

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики
імені А.В. Свідзинського**

На правах рукопису

ДЕМЧУК МИКОЛА МИКОЛАЙОВИЧ

**МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ТУНЕЛЬНИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ
КОНТАКТІВ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СТРУМ-ФАЗОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ**

Спеціальність 104 «Фізика та астрономія»
Освітньо-професійна програма «Фізика та астрономія»
Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

САХНЮК ВАСИЛЬ ЄВГЕНОВИЧ,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри теоретичної та

комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського

від _____ 2023

Завідувач кафедри

доц. Сахнюк В.Є. _____

ЛУЦЬК – 2023

АНОТАЦІЯ

Демчук Микола Миколайович.

Магнітні властивості тунельних джозефсонівських контактів з нетривіальною струм-фазовою залежністю.

Кваліфікаційна робота присвячена одній із найцікавіших властивостей джозефсонівських контактів – їх унікальній чутливості до змін магнітного поля, що відкриває один із прикладних напрямів у використанні надпровідності – створення надчутливих приладів для детектування змін магнітного поля.

В численних роботах, присвячених теоретичному опису поведінки надпровідних контактів у магнітному полі, використовується синусоїдна залежність струму від різниці фаз. Проте, залежно від параметрів контакту, величини струму та інших факторів, струм-фазова залежність може бути відмінною від синусоїдної. У кваліфікаційній роботі виконано теоретичне дослідження магнітних властивостей джозефсонівських контактів з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз.

В роботі проаналізовано два випадки несинусоїдної залежності струму від різниці фаз: перший, коли до основного доданка додано другу гармоніку та більш складна форма несинусоїдної залежності, що виникає для тунельних надпровідних контактів, якщо врахувати ефекти розпаровування.

Показано, що в обох випадках зі збільшенням відмінності струм-фазової залежності від синусоїдної критичний струм контакту є більш чутливим до появи зовнішнього магнітного поля.

Ключові слова: надпровідність; ефект Джозефсона; тунельний надпровідний контакт; струм-фазова залежність; критичний струм; магнітне поле.

SUMMARY

Demchuk Mykola Mykolayovych. Magnetic properties of Josephson tunnel junctions with non-trivial current-phase dependence.

The qualification work is devoted to one of the most interesting properties of Josephson contacts - their unique sensitivity to changes in the magnetic field, which opens one of the applied directions in the use of superconductivity – the creation of ultra-sensitive devices for detecting changes in the magnetic field.

In numerous works devoted to the theoretical description of the behavior of superconducting contacts in a magnetic field, the sinusoidal dependence of the current on the phase difference is used. However, depending on the parameters of the contact, the magnitude of the current and other factors, the current-phase dependence may be different from the sinusoidal one. In the qualification work, a theoretical study of the magnetic properties of Josephson junctions with a non-sinusoidal dependence of the current on the phase difference was carried out.

Two cases of non-sinusoidal dependence of the current on the phase difference are analyzed in the work: the first, when the second harmonic is added to the main term, and a more complex form of non-sinusoidal dependence that arises for tunnel superconducting junctions, if the effects of vaporization are taken into account.

It is shown that in both cases, with an increase in the difference between the current-phase dependence and the sinusoidal one, the critical junction current is more sensitive to the appearance of an external magnetic field.

Keywords: superconductivity; the Josephson effect; superconductor junction; current-phase relation; critical current; magnetic field.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ У ВІДКРИТТІ НАДПРОВІДНОСТІ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НАДПРОВІДНИКІВ	8
1.1. Відкриття надпровідності	8
1.2. Тунельні надпровідні контакти	14
1.2.1. Стаціонарний ефект Джозефсона	16
1.2.2. Нестационарний ефект Джозефсона	20
РОЗДІЛ 2 МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ТУНЕЛЬНИХ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТІВ ІЗ СИНУСОЇДНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ СТРУМУ ВІД РІЗНИЦІ ФАЗ	24
2.1. Загальна схема опису проникнення магнітного поля в тунельний надпровідний контакт	24
2.2. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах	31
РОЗДІЛ 3 МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ТУНЕЛЬНИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТІВ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СТРУМ-ФАЗОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ	35
3.1. Нетривіальна струм-фазова залежність та чинники, що її породжують	35
3.2. Магнітні властивості надпровідних контактів з другою гармонікою в струм-фазовій залежності	37
3.3. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах з другою гармонікою в струм-фазовій залежності	42
3.4. Магнітні властивості тунельних надпровідних контактів для температур, близьких до критичної та з врахуванням ефектів розпаровування.	45
3.5. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах з несинусоїдною струм-фазовою залежністю	48
ВИСНОВКИ	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	52

ВСТУП

Актуальність теми. Явище надпровідності з часу його відкриття, понад сто років тому, і по сьогодні залишається одним із найпривабливіших ефектів у фізиці конденсованого стану в плані як теоретичного дослідження, так і його прикладного застосування. Сильною підживою в зацікавленості наукового світу явищем надпровідності було відкриття Джозефсона, що полягало у можливості протікання надпровідного струму через контакт двох надпровідників, розділених півкою діелектрика. Це поклало початок активним дослідженням надпровідних контактів різних геометрій. Однією із найцікавіших властивостей джозефсонівських контактів є їх унікальна чутливість до змін магнітного поля, а це відкриває один із прикладних напрямів у використанні надпровідності – створення надчутливих приладів для детектування змін магнітного поля. Отже, важливим питанням, що тут постає, є теоретичний опис магнітних властивостей джозефсонівських контактів. В численних роботах, присвячених теоретичному опису поведінки надпровідних контактів у магнітному полі, використовується синусоїдна залежність струму від різниці фаз. Проте, залежно від параметрів контакту, величини струму та інших факторів, струм-фазова залежність може бути відмінною від синусоїдної (див. огляд [1]). Теоретичне дослідження магнітних властивостей джозефсонівських контактів з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз є далеке від завершення, що і зумовлює актуальність теми даної роботи.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є з'ясувати вплив ангармонічності в залежності струму від різниці фаз на магнітні властивості тунельних джозефсонівських контактів.

Для досягнення мети були поставлені наступні завдання:

- розкрити сутність явища надпровідності;
- продемонструвати основні етапи у вивченні надпровідності;
- представити теоретичний опис ефекту Джозефсона;

- продемонструвати загальну схему опису поведінки тунельних надпровідних контактів у магнітному полі на прикладі контакту із синусоїдною струм-фазовою залежністю.

- з'ясувати вплив другої гармоніки в залежності струму від різниці фаз на залежність критичного струму тунельного надпровідного контакту від потоку магнітного поля, що пронизує контакт;

- дослідити магнітні властивості джозефсонівських контактів для температур, близьких до критичної, з врахуванням ефектів розпаровування.

Об'єктом дослідження є магнітні властивості джозефсонівських контактів.

Предметом дослідження є вплив ангармонічності в залежності струму від різниці фаз на залежність критичного струму від потоку магнітного поля та залежність різниці фаз від координат за наявності магнітного поля.

Методи дослідження. Робота базується на загальнонаукових принципах: аналізу, синтезу, абстрагування, індукції та дедукції, систематизації. Використовуючи методи аналізу та синтезу, проаналізовано базові поняття надпровідності та основних ефектів, що пов'язані з надпровідністю. Методом систематизації опрацьовано роботи інших авторів за тематикою дослідження. Переходом від конкретних предметів (елементів) до загальних понять і законів розвитку (метод абстрагування) описано основні концепції існуючих теорій, що пояснюють властивості надпровідників. Індуктивним методом від конкретного опису магнітних властивостей надпровідних контактів із синусоїдною струм-фазовою залежністю результати екстраполюються на надпровідні контакти із несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз.

Наукова новизна одержаних результатів. У кваліфікаційній роботі систематизовано результати дослідження магнітних властивостей надпровідних контактів. Отримано нові формули для залежності критичного струму надпровідних контактів від потоку магнітного поля та на їх основі проаналізовано чутливість критичного струму до змін магнітного поля.

Показано, що врахування ангармонічності збільшує чутливість надпровідних контактів до змін магнітного потоку.

Практичне значення одержаних результатів.

Отримані в роботі результати можуть бути використані при експериментальному дослідженні магнітних властивостей надпровідних контактів з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз та подальших теоретичних дослідженнях надпровідних контактів різних геометрій. Систематизовані в роботі результати вивчення магнітних властивостей надпровідних контактів та наведена загальна схема їх дослідження буде корисною для здобувачів освіти, які вивчають надпровідність.

РОЗДІЛ 1

ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ У ВІДКРИТТІ НАДПРОВІДНОСТІ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НАДПРОВІДНИКІВ

1.1. Відкриття надпровідності

Розглядаючи здатність матеріалів пропускати електричний струм, можемо виділити велику групу, зазвичай металів, для прикладу в цю групу входять: мідь, алюміній, які дуже добре пропускають електричний струм за наявності різниці потенціалів. Такі матеріали називаємо провідниками.

Структурно метал складається з ґратки, в якій атоми розташовані настільки близько один до одного, що електрони зовнішньої оболонки можуть відокремлюватися від атомів і вільно рухатися у ґратці. Такі електрони називаються вільними. Якщо до таких металів прикласти різницю потенціалів, то вільні електрони здійснюватимуть рух у виділеному напрямку, цей рух вільних електронів у металі називається електричним струмом. Зіткнення електронів з іншими частинками створює опір електричному струмові. Цей опір, R , електричному струму, I , описується Закон Ома, з якого маємо, що $R = V/I$, де V — різниця потенціалів між кінцями провідника.

Для деяких металів при охолодженні їх до певної критичної температури електричний опір прямує до нуля. Вперше це було відкрито в 1911 році голландським фізиком Г. Камерлінг-Оннесом, який вивчав температурну залежність опору ртуті. Він охолодив ртуть приблизно до $T_c \sim 4,2 \text{ K}$ і спостерігав цікаву її властивість. Електричний опір різко зменшився до нуля і залишався нульовим при температурах нижчих критичної T_c .

Це явище відсутності опору проходженню електричного струму було Г. Камерлінг-Оннесом названо надпровідністю. Незабаром після відкриття цього явища в ртуті було виявлено кілька інших простих металів, таких як алюміній, індій, олово, які проявляли надпровідні властивості.

За своє унікальне відкриття Г. Камерлінг-Оннес був нагороджений Нобелівською премією з фізики 1913 року.

