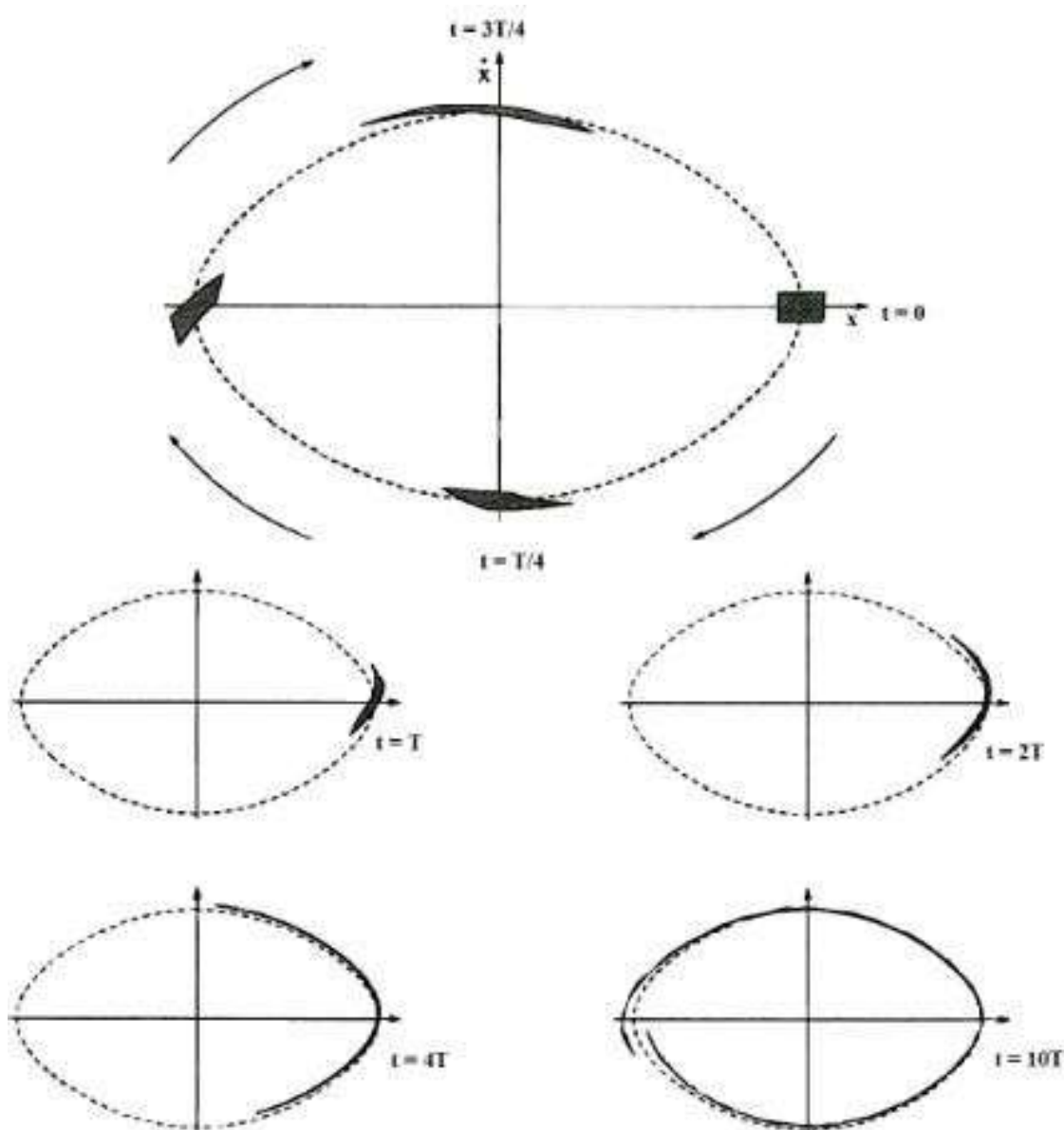


Рис. 1.1. Часова поведінка відхилення початкових значень для плоского маятника.

## 1.2. Стійкість руху механічних систем

### 1.2.1. Лінійний аналіз стійкості

Рівняння руху точки у фазовому просторі – це система диференціальних рівнянь першого порядку [3]

$$\dot{\vec{u}} = \vec{G}(\vec{u}), \quad (1.3)$$

де через  $\vec{u}$  позначено вектор  $(\vec{r}, \vec{v})$ , а  $\vec{G}$  задається рівнянням руху. Наприклад, для системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v}, \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{F}/m, \end{aligned}$$

маємо

$$\vec{G} = (\vec{v}, \vec{F}(\vec{r})/m).$$

Розглянемо зараз близький до  $\vec{u}(t)$  розв'язок  $\vec{u} + \delta\vec{u}$ , для якого маємо

$$\dot{\vec{u}} + \delta\dot{\vec{u}} = \vec{G}(\vec{u} + \delta\vec{u}). \quad (1.4)$$

Нас цікавить: якою буде поведінка  $\delta\vec{u}(t)$  через невеликий проміжок часу? Щоб дати відповідь на це запитання, розкладемо рівність (1.4) за  $\delta\vec{u}$ :

$$\dot{\vec{u}} + \delta\dot{\vec{u}} = \vec{G}(\vec{u}) + (\delta\vec{u}\nabla_u)\vec{G}|_u + \dots$$

Скоротивши перші члени ліворуч і праворуч згідно (1.3), для  $\delta\dot{\vec{u}}$  маємо:

$$\delta\dot{\vec{u}} = (\delta\vec{u}\nabla_u)\vec{G}|_u,$$

або в компонентах

$$\delta\dot{u}_i = \sum_j \delta u_j \frac{\partial G_i}{\partial u_j}.$$

Запровадимо позначення

$$M_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial G_i}{\partial u_j} \quad (1.5)$$

і запишемо рівняння для відхилення  $\delta\vec{u}$  у вигляді

$$\delta\dot{u}_i = \sum_j M_{ij} \delta u_j \quad \text{або} \quad \delta\dot{\vec{u}} = \vec{M} \delta\vec{u}. \quad (1.6)$$

Зауважимо, що хоча ця система рівнянь лінійна стосовно  $\delta u_j$ , матриця  $\vec{M}$  залежить від часу через залежність від  $\vec{u}$ . В загальному випадку поведінка розв'язків є складною. Наприклад, для гармонічного осцилятора ( $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ), загальний розв'язок має вигляд

$$x = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}.$$

Зараз розглянемо лише випадок, коли  $\vec{M}(\vec{u})$  не залежить від часу (t), а це означає, що  $\vec{u}$  не залежить від часу,  $\dot{\vec{u}}=0$ ; отже,  $\vec{u}$  є стаціонарним розв'язком. Такі розв'язки також будемо називати нерухомими точками системи диференціальних рівнянь. Оскільки матриця  $\vec{M}$  не залежить від часу, рівняння (1.6) має розв'язок

$$\delta\vec{u} = \exp(\vec{M}t) \delta\vec{u}_0, \quad (1.7)$$

де  $\exp(\vec{M}t)$ , визначається рядом Тейлора [10]  $\vec{I} + \vec{M}t + \frac{1}{2}(\vec{M}t)^2 + \dots$ , а  $\delta\vec{u}_0$  задає відхилення початкових умов. Розв'язок (1.7) зручно представити, використовуючи власні значення  $\lambda_i$  і власні функції  $\vec{w}_i$  матриці  $\vec{M}$ :

$$\vec{M}\vec{w}_i = \lambda_i \vec{w}_i. \quad (1.8)$$

Оскільки матриця  $\vec{M}$  у загальному випадку несиметрична, її власні значення і власні вектори – комплексні (у цьому випадку  $\vec{w}_i^*$  також є власним вектором, що відповідає власному значенню  $\lambda_i^*$ ). Це потрібно враховувати, розкладаючи  $\delta\vec{u}_0$  за лінійно незалежними (проте не обов'язково ортогональними) векторами  $w_i$ :

$$\delta\vec{u}_0 = \sum_i c_i \vec{w}_i. \quad (1.9)$$

Оскільки  $\delta\vec{u}_0$  – дійсна величина, то коефіцієнти  $c_i$ , які визначаються з рівняння (1.6), також, взагалі кажучи, повинні бути комплексні. Враховуючи, що  $\vec{M}^n \vec{w}_i = \lambda^n \vec{w}_i$ , з (1.9) отримуємо часову залежність  $\delta\vec{u}$

$$\delta\vec{u} = \exp(\vec{M}t) \sum_i c_i \vec{w}_i = \sum_i c_i \exp(\lambda_i t) \vec{w}_i \quad (1.10)$$

Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, відхилення у початкових умовах необмежено зростає, причому найбільша додатна частина власного значення (позначимо її через  $\lambda_1$ ) дає головний внесок у поведінку при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\delta\vec{u} \cong c_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{w}_1.$$

Для прикладу розглянемо фазову площину  $(x, v)$  одновимірної системи. З рівнянь

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = F(x, v)/m$$

згідно з (1.3) отримуємо матрицю

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Існують два власні значення  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , а також відповідні їм лінійно незалежні власні вектори  $\vec{w}_1$  і  $\vec{w}_2$ , які в нерухомих точках не залежать від часу. У цих величинах  $\delta\vec{u}$  запишеться так:

$$\delta\vec{u} = c_1 \exp(\lambda_1 t) \vec{w}_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) \vec{w}_2. \quad (1.11)$$

Обидві величини  $\lambda_i$ , є або дійсні, або комплексно спряжені, оскільки матриця  $\vec{M}$  є дійсною матрицею. Для  $t \rightarrow \infty$  можна виділити шість таких випадків (див. Рис. 1.2):

- а)  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ :  $|\delta\vec{u}|$  необмежено зростає.  $\vec{u}$  – не стійка точка;
- б)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ : для  $c_1 \neq 0$   $|\delta\vec{u}|$  зростає, для  $c_1 = 0$   $|\delta\vec{u}| \rightarrow 0$ .  $\vec{u}$  – сідлова точка;
- в)  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ :  $|\delta\vec{u}| \rightarrow 0$ .  $\vec{u}$  – стійка точка;
- г)  $\lambda_1, \lambda_2$  лише уявні ( $\lambda_2 = \lambda_1^*$ ):  $\vec{u}$  – залишається обмеженим;
- д)  $\lambda_1, \lambda_2$  комплексно спряжені і  $\text{Re}\lambda_i < 0$ :  $|\delta\vec{u}| \rightarrow 0$ .  $\vec{u}$  є кінцевою точкою руху  $\delta\vec{u}$  по спіралі, що скручується;
- е)  $\lambda_1, \lambda_2$  комплексно спряжені і  $\text{Re}\lambda_i > 0$ :  $|\delta\vec{u}| \rightarrow \infty$ .  $\vec{u}$  є початковою точкою руху  $\delta\vec{u}$  по спіралі, що розкручується.

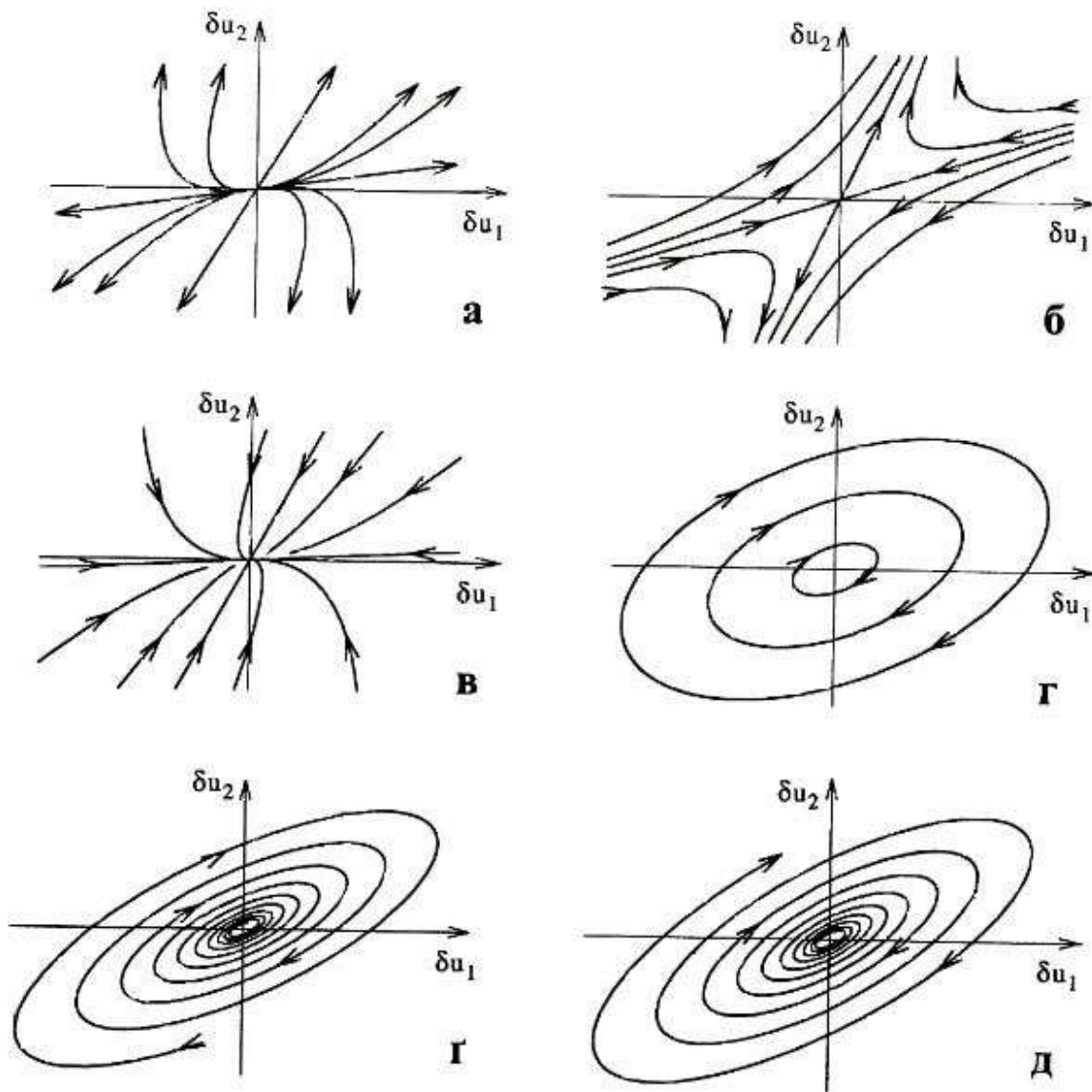


Рис. 1.2. Поведінка в околі нерухомих точок

Це загальне обговорення проілюструємо тепер на прикладі трьох систем.

### 1.2.2. Гармонічний осцилятор

Рівняння руху одновимірного гармонічного осцилятора має вигляд

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.12)$$

Домножимо рівняння (1.12) на масу ( $m$ ) та перенесемо другий доданок в праву частину, отримаємо вираз для сили

$$m\ddot{x} = F = -m\omega^2 x. \quad (1.13)$$

Із цього виразу отримуємо матрицю

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лінійний аналіз стійкості в цьому випадку можна провести глобально (тобто без введення нерухомих точок), оскільки матриця  $\vec{M}$  не залежить від  $\vec{u} = (x, v)$ , а, отже, і від часу  $t$ , тобто для всіх точок фазової площини маємо:

$$\delta\dot{x} = \delta v,$$

$$\delta\dot{v} = -\omega^2 \delta x.$$

Це особливість гармонічного осцилятора. З рівняння  $\det(\lambda \vec{I} - \vec{M}) = 0$  знаходимо власні значення. Матриця  $\vec{I}$  – одинична матриця, тобто

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{pmatrix}\right),$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Оскільки матриця  $\vec{M}$  є дійсною, то розв'язки повинні бути або обидва дійсними, або комплексно спряженими. У нашому випадку розв'язки є комплексно спряженими, тобто  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ . Це відповідає випадкові г) наведеного



вище загального аналізу (див. Рис. 1.2, г).

Знайдемо зараз відповідні власні вектори, використовуючи рівняння (1.8):

$$\vec{M}\vec{\omega}_i = \lambda_i\vec{\omega}_i$$

$$\lambda_1 = -i\omega, \lambda_2 = -i\omega, \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Перемноживши отримаємо систему з двох лінійних рівнянь

$$y = -i\omega x,$$

$$-\omega^2 x = -i\omega y.$$

Умова існування ненульових розв'язків:

$$\begin{vmatrix} i\omega & 1 \\ -\omega^2 & i\omega \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\omega^2 + \omega^2 = 0$$

як бачимо виконується. Змінну  $x$  ми можемо вибирати довільно, а  $y = -i\omega x$ .

Таким чином, власний вектор

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ -i\omega x \end{pmatrix}.$$

Віднормуємо його на 1, тобто  $|\vec{\omega}_1| = 1$ .

$$x^2 + \omega^2 x^2 = 1,$$

$$x^2 = \frac{1}{1+\omega^2}, x = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Отже, власний вектор  $\vec{\omega}_1$  і, відповідно,  $\vec{\omega}_2$  дорівнюють:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \vec{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}$$

Як ми бачимо, власні вектори так само комплексно спряжені, як і власні значення.

З відхилення у початкових умовах

$$\delta \vec{u}_0 = (\delta x_0, \delta v_0) = 2\text{Re}(c_1 \vec{\omega}_1) = (2\text{Re}c_1, -2\omega \text{Im}c_1)(1 + \omega^2)^{1/2}$$

отримуємо

$$c_1 = (\delta x_0 - i \delta v_0 / \omega) (1 + \omega^2)^{1/2}$$

і, згідно (1.11), задану вже в (1.1), (1.2) часову залежність  $\delta \vec{u}$ :

$$\delta \vec{u} = (\delta x, \delta v) = ((\delta x_0 \cos \omega t + (\delta v_0 \sin \omega t) / \omega), (\delta v_0 \cos \omega t - \delta x_0 \omega \sin \omega t));$$

$\delta \vec{u}$  залишається обмеженим, незалежно від  $\vec{u} = (x, v)$ .

### 1.2.3. Плоский маятник

Рівняння руху плоского маятника має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi \equiv \ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad \varphi \equiv x. \quad (1.14)$$

Домножимо рівняння (1.14) на масу (m) та перенесемо другий доданок в праву частину, отримаємо вираз для сили

$$F = -m\omega^2 \sin x \quad (1.15)$$

плоского маятника. Із отриманого рівняння отримуємо

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи із гармонічним осцилятором, матриця  $\vec{M}$  залежить від  $\vec{u} = (x, v)$ , а, отже, і від часу. Тому спочатку шукаємо стаціонарні розв'язки системи рівнянь  $\dot{\vec{u}} = 0$ . Для  $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$  знаходимо обидві нерухомі точки

$$(x, v) = (0, 0) \text{ і } (x, v) = (\pi, 0).$$

Відстань між близькими розв'язками  $(\delta x, \delta v)$  залежить від часу згідно з (1.6), тобто

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \delta v, \\ \delta\dot{v} &= -\omega^2 \cos x \delta x.\end{aligned}$$

Для нерухомої точки  $(0, 0)$  матриця  $\vec{M}$  має ідентичний вигляд до гармонічного осцилятора, тобто

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи результати для осцилятора, запишемо власні значення для цього випадку

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega,$$

та власні вектори

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \vec{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}.$$

У деякому околі цієї нерухомої точки різниця у початкових значеннях не збільшується (рис. 1.2, г, порівнюючи з осцилятором). У межах лінійного аналізу стійкості нічого не можна сказати про розмір цього околу.

Для другої нерухомої точки  $(\pi, 0)$  маємо:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи рівняння  $\det(\lambda \vec{I} - \vec{M}) = 0$  знаходимо власні значення. Матриця  $\vec{I}$  – одинична матриця, тобто

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \left( \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -\omega^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega.$$

Знайдемо відповідні власні вектори, використовуючи рівняння (1.8):

$$\vec{M}\vec{\omega}_i = \lambda_i\vec{\omega}_i.$$

$$\lambda_1 = \omega, \lambda_2 = -\omega, \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Перемноживши отримаємо систему з двох лінійних рівнянь

$$y = \omega x,$$

$$\omega^2 x = \omega y.$$

Умова розв'язку

$$\begin{vmatrix} \omega & -1 \\ \omega^2 & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\omega^2 + \omega^2 = 0.$$

Умова існування не нульових розв'язків виконується. Змінну  $x$  ми можемо

Вибирати довільно, а  $y = \omega x$ . Таким чином, власний вектор  $\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ \omega x \end{pmatrix}$

Віднормуємо його на 1, тобто  $|\vec{\omega}_1| = 1$ .

$$x^2 + \omega^2 x^2 = 1,$$

$$x^2 = \frac{1}{1+\omega^2}, x = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Отже, власний вектор  $\vec{\omega}_1$ , і, відповідно,  $\vec{\omega}_2$  дорівнюють:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \vec{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

При відхиленні  $\delta x_0$  від прямовисного положення  $x = \pi$  (матеріальна точка знаходиться над точкою повороту) поведінка залежить від напрямку початкової швидкості  $\delta v_0$ . Для власного вектора  $\vec{\omega}_1$   $\delta v_0$  паралельне до  $\delta x_0$ : маятник буде далі рухатися від положення рівноваги і «падати» вниз. Для власного вектора  $\vec{\omega}_2$   $\delta v_0$  спрямоване протилежно до  $\delta x_0$ : матеріальна точка рухається до положення рівноваги. Маємо приклад сідлових точок (рис. 1.2, б).

### 1.2.4. Осцилятор із згасанням

Рівняння руху має вигляд

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (1.16)$$

Запишемо вираз для сили

$$F = -2m\gamma v - m\omega^2x. \quad (1.17)$$

У цьому випадку, сила залежить від часу, оскільки маємо залежність від швидкості. Використовуючи рівняння (1.17), запишемо матрицю

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}.$$

Оскільки, отримана матриця не залежить від  $\vec{u} = (x, v)$ , лінійний аналіз стійкості, як і для випадку гармонічного осцилятора, можна провести глобально.

Використовуючи рівняння  $\det(\lambda \vec{I} - \vec{M}) = 0$  знаходимо власні значення. Матриця  $\vec{I}$  – одинична матриця, тобто

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + 2\gamma \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega^2 = 0.$$

Власні значення можна записати так ( $\gamma < \omega$ ):

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Відшукаємо власні вектори для нашого випадку, використовуючи рівняння

$$\vec{M}\vec{\omega}_i = \lambda_i\vec{\omega}_i.$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}, \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \\ -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Перемноживши отримаємо систему з двох лінійних рівнянь

$$y = \left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)x,$$

$$-\omega^2 x - 2\gamma y = \left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)y.$$

Умова розв'язку

$$\begin{vmatrix} \gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\gamma^2 - \gamma i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} + \gamma i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} - \omega^2 + \gamma^2 + \omega^2 = 0.$$

Умова існування не нульових розв'язків виконується. Змінну  $x$  ми можемо вибирати довільно, а  $y = \left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)x$ .

Таким чином, власний вектор

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} x \\ \left(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right)x \end{pmatrix}.$$

Віднормуємо його на  $\Gamma$ , тобто  $|\vec{\omega}_1| = 1$ .

$$x^2 + \omega^2 x^2 = 1,$$

$$x^2 = \frac{1}{1+\omega^2}, x = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Отриманий власний вектор  $\vec{\omega}_1$  має вигляд:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вигляд вектора  $\vec{\omega}_2$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \\ -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Перемноживши отримаємо систему з двох лінійних рівнянь

$$y = (-\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})x,$$

$$-\omega^2 x - 2\gamma y = (-\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})y.$$

Умова розв'язку

$$\begin{vmatrix} \gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\gamma^2 + \gamma i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} - \gamma i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} - \omega^2 + \gamma^2 + \omega^2 = 0.$$

Так як виконується умова існування не нульових розв'язків, і змінну  $x$  ми можемо вибирати довільно, а  $y = (-\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})x$ .

Таким чином, власний вектор

$$\vec{\omega}_1 = \left( \begin{pmatrix} x \\ (-\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})x \end{pmatrix} \right).$$

Віднормуємо його на 1, тобто  $|\vec{\omega}_1| = 1$ .

$$x^2 + \omega^2 x^2 = 1,$$

$$x^2 = \frac{1}{1+\omega^2}, x = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Отриманий власний вектор  $\vec{\omega}_2$  має вигляд:

$$\vec{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} \right).$$

Отримані власні вектори є комплексно спряженими, як і власні значення системи.

Оскільки  $\text{Re}\lambda_i < 0$ ,  $i = 1,2$ , відмінність у розв'язках, що відповідає різним початковим значенням, експоненційно спадає. Маємо приклад нерухомої точки  $\Gamma$  (дивитися рис. 1.2,  $\Gamma$ ).

## РОЗДІЛ 2

### ВИКОРИСТАННЯ СКМ MAPLE ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

#### 2.1. Гармонічний осцилятор

Спочатку очистимо внутрішню пам'ять ядра Maple, для того, щоб не спотворити наших розрахунків параметрами, які були задані раніше. Для цього використаємо команду перезавантаження ядра `restart`.

```
> restart;
```

Різниця використання операторів у кінці командного рядка наступна:

: – система не виводить на екран результатів розрахунку програми;

; – система виводить на екран результатів розрахунку програми.

Після виконання заданої команди завантажимо додаткові пакети `plottools` та `plots`, з допомогою команди `with`. Пакет `plottools` містить процедури, які використовуються для роботи з графікою.

```
> with(plottools):
```

```
> with(plots):
```

Спочатку будемо розглядати спрощений випадок для математичного маятника. Коли ми маємо невеликий кут відхилення, тоді  $\sin x \cong x$ , і при цьому рівняння руху плоского математичного маятника зводиться до руху одновимірного гармонічного осцилятора. Оберемо довжину маятника, прискорення вільного падіння і частоту коливань.

```
> l := 3;
```

```
g := 9.8;
```

```
omega := sqrt(g/l);
```

```
l := 3
```

```
g := 9.8
```



$$\omega := 1.807392228$$

Задамо початкові умови для узагальненої координати та швидкості.

$$> x0 := 0.5;$$

$$v0 := 0.5;$$

$$x0 := 0.5$$

$$v0 := 0.5$$

Запишемо остаточний розв'язок для координати і швидкості.

$$> x := t \rightarrow x0 * \cos(\omega * t) + v0 * \sin(\omega * t) / \omega;$$

$$v := t \rightarrow v0 * \cos(\omega * t) - x0 * \omega * \sin(\omega * t);$$

$$x := t \rightarrow x0 \cos(\omega t) + \frac{v0 \sin(\omega t)}{\omega}$$

$$v := t \rightarrow v0 \cos(\omega t) - x0 \omega \sin(\omega t)$$

Як нам відомо, один і той самий дослід ми не можемо виконати два рази так, щоб вони були ідентичними, оскільки ми можемо помилитися в початкових умовах узагальненої координати та узагальненої швидкості. Для узагальненої координати похибку будемо позначати d1, а для узагальненої швидкості d2. Тому фактично ми маємо, що рухається не одна лише точка, а фазова площина, яка в початковий момент часу розташована від 0.45 до 0.55 як по осі Oх так і по осі Oу. Розіб'ємо наші утворені відрізки на 5 рівних частин, і будемо вважати першу точку кінцем нульового відрізка.

$$> N := 5;$$

$$d1 := 0.05;$$

$$d2 := 0.05;$$

for i from 0 to N do

$$dx[i] := -d1 + 2 * d1 * i / N;$$

$$dv[i] := d2 - 2 * d2 * i / N;$$

end do:

$$N := 5$$

$$d1 := 0.05$$

$$d2 := 0.05$$

Задамо значення для початкових точок, і знаючи закон зміни координати  $x$  та швидкості  $v$  з часом утворимо додаткові точки між тими, які спочатку задаються. Використовуючи команду `polygon` об'єднаємо наші точки у суцільну фазову площину, яка спочатку буде квадратом. Оскільки ми маємо розбиття прямих, то нам для утворення фазової площин знадобиться лише 3 локальних точки. Утворимо процедуру зміни положення початкових точок з часом.

```
> spoint := proc (t)
  local bt1, bt2, bt3, bt4;
  bt1 := seq([x(t)+dx[i]*cos(omega*t)+d2*sin(omega*t)/omega,
v(t)+d2*cos(omega*t)-dx[i]*omega*sin(omega*t)], i = 0 .. N);
  bt2 := seq([x(t)+d1*cos(omega*t)+dv[i]*sin(omega*t)/omega,
v(t)+dv[i]*cos(omega*t)-d1*omega*sin(omega*t)], i = 0 .. N);
  bt3 := seq([x(t)-dx[i]*cos(omega*t)-d2*sin(omega*t)/omega,
v(t)-d2*cos(omega*t)+dx[i]*omega*sin(omega*t)], i = 0 .. N);
  bt4 := seq([x(t)-d1*cos(omega*t)-dv[i]/omega*sin(omega*t),
v(t)-dv[i]*cos(omega*t)-d1*omega*sin(omega*t)],i=0..N);
  display(polygon([bt1, bt2, bt3]), color = gray, thickness = 1);
end proc;
```

```

spoint := proc(t)
  local bt1, bt2, bt3, bt4;
  bt1 := seq([x(t) + dx[i]*cos(omega*t) + d2*sin(omega*t)
/omega, v(t) + d2*cos(omega*t) - dx[i]*omega*sin(omega
*t)], i=0..N);
  bt2 := seq([x(t) + d1*cos(omega*t) + dv[i]*sin(omega*t)
/omega, v(t) + dv[i]*cos(omega*t) - d1*omega*sin(omega
*t)], i=0..N);
  bt3 := seq([x(t) - dx[i]*cos(omega*t) - d2*sin(omega*t)
/omega, v(t) - d2*cos(omega*t) + dx[i]*omega*sin(omega
*t)], i=0..N);
  plots:-display(plottools:-polygon([bt1, bt2, bt3]), color = gray,
thickness = 1)
end proc

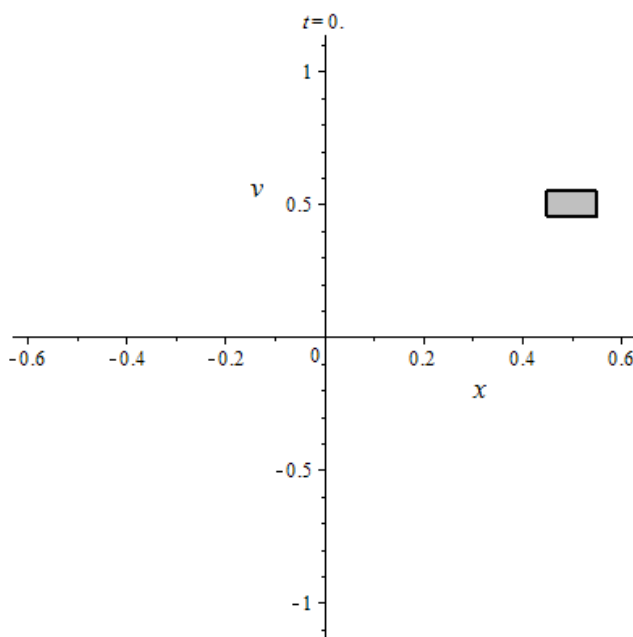
```

Утворимо анімацію для руху фазової площини протягом часу від 0 до  $10\pi$  секунд, яка буде складатися із 1000 картинок.

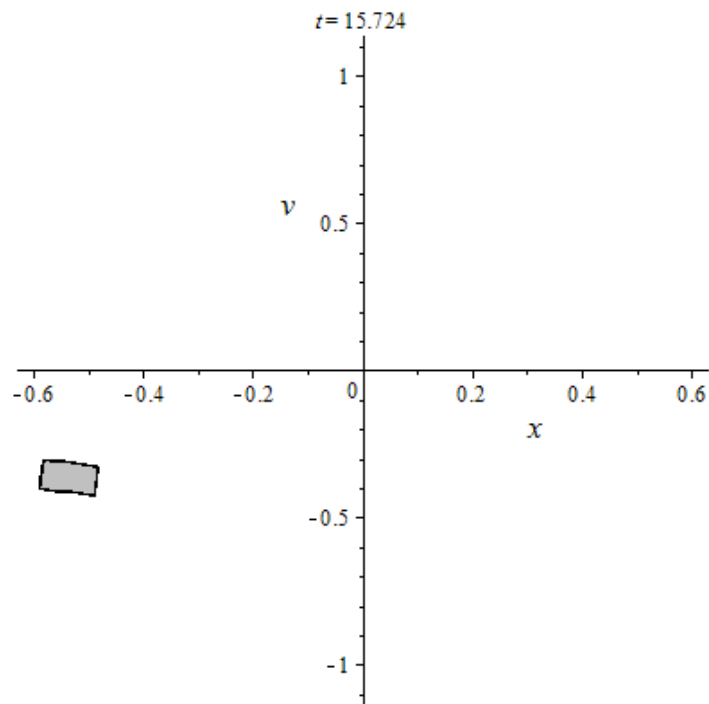
> animate(spoint, [t], t = 0 ..  $10\pi$ , frames = 1000);

Виведемо на екран декілька картинок для різного моменту часу.