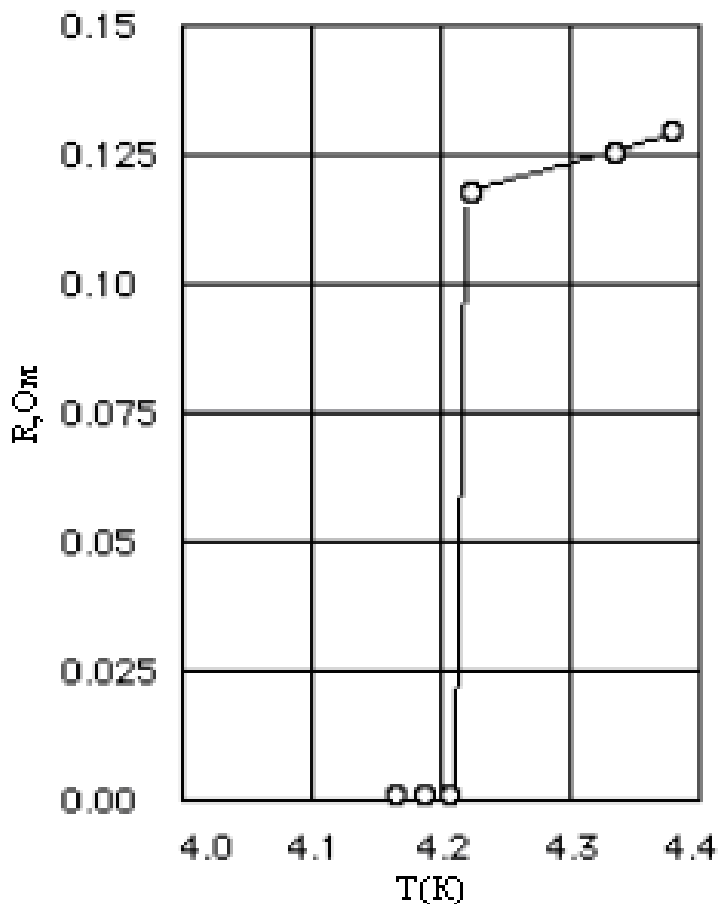


Рис.1.1. Перехід з нормального у надпровідний стан у першому надпровіднику (Hg) відкритому Оннесом, $T_c = 4,2$ K.

У 1933 році німецькі фізики Вальтер Майснер і Роберт Оксенфельд виявили, що нижче певної критичної температури надпровідний матеріал виштовхує магнітне поле (Рис. 1.2), тобто надпровідник проявляє властивості ідеального діамагнетика [2,3]. Цю унікальну характерну особливість надпровідного матеріалу називають ефектом Майснера-Оксенфельда. Для теоретичного пояснення цього ефекту необхідно скористатися квантовою механікою, оскільки його неможливо пояснити класичною фізикою.

У 1935 році двоє німецьких фізиків, брати Гайнц і Фріц Лондон запропонували рівняння, які дали перше пояснення ефекту Мейснера. Ці рівняння описують проникнення магнітного поля в тонкий приповерхневий шар надпровідника.

У 1950 році британський фізик німецького походження Герберт Фр'юліх зауважив, що за певних обставин може виникнути притягальна взаємодія між електронами матеріалу та квантами коливальної енергії кристалічної ґратки [2]. Кванти коливальної енергії кристалічної ґратки називають фононами. Це відкрило шлях до мікроскопічного розуміння надпровідності. У 1956 році Леон Купер, американський фізик, розширив ці ідеї та показав, що між електронами в металі, за певних обставин, може існувати невелике притягання. Це притягання, індуковане фононами, приводить до виникнення так званих куперівських пар. Купер показав, що з цими парами «зв'язаних» електронів основний стан матеріалу є нестабільний [2]. У низькотемпературних надпровідниках куперівські пари утворюються завдяки взаємодії електрона з позитивно зарядженою ґраткою і це притягання може переважати кулонівське відштовхування.

Кращого розуміння надпровідності було досягнуто у 1950 році завдяки теорії Гінзбурга-Ландау. В теорії Гінзбурга-Ландау запроваджується параметр ψ , який є мірою впорядкування надпровідного стану, цей параметр є комплексною функцією і розглядається як хвильова функція надпровідних електронів. Ключовим в цій теорії є використання єдиної хвильової функції для опису макроскопічного числа електронів, які заповнюють один і той самий квантовий стан, іншими словами кажуть: в системі утворюється конденсат куперівських пар. Хвильову функцію обирають у вигляді

$$\psi = |\psi|e^{i\varphi}, \quad (1.1)$$

де φ – фаза, яка є однакою для всіх частинок в конденсаті, $|\psi|^2 = \rho$ – густина числа електронів.

Через хвильову функцію конденсату густина струму в надпровіднику виражається наступним чином

$$\vec{j} = \frac{e}{m} \left[i \frac{\hbar}{2} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) - \frac{2e}{c} \vec{A} |\psi|^2 \right]. \quad (1.2)$$

Підставляючи (1.1) в (1.2) отримаємо

$$\vec{j} = \rho \frac{e}{m} \left[\hbar \vec{\nabla} \varphi - \frac{2e}{c} \vec{A} \right]. \quad (1.3)$$

З отриманого виразу слідує, що просторова зміна фази хвильової функції конденсату куперівських пар приводить до проходження струму в надпровіднику.

Теорія Гінзбурга-Ландау є макроскопічною теорією надпровідності, на основі якої вдається отримати рівняння Лондонів.

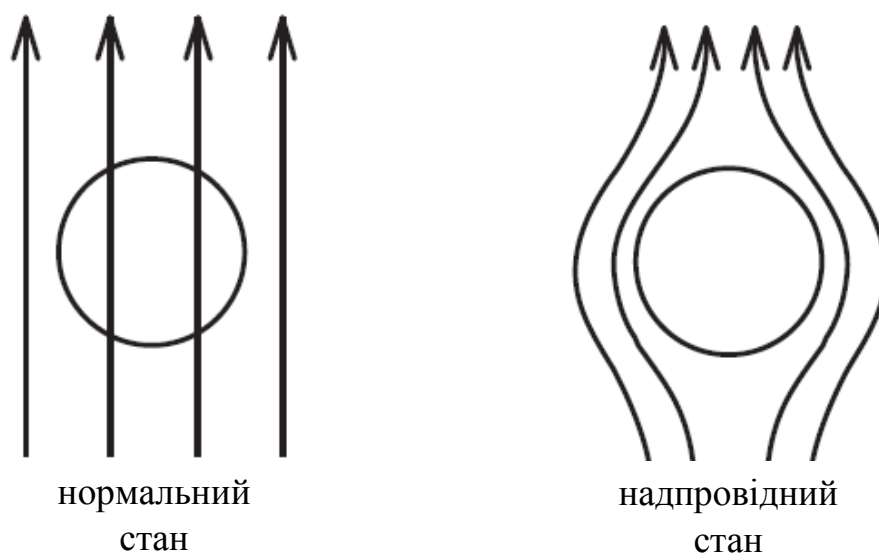


Рис. 1.2. Куля в нормальному стані (ліворуч) та куля в надпровідному стані (праворуч) у магнітному полі.

У тому ж році британський фізик німецького походження Герберт Фрьоліх зауважив, що за певних обставин може виникнути притягальна взаємодія між електронами матеріалу та квантами коливальної енергії кристалічної ґратки. Кванти коливальної енергії кристалічної ґратки називають фононами. Це відкрило шлях до мікроскопічного розуміння надпровідності. У 1956 році Леон Купер, американський фізик, розширив ці ідеї та показав, що між електронами в металі, за певних обставин, може існувати невелике притягання. Це притягання, індуковане фононами, приводить до виникнення так званих куперівських пар. Купер показав, що з цими парами «зв'язаних» електронів основний стан матеріалу є нестабільний [2]. У низькотемпературних надпровідниках куперівські пари утворюються завдяки взаємодії електрона з позитивно

зарядженою граткою і це притягіння може переважати кулонівське відштовхування.

У 1957 році перше широко прийняте теоретичне розуміння надпровідності було запропоновано американськими фізиками Джоном Бардіном, Леоном Купером і Джоном Шріффером [4]. Спираючись на роботу Купера 1956 року, ця теорія, відома як теорія БКШ, пояснює надпровідність при низьких температурах. Згідно цієї теорії куперівські пари можуть конденсуватися в один енергетичний рівень і це пояснює ідеальний діамagnetизм, залежність критичної температури від масового числа ізотопу та ефект нульового питомого електричного опору. За розвиток цієї теорії Бардін, Купер і Шріффер отримали Нобелівську премію з фізики 1972 року.

До 1980 року вважалося, що теоретично найвища критична температура для надпровідного переходу матеріалу є 30 К. У 1986 році німецький фізик Беднорц разом зі швейцарським фізиком Мюллером досліджував провідність кераміки на основі лантану, барію та оксиду міді ($\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$). Вважалося, що ця кераміка є діелектриком. Натомість, Беднорц і Мюллер не тільки відкрили надпровідність цієї кераміки, а також показали, що перехід в надпровідний стан відбувається при критичній температурі $T_c = 35\text{K}$, що було більше теоретично передбачуваної найвищої критичної температури [5]. Це відкриття класифікувало надпровідники на два типи, а саме – низькотемпературні надпровідники та високотемпературні надпровідники. У високотемпературних надпровідниках сумарний орбітальний момент спарених електронів відмінний від нуля і цей стан називається d-хвильовим станом. У низькотемпературних надпровідниках орбітальний момент спарених електронів дорівнює нулеві, а цей стан називають s-хвильовий стан.

Через рік Беднорц і Мюллер відкрили надпровідність сполуки ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$) з $T_c = 93\text{K}$ [6]. За їх важливий внесок у відкриття керамічних надпровідників Беднорц і Мюллер були нагороджені у 1987 році Нобелівською премією з фізики.

У 1993 році А. Шиллінг і його команда повідомили про надпровідність сполуки $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8-\delta}$ з критичною температурою $T_c \approx 134\text{K}$ [7]. Ця

надпровідна сполука є надпровідником з найвищою критичною температурою на сьогоднішній день. Тут слід зауважити, що час від часу з'являються публікації, де автори повідомляють про відкриття надпровідності з вищою критичною температурою, проте багато з таких повідомлень не знайшли свого незалежного підтвердження іншими науковими групами.

Вагомим внеском у розвиток надпровідності можемо вважати відкриття у січні 2001 року надпровідності у бінарній сполуці MgB_2 з критичною температурою $T_c \approx 39\text{K}$, [8]. Дана критична температура є найвищою серед температур надпровідного переходу усіх металевих сумішей, але все ж меншою у порівнянні з деякими іншими високотемпературними надпровідниками.

Протягом останніх років маємо стійкий дослідницький інтерес світового співтовариства фізиків до даної сполуки. Було видано велику кількість статей, що охоплюють як теоретичні так і прикладні аспекти MgB_2 . Такий підвищений інтерес до цієї сполуки пов'язаний з її особливими властивостями. Внаслідок великої довжини когерентності ($\xi=50\text{\AA}$) ця суміш має слабкозв'язні вільні межі зерен, і, до того ж, високу густину протікання струму, порядку 10^6 A/cm^2 і велике верхнє критичне магнітне поле (39Тл) в діапазоні температури від 4,2К до 25К у масивному зразку. Іншою важливою причиною для дослідження MgB_2 як багатообіцяючого кандидата для промислового застосування при температурі нижче 30К – це низька ціна його виробництва.

В дибориді магнію проявляється чіткий ізотопний ефект. Вимірювання швидкості спін-решіткової релаксації ядер [9] вказують на те, що MgB_2 є надпровідником типу БКШ зі спарюванням, зумовленим фононами. Результати розрахунку зонної структури і фононного спектру передбачають наявність двох енергетичних щілин [10, 11], більша з яких відноситься до двовимірних $p_{x,y}$ -орбіталей, а менша – до тривимірних p_z -орбіталей. Властивість двощілинності надпровідного стану MgB_2 чітко проявляється у недавно виконаних тунельних вимірюваннях і вимірюваннях теплоємності.

У 2006 році група японських дослідників відкрила шаруваті надпровідники на основі заліза [12], для яких також властива наявність кількох енергетичних щілин. Проте, точний механізм, який породжує в них надпровідність, досі залишається загадкою. Дослідження в надпровідності – це динамічна та багатоочікувана сфера, яка, є великі сподівання, принесе захоплюючі відкриття.

Роботи з надпровідності були представлені до найвищої нагороди – Нобелівської премії з фізики чотири рази протягом майже ста років!

Технології, що використовують в своїй основі надпровідність дозволяють сконструювати унікальні прилади для застосування в медицині, у вдосконаленні магніто-резонансної томографії (МРТ). Надпровідні магніти використовуються для усунення тертя між поїздами на магнітній подушці та колією, що сприяє високій швидкості поїздів *Maglev*.

Надпровідні квантові інтерференційні пристрої (СКВІДи) використовуються для детектування дуже слабких магнітних полів. Тривають спроби використовувати надпровідники для створення надшвидких комп'ютерів і для більш ефективного виробництва та передачі електроенергії.

У 1962 році британський фізик Девід Джозефсон передбачив [13] можливість тунелювання куперівських пар від одного надпровідника до іншого через ненадпровідний (або ізоляційний) бар'єр за відсутності різниці потенціалів на бар'єрі.

Оскільки цей ефект лежить в основі нашого дослідження, то зупинимось на ньому більш детально.

1.2. Тунельні надпровідні контакти

Тунелювання електронів, тобто проходження їх через потенціальний бар'єр при повній енергії, меншій за максимальну висоту потенціалу, є добре відоме явище з квантової механіки. Нехай маємо два зразки нормального металу, розділених тонким прошарком діелектрика, можемо назвати таку систему *NIN*-контакт. За наявності різниці потенціалів, крізь такий контакт буде протікати

струм, величина якого пропорційна цій різниці потенціалів і обернено пропорційна опору контакту. Опір контакту пов'язаний з коефіцієнтом проходження електронів D крізь діелектрик обернено пропорційною залежністю, а отже струм пропорційний коефіцієнту проходження електронів.

Розглянемо тепер контакт двох надпровідників, розділених тонким прошарком діелектрика, для такої системи, яку називають тунельним надпровідним контактом, властиві два дуже цікаві ефекти:

- 1) через тунельний надпровідний контакт може протікати стаціонарний струм навіть при нульовій напрузі на контакті, величина цього струму може набувати довільних значень між нулем і максимальною величиною, яку називають критичним струмом контакту;
- 2) якщо струм через контакт перевищує критичний струм, то на контакті виникає напруга, яка є періодичною функцією часу, а контакт стає джерелом високочастотного електромагнітного випромінювання.

Обидва ці ефекти теоретично передбачив у 1962 році Девід Брайан Джозефсон. Тому їх називають: перший – стаціонарний ефект Джозефсона, а другий – нестаціонарний ефект Джозефсона.

Невдовзі після публікації про можливість існування цих ефектів, вони були підтверджені на експерименті [14].

В основі цих ефектів лежать квантові властивості надпровідного стану. Особливістю надпровідного стану є утворення куперівських пар – це два електрони, між якими виникає певне ефективне притяжіння. Ці пари не є незалежні одна від одної. Вони макроскопічно заповнюють один квантовий рівень і саме цим наділяють надпровідник унікальними властивостями. Всі куперівські пари, перебуваючи на одному квантовому рівні описуються спільною для всіх хвильовою функцією, вони є узгоджені між собою у всіх фізичних параметрах і, зокрема, по фазі. Така жорстка фазова кореляція поширюється на весь надпровідник.

1.2.1. Стаціонарний ефект Джозефсона

Нехай маємо два зразки одного і того надпровідника при однаковій температурі, які ізольовані один від одного. Куперівські пари в кожному із них описуватимуться своєю хвильовою функцією, а оскільки матеріал і температура є однакові, то модулі обох функцій повинні збігатись. Що ж до фаз, то вони будуть різними. Якщо між цими надпровідниками навести слабкий зв'язок, наприклад поєднати їх в контакт через тонкий прошарок діелектрика, то така система описуватиметься єдиною хвильовою функцією, яку можна розглядати як результат інтерференції хвильових функцій двох надпровідників. В результаті виникає узгодженість фаз надпровідників поєднаних в контакт.

Розглянемо залежність струму від різниці фаз між берегами контакту. Як відомо, еволюція квантової системи в часі визначається хвильовою функцією $\psi(t)$, яка задовольняє рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (1.4)$$

\hat{H} – гамільтоніан системи.

Якщо система може знаходитись лише в дискретних станах ψ_α , то хвильову функцію можна розкласти по повному базису $\{\psi_\alpha\}$:

$$\psi(t) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(t)\psi_{\alpha}. \quad (1.5)$$

Підставимо (1.5) в (1.4):

$$i\hbar \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \frac{\partial C_{\alpha}(t)}{\partial t} = \sum_{\alpha} \hat{H} \psi_{\alpha} C_{\alpha}(t). \quad (1.6)$$

Домножимо (1.6) на ψ_{β}^* і проінтегруємо по об'єму системи. В результаті одержимо

$$i\hbar \sum_{\alpha} \int \psi_{\beta}^* \psi_{\alpha} dV \frac{\partial C_{\alpha}(t)}{\partial t} = \sum_{\alpha} \int \psi_{\beta}^* \hat{H} \psi_{\alpha} dV C_{\alpha}(t).$$

Беручи до уваги, що

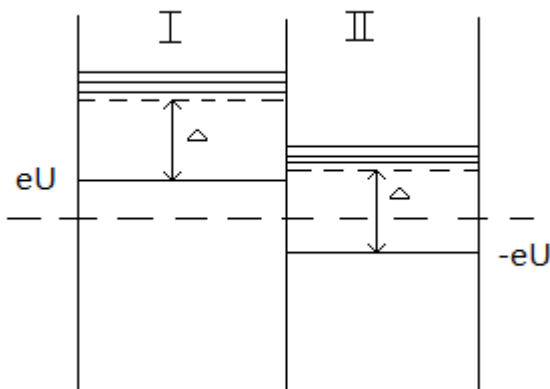
$$\int \psi_{\beta}^* \psi_{\alpha} dV = \delta_{\alpha\beta}$$

та запроваджуючи позначення $H_{\beta\alpha} = \int \psi_{\beta}^* \hat{H} \psi_{\alpha} dV$, останню рівність можна переписати так

$$i\hbar \frac{\partial C_{\beta}}{\partial t} = \sum_{\alpha} H_{\beta\alpha} C_{\alpha}(t). \quad (1.7)$$

Матричні елементи: $H_{\beta\beta}$ – енергія системи в стані ψ_{β} , $H_{\beta\alpha}$ – матричний елемент, який характеризує ймовірність переходу системи із стану ψ_{α} в стан ψ_{β} , $C_{\alpha}(t)$ – амплітуда стану ψ_{α} , $|C_{\alpha}(t)|^2$ – ймовірність, що система в стані ψ_{α} .

Застосуємо дану схему до опису тунельного надпровідного контакту. Нехай струм через контакт перевищує критичний струм, тоді на контакті виникає напруга U . Розглядатимемо тунельний надпровідний контакт, як дворівневу квантову систему: надпровідні електрони (куперівські пари) лівого надпровідника знаходяться на квантовому рівні 1, а надпровідні електрони правого надпровідника на квантовому рівні 2. Різниця енергій цих двох рівнів очевидно рівна $2eU$, тоді без втрати загальності розгляду можемо вважати, що енергія куперівської пари на рівні 1 $H_{11} = eU$, а на рівні 2 $H_{22} = -eU$.



Ймовірність переходу з 1 на рівень 2 визначається величиною матричного елемента $H_{21} = H_{12} = k$.

Отже рівняння (4) матиме вигляд:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial C_1}{\partial t} = eUC_1 + kC_2, \\ i\hbar \frac{\partial C_2}{\partial t} = kC_1 - eUC_2. \end{cases} \quad (1.8)$$

C_α нормується так, що $|C_\alpha|^2 = n_s$, тоді

$$\begin{cases} C_1 = \sqrt{n_s} e^{i\varphi_1}, \\ C_2 = \sqrt{n_s} e^{i\varphi_2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Підставимо (6) в (5):

$$i\hbar \frac{1}{2\sqrt{n_s}} \frac{dn_s}{dt} * e^{i\varphi_1} - \hbar\sqrt{n_s} e^{i\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = eU\sqrt{n_s} e^{i\varphi_1} + k\sqrt{n_s} e^{i\varphi_2},$$

$$i\hbar \frac{1}{2\sqrt{n_s}} \frac{dn_s}{dt} * e^{i\varphi_2} - \hbar\sqrt{n_s} e^{i\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = -eU\sqrt{n_s} e^{i\varphi_2} + k\sqrt{n_s} e^{i\varphi_1}.$$

Домножимо першу рівність на $e^{-i\varphi_1}$, а другу – $(-e^{-i\varphi_2})$

$$\begin{cases} i\hbar \frac{1}{2\sqrt{n_s}} \frac{dn_s}{dt} - \hbar\sqrt{n_s} \frac{d\varphi_1}{dt} = eU\sqrt{n_s} + k\sqrt{n_s} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ i\hbar \frac{1}{2\sqrt{n_s}} \frac{dn_s}{dt} - \hbar\sqrt{n_s} \frac{d\varphi_2}{dt} = -eU\sqrt{n_s} + k\sqrt{n_s} e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Відокремлюючи дійсні та уявні частини в рівняннях (1.10), одержимо:

$$\frac{dn_s}{dt} = 2 \frac{kn_s}{\hbar} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.11)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{eU}{\hbar} - \frac{k}{\hbar} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{eU}{\hbar} - \frac{k}{\hbar} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.13)$$

Похідна $\frac{dn_s}{dt}$ – швидкість зміни густини числа надпровідних електронів в лівому надпровіднику за час Δt , а $\Delta q = \frac{dn_s}{dt} V \Delta t$ дорівнює заряду, який перейшов в правий надпровідник за час Δt . Тоді струм через контакт $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, буде $I \sim \frac{dn_s}{dt}$, а отже

$$j = j_c \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (1.14)$$

Таким чином, ми одержали, що стаціонарний струм, який може протікаючи через тунельний надпровідний контакт, пропорційний синусу

різниці фаз між берегами контакту. Це є результат стаціонарного ефекту Джозефсона ($U = 0$).