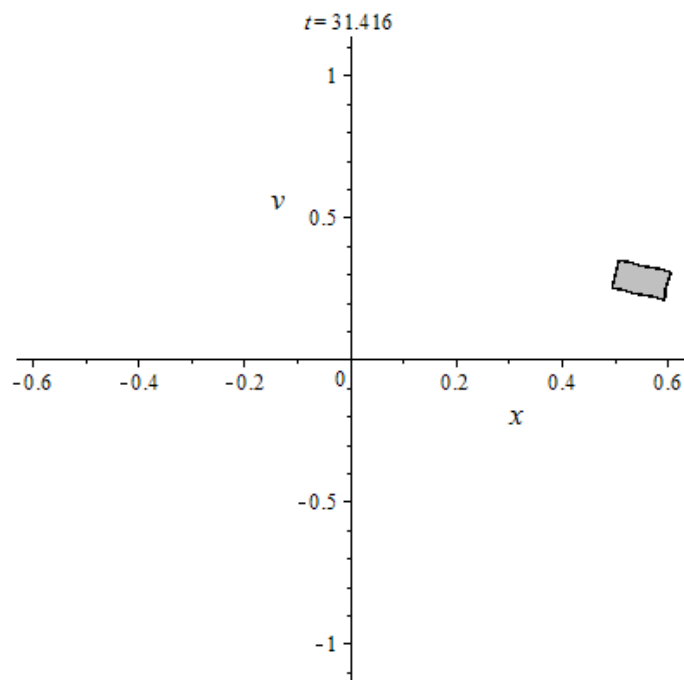
1) У початковий момент часу.



2) У момент часу  $5\pi$  секунд.



3) У момент часу  $10\pi$  секунд.



Як бачимо, для гармонійного осцилятора фазова площина не розпливається з часом. Тобто, якщо ми маємо два однакових осцилятора із дещо відмінними початковими положення координати і швидкості, то вони будуть стійкими протягом усього руху, і можна говорити, що вони рухаються в такт.

## 2.2. Математичний маятник

Так само, як і для гармонійного осцилятора, спочатку очистимо внутрішню пам'ять і завантажимо додаткові пакети `plottools` і `plots`.

```
> restart;
with(plottools):
with(plots):
```

Після виконання цих команд, задамо параметри для математичного маятника, початкові значення узагальненої координати та швидкості, а також похибки для них.

```
> l := 3;
x0 := 1;
v0 := 0;
d1 := 0.05;
d2 := 0.05;
g := 9.8;
omega := sqrt(g/l);
```

Запишемо рівняння руху для математичного маятника у наступному вигляді.

```
> eq := diff(x(t), t $ 2) + omega^2*sin(x(t)) = 0
```

$$eq := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 3.2666666666 \sin(x(t)) = 0$$

Утворимо елемент фазової площини, який в початковий момент часу буде знаходитися по осі  $x$  у межах від 0.95 до 1.05, а по осі швидкостей від -0.05 до 0.05. Кожну сторону утвореної площини поділимо на 50 однакових відрізків і знайдемо розв'язки диференціальних рівнянь із початковими значеннями узагальненої координати та швидкості. Оскільки у нас  $t$  змінюється від 0 до 50, то ми не будемо явно виводити усі розв'язки, які отримаємо.

```

> N := 50;
  for i from 0 to N do
    dx[i] := -d1 + 2*d1*i/N;
    dv[i] := d2 - 2*d2*i/N;
    sol1[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 + dx[i], D(x)(0) = v0 + d2},
      numeric, output = listprocedure);
    sol2[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 + d1, D(x)(0) = v0 + dv[i]},
      numeric, output = listprocedure);
    sol3[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 - dx[i], D(x)(0) = v0 - d2},
      numeric, output = listprocedure);
    sol4[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 - d1, D(x)(0) = v0 - dv[i]},
      numeric, output = listprocedure);
  end do:

```

Виберемо розв'язки для початкових значень узагальненої координати і швидкості із зміною їхнього номера.

```

> for i from 0 to N do
  x1[i] := rhs(sol1[i][2]);
  v1[i] := rhs(sol1[i][3]);
  x2[i] := rhs(sol2[i][2]);
  v2[i] := rhs(sol2[i][3]);
  x3[i] := rhs(sol3[i][2]);
  v3[i] := rhs(sol3[i][3]);
  x4[i] := rhs(sol4[i][2]);
  v4[i] := rhs(sol4[i][3]);
end do:

```

Утворимо елемент фазової площини, вершини якого у початковий момент будуть знаходитися у локальних точках.

```

> spoint := proc(t)

```

```

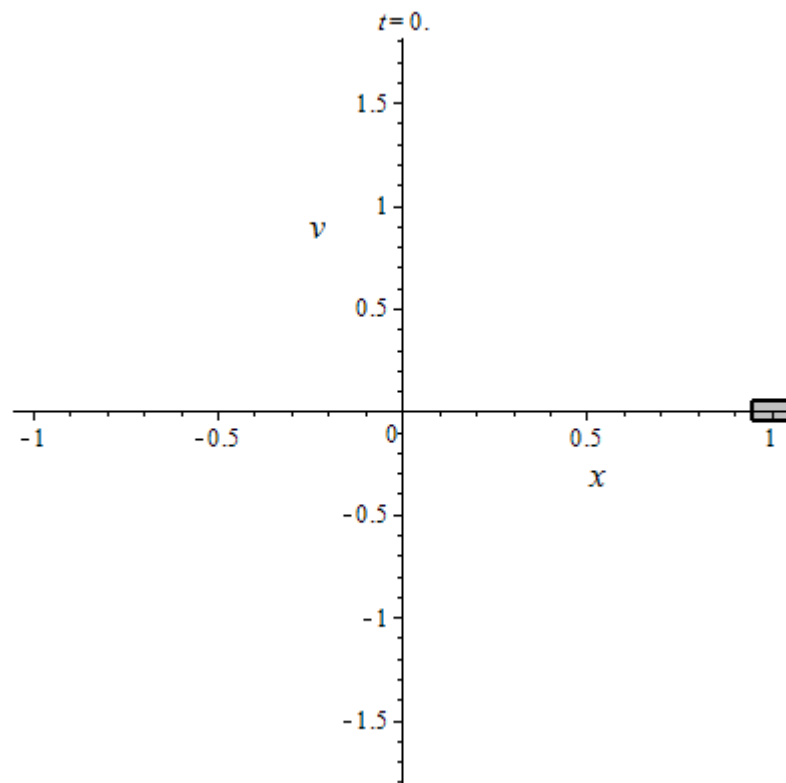
local bt1, bt2, bt3, bt4;
bt1 := seq([x1[i](t), v1[i](t)], i = 0 .. N);
bt2 := seq([x2[i](t), v2[i](t)], i = 0 .. N);
bt3 := seq([x3[i](t), v3[i](t)], i = 0 .. N);
bt4 := seq([x4[i](t), v4[i](t)], i = 0 .. N);
display(polygon([bt1, bt2, bt3, bt4]), color = gray, thickness = 1);
end proc;

```

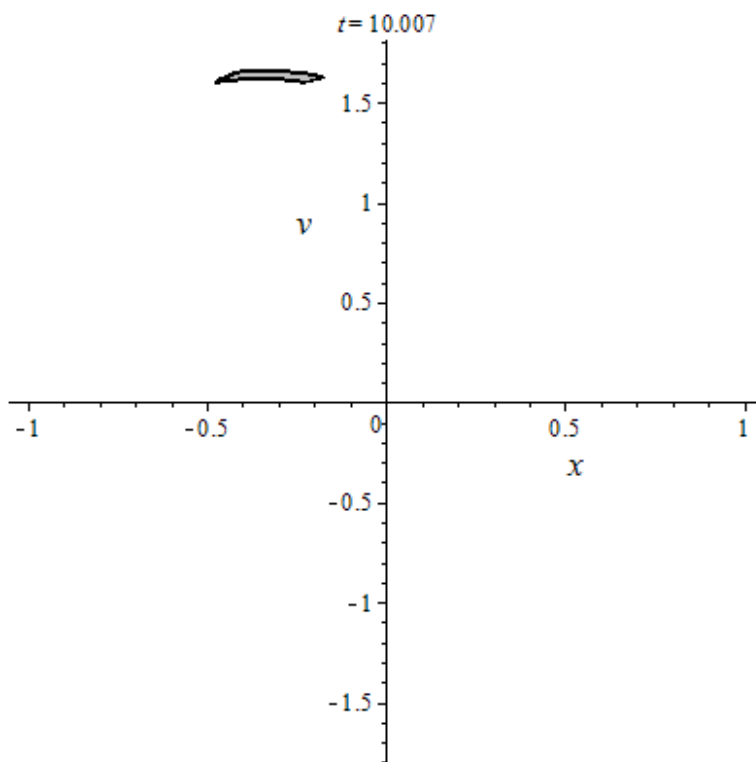
Створимо анімацію для руху фазової площини протягом часу від 0 до 100 секунд, яка буде складатися із 1500 картинок.

```
animate(spoint,[t],t=0..100,frames=1500);
```

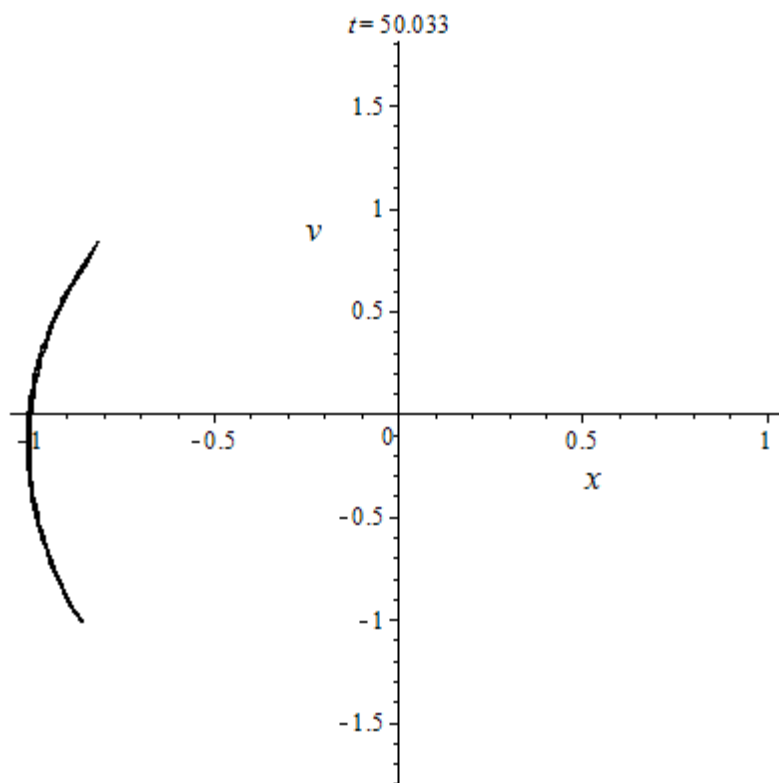
Виведемо на екран елемент фазової площини для декількох різних моментів часу та зробимо відповідні висновки.



- 1) У момент часу 10 секунд.

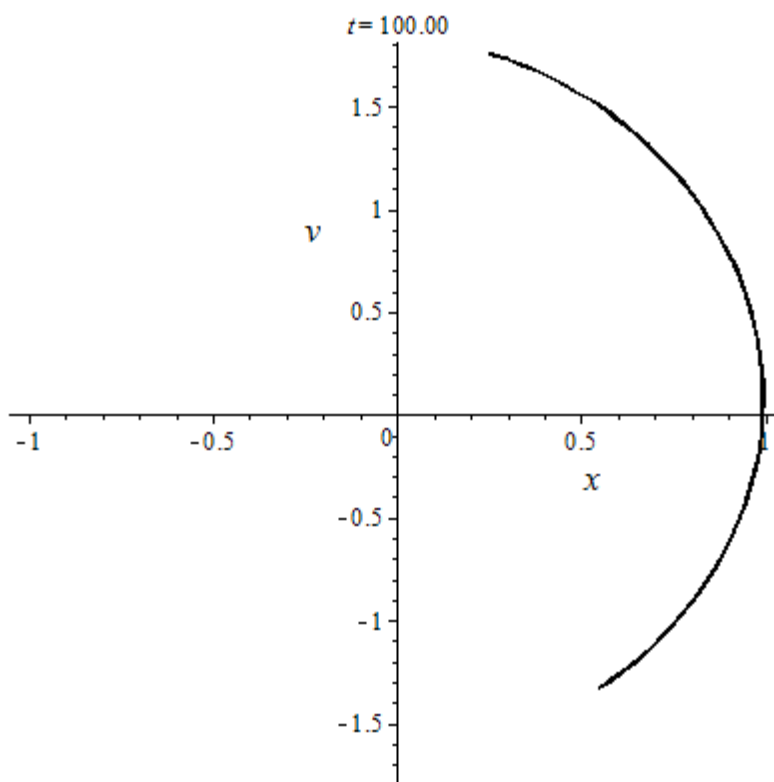


2) У момент часу 50 секунд.



3) У момент часу 100 секунд.





Як ми бачимо, для математичного маятника фазова площина розпливається з часом. Тобто, якщо ми маємо два однакових маятники із дещо відмінними початковими положеннями координати і швидкості, то вони, через певний проміжок часу будуть рухатися зовсім по-різному, тобто не в такт.

### 2.3. Маятник із загасанням

Розглянемо, як буде поводити себе маятник із загасанням, якщо при заданні початкових умов допущена певна неточність. Рівняння руху маятника із загасанням, має вигляд

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0.$$

Дослідження будемо виконувати чисельними методами.

Вивільняємо внутрішню пам'ять ядра Maple. Для цього скористаємось командою перезавантаження `restart`.

```
> restart;
```

Оскільки, після перезавантаження внутрішня пам'ять очистилася, то нам потрібно завантажити додаткові пакети `plottools` та `plots`, які дають змогу працювати з графікою. Пакет графіки `plottools` використовується для створення графічних примітивів, що будують елементарні геометричні об'єкти на площині та просторі. Пакет `plots` використовується для виведення на екран графічних об'єктів і дозволяє працювати з анімаціями.

```
> with(plottools):
```

```
    with(plots):
```

Задамо довжину, початкове положення узагальненої координати та швидкості, а також похибки для них, прискорення вільного падіння, частоту коливань і значення коефіцієнта затухання.

```
> l := 3;
```

```
    x0 := 1;
```

```
    v0 := 0;
```

```
    d1 := 0.05;
```

```
    d2 := 0.05;
```

```
    g := 9.8;
```

```
    omega := sqrt(g/l);
```

```
    beta := 0.02;
```

Запишемо рівняння руху для гармонічного осцилятора із затушенням.

```
> eq := diff(x(t), t $ 2) + 2*beta*diff(x(t), t) + omega^2*sin(x(t)) = 0;
```

$$eq := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 0.050 \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) + 3.266666666 \sin(x(t)) = 0$$

Утворимо елемент фазової площини, який в початковий момент часу буде знаходитися по осі  $Ox$  у межах від 0.95 до 1.05, а по осі швидкостей від  $-0.05$  до 0.05. Розіб'ємо кожну сторону утвореної площини на 50 однакових відрізків і знайдемо розв'язки диференціальних рівнянь із початковими значеннями узагальненої координати та швидкості.

```

> N := 50;
  for i from 0 to N do
    dx[i] := -d1 + 2*d1*i/N;
    dv[i] := d2 - 2*d2*i/N;
    sol1[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 + dx[i], D(x)(0) = v0 + d2},
      numeric, output = listprocedure);
    sol2[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 + d1, D(x)(0) = v0 + dv[i]},
      numeric, output = listprocedure);
    sol3[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 - dx[i], D(x)(0) = v0 - d2},
      numeric, output = listprocedure);
    sol4[i] := dsolve({eq, x(0) = x0 - d1, D(x)(0) = v0 - dv[i]},
      numeric, output = listprocedure);
  end do;

```

Виберемо розв'язки для узагальненої координати і швидкості, оскільки вони будуть потрібні для утворення фазової площини у різні моменти часу.

```

> for i from 0 to N do
  x1[i] := rhs(sol1[i][2]);
  v1[i] := rhs(sol1[i][3]);
  x2[i] := rhs(sol2[i][2]);
  v2[i] := rhs(sol2[i][3]);
  x3[i] := rhs(sol3[i][2]);
  v3[i] := rhs(sol3[i][3]);
  x4[i] := rhs(sol4[i][2]);
  v4[i] := rhs(sol4[i][3]);
end do;

```

Утворимо елемент фазової площини, вершини якої у початковий момент будуть знаходитися у локальних точках.

```

> spoint := proc(t)
  local bt1, bt2, bt3, bt4, i;

```

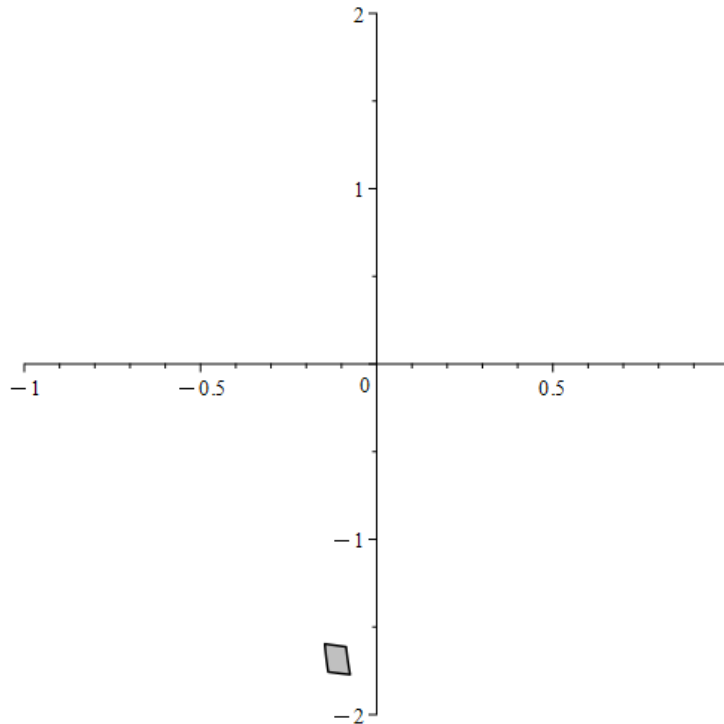
```

bt1 := seq([x1[i](t), v1[i](t)], i = 0 .. N);
bt2 := seq([x2[i](t), v2[i](t)], i = 1 .. N);
bt3 := seq([x3[i](t), v3[i](t)], i = 1 .. N);
bt4 := seq([x4[i](t), v4[i](t)], i = 1 .. N);
display(polygon([bt1, bt2, bt3, bt4]), color = gray, thickness = 1);
end proc;

```

Виведемо на екран елемент фазової площини у момент часу 1 секунда після початку рух.

```
> spoint(1);
```

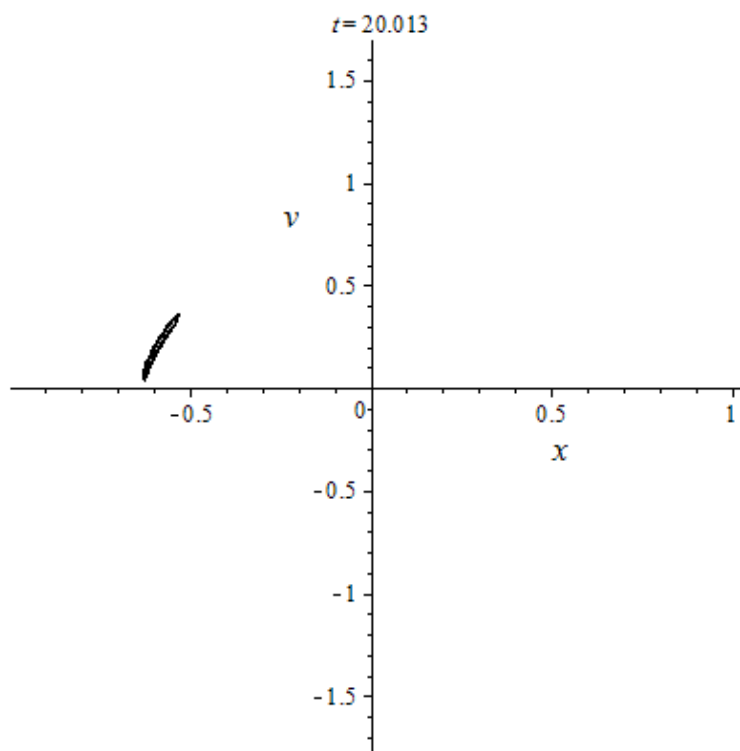


Створимо анімацію для руху фазової площини протягом часу від 0 до 100 секунд, яка буде складатися із 1500 картинок.

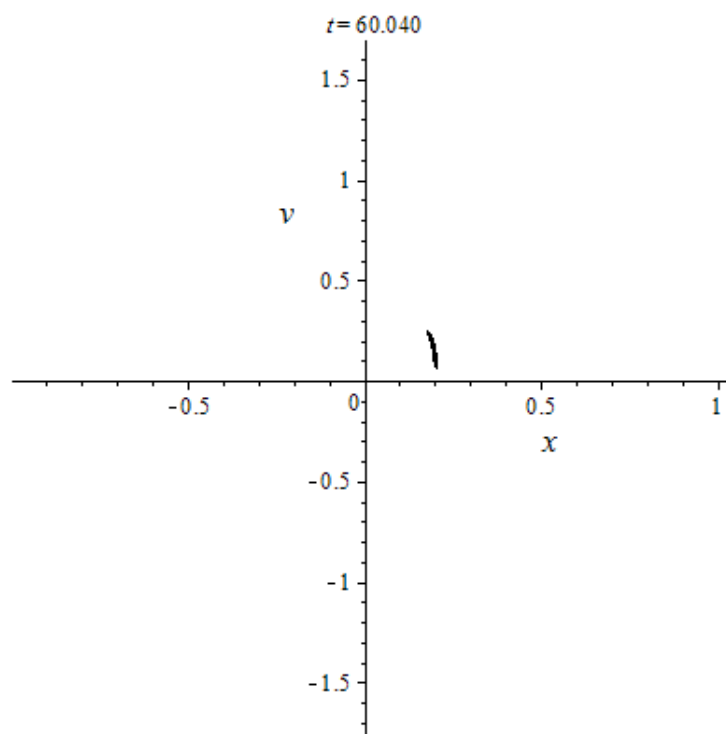
```
> animate(spoint,[t],t=0..100,frames=1500);
```

Виведемо на екран декілька кадрів для різного моменту часу.

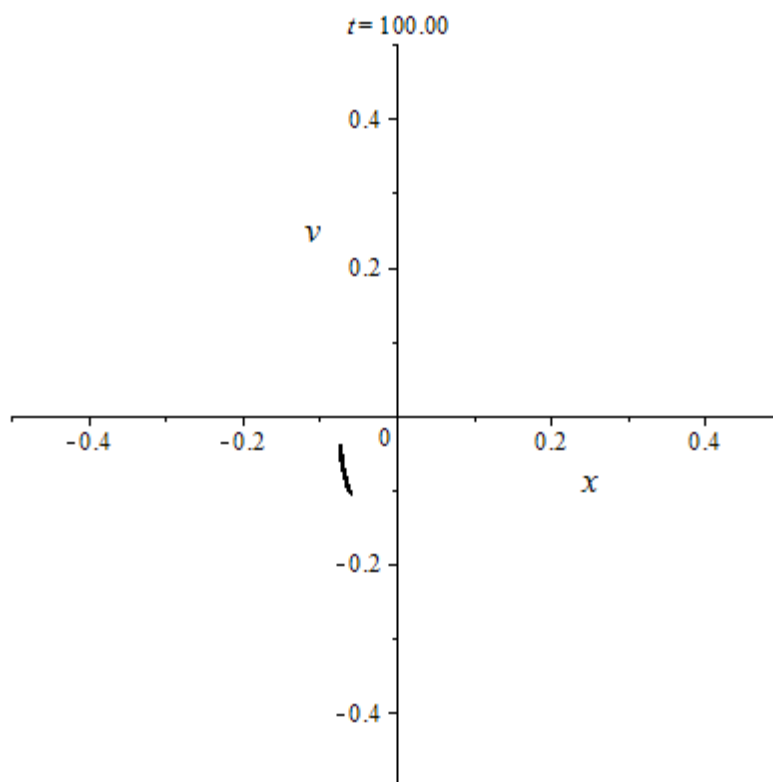
1) У момент часу 20 секунд.



2) У момент часу 60 секунд.



3) У момент часу 100 секунд.



Як ми бачимо, для гармонійного осцилятора із загасанням, область невизначеності фазової площини зменшується із часом, тобто наша точка прямує до нуля, яка є кінцевою точкою руху по спіралі, що скручується.

## 2.4. Поведінка в околі нерухомих точок

### 2.4.1. Поведінка в околі точки із дійсними власними значення протилежного знаку

Розглянемо спочатку другу стійку точку для плоского математичного маятника  $(\pi, 0)$ . Обчислення будемо проводити чисельними методами. Тому спочатку очистимо внутрішню пам'ять в Maple і завантажимо додаткові пакети `plottools` і `plots`.

```
> restart;
```

```
with(plottools):
```

```
with(plots):
```

Після виконання заданих команд, задамо параметри для математичного маятника, масу тіла, довжину маятника і частоту коливання. Виберемо сукупність відхилень від початкових значень координат і швидкостей. Ці точки ми будемо вибирати по колу на відстані 0,1 і за допомогою СКМ Maple розглянемо як вони будуть рухатися із часом.

```
> m := 1;
  l := 3;
  g := 9.8;
  omega := sqrt(g/l);
> for i from 0 to 15 do
  x[i] := (2*Pi)/16*i;
  dx0[i] := 0.1*cos(x[i]);
  dv0[i] := 0.1*sin(x[i]);
end do;
```

Запишемо вираз для сили

```
> F := -m*omega^2*sin(x);
```

$$F := -3.2666666666 x$$

Випишемо власні вектори для цього випадку

```
> lambda1 := omega;
  lambda2 := -omega;
```

$$\lambda_1 := 1.807392228$$

$$\lambda_2 := -1.807392228$$

Знайдемо чому дорівнюють коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$ .

$$(\delta x_0, \delta v_0) = \left( c_1 e^{\omega \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} + c_2 e^{-\omega \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_0 &= (c_1 + c_2) \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \delta v_0 &= (c_1 - c_2) \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c_1 = \left( \delta x_0 + \frac{\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( \delta x_0 + \frac{\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( \delta x_0 - \frac{\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2}.$$

Створимо цикл, за допомогою якого відшукаємо коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$  для кожної із утворених точок.

```
> for i from 0 to 15 do
    c1[i] := 1/2*(dx0[i] + dv0[i]/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
    c2[i] := 1/2*(dx0[i] - dv0[i]/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
end do;
```

Запишемо власні вектори.

```
> w1 := Vector[column](2, [1, omega])/sqrt(omega^2 + 1);
w2 := Vector[column](2, [1, -omega])/sqrt(omega^2 + 1);
```

Запишемо цикл, за допомогою якого порахуємо значення  $\delta x$  і  $\delta v$  із часом для кожної початкової координати і швидкості.

```
> for i from 0 to 15 do
    dx[i] := c1[i]*exp(lambda1*t) + c2[i]*exp(lambda2*t);
    dv[i] := c1[i]*exp(lambda1*t)*omega - c2[i]*exp(lambda2*t)*omega;
end do;
```

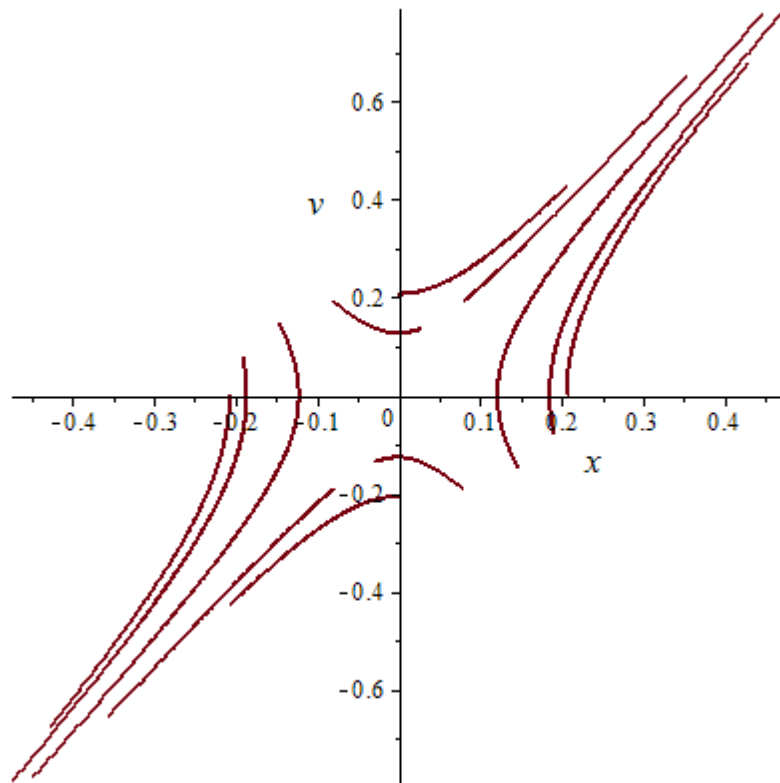
Сформуємо для кожної  $\delta x$  і  $\delta v$  графік функції протягом часу від 0 до 0.5 секунди.

```
> for i from 0 to 15 do
    pl[i] := plot([dx[i], dv[i], t = 0 .. 0.5]);
end do;
```

Об'єднаємо усі одержані криві на одній координатній площині і виведемо одержаний результат на екран.

```
> display({seq(pl[i], i = 0 .. 15)});
```





Отже, як ми бачимо, при  $t \rightarrow \infty$  і  $c_1 \neq 0$ ,  $\delta x$  і  $\delta v$  – зростають, а для  $c_1 = 0$   $\delta x$  і  $\delta v$  будуть прямувати до нуля.  $\vec{u} = (x, v)$  – сідлова точка.

#### 2.4.2. Поведінка в околі точки із уявними власними значеннями протилежного знаку

Розглянемо, як буде поводитися гармонічний осцилятор із уявними власними значеннями. Очистимо внутрішню пам'ять і завантажимо пакети, які дозволяють працювати з графікою.

```
> restart;
```

```
with(plottools):
```

```
with(plots):
```

Після виконання заданих команд, задамо параметри для математичного маятника, початкове значення узагальненої координати та швидкості, масу тіла, довжину маятника і частоту коливання.

```
> m := 1;
```

```
l := 3;
```

```

g := 9.8;
omega := sqrt(g/l);
for i from 0 to 15 do
  x[i] := (2*Pi)/16*i;
  dx0[i] := 0.1*cos(x[i]);
  dv0[i] := 0.1*sin(x[i]);
end do;

```

Вираз для сили.

```
> F := -m*omega^2*x;
```

$$F := -3.2666666666 x$$

Запишемо власні значення.

```
> lambda1 := omega*I;
lambda2 := -I*omega;
```

$$\lambda 1 := 1.807392228 I$$

$$\lambda 2 := -1.807392228 I$$

Знайдемо чому дорівнюють коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$ .

$$(\delta x_0, \delta v_0) = \left( c_1 e^{\omega * 0} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} + c_2 e^{-\omega * 0} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_0 &= (c_1 + c_2) \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \delta v_0 &= (c_1 - c_2) \frac{i\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c_1 = \left( \delta x_0 + \frac{i\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( \delta x_0 - i \frac{\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( \delta x_0 + i \frac{\delta v_0}{\omega} \right) \sqrt{1+\omega^2}.$$

Створимо цикл, за допомогою якого відшукаємо коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$  для кожної із утворених точок.

```
> for i from 0 to 15 do
  c1[i] := 1/2*(dx0[i] -I dv0[i]/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
  c2[i] := 1/2*(dx0[i] +I dv0[i]/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
end do;
```

Запишемо власні вектори.

```
> w1 := Vector[column](2, [1, I*omega])/sqrt(omega^2 + 1);
```

```
w2 := Vector[column](2, [1, -I*omega])/sqrt(omega^2 + 1);
```

Створимо цикл для відшукування значень узагальнених координат і швидкостей з часом.

```
> for i from 0 to 15 do
```

```
     $\delta x[i] := c1[i]*\exp(\lambda_1*t)*1 + c2[i]*\exp(\lambda_2*t)*1;$ 
```

```
     $\delta v[i] := c1[i]*\exp(\lambda_1*t)*I*omega - c2[i]*\exp(\lambda_2*t)*I*omega;$ 
```

```
end do;
```

Сформуємо для кожної  $\delta x$  і  $\delta v$  графік функції протягом часу від 0 до 2 секунд.