Отриманий Джозефсоном результат (1.14) демонструє цікаву властивість тунельного надпровідного контакту, коли фази кожного з надпровідників самі по собі не є визначені, а за наявності струму між фазами встановлюється когерентність: їхня різниця стає цілком визначеною величиною [2]. Тобто фактично різниця фаз підлаштовується під величину струму, що протікає через контакт. З цієї причини ефект Джозефсона можна розглядати як прояв фазової когерентності у макроскопічному масштабі. Максимальний струм j_c , який фігурує у формулі (1.14), називається критичним струмом надпровідного контакту.

Залежність струму від різниці фаз є важливою характеристикою джозефсонівських контактів. Співвідношення (1.14) є її найпростішим виразом. Синусоїдна залежність струму від різниці фаз зазвичай використовується при вивченні динаміки та конструюванні приладів на основі джозефсонівських контактів [12,15,16,17,18,19,20].

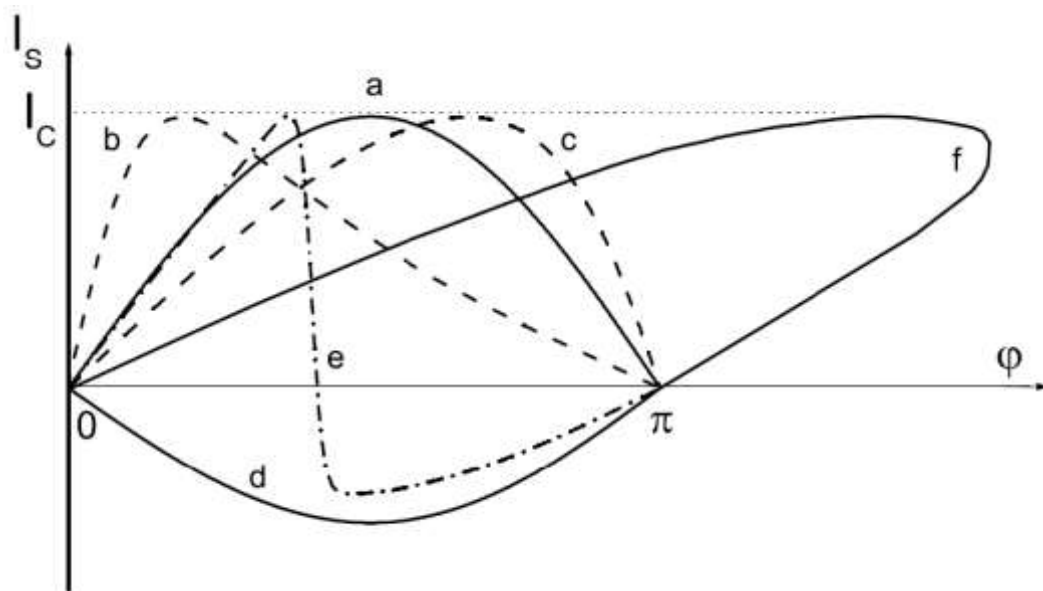


Рис. 2.1: Типи струм-фазових залежностей у надпровідних контактах.

Рисунок взято з [28].

Однак, існують роботи [28,29,30], в яких показано, що залежно від геометрії контакту, його параметрів і числового значення струму струм-фазова

залежність може суттєво відрізнятися від синусоїдної. Можливі типи струм-фазової залежності зображені на Рис. 2.1. Крива (а) відповідає стандартній синусоїдній залежності струму від різниці фаз. Можливі й складніші залежності, коли струм на контакті досягає максимального значення, як при різниці фаз $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (крива b) [31–33,29], так і при різниці фаз $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ (крива c) [34]. Можлива реалізація також ще оригінальніших залежностей з $j_c < 0$, (крива e, d) що виникає у так званих π – контактах [35].

1.2.2. Нестационарний ефект Джозефсона

Якщо струм, який задається зовнішнім джерелом перевищує критичний струм контакту, то на контакті, як вже зазначалось, виникає напруга U і різниця фаз між берегами контакту стає функцією часу, а струм через контакт нестационарним. Справді віднімаючи (1.12) від (1.13) одержимо

$$\frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eU}{\hbar}. \quad (1.15)$$

Очевидно, що за наявності спаду напруги на контакті крім надпровідного струму, який переноситься куперівськими парами, виникає також струм одиничних електронів. Схематично це можна уявити, як паралельне протікання струму куперівських пар (надпровідного струму $I_s = I_c \sin \varphi$) і струму нормальних електронів (нормального струму $\frac{U}{R}$). Тоді повний струм дорівнюватиме їх сумі:

$$I = I_c \sin \varphi(t) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial U(t)}{\partial t}, \quad (1.16)$$

де R – опір контакту в нормальному стані. Співвідношення (1.16) фактично є диференціальне рівняння відносно $\varphi(t)$. Розв'язавши це рівняння підставляємо розв'язок в (1.15). В результаті знайдемо залежність напруги на контакті від часу

$$U(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}, \quad \omega = \frac{2eR}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2} \quad (1.17)$$

З (1.17) слідує, що у випадку коли струм в колі перевищує критичний струм контакту, то на ньому виникає напруга U , яка є періодичною функцією часу.

Очевидно, що вольтметр підключений до контакту покаже середнє по періоду значення напруги

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt. \quad (1.18)$$

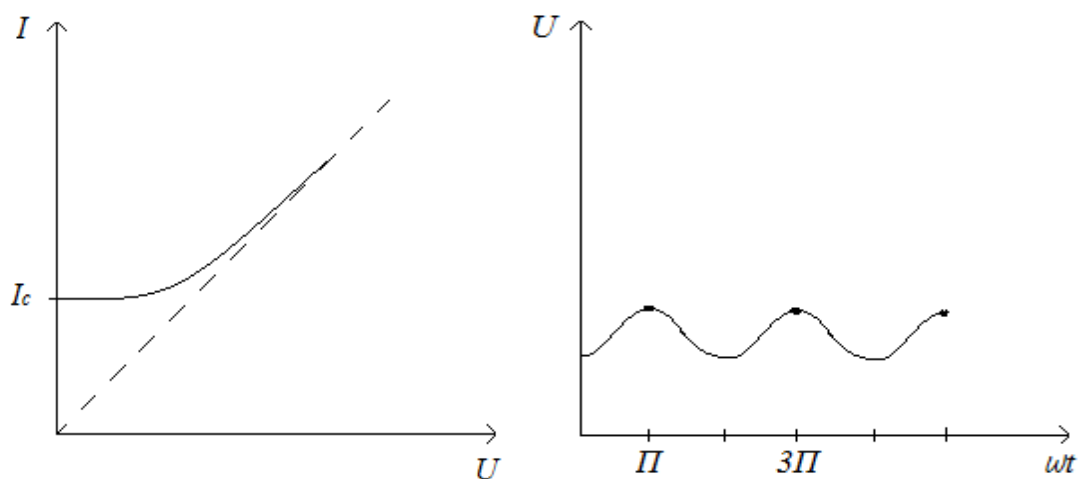
Після обчислення інтегралу одержимо

$$2e\bar{U} = \hbar\omega. \quad (1.19)$$

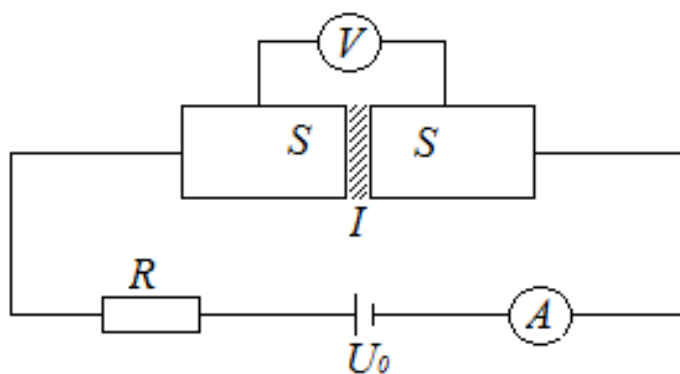
Останнє співвідношення визначає величину кванта $\hbar\omega$ електромагнітного випромінювання тунельним надпровідним контактом. Легко зрозуміти чому тунельний контакт за наявності на ньому напруги стає джерелом електромагнітного випромінювання. Якщо відстань по енергії між квантовими рівнями, на яких перебувають куперівські пари в лівому і правому надпровідниках рівна $2e\bar{U}$, то при переході однієї пари через тунельний контакт її енергія зменшується на цю величину, а оскільки куперівська пара не витрачала цієї енергії на подолання опору струмові (струм куперівських пар протікав без опору), то ця енергія виділяється у вигляді випромінювання з частотою

$$\omega = \frac{2e\bar{U}}{\hbar} \quad (1.20)$$

Рівність (1.20) – називають співвідношенням частот Джозефсона. Вольт – амперна характеристика тунельного контакту зображена на рисунку

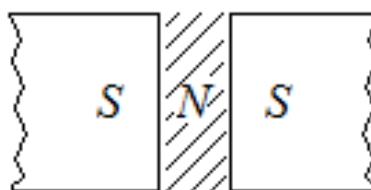


Розглянуті вище ефекти Джозефсона мають місце не тільки для тунельних контактів, а й для контактів інших типів зі слабким зв'язком – ділянки надпровідних кіл, в яких надпровідність істотно послаблена.



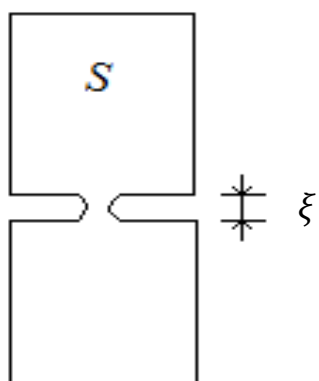
Приклади слабких зв'язків:

1) SNS – контакт

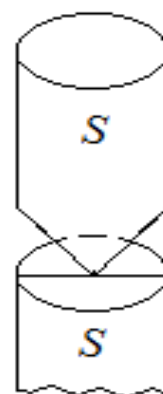


(проникаючи в нормальний метал, хвильові функції перекриваються і в результаті виникає їх інтерференція);

2) місток Дайема;



3) точковий контакт;



РОЗДІЛ 2

МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ТУНЕЛЬНИХ НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТІВ ІЗ СИНУСОЇДНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ СТРУМУ ВІД РІЗНИЦІ ФАЗ

Один із основних прикладних аспектів ефекту Джозефсона базується на вельми цікавій поведінці тунельних надпровідних контактів у магнітному полі [2, 12, 21].

Критичний струм контакту дуже чутливий до змін величини магнітного поля. При зміні магнітного потоку, що пронизує контакт, від нуля до половини кванту магнітного потоку (квант магнітного потоку $\Phi_0 = \frac{\pi}{e}$) критичний струм контакту змінюється від нуля до значення критичного струму контакту за відсутності магнітного поля. Ця обставина робить тунельні надпровідні контакти надзвичайно чутливими елементами до змін величини магнітного поля, що може бути покладено в основу створення надчутливих вимірювальних приладів [12, 15, 22].

2.1. Загальна схема опису проникнення магнітного поля в тунельний надпровідний контакт

Розглянемо вплив магнітного поля на властивості тунельного надпровідного контакту. Нехай між двома однаковими надпровідниками (S) міститься плівка діелектрика (I), площина xOy збігається з площиною плівки, довжину контакту позначимо через l , а ширину покладемо рівною одиниці.

Вважатимемо, що зовнішнє магнітне поле прикладене паралельно до площини контакту, а систему координат виберемо так, щоб вектор напруженості магнітного поля збігався за напрямом з віссю Oy : $\vec{H} = (0, H, 0)$. Струм протікає вздовж осі Oz : $\vec{j} = (0, 0, j)$. Якщо коефіцієнт проходження електронів крізь плівку

діелектрика $D \ll 1$, то залежність густини струму від різниці фаз описується формулою

$$j = j_c \sin \varphi, \quad (2.1)$$

де φ – різниця фаз, що виникає на контакті.

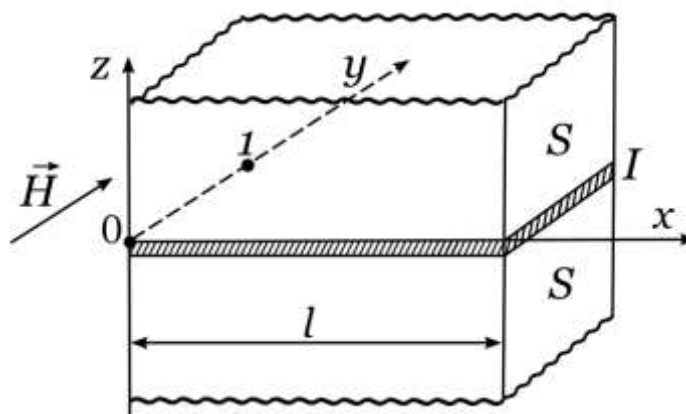


Рис.2.1. Схематичне зображення досліджуваного в роботі джозефсонівського тунельного надпровідного контакту [36].

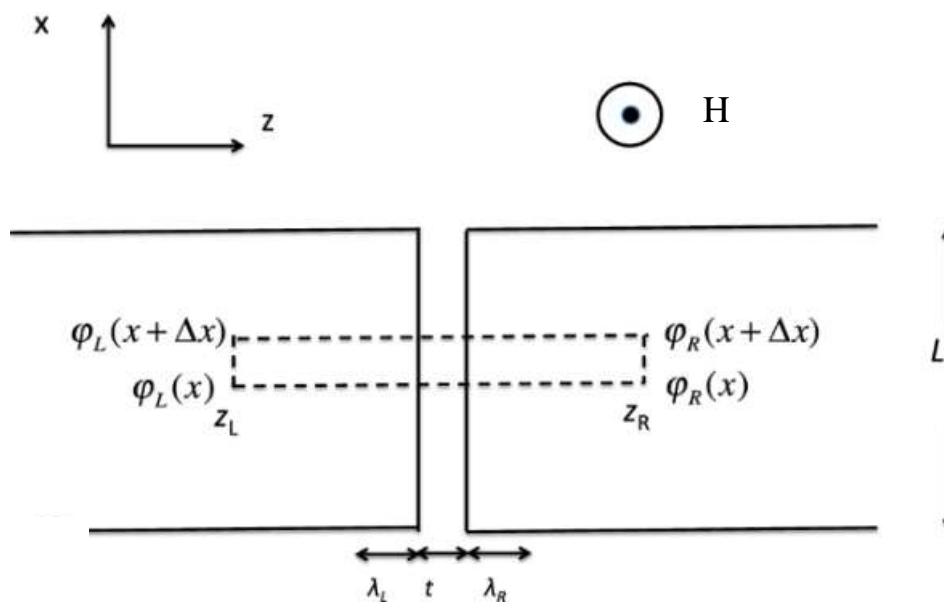


Рис.2.2. Контур інтегрування, що використовується при знаходженні рівняння для опису просторової зміни різниці фаз.

За наявності зовнішнього магнітного поля в контактi виникне складова струму в напрямку осi Ox , а відповідно різниця фаз φ між берегами контакту стане функцією координати x .

Побудуємо рівняння, що описує просторову зміну різниці фаз. Знайдемо різницю фаз між двома точками, з координатами x та $x+dx$. Для цього скористаємось вище отриманим співвідношенням (1.3)

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{2e}{\hbar m} \left[\frac{mc}{2e^2\rho} \vec{j} + \vec{A} \right]. \quad (2.2)$$

Інтегруючи (2.1) вздовж контуру C_L та C_R одержимо

$$\varphi_{Ra}(x) - \varphi_{Rb}(x + dx) = \frac{2e}{\hbar c} \int_{C_R} \left(\vec{A} + \frac{mc}{2e^2\rho} \vec{j}_s \right) d\vec{l}, \quad (2.3)$$

$$\varphi_{Lb}(x + dx) - \varphi_{La}(x) = \frac{2e}{\hbar c} \int_{C_L} \left(\vec{A} + \frac{mc}{2e^2\rho} \vec{j}_s \right) d\vec{l}. \quad (2.4)$$

Вважатимемо, що товщина надпровідників значно більша за глибину проникнення магнітного поля в надпровідник і вважатимемо, що частини контурів C_L та C_R знаходяться в області, де густина струму дорівнює нулеві. А ті частини контурів, що знаходяться в області проникнення магнітного поля, а отже і наявності надпровідного струму, вважатимемо перпендикулярними напрямку протікання струму (струм протікає в напрямку осi Ox). Тому доданки зі струмом в правій частині (2.3) та (2.4) не даватимуть внеску в інтеграли.

В результаті отримаємо

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = [\varphi_{Lb}(x + dx) - \varphi_{Rb}(x + dx)] - \quad (2.5)$$

$$[\varphi_{La}(x) - \varphi_{Ra}(x)] = \frac{2e}{\hbar c} \left[\int_{C_L} \vec{A} d\vec{l} + \int_{C_R} \vec{A} d\vec{l} \right].$$

Враховуючи, що товщина контакту є малою, можемо обидва контури C_L та C_R об'єднати, тоді (2.5) перепишеться у вигляді

$$\varphi(x+dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} \oint \vec{A} d\vec{l}. \quad (2.6)$$

Здійснимо в останньому інтегралі перехід від інтегрування по контуру до інтегрування по площині, яку цей контур обмежує.

В результаті одержимо

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = H_y (\lambda_L + \lambda_R + t) dx. \quad (2.7)$$

Підставляючи (2.7) в (2.6) та переходячи до диференціальної форми маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2e}{\hbar c} (\lambda_L + \lambda_R + t) H_y, \quad (2.8)$$

де λ_L та λ_R – лондонівські глибини проникнення магнітного поля в надпровідники, t – товщина плівки діелектрика. Якщо обидва надпровідники однакові, то $\lambda_L = \lambda_R$. Після інтегрування (2.8) маємо

$$\varphi = \frac{2e}{\hbar c} dH_y x + \varphi_0, \quad (2.9)$$

де $d = \lambda_L + \lambda_L + t$ – товщина області контакту, в яку проникає магнітне поле.

Підставимо (2.9) у формулу (1.14) одержимо залежність струму від різниці фаз за наявності магнітного поля

$$J = J_c \sin \left(\frac{2e}{\hbar c} dH_y x + \varphi_0 \right). \quad (2.10)$$

З одержаного результату (2.10) слідує, що за наявності магнітного поля, прикладеного паралельно до площини контакту, густина надпровідного струму стає функцією координати вздовж контакту.

Інтегруючи (2.10) по площині контакту (по y в межах від нуля до одиниці, а по x – від 0 до l).

$$\begin{aligned}
 I(H, \varphi) &= j_0 \int_0^l dx \int_0^1 \sin(2edHx + \varphi) dy \\
 &= j_0 \frac{1}{2edH} (-\cos(2edHl + \varphi) + \cos(\varphi)).
 \end{aligned}$$

Виконуючи в останньому виразі тригонометричні спрощення одержимо

$$I(H, \varphi) = j_0 \frac{1}{edH} \sin(edHl) \sin(edHl + \varphi). \quad (2.11)$$

Запровадимо наступні позначення:

$$edHl = \pi\Phi \frac{e}{\pi} = \frac{\pi\Phi}{\Phi_0},$$

де Φ – магнітний потік, який пронизує контакт, а $\Phi_0 = \frac{\pi}{e}$ – елементарний квант потоку; $I_c(0) = j_0 l \cdot 1$ – критичний струм контакту за відсутності магнітного поля.

Тепер можемо переписати (2.11) у вигляді

$$I(H, \varphi) = I_c(0) \frac{\sin \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi\right).$$

На основі останньої формули легко виписати формулу для залежності критичного струму контакту від потоку магнітного поля в найпростішому випадку синусоїдальної залежності струму від різниці фаз

$$I_c(H) = I_c(0) \frac{\sin \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}}. \quad (2.12)$$

З (2.12) бачимо, що зміна поля, яка спричиняє зміну потоку на половину кванта магнітного потоку, може обернути струм на нуль, що робить джозефсонівські контакти вельми чутливими до зміни зовнішнього магнітного поля. Нижче на Рис. 2.3 побудовано графік залежності критичного струму контакту від магнітного потоку, який демонструє унікальну чутливість контакту

до змін магнітного потоку, особливо в околі цілих значень кванта магнітного потоку.