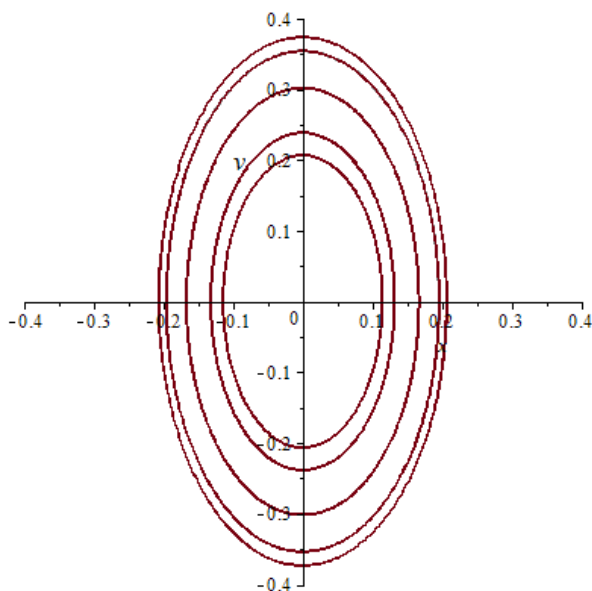
```
> for i from 0 to 15 do
```

```
    pl[i] := plot([ $\delta x[i]$ ,  $\delta v[i]$ , t = 0 .. 2]);
```

```
end do;
```

Об'єднаємо усі одержані криві на одній координатній площині і виведемо одержаний результат на екран.

```
> display({seq(pl[i], i = 0 .. 15)});
```



Отже, як ми бачимо, при  $t \rightarrow \infty$  і  $c_1 \neq 0$ ,  $\delta x$  і  $\delta v$  залишаються обмеженими незалежно від  $\vec{u} = (x, v)$ . Такий самий результат отримаємо і для нерухомої

точки математичного маятника  $(0, 0)$ , але про розмір околу наскільки він великий чи малий нічого сказати не можна.

### 2.4.3. Поведінка в околі точки із комплексно спряженими власними значення і від'ємною дійсною частиною

Розглянемо як буде себе поводити гармонічний осцилятор із загасанням. Очистимо внутрішню пам'ять в Maple і завантажимо додаткові пакети `plottools` і `plots`.

```
> restart;
```

```
with(plottools):
```

```
with(plots):
```

Після виконання заданих команд, задамо параметри для гармонічного осцилятора із затуханням, масу тіла, довжину маятника, частоту коливань, коефіцієнт опору (затухання), значення похибки для узагальненої координати і швидкості та за допомогою СКМ Maple розглянемо як вона буде рухатися із часом.

```
> m := 1;
```

```
l := 3;
```

```
g := 9.8;
```

```
omega := sqrt(g/l);
```

```
beta := 0.01;
```

```
delta_x0 := 0.1;
```

```
delta_v0 := 0.1;
```

Запишемо вираз для сили.

```
> F := -m*omega^2*x - 2*beta*m*v;
```

$$F := -0.02 v - 3.266666666 x$$

Запишемо власні значення для цього випадку.

```
> lambda1 := -beta + sqrt(-beta^2 + omega^2)*I;
```

```
lambda2 := -beta - sqrt(-beta^2 + omega^2)*I;
```

$$\lambda_1 := -0.01 + 1.807364564 I$$

$$\lambda_2 := -0.01 - 1.807364564 I$$

Знайдемо чому дорівнюють коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$ .

$$(\delta x_0, \delta v_0) = \left( c_1 e^{\omega * 0} \left( -\beta + i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \right) + c_2 e^{-\omega * 0} \left( -\beta - i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

$$\delta x_0 = (c_1 + c_2) \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

$$\delta v_0 = \left( c_1 (-\beta + i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) - c_2 (\beta + i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}.$$

З останніх двох рівнянь знаходимо  $c_1$  і  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2}}{2\beta \sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \left( \delta x_0 + \frac{\delta v_0}{\omega^2} (\beta - i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right),$$

$$c_1 = \frac{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2}}{2\beta \sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \left( \delta x_0 + \frac{\delta v_0}{\omega^2} (\beta + i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \right).$$

Запишемо вирази для  $c_1$  і  $c_2$  у Maple.

```
> c1 := omega^2/(2*beta*sqrt(-beta^2 + omega^2))*(delta x0 +
(beta - sqrt(-beta^2 + omega^2)*I)*delta v0/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
c2 := omega^2/(2*beta*sqrt(-beta^2 + omega^2))*(delta x0 +
(beta + sqrt(-beta^2 + omega^2)*I)*delta v0/omega)*sqrt(omega^2 + 1);
```

$$c1 := 18.77023352 - 18.66666666 I$$

$$c2 := 18.77023352 + 18.66666666 I$$

Запровадимо власні вектори.

```
> w1 := Vector[column](2, [1, -beta + sqrt(-beta^2 + omega^2)*I])/sqrt(omega^2+1);
```

$$w1 := \begin{bmatrix} 0.4841229183 \\ -0.004841229183 + 0.8749866072 I \end{bmatrix}$$

```
> w2 := Vector[column](2, [1, -beta - sqrt(-beta^2 + omega^2)*I])/sqrt(omega^2+1);
```

$$w2 := \begin{bmatrix} 0.4841229183 \\ -0.004841229183 - 0.8749866072 I \end{bmatrix}$$

Запишемо розв'язки, за допомогою яких будемо шукати значення узагальненої координати і швидкості з часом.

>  $\delta x := c1 * \exp(\text{lambda}1 * t) + c2 * \exp(\text{lambda}2 * t);$

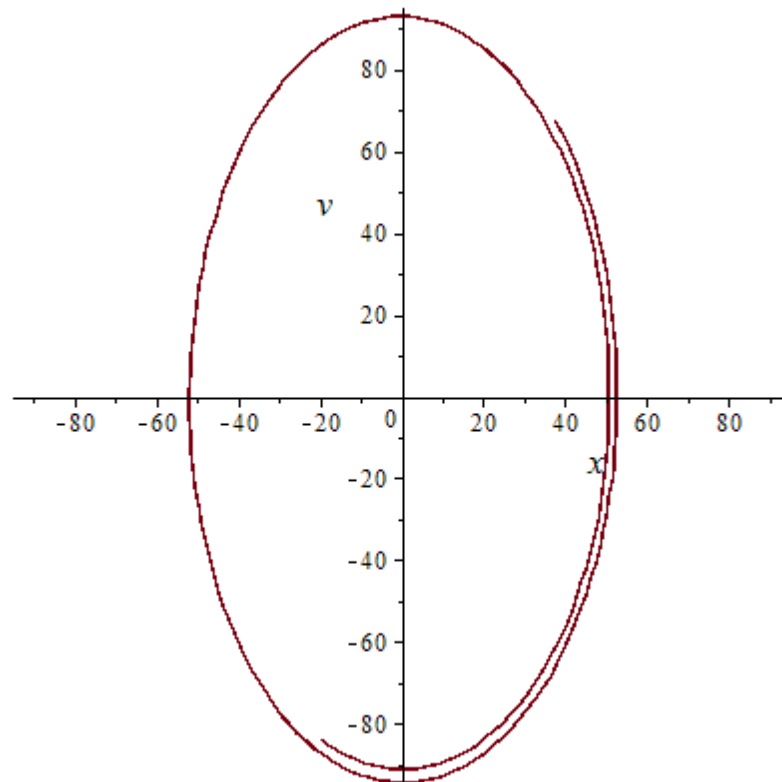
$\delta v := c1 * \exp(\text{lambda}1 * t) * \omega * I - c2 * \exp(\text{lambda}2 * t) * \omega * I;$

$$\delta x := (18.77023352 - 18.66666666 I) e^{(-0.01 + 1.807364564 I) t} \\ + (18.77023352 + 18.66666666 I) e^{(-0.01 - 1.807364564 I) t}$$

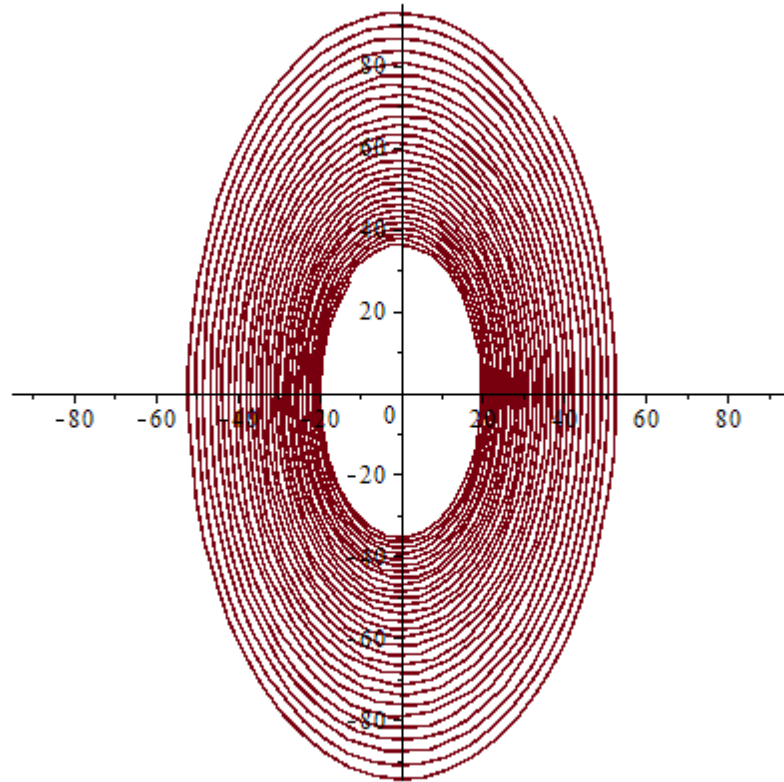
$$\delta v := (33.73798824 + 33.92517418 I) e^{(-0.01 + 1.807364564 I) t} \\ + (33.73798824 - 33.92517418 I) e^{(-0.01 - 1.807364564 I) t}$$

Сформуємо і виведемо на екран графік для двох моментів часу від 0 до 5 секунд і від 0 до 100 секунд.

> `plot([\delta x, \delta v, t = 0 .. 5]);`



> `plot([\delta x, \delta v, t = 0 .. 100]);`



Як видно з одержаних результатів, ми отримали, що  $\delta\vec{u} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .  
Отже,  $\vec{u} = (x, v)$  є кінцевою точкою руху по спіралі, яка скручується.

## РОЗДІЛ 3

### ХАОС В МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМАХ

#### 3.1. Нелінійність рівнянь руху, як необхідна умова виникнення хаосу

Рівняння руху можна розділити на дві групи: лінійні та нелінійні. Диференціальні рівняння є лінійними, якщо шукана функція та її похідні входять в це рівняння лише лінійно.

Прикладами таких рівнянь в класичній механіці можуть бути:

- 1) Рівняння, що описує рух тіла під дією сили пружності

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3.1)$$

- 2) Рівняння, що описує рух тіла закріпленого до пружина та за наявності зовнішньої сили

$$m\ddot{x} = -kx + F(t). \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) все ще є лінійним, хоча вже неоднорідним, проте доданок  $F(t)$ , який породжує неоднорідність, не містить залежної змінної  $x$ .

Натомість рівняння

$$mL^2\ddot{\varphi} = -mgL \sin \varphi, \quad (3.3)$$

яке описує рух маятника (мас  $m$ , довжина  $l$ ) вже є нелінійним диференціальним рівнянням відносно  $\varphi$ , оскільки функція  $\sin \varphi$  є нелінійною за  $\varphi$ . Однак, якщо вважати коливання малими, то  $\sin \varphi \approx \varphi$  і рівняння (3.3) апроксимується лінійним рівнянням.

Іншим прикладом є рівняння руху планети в потенціальному полі Сонця

$$m\ddot{\vec{r}} = -GmM\vec{r}/r^3, \quad (3.4)$$

яке є нелінійним рівнянням за змінними  $(x, y, z)$ .

Ці два приклади демонструють, що нелінійні рівняння не є вже чимось незвичайним.

В попередніх розділах головний акцент щодо відмінності між лінійними і нелінійними рівняннями полягав в тому, що перші можна розв'язати аналітично,



а другі – ні. Якщо ж бути більш строгим щодо такого поділу, то правильніше сказати так: майже всі лінійні рівняння механіки можна розв'язати аналітично і лише деякі з нелінійних рівнянь допускають знаходження аналітичного розв'язку.

Варто відмітити, що через складність аналізу нелінійних рівнянь, в переважній більшості університетських посібників з механіки обмежуються лише на дослідженні механічних систем, що описуються лінійними рівняннями. А якщо деяка задача приводить до нелінійного рівняння, то розглядається частинний випадок, що допускає його апроксимацію лінійними рівняннями.

Однак, в наш час бурхливого розвитку комп'ютерних технологій, наявності великої кількості прикладних програм, ми можемо, хоч і не аналітично, доволі просто досліджувати та аналізувати рух механічних систем, що описуються нелінійними рівняннями.

Нелінійність є необхідною для виникнення хаосу. Якщо система рівнянь руху є лінійною, то досліджувана система не може проявляти хаосу. Проте нелінійність рівнянь руху не гарантує, що в системі проявиться хаос.

Вперше на ознаки хаосу в механічних системах звернув увагу французький математик Пуанкаре у 19 столітті, досліджуючи задачу трьох тіл – рух трьох тіл (Сонце, Земля, Місяць), які взаємодіють силами гравітації. Рівняння, що описують рух такої системи є нелінійні і Пуанкаре виявив, що для такої системи властива чутливість до початкових умов, явище досліджуване нами в попередніх розділах.

Рівняння руху математичного маятника (3.3) є нелінійне, але навіть і для невеликих амплітуд така система ніколи не проявлятиме хаосу.

Проте, якщо ми додамо доданок  $-bv = -bL\dot{\varphi}$ , що відображає наявність гальмівної сили (опору повітря, тертя в підвісі) та доданок із зовнішньою силою  $F(t)$ , (3.3) трансформується у рівняння з зовнішньою силою та згасанням:

$$mL^2\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi - bL^2\dot{\varphi} + LF(t). \quad (3.5)$$

Таке рівняння, при певних значеннях параметрів, вже може приводити до хаосу в системі. Підсумовуючи, можемо сказати, що для виникнення хаосу в системі необхідною є нелінійність і ще деякі додаткові умови на параметри.

Інший, відносно простий приклад нелінійної системи, в якій може проявлятися хаос – це подвійний математичний маятник. В наближенні малих коливань рівняння руху подвійного математичного маятника є лінійними по обох кутах, однак в загальному випадку вони є нелінійними і достатньо ускладненими для породження хаосу. Простий маятник із затуханням та зовнішньою силою та подвійний маятник є дві найпростіші механічні системи, в яких може виникати хаос. Для подальшого детального аналізу ми оберемо простий маятник, оскільки він має лише один ступінь вільності і є простішим для дослідження на відміну від подвійного маятника – системи, з двома ступенями вільності.

### 3.2. Маятник із затуханням та періодичною зовнішньою силою

Схематично досліджувана в цьому пункті система зображена на Рис.3.1. Рівняння руху такої системи

$$I\ddot{\varphi} = \Gamma, \quad (3.6)$$

де  $I=mL^2$  – момент інерції, а  $\Gamma$  – проекція сумарного моменту сил на дотичну до траєкторії в даній точці.

Момент сил формують три сили:

- 1) сила опору  $bv$  (відповідний момент  $Lbv = -bL^2\dot{\varphi}$ );
- 2) сила тяжіння  $mg$  (відповідний момент  $-mgL \sin \varphi$ );
- 3) вимушуюча сила  $F(t)$  (відповідний момент  $LF(t)$ ).

В результаті рівняння руху (3.6) матиме вигляд

$$mL^2\ddot{\varphi} = -bL^2\dot{\varphi} - mgL\sin\varphi + LF(t), \quad (3.7)$$

яке аналогічне (3.5).