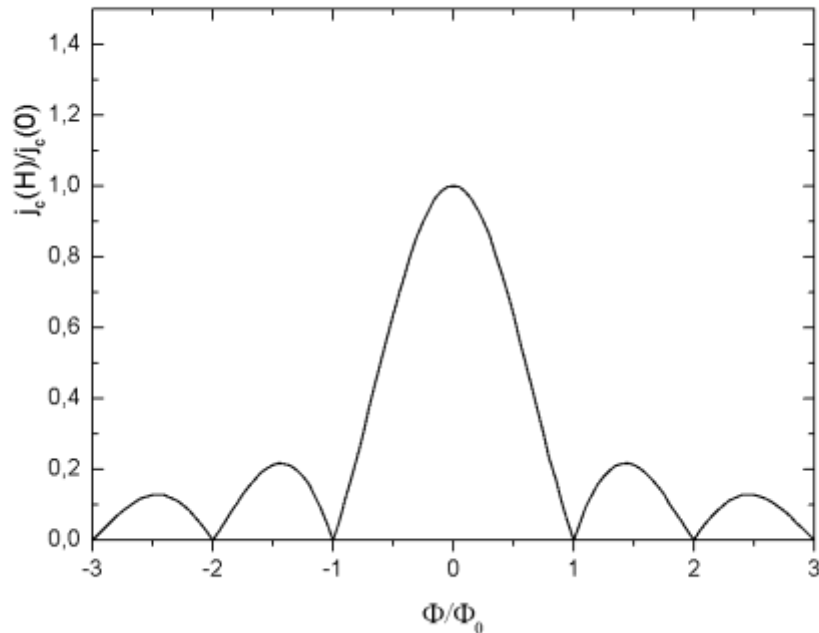


Рис.2.3. Залежність критичного струму тунельного надпровідного контакту від потоку магнітного поля, що пронизує контакт.

Якщо у векторі магнітного поля відмінні від нуля обидві компоненти H_x і H_y , то замість одного співвідношення (2.8) маємо два:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2e}{\hbar c} H_y d, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2e}{\hbar c} H_x d. \quad (2.14)$$

Скористаємося рівнянням Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

яке у нашому випадку матиме вигляд

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_z + \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Підставимо (1.3), (2.13) та (2.14) в (2.15) одержимо

$$\frac{\hbar c^2}{8\pi e d} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = J_c \sin \varphi + C \frac{dV}{dt}, \quad (2.16)$$

де $C = \frac{\varepsilon_r}{4\pi t}$ – ємність одиниці площі контакту; ε_r – відносна діелектрична стала.

Використовуючи зв'язок між напругою на контакті та похідною по часу від різниці фаз можна переписати (2.16) у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (2.17)$$

де

$$\bar{c} = c \left(\frac{1}{4\pi C d} \right)^{1/2} = c \left(\frac{t}{\varepsilon_r d} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

Величина

$$\lambda_J = \left(\frac{\hbar c^2}{8\pi e d J_c} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

– характерна відстань у глиб контакту, на яку проникає екрануючий струм, тому часто цю величину називають джозефсонівська глибина проникнення. Якщо лондонівська глибина проникнення є порядку кількох сотень ангстрем, то джозефсонівська глибина проникнення рівна кільком сотням мікрон.

У частинному випадку незалежної від просторових координат фази рівняння (2.16) має вигляд

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_J^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.20)$$

де $\omega_J = \frac{c}{\lambda_J}$ – плазмова частота.

Зрозуміло, що така ситуація, коли різниця фаз є однакою вздовж контакту, реалізується у випадку відсутності магнітного поля, а електричне поле перпендикулярне до площини контакту.

Зауважимо, що рівняння (2.20) аналогічне до рівняння математичного маятника, відмінність лише в знакові перед квадратом частоти.

2.2. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах

Тунельний надпровідний контакт називають довгими джозефсонівським контактом, якщо різниця фаз зазнає помітної зміни лише вздовж одного зі своїх просторових вимірів. Зазвичай з цим напрямом суміщають вісь Ox . Якщо по всій площині контакту різниця фаз є близькою до сталої величини, то такий контакт називають коротким джозефсонівським контактом.

Отже, для довгого джозефсонівського контакту мають виконуватись умови: 1) $L \gg \lambda_j$ (вздовж цього напрямку змінюється різниця фаз φ); 2) ширина контакту $W \ll \lambda_j$ (різниця фаз φ дуже слабо змінюється вздовж цього напрямку, а тому вважається сталою); зовнішнє магнітне поле \vec{H} орієнтоване паралельно до площини контакту (відмінність від нуля компоненти поля перпендикулярної до площини контакту приводила б до зміни різниці фаз по всій площині контакту).

Такі квазіодновимірні джозефсонівські контакти можна побудувати по-різному, а геометрія контакту має значний вплив на динаміку солітонів. Найбільш дослідженою є геометрія перекриття.

В більш загальному випадку ми маємо справу з надпровідними контактами, в яких різниця фаз змінюється в обох напрямках, як по осі Ox , так і по осі Oy . Для опису таких контактів використовуються диференціальні рівняння в частинних похідних, що включають дві просторові координати x, y та час t . Ці рівняння називають двовимірні рівняння \sin -Гордона.

Солітонний розв'язок рівняння \sin -Гордона має цілком зрозуміле фізичне значення в контексті довгих джозефсонівських контактів, він описує квант магнітного потоку, що пронизує контакт. Тому солітон, що виникає в довгих джозефсонівських контактах називають флюксоном, або джозефсонівським вихором. На рис.2.4 схематично зображено флюксон в різних його характеристиках. Відповідний розв'язок описує зміну різниці фаз від 0 до 2π

вздовж контакту, характерний розмір області, на якій різниця фаз зазнає такої зміни є лондонівська глибина проникнення λ_j .

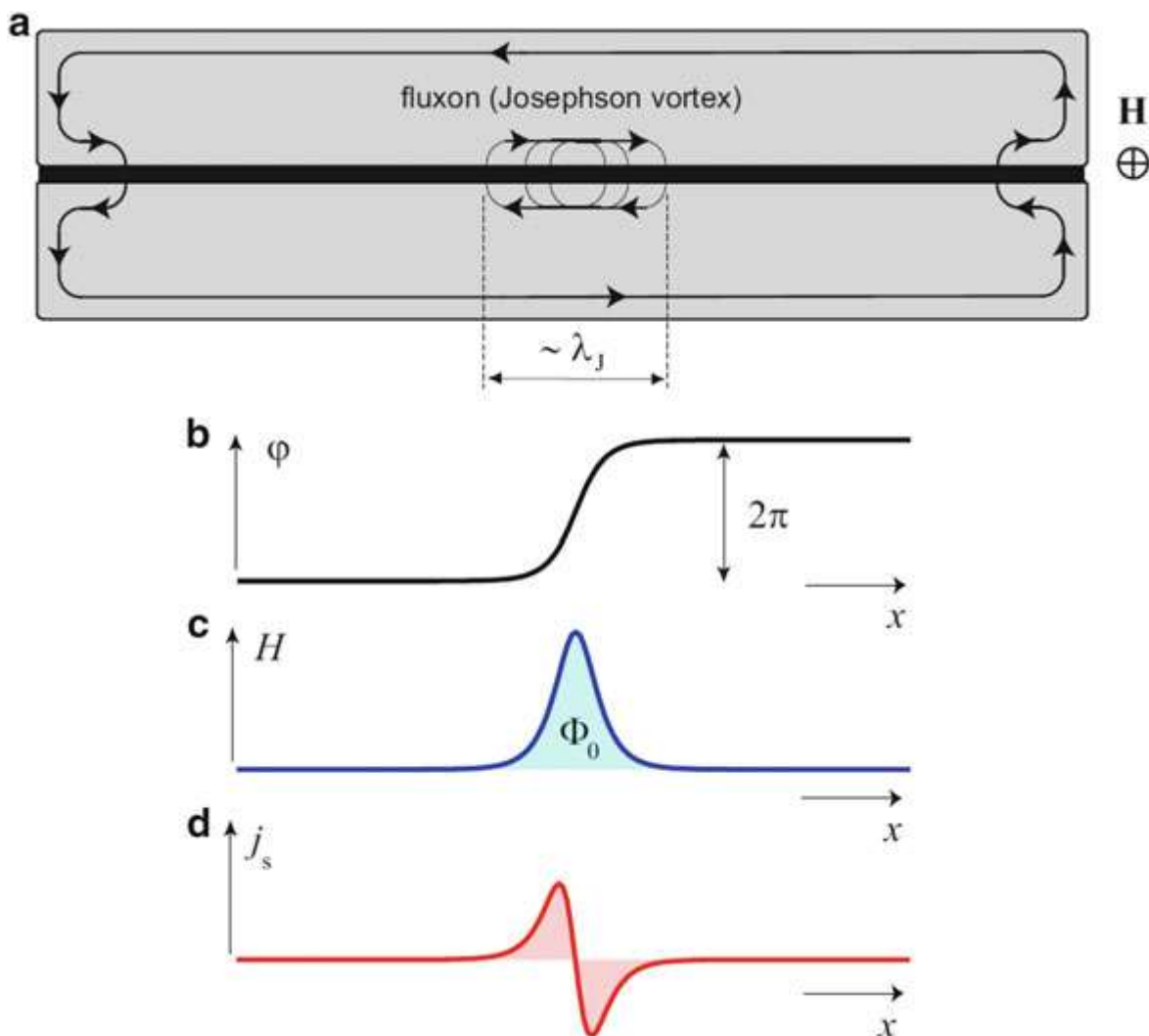


Рис. 2.4. Схематичне зображення довгого джозефсонівського контакту із флюксоном всередині (a), (b) різниця фаз, (c) магнітне поле, (d) густина надпровідного струму.

Дослідимо теоретично еволюцію різниці фаз в одновимірному випадку, тоді рівняння (2.17) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin \varphi. \quad (2.21)$$

Перейдемо в рівнянні (2.21) до нових змінних: $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_j}$, $\tilde{t} = \frac{ct}{\lambda_j}$, в результаті одержимо рівняння \sin -Гордона в безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin \varphi = 0. \quad (2.22)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (2.22) у вигляді $\varphi = \varphi(x - Vt)$, де V – безрозмірна швидкість флюксона. Запроваджуючи нову змінну $\xi = x - Vt$ розглядатимемо різницю фаз $\varphi = \varphi(\xi)$, як функцію однієї змінної. Запишемо другі похідні в рівнянні (2.22) через нову змінну

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = V^2 \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2}. \quad (2.23)$$

Підставляючи (2.21) в (2.20) одержимо

$$-(1 - V^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \sin \varphi = 0. \quad (2.24)$$

Домножаючи рівняння (2.24) на $\frac{d\varphi}{d\xi}$ легко знаходимо перший інтеграл

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{2(1 - \cos \varphi)}{(1 - V^2)}. \quad (2.25)$$

Для рівняння (2.25) можна знайти аналітичний розв'язок, використовуючи заміну

$$\tan \frac{\varphi}{4} = \exp(U). \quad (2.26)$$

Підставляючи (2.26) в (2.25) одержимо

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{1 - V^2}.$$

Розв'язок цього рівняння

$$U = \pm \frac{x - x_0 - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Тоді

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(e^{\pm \frac{x - x_0 - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}} \right). \quad (2.27)$$

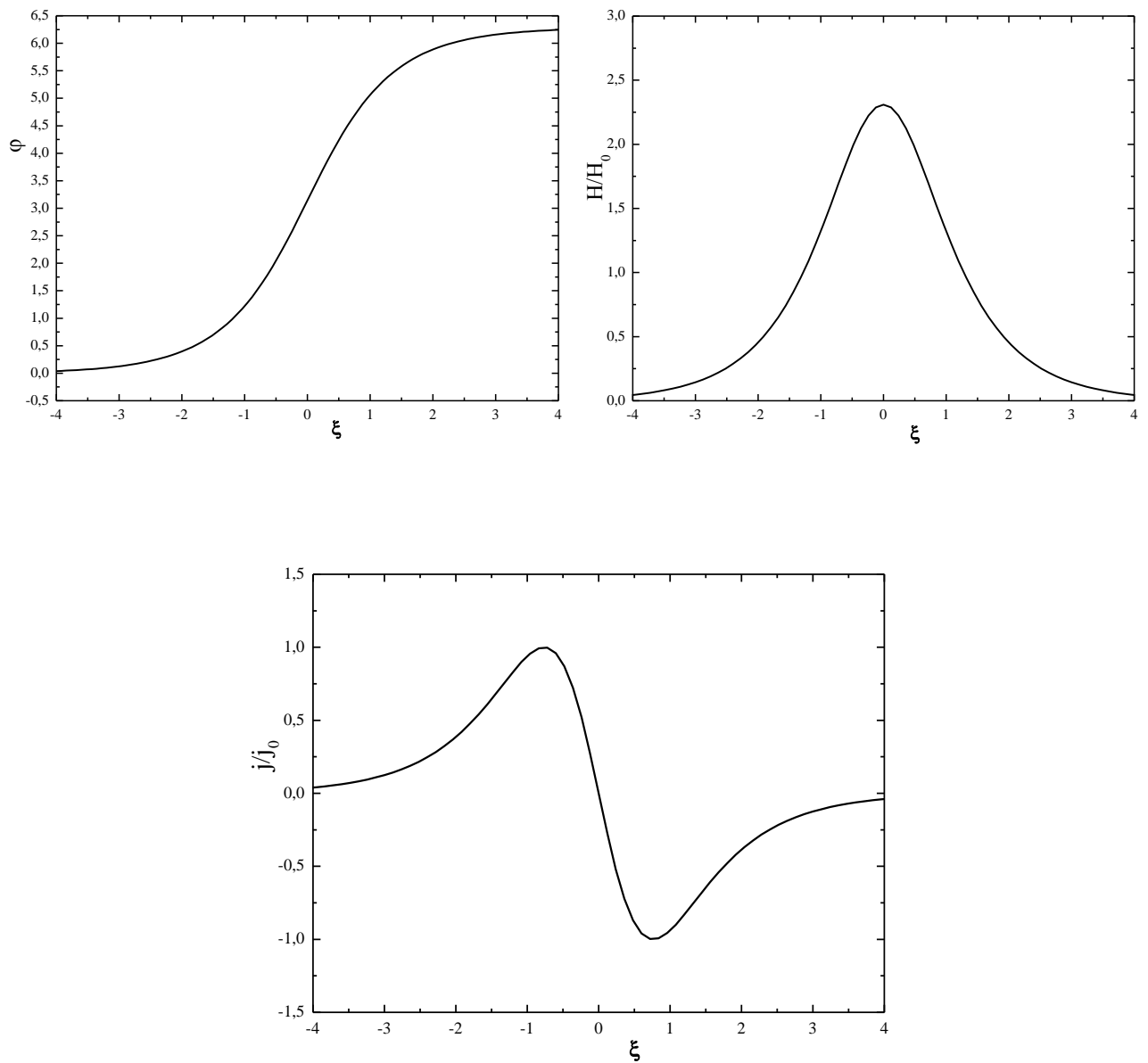


Рис. 2.5. Залежність різниці фаз від координати вздовж контакту в області флюксона (а); розподіл магнітного поля в області флюксона (b); циркуляція струму у флюксоні (с). Всі графіки побудовані на основі розв'язку рівняння (2.27).

РОЗДІЛ 3

МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ТУНЕЛЬНИХ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТІВ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СТРУМ-ФАЗОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

3.1. Нетривіальна струм-фазова залежність та чинники, що її породжують

Дослідження струмових станів у надпровідних контактах різного типу невпинно розвивається та набуває дедалі більшого інтересу як у науковій сфері, так і з боку інженерії та практичного використання. А тому важливим питанням теоретичних досліджень фізики надпровідності стає детальний аналіз струм-фазової залежності. Виявляється, існує ціла низка факторів, що суттєво впливають на форму залежності струму від різниці фаз, а тому обмежуватись традиційною синусоїдною залежністю стає недостатньо (див. огляд [1]).

Важливою величиною, що характеризує надпровідний контакт, є параметр впорядкування, просторова поведінка якого визначається кількома факторами: наявністю в контакті нормальної області, діелектричного прошарку, впливом на контакт домішок, а також присутністю ефектів розпаровування.

У численній кількості статей, присвячених дослідженню надпровідних контактів, коефіцієнт проходження електронів вважається малим, що зумовлює невеликі за значенням величини струму. Малі значення струму несуттєво впливають на просторову поведінку параметра впорядкування, що дозволяє знехтувати доданком з надплинною швидкістю у рівнянні Гінзбурга-Ландау (ГЛ) [2]. При дослідженні струм-фазової залежності для довільних значень товщини нормального прошарку (в масштабі довжини когерентності) та без додаткових умов на коефіцієнт проходження електронів необхідно враховувати ефекти розпаровування. Оскільки коефіцієнт прозорості змінюється у широкому інтервалі значень, то величина струму може приймати значення, близькі до термодинамічно критичного. Внаслідок немалих значень струму виникає так

званий ефект розпаровування. Врахування цього ефекту полягає у збереженні доданку з надплинною швидкістю.

Сучасний стан розвитку технологій дає можливість виготовляти тунельні надпровідні контакти з порівняно великою прозорістю бар'єра. Перш за все це стосується контактів в місті злому надпровідних ниток та систем на основі двовимірного електронного газу, ймовірність тунелювання електронів крізь які може змінюватись в інтервалі від нуля до значень близьких одиниці. За таких обставин величина критичного струму контакту може досягати значень близьких до термодинамічного критичного струму масивного надпровідника. Внаслідок цього при вивченні властивостей таких контактів, для одержання правильного результату для залежності струму від різниці фаз необхідно враховувати вплив струму на просторову поведінку параметра впорядкування, який при немалих струмах є суттєвим. Врахування цього ефекту очевидно відобразиться на формі залежності струму від різниці фаз та інших важливих, як в фундаментальному, так і прикладному аспектах, характеристиках надпровідних контактів.

Ефекти розпаровування струмом в тунельних надпровідних контактах виникають, коли прозорість діелектричного прошарку не є малою. Поблизу границі, внаслідок умови самоузгодженості, параметр впорядкування менший ніж в глибині надпровідника. В результаті, із збільшенням струму, ефекти розпаровування проявляються суттєвіше саме в цій області. Перехід від ефекту Джозефсона до протікання надпровідного струму в масивному надпровіднику був проаналізований в [23].

У надпровідних контактах на основі високотемпературних надпровідників залежність струму від різниці фаз вважається ангармонічною [24]

$$j(\varphi) = j_{c0}(\sin\varphi + \alpha \sin 2\varphi), \quad (3.1)$$

де параметр ангармонійності α залежить від технології підготовки контакту. В загальному, ангармонічність струм-фазової залежності у надпровідних контактах на основі високотемпературних надпровідників та надпровідників на основі заліза пов'язана з d-хвильовою поведінкою параметра

впорядкування та багатозонністю надпровідного стану в нових надпровідних сполуках [25].

3.2. Магнітні властивості надпровідних контактів з другою гармонікою в струм-фазовій залежності

Розглянемо модель довгого джозефсонівського контакту, в якій враховується друга гармоніка у струм-фазовій залежності, тобто на додаток до першої гармоніки $\sin\varphi$ використовуватимемо також доданок з другою гармонікою $\sin 2\varphi$. Дослідимо вплив другої гармоніки на поведінку джозефсонівського контакту в магнітному полі та з'ясуємо як наявність цієї гармоніки відобразиться на залежності критичного струму від величини потоку магнітного поля, яке пронизує надпровідний контакт. Отримані результати порівнюватимуться з результатами інших теоретичних моделей.

Знайдемо спочатку критичний струм контакту при даній струм-фазовій залежності. Диференціюючи (3.1) по φ одержимо:

$$\frac{dj(\varphi)}{d\varphi} = j_{co}(\cos\varphi + 2\alpha\cos 2\varphi) = 0.$$

Або

$$4\alpha\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2\alpha = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння знайдемо значення різниці фаз, при якому густина струму в контакті досягає максимального значення:

$$\cos\varphi_c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 32\alpha^2}}{8\alpha}. \quad (3.2)$$

Тоді критичний струм контакту, як функція параметра α :

$$j_c(\alpha) = j_{co} \frac{\sqrt{(\sqrt{1 + 32\alpha^2} + 1)^2 - 4}}{8\alpha} \left(1 + 2\alpha \frac{\sqrt{1 + 32\alpha^2} - 1}{8\alpha} \right). \quad (3.3)$$

Легко показати, що в асимптотичному випадку $\alpha \rightarrow 0$ одержуємо

$$j_c(0) = j_{c0},$$

тобто j_{c0} —критичний струм контакту за відсутності другої гармоніки.