Надалі вважатимемо, що зовнішня сила є гармонічною, а її явний вигляд

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (3.8)$$

де  $F_0$  – амплітуда сили,  $\omega$  – циклічна частота.

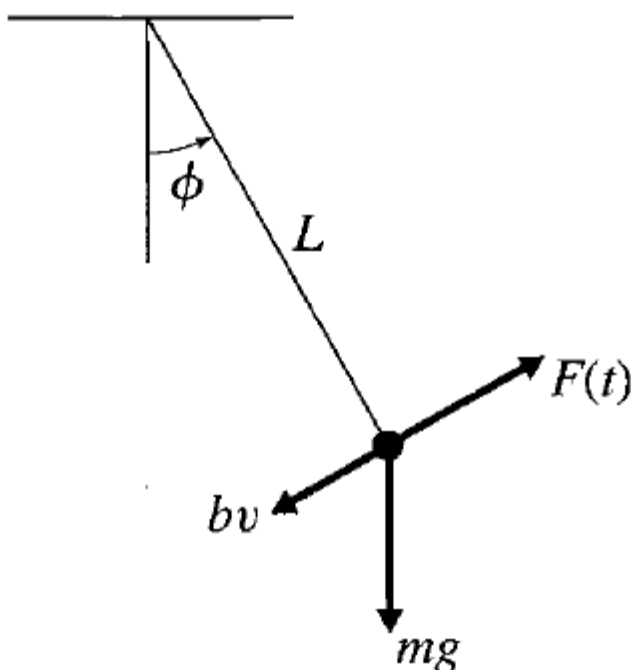


Рис. 3.1. Схематичне зображення простого маятника та трьох сил, що дають внесок в проекцію сумарного моменту на дотичну до траєкторії руху.

Вибір зовнішньої сили у формі (3.8) зумовлений тим, що реальні сили, які приводять до цікавих особливостей в русі системи, дуже добре апроксимуються синусоїдною формою і такі сили з достатньою точністю вдається відтворити в експериментах на хаос.

Підставляючи (3.8) в (3.7) та виконуючи деякі спрощення отримаємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = \frac{F_0}{mL} \cos \omega t. \quad (3.9)$$

Для приведення останнього рівняння до «робочої» форми запровадимо наступні позначення:

$$\frac{b}{m} = 2\beta,$$

де  $\beta$  – стала затухання;

$$\frac{g}{L} = \omega_0^2,$$

де  $\omega_0$  – власна частота маятника.

Щодо сталої  $\frac{F_0}{mL}$ , то очевидно, що її розмірність є обернена до квадрату часу, тобто така сама, як і в  $\omega_0^2$ . Тому зручно буде запровадити позначення  $\frac{F_0}{mL} = \gamma\omega_0^2$ , в якому параметр

$$\gamma = \frac{F_0}{mL\omega_0^2} = \frac{F_0}{mg_0} \quad (3.10)$$

вже є безрозмірним.

Цей параметр визначає відношення амплітуди зовнішньої сили до сили тяжіння, тобто фактично характеризує наскільки значним є вплив цієї сили на рух маятника. Якщо  $\gamma < 1$ , то зовнішня сила є менша за вагу підвішеного тіла, а спричинений нею рух можна вважати відносно малим (наприклад, така зовнішня сила не зможе втримати маятник відхилений на кут понад  $90^\circ$ ). В протилежному випадку,  $\gamma \geq 1$ , зовнішня сила перевищує вагу маятника і ми можемо очікувати, що така сила спричинить коливання у більших масштабах (наприклад, маятник може проходити через вершину при  $\varphi = \pi$ ).

Використовуючи запроваджені вище позначення рівняння (3.9) спроститься до вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t. \quad (3.11)$$

Надалі досліджуватимемо розв'язки цього рівняння при різних значеннях параметрів, в тому числі і тих, що приводять до хаосу в системі.

### 3.3. Можливі типи руху маятника із тертям та зовнішньою силою

**3.3.1. Лінійний осцилятор** Перш ніж продемонструвати цікаві можливості здійснювати хаотичний рух досліджуваним маятником зупинимось на його найпростішому русі, який реалізується, коли маятник мало відхиляється від положення рівноваги  $\varphi = 0$  з малою початковою швидкістю та малою зовнішньою силою,  $\gamma \ll 1$ . За таких обставин ми можемо вважати, що  $\varphi$  залишатиметься в процесі руху малим. А це дозволяє нам замінити  $\sin\varphi$  його аргументом.

В результаті рівняння руху буде лінійним

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \gamma\omega_0^2\cos\omega t \quad (3.12)$$

Для маятника, рух якого описується рівнянням (3.12), його початкова поведінка залежатиме від початкових умов, але дуже швидко ця відмінність, що породжується початковими умовами, зникатиме, а рух маятника наближається до єдиного атрактора, в якому він здійснюватиме гармонічні коливання з частотою, рівною частоті зовнішньої сили

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (3.13)$$

Цей рух також продемонстровано на Рис.3.2 для  $\gamma = 0.2$  та  $\beta = \frac{\omega_0}{4}$ . Для частоти зовнішньої сили обрано  $\omega = 2\pi$ , тоді її період  $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ . Такий вибір частоти означатиме, що вздовж горизонтальної осі відкладатиметься час в одиницях періоду зовнішньої сили. Власна частота покладена рівною  $\omega_0 = 1,5\omega$ , а отже система є дещо близька до резонансу, такий вибір зумовлений тим, що саме для таких частот хаотичний рух зазвичай легко можна виявити.

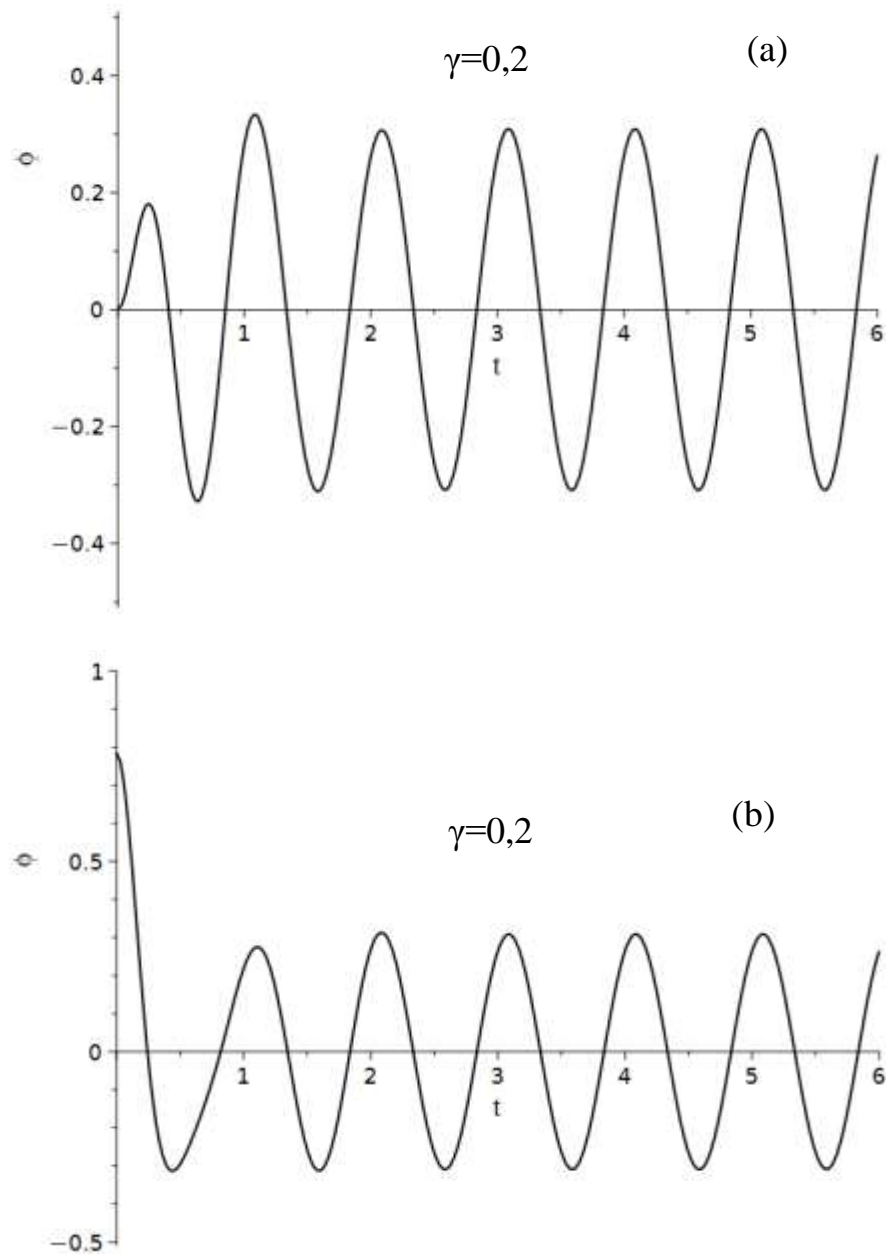


Рис.3.2. Залежність кута відхилення маятника від часу у випадку слабкої зовнішньої сили з нульовими та відмінними від нуля початковими умовами.

Помітною властивістю руху зображеного на Рис. 3.2 є те, що після приблизно двох циклів коливань встановлюється чисто синусоїдальний рух з періодом, рівним періоду зовнішньої сили,  $\tau = 1$ . Для побудови Рис. 3.2(a) використано нульові початкові умови, а для Рис. 3.2(b) початкове відхилення вважалось рівним  $\pi/2$ . Однак, переконуємось, що незалежно від вибору

початкових умов рух лінійного осцилятора завжди буде наближатись до того самого єдиного атрактора.

Підсумовуючи, для лінійного згасного осцилятора із синусоїдною зовнішньою силою маємо:

- 1) існує єдиний атрактор, до якого наближається рух незалежно від вибору початкових умов;
- 2) рух цього атрактора є синусоїдний з частотою, що точно дорівнює частоті зовнішньої сили.

### 3.3.2. Слабко нелінійний осцилятор

Вважатимемо, що амплітуда зовнішньої сили збільшується, а отже апроксимація

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

вже не є задовільною. Проте амплітуда все ще не є великою, тому ми можемо сподіватись, що задовільною буде апроксимація, яка включає наступний доданок в розкладі  $\sin\varphi$  в ряд Тейлора:

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3.$$

Використовуючи це наближення в рівнянні руху (3.11) одержимо наступне наближене рівняння

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \left( \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 \right) = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t. \quad (3.14)$$

До того моменту, поки новий нелінійний доданок, що містить  $\varphi^3$ , малий можемо вважати, що розв'язок цього рівняння достатньо добре апроксимується виразом у вигляді, як і раніше

$$\varphi(t) \approx A \cos(\omega t - \delta).$$

Коли цей вираз підставити в (3.14) малий доданок, що містить  $\varphi^3$ , буде пропорційним  $\cos^3(\omega t - \delta)$ .

Тоді, використовуючи тотожність

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x), \quad (3.15)$$

у лівій частині рівняння (3.14) матимемо малий доданок пропорційний  $\cos 3(\omega t - \delta)$ . А оскільки в правій частині рівняння (3.14) відсутній доданок з такою часовою залежністю, то з цього слідує, що принаймні один з доданків у лівій частині рівняння  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  чи  $\ddot{\varphi}$ , а фактично всі три включатимуть цей доданок.

Тобто, більш точний вираз для  $\varphi(t)$  повинен мати вигляд

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t - \delta) + B\cos 3(\omega t - \delta), \quad (3.16)$$

де  $B$  є значно менше від  $A$ .

Отже, якщо ми збільшуємо зовнішню силу збільшується і амплітуда, а розв'язок «захопить» малий доданок, що осцилює з частотою  $3\omega$ .

Якщо ми підставимо уточнений розв'язок (3.16) знову в рівняння (3.14), тоді доданок з  $\varphi^3$  породить ще менші доданки вигляду  $\cos n(\omega t - \delta)$  з цілим  $n > 3$ . А це приведе до появи малих поправок в (3.16) з частотою  $n\omega$ , такі доданки називають гармоніками частоти зовнішньої сили. Таким чином зі збільшенням зовнішньої сили нелінійність стає більш суттєвою, а рух маятника включатиме різні гармоніки частоти зовнішньої сили, основна з цих гармонік (з  $n=3$ ) вже додана в (3.16).  $n$ -та гармоніка з частотою  $n\omega$  є періодичною з періодом  $\tau_n = \frac{2\pi}{n\omega} = \tau/n$ , де  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  є період зовнішньої сили, тобто за один період зовнішньої сили  $n$ -та гармоніка повторюється  $n$  разів.

Основна відмінність між рухом, що задається (3.16) і допускає включення нових гармонік та рухом лінійного осцилятора, що задається (3.13), полягає в тому, що (3.16) з його додатковими доданками вже не є чистою синусоїдою. З графіка ми можемо бачити незначне відхилення від синусоїди. Проте у випадку, що ми розглядаємо, коефіцієнт  $B$  в (3.16) і коефіцієнти у вищих гармоніках є значно менші  $A$ , тому відмінність між реальним рухом і чистою синусоїдою є слабо помітним.



На Рис.3.3 зображено рух маятника із затуханням та зовнішньою силою  $\gamma=0,9$ . Так само, як і на Рис. 3.2 рух швидко еволюціонує до коливань з періодом зовнішньої сили. На перший погляд цей рух здійснюється за законом синуса, проте якщо уважніше приглянутись, то можна помітити, що він трохи згладжений біля максимуму та мінімуму. Це добре помітно на рисунку поруч.

Підсумовуючи, маємо, що в початковий момент рух визначається початковими умовами, проте цей вплив швидко згасає і рух, незалежно від початкових умов, наближається до єдиного атратора, в якому маятник коливається з періодом зовнішньої сили. В лінійному наближенні цей граничний рух здійснюється за законом синуса. При слабкому відхиленні від лінійності рух залишається періодичним з періодом зовнішньої сили, але відмінним від синусоїдного: він задається сумою синусів з частотою  $n\omega$ . З подальшим збільшенням зовнішньої сили, в поведінці маятника з'являються досить несподівані особливості.

### 3.4. Хаос в маятникових системах

Перейдемо до подальшого збільшення зовнішньої сили і подивимось, як це відобразиться на рухові маятника. На Рис.3.4 зображено залежність кута від часу для тих само значень параметрів, що і на Рис.3.2(а), за виключенням лише параметра  $\gamma$ , який тепер рівний  $\gamma=1,06$ , тобто лише трохи перевищує  $\gamma=1$ , що є межею поділу між суттєвою і слабкою зовнішньою силою. Найбільш помітною особливістю цієї кривої (Рис.3.4) є незвичайні осциляції на початку руху.

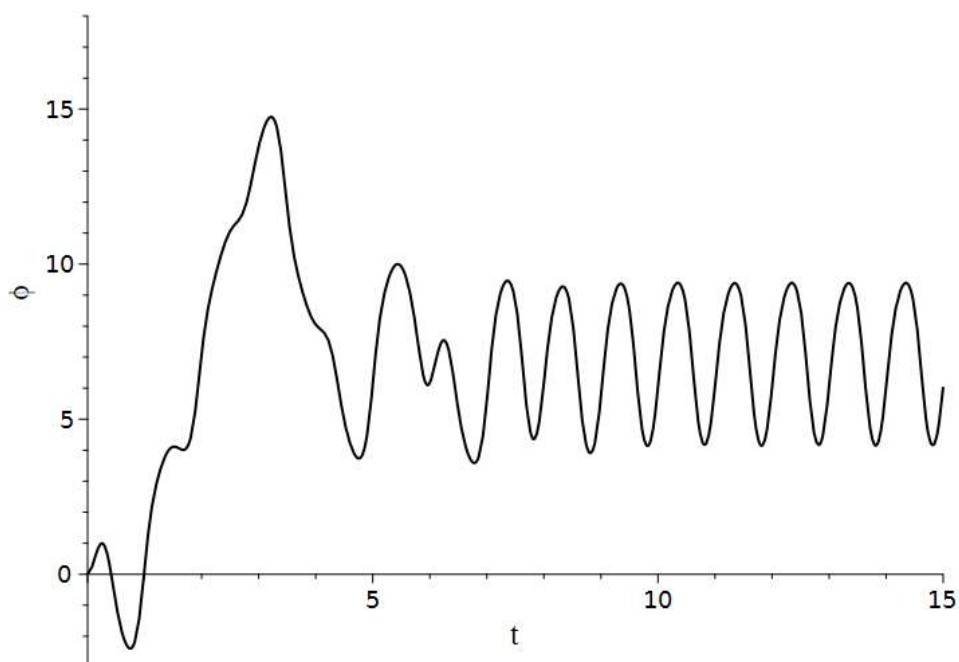


Рис.3.4. Рух маятника зі збільшеною зовнішньою силою ( $\gamma=1,06$ ). Значення інших параметрів такі ж самі як і при побудові Рис.3.2. Початкові умови нульові.

На відміну від коливань зображених на Рис.3.2 тепер вихід на усталений рух відбувається приблизно за 9 циклів коливань. Спочатку маятник здійснює кілька обертань до  $\varphi \approx 5\pi$ , зупиняється і здійснює обертання в протилежному напрямку – зменшення кута до приблизно  $\varphi = \pi$ , а далі маємо усталений рух з періодом зовнішньої сили. Звичайно, дивлячись на графік, ми не можемо бути впевнені, що усталений рух є точно періодичним. Проте, ми можемо в цьому надійно переконатись, одержавши значення кута для кількох послідовних моментів часу з інтервалом одного періоду, обираючи за початковий момент часу  $t_0=50$  с.

З нижче наведеної таблиці бачимо, що дійсно усталений рух є точно періодичним.

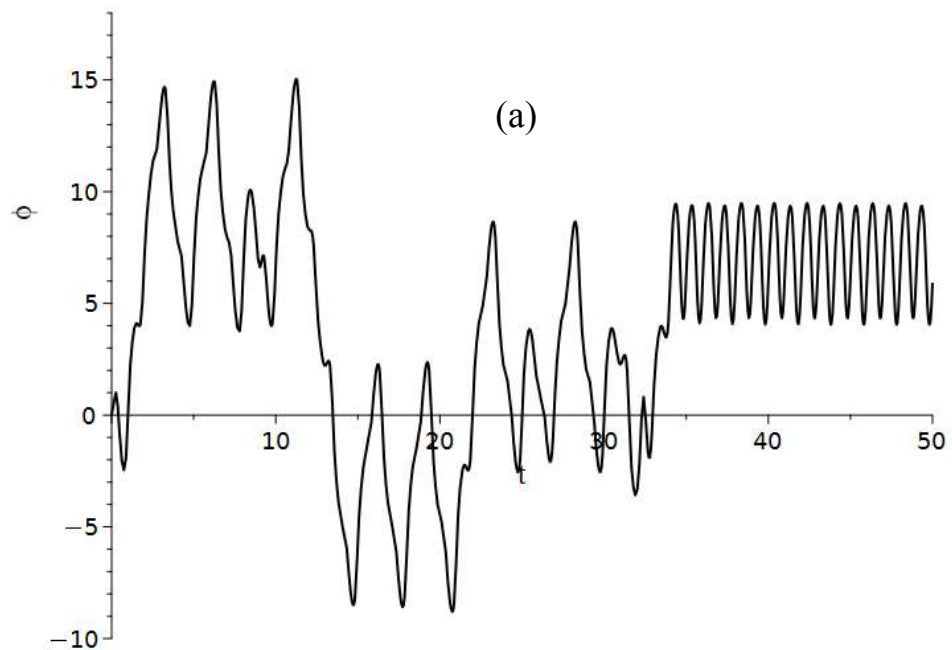
t	$\varphi(t)$
50	6.0366
51	6.0366

52	6.0366
53	6.0366
54	6.0366
55	6.0366

Отже, можемо стверджувати, що для  $\gamma=1,06$  усталений рух є точно періодичним, а його період є такий самий, як і зовнішньої сили.

### 3.4.1. Подвоєння періоду

Цікаві зміни в русі маятника виникають, якщо ми збільшимо амплітуду зовнішньої сили до  $\gamma=1,0732$ , залишаючи значення інших параметрів рівними попереднім значенням.



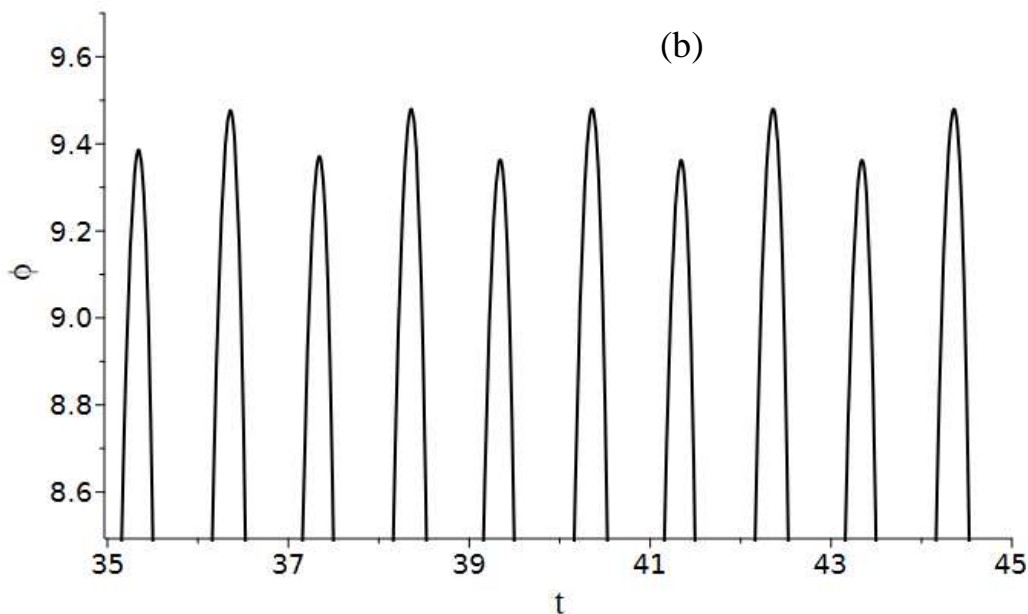


Рис.3.5. Залежність  $\phi$  від часу для  $\gamma=0.0732$  з нульовими початковими умовами (а). Виділена частина графіка на (b), що чітко демонструє подвоєння періоду.

З Рис.3.5(а) бачимо, що після близько 35 циклів коливань відбувається вихід на усталений рух, який візуально дуже близький до синусоїдального. Однак, якщо подивитись більш ретельно (для цього ми виділили частину руху в часовому інтервалі від 35 до 45 секунд (b)), то сусідні максимуми не є однакові. Це означає, що тепер рух вже не повторюється з періодом рівним періоду зовнішньої сили. Проте рух все ж є періодичним з періодом рівним двом періодам зовнішньої сили, що дуже добре видно з Рис.3.5(b).

Такі зміни в рухові очевидно є суттєво відмінним від тих, що ми обговорювали в контексті слабо нелінійного руху, де із збільшенням нелінійності включались нові гармоніки. Ці гармоніки мали частоти  $n\omega$ , тобто рівні цілому числу частоти зовнішньої сили, відповідно період дорівнював періоду зовнішньої сили поділеного на це ціле число. У випадку, продемонстрованому на Рис.3.5, ми маємо період рівний цілому числу періоду зовнішньої сили, а отже, частота дорівнює частоті зовнішньої сили поділеній на це ціле число. Дивлячись на Рис.3.5(а) бачимо, що рух є достатньо близьким до

синусоїдного з періодом зовнішньої сили, тому головним доданком в залежності  $\varphi(t)$  залишається  $A\cos(\omega t - \delta)$  Проте, незважаючи на таку подібність,  $\varphi(t)$  точно містить малий доданок з періодом два.

### 3.4.2. Подальше подвоєння періоду, рух до хаосу

Атрактор зображений на Рис.3.5 має період рівний двом, проте домінуюча поведінка характеризується періодом один, тобто доданок з половиною частоти зовнішньої сили дає малий внесок до розв'язку. Якщо ми далі збільшимо зовнішню силу, то з'явиться атрактор, для якого домінуючим буде доданок з половиною частоти зовнішньої сили.

На Рис.3.6 зображено залежність кута від часу для  $\gamma=1.078$ . З графіка функції  $\varphi(t)$  бачимо, що крім потроєння періоду, цікавою особливістю усталеного руху є обертання маятника за годинниковою стрілкою та проти за один цикл коливань.

Відмінність в побудові Рис.3.7 від Рис.3.6 лише в інших початкових умовах: для побудови Рис.3.6 використано нульові початкові умови  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ , а для Рис.3.7  $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Проте ця відмінність приводить до радикально іншого руху з періодом усталеного руху рівним два.

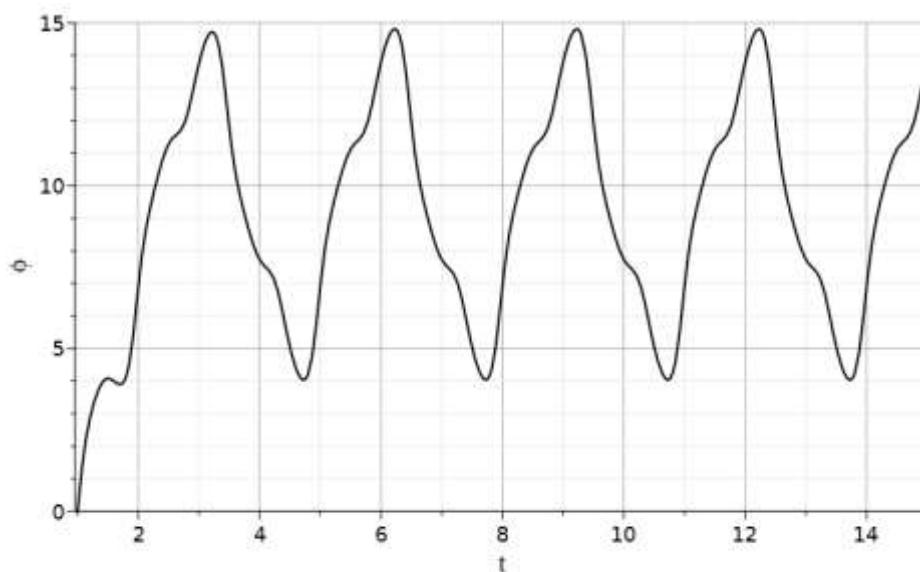


Рис.3.6. Початкове положення нульове, період рівний три.

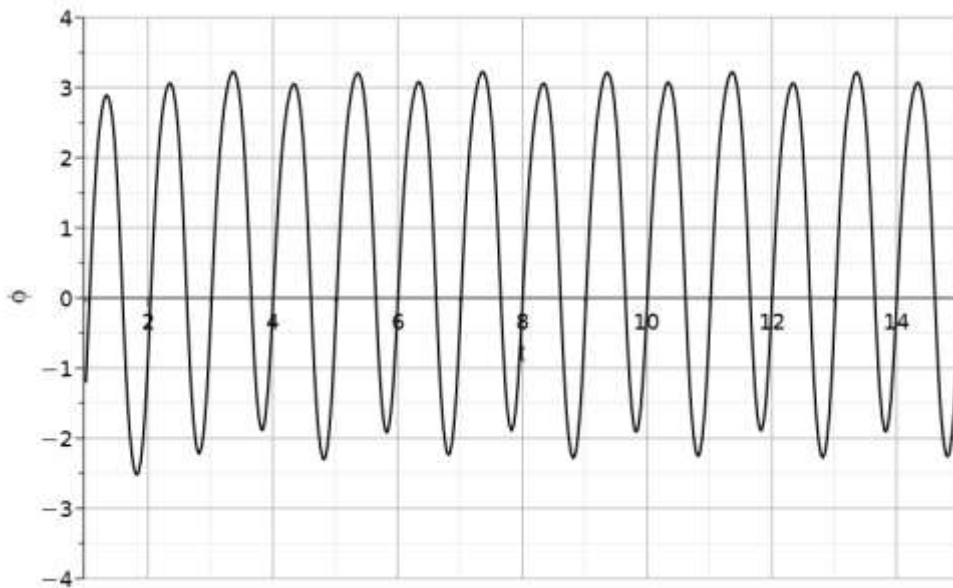


Рис.3.7. Початкове положення відмінне від нульового, період рівний два.

Отже, для нелінійних коливань різні початкові умови приводять до цілком різних атракторів, які зображені на Рис.3.8.

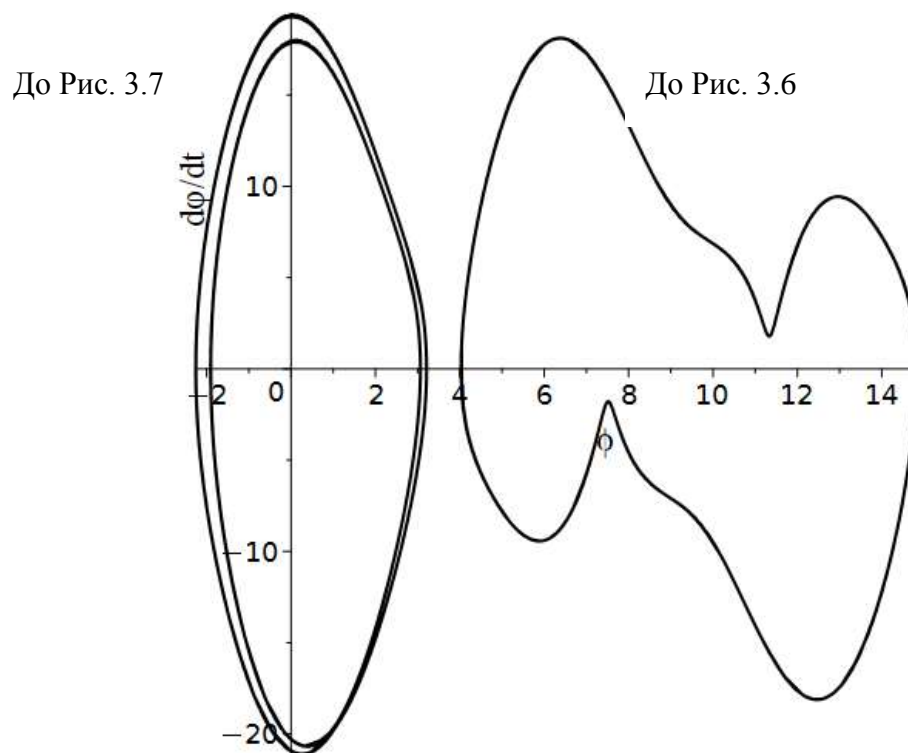


Рис.3.8. Атрактори, для побудови яких використано дві різні початкові умови (для лівого:  $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ; для правого:  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ ). Всі

інші параметри є однакові. Для лівого період атрактора рівний два, а для правого – три.

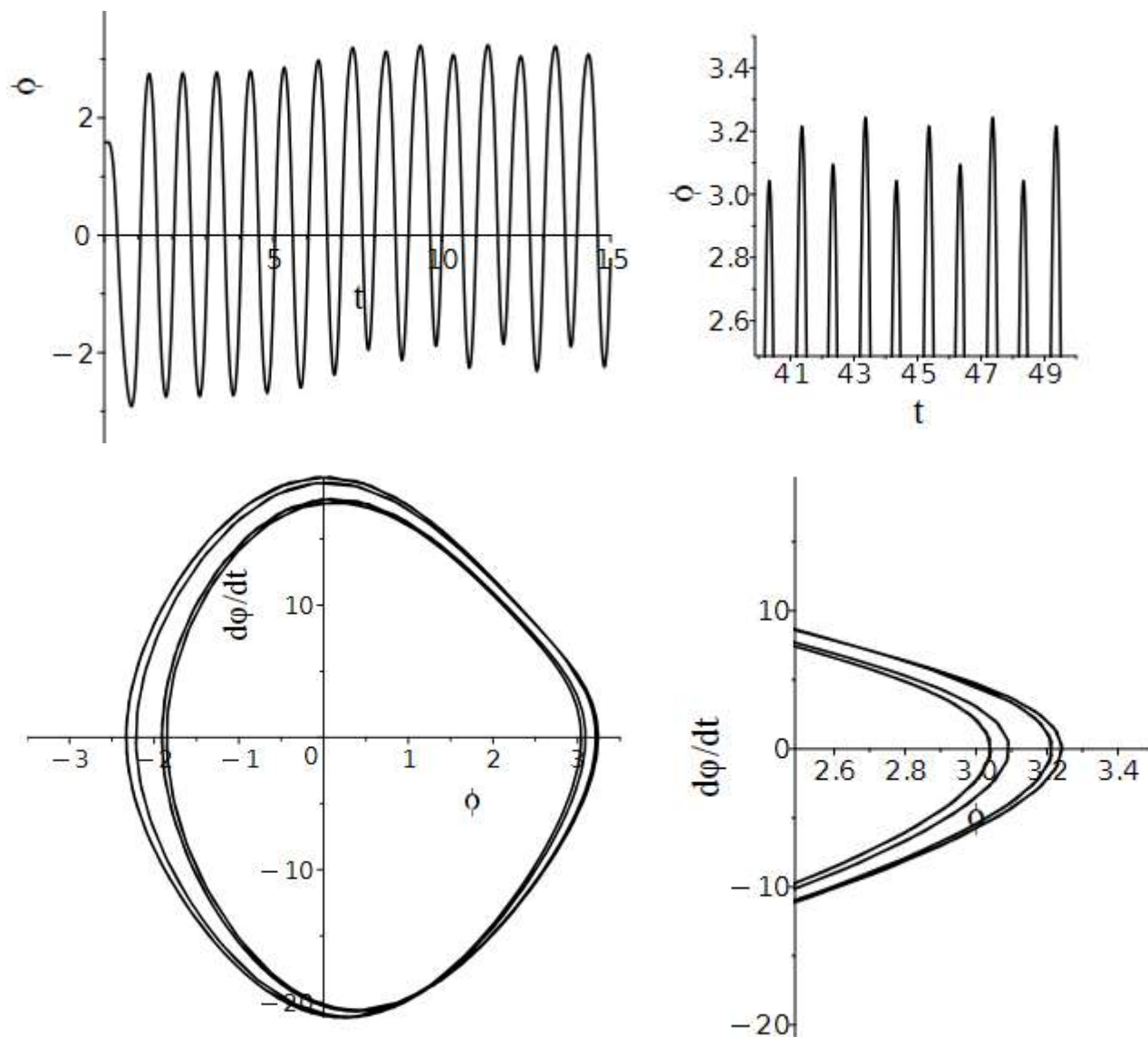


Рис.3.9. Графік залежності значення кута від часу для  $\gamma=1.081$  (а). Збільшена частина графік на (а) для часового інтервалу від  $t=40$  с до  $t=50$  с (б). Траєкторія у фазовій площині (с). Збільшена частина (с) для максимумів кутів.

На Рис.3.8 бачимо, що для ненульових початкових умов у двох сусідніх циклах коливань (за один період маятник здійснює два цикли) відбувається чергування максимальних значень кутів, що проходить маятник, відхиляючись праворуч. Аналогічно маємо для відхилення ліворуч. Рух здійснюється без обертання. Натомість для нульових початкових умов за один період коливань маємо три обертання в напрямку руху годинникової стрілки та три проти.

Подальше збільшення амплітуди зовнішньої сили для ненульових початкових умов приводить до чергового подвоєння періоду. Відповідні графіки зображені на Рис. 3.9. На Рис.3.9(a) бачимо, що з початку коливний процес, що значною мірою визначається початковими умовами, є не періодичним. Проте з часом система виходить на усталений рух, що здійснюється з періодом чотири, що добре видно на збільшеному графіку (Рис.3.9(b)). Також побудовано фазову траєкторію Рис.3.9(c), на якій бачимо, що за один період маятник досягає чотири різні максимуми для кута (особливо це добре видно на збільшеній частині фазової траєкторії Рис.3.9(d)).

На Рис.3.10(a) зображена фазова траєкторія для  $\gamma=1,0826$ , як бачимо відбулося чергове подвоєння періоду, тепер він дорівнює восьми (це чітко видно на Рис.3.10(b)).

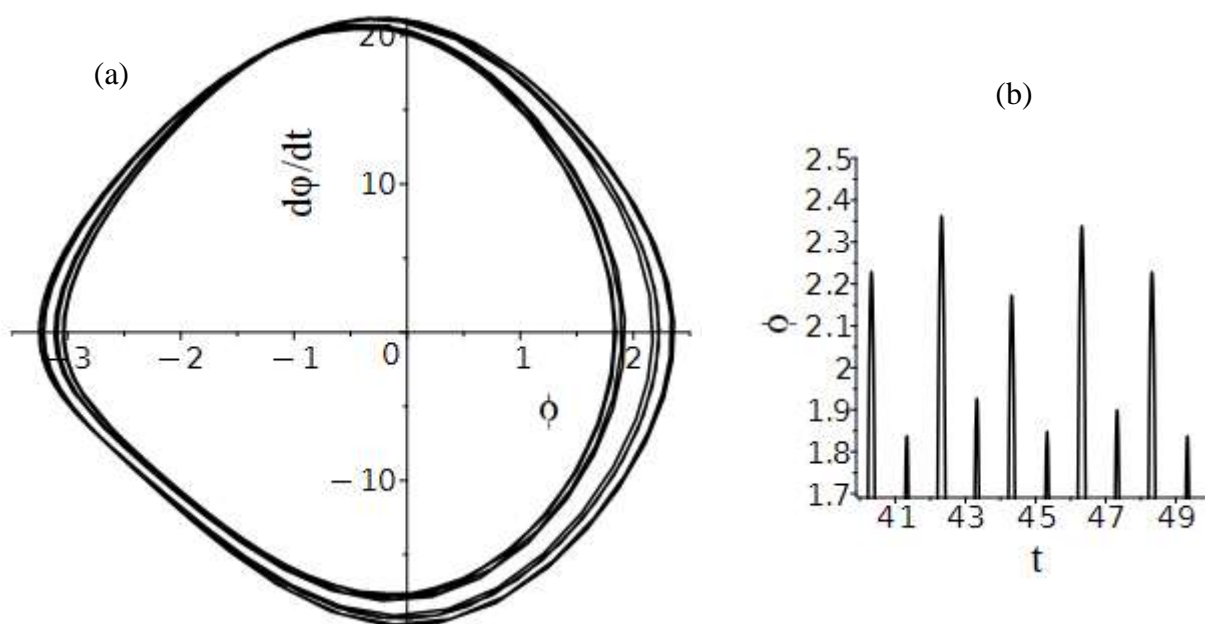


Рис.3.10. Фазова траєкторія (a) та збільшена частина для графіка залежності кута від часу для інтервалу від 40 с до 50 с.(b).

Подвоєння періоду доволі цікаве явище, але складне для спостереження експериментально оскільки кути, що відповідають максимумам досить близькі за значенням. Незважаючи на цю обставину такі маятники були сконструйовані



та використовувались для спостереження тих ефектів, які були описані вище [14,15].

Тут варто зауважити, що ефект подвоєння періоду був виявлений в багатьох цілком різних нелінійних системах: електричних колах, хімічних реакціях [16], тощо. В кожній з цих систем є контролюючий параметр, що може набувати різних значень (в нашому випадку таким параметром є  $\gamma$ ).

Подвоєння періоду буде відбуватися і далі зі збільшенням параметра  $\gamma$ . Важливою проблемою, яка тут постає є знаходження значень параметра  $\gamma_n$ , при якому відбувається зміна періоду з  $2^{n-1}$  до  $2^n$ , це є доволі складним завданням.

Нижче наведено таблиця 3.1, в якій відображені значення параметра  $\gamma_n$ , при яких відбуваються перші чотири подвоєння періоду.

Таблиця 3.1.

Значення параметрів, при яких відбувається подвоєння періоду.

<b>n</b>	<b>T</b>	$\gamma_n$	$\gamma_{n+1} - \gamma_n$
1	1→2	1.0663	
2	2→4	1.0793	0.0130
3	4→8	1.0821	0.0028
4	8→16	1.0827	0.0006
5	16→32		
6	32→64		

Як бачимо відмінність між сусідніми значеннями  $\gamma_n$  та  $\gamma_{n+1}$ , при яких відбувається n-те подвоєння періоду зменшується, як спадна геометрична прогресія. Розглядаючи  $\gamma_{n+1} - \gamma_n$  як члени спадної геометричної прогресії із знаменником  $q = 1/\delta$ , де  $\delta = 4.6692016$  можемо знайти суму цієї прогресії  $S = 0.01654$ . Тоді критичне значення параметра  $\gamma$ , при якому період подвоєється нескінченну кількість разів

$$\gamma_c = 1.0829.$$

При даному значенні параметра  $\gamma$  в система переходить в стан хаосу, вона ніколи не повторить той самий рух.

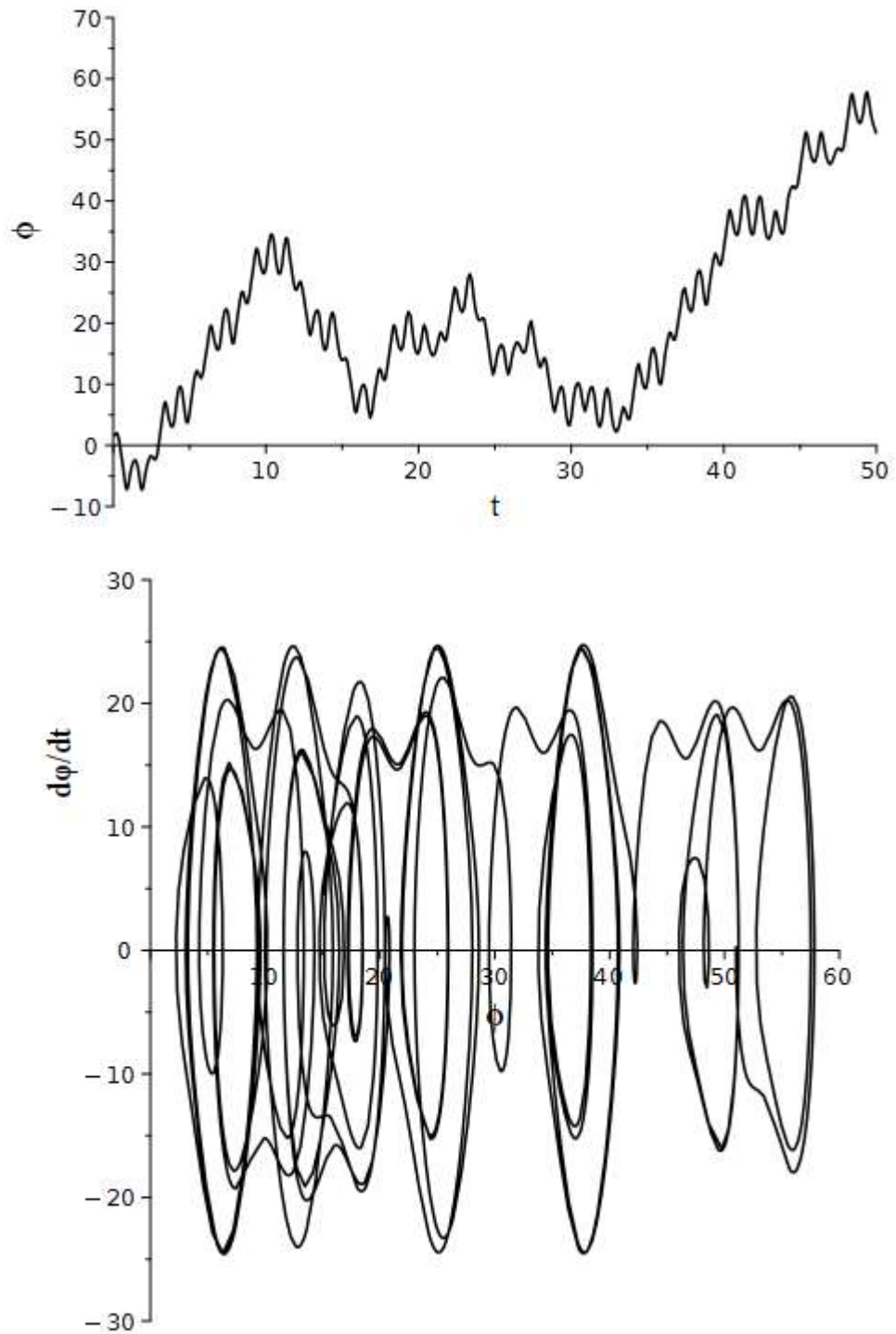


Рис. 3.11. Хаос в русі маятника.

На Рис.3.11(а) зображено залежність кута від часу для перших 50 секунд від початку руху, як бачимо, виходу на усталений рух з певним періодом не відбувається, тобто в системі реалізується стан хаосу. Траєкторія у фазовому просторі також свідчить про стан хаосу.

## ВИСНОВКИ

Теорія стійкості руху, як можна побачити з роботи, відіграє досить важливу роль у дослідженнях різного типу механічних систем. Серед різних факторів важливо знати критерії стійкості руху, щоб оцінити, як буде рухатись система у подальшому, якщо вона випадково потрапить під вплив сил, що не враховані в моделі. Останнє еквівалентно зміні початкових умов, від яких безпосередньо залежить характер руху. Приведені методи і приклади дають змогу розглянути поведінку системи без розв'язування складних диференціальних рівнянь руху при наявності збурень.

У цій роботі ми представили загальну теорію стійкості руху та визначили, як буде відрізнятися рух системи з часом при дещо відмінних початкових значеннях. Для точки з гармонічним потенціалом взаємодії неточність вимірювання є величиною обмеженою. Проте, для плоского маятника область невизначеності змінюється з часом, тобто два однакові маятники, в яких початкові стани трохи відрізняються, рухаються цілком не в такт.

Як загальний висновок можна сказати, що для коливальних систем, рух яких описується лінійним рівнянням, неточність в початкових умовах залишається обмеженою, а для систем з нелінійними рівняннями ця початкова похибка з часом наростає.

В роботі також досліджено модель математичного маятника із загасанням та наявністю зовнішньої сили. Показано, що залежно від відношення амплітуди зовнішньої сили до ваги тіла (параметр  $\gamma$ ) в системі може відбуватися подвоєння періоду, яке зі збільшенням параметра  $\gamma$  повторюється. В результаті при скінченному  $\gamma$  в системі настає стан хаосу, коли повторюваність руху вже не відбувається.

Виконані в роботі розрахунки супроводжувалися відповідним моделюванням в СКМ Maple, в результаті одержані моделі для спостереження еволюції елемента площі у фазовій площині, що відповідає похибці в початкових умовах, побудовані відповідні графіки залежності кута від часу, які чітко

демонструють подвоєння періоду, а також створені відповідні анімації досліджуваних моделей, що дозволяють спостерігати за самим хаосом.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Taylor, John. Classical Mechanics. 2nd. Univ Science Books, 2005. p.464-495.
2. Азаренков М.О., Гірка В.О., Лапшин В.І., Муратов В.І.. Теорія коливань та хвиль. Харків. 2005. 154 с.
3. Гаральд Іро. Класична механіка. Львів: Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. 1999. 461 с.
4. Федорченко А. М. Теоретична механіка. Київ: Вища школа, 1975. 516 с.
5. Сахнюк В.Є., Вілігурський О.М., Бірук О.М., Замуруєва О.В. СКМ MAPLE у фізиці: коливання: метод. рек. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 64 с.
6. Frank Y. Wang. Physics with Maple: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim. 2006. 610 p.
7. Frank E. Harris. Mathematics for Physical Science and Engineering Symbolic Computing Applications in Maple and Mathematica. University of Utah, Salt Lake City, UT and University of Florida, Gainesville, FL. 2014. 780 p.
8. Попов Б. О. Розв'язування математичних задач у системі комп'ютерної алгебри Maple V. К. : ВіР, 2001. 312 с.
9. Гірник М. О., Костенко А. В., Лучко М. В., Плеша М. І. Maple 7. Основи практичного застосування. Львів : ВНТЛ-Класика, 2002. 174 с.
10. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики. Луцьк: РВВ "Вежа" Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2001.
11. Hongjin Ma and Weiwei Zhang. Vibration and Active Control. Journal of Low Frequency Noise. 2023. Vol. 42(1). P. 126–133.
12. Strogatz Steven. Nonlinear Dynamics and Chaos. Westview Pr, 2000. p.160.
13. Meiss James. Differential Dynamical Systems. 1st. Philadelphia, PA: SIAM, 2007. p.114,220.
14. Blackburn, James, and H Smith. Instruction Manual for EM-50 Chaotic Pendulum. Salem, MA: Daedalon Corporation, 1998.

15. J. A. Blackburn and G. L. Baker, A Comparison of Commercial Chaotic Pendulum, *American Journal of Physics*, Vol. 66, p. 821, (1998).
16. A. Libchaber, C. Laroche, and S. Fauve, *Journal de Physique-Lettres*, vol. 43, p. 211 (1982)