На Рис.3.1 побудовано графік, який відображає вплив параметра ангармонічності α в струм-фазовій залежності на критичний струм контакту. Як видно зі збільшенням α критичний струм зростає і досить швидко апроксимується лінійною залежністю. Те, що зі збільшенням α залежність критичного струму від параметра α наближається до лінійної можна також переконатися і безпосередньо на основі формули (3.3). Вважаючи $\alpha \gg 1$, одержимо

$$j_c(\alpha) \approx j_{c0}\alpha.$$

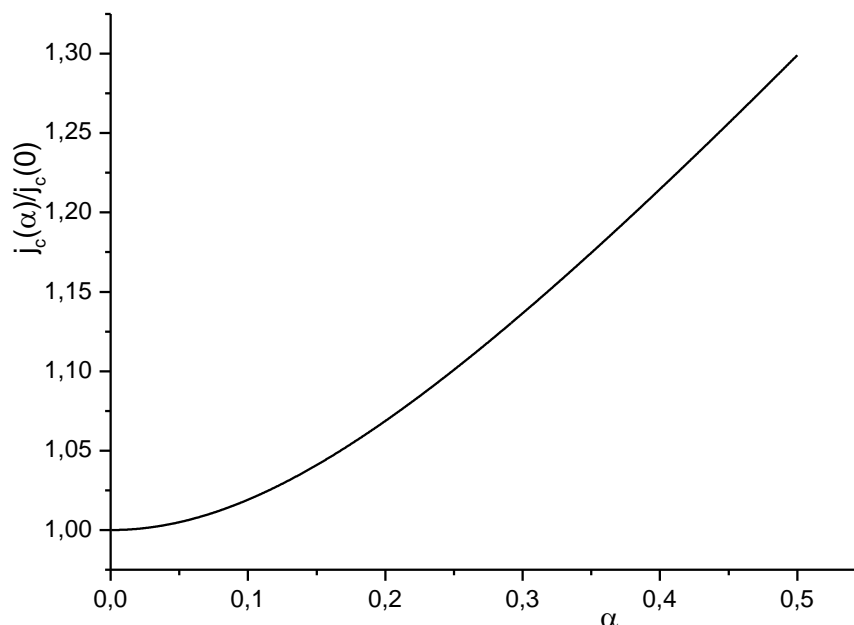


Рис.3.1. Залежність густини критичного струму контакту від параметра α .

Підставимо одержану вище залежність різниці фаз від координати за наявності магнітного поля у вираз для густини струму (3.1).

В результаті одержимо залежність густини від координати вздовж контакту:

$$j(H, x, \varphi) = j_{co}[\sin(2edHx + \varphi) + \alpha \sin(4edHx + 2\varphi)].$$

Для знаходження повного струму, що протікає через контакт необхідно проінтегрувати останню формулу по площі контакту

$$\begin{aligned} I(H, \varphi) &= \int_0^l dx \int_0^1 dy j_{co}[\sin(2edHx + \varphi) + \alpha \sin(4edHx + 2\varphi)]. \\ &= j_{co} \left[\frac{-\cos(2edHl + \varphi) + \cos\varphi}{2edH} + \alpha \frac{-\cos(4edHl + 2\varphi) + \cos 2\varphi}{4edH} \right] = \quad (3.4) \\ &= j_{co} \left[\frac{\sin(edHl) \cdot \sin(edHl + \varphi)}{edH} + \alpha \frac{\sin(2edHl) \cdot \sin(2edHl + 2\varphi)}{2edH} \right] \end{aligned}$$

Використовуючи позначення для повного потоку магнітного поля через контакт $\Phi = Hld$ та критичного струму за відсутності магнітного поля $I_{co} = j_{co}l$ можемо переписати (3.4) у більш компактному вигляді

$$I(H, \varphi) = I_{co} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi\right) + \alpha \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + 2\varphi\right) \right] \quad (3.5)$$

Залежність струму, що протікає через контакт від магнітного потоку та різниці фаз зображено на Рис.3.2. З аналізу одержаної поверхні можемо зробити висновок, що критичний струм осцилює зі збільшенням магнітного полі, однак ці осциляції затухають і зрештою величина критичного струму прямує до нуля.

Для знаходження критичного струму контакту, як функції магнітного потоку необхідно обчислити від (3.5) похідну по φ . Далі, покладаючи одержану похідну рівною нулеві, знайти значення різниці фаз, при якому струм в контакті досягає максимуму.

Перш ніж перейти до реалізації наміченого вище перепишемо (3.5) у вигляді:

$$I(H, \varphi) = I_{co} \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \left[\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi\right) + \alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + 2\varphi\right) \right]. \quad (3.6)$$

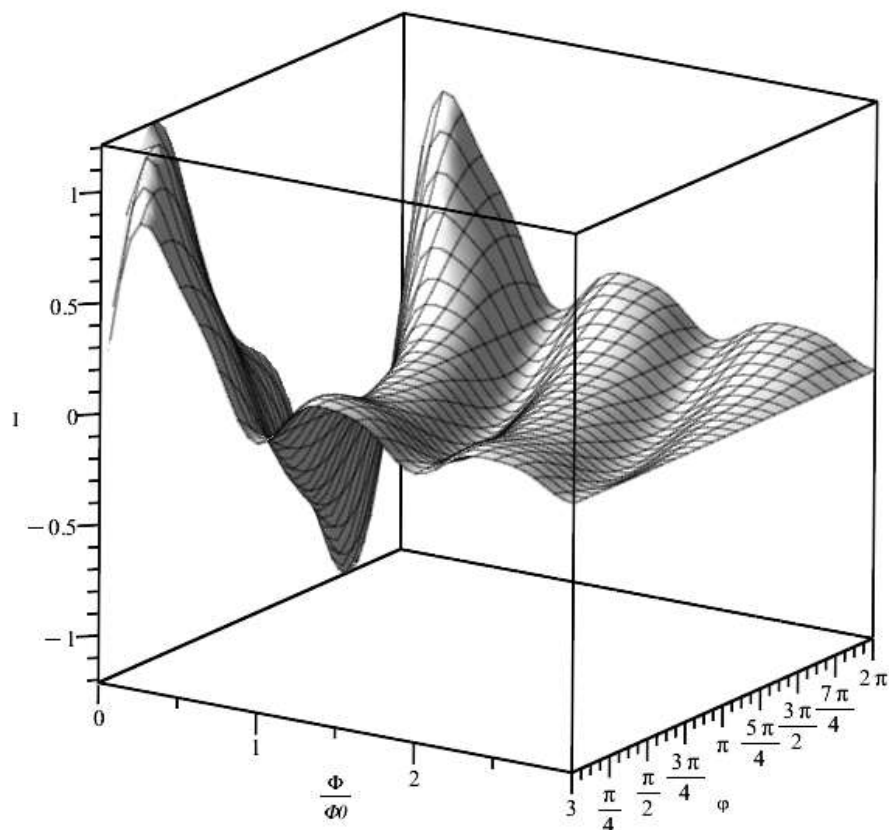


Рис.3.2. Залежність повного струму через контакт від потоку магнітного поля і різниці фаз.

Обчислюючи від (3.6) похідну по φ та прирівнюючи її до нуля одержимо

$$4\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) + \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}}{8\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}. \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.7) в (3.6) одержимо залежність критичного струму контакту від магнітного потоку:

$$I_c(\Phi) = I_{c0} \frac{3 + \sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}}{32\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} * \quad (3.9)$$

$$\left[\sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + 1} - 4 \right]^{1/2}$$

Розглядаючи в останньому результаті асимптотичний випадок $\alpha \rightarrow 0$, що означатиме відкинути у виразі для струму доданок, пов'язаний з ангармонічністю, легко відтворимо формулу залежності критичного струму від магнітного потоку для синусоїдної залежності струму від різниці фаз.

З графіків, зображених на рис. 3.3, можемо зробити висновок щодо впливу ангармонійності на залежність критичного струму контакту від магнітного потоку: зі збільшенням параметра α критичний струм є більш чутливим до появи зовнішнього магнітного поля. Особливо це добре видно в околі нуля: зі збільшенням магнітного потоку критичний струм швидше зменшується для випадку відмінного від нуля α . Ця обставина є корисною в плані практичного використання таких контактів у детекторах магнітних полів.

На Рис.3.4. представлено виділену частину Рис.3.3, яка відображає помітні відмінності в залежності критичного струму від магнітного поля для синусоїдної залежності та залежності, що враховує ангармонічність.

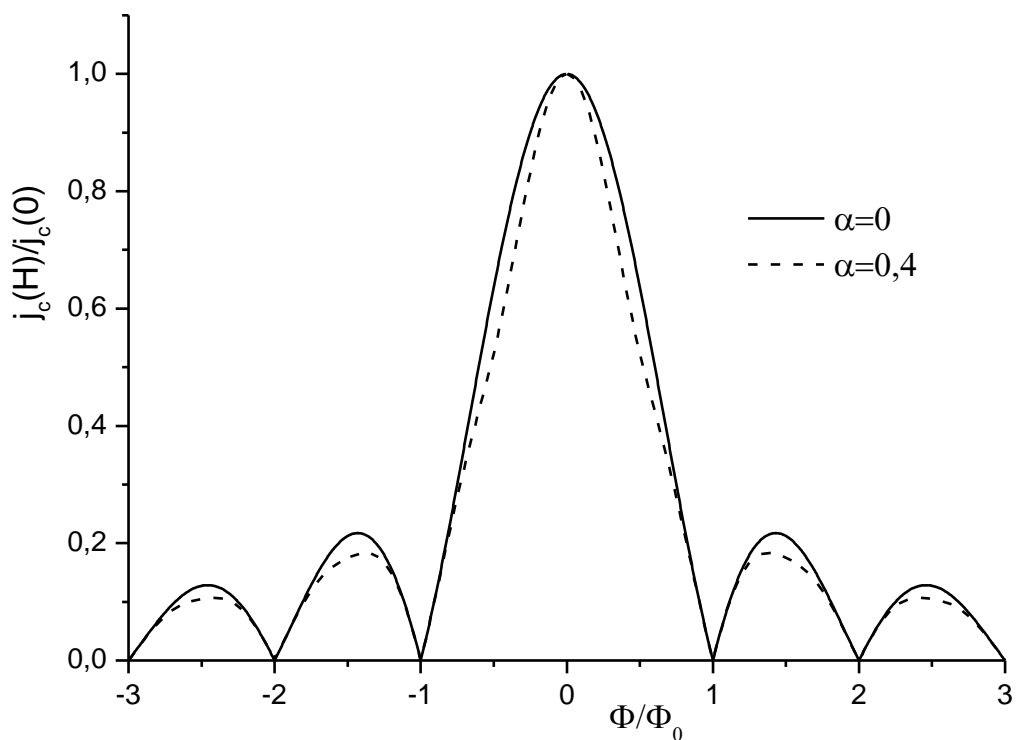


Рис. 3.3. Залежність критичного струму контакту від магнітного потоку. Суцільна лінія для синусоїдної залежності, пунктирна для ангармонійної (3.1).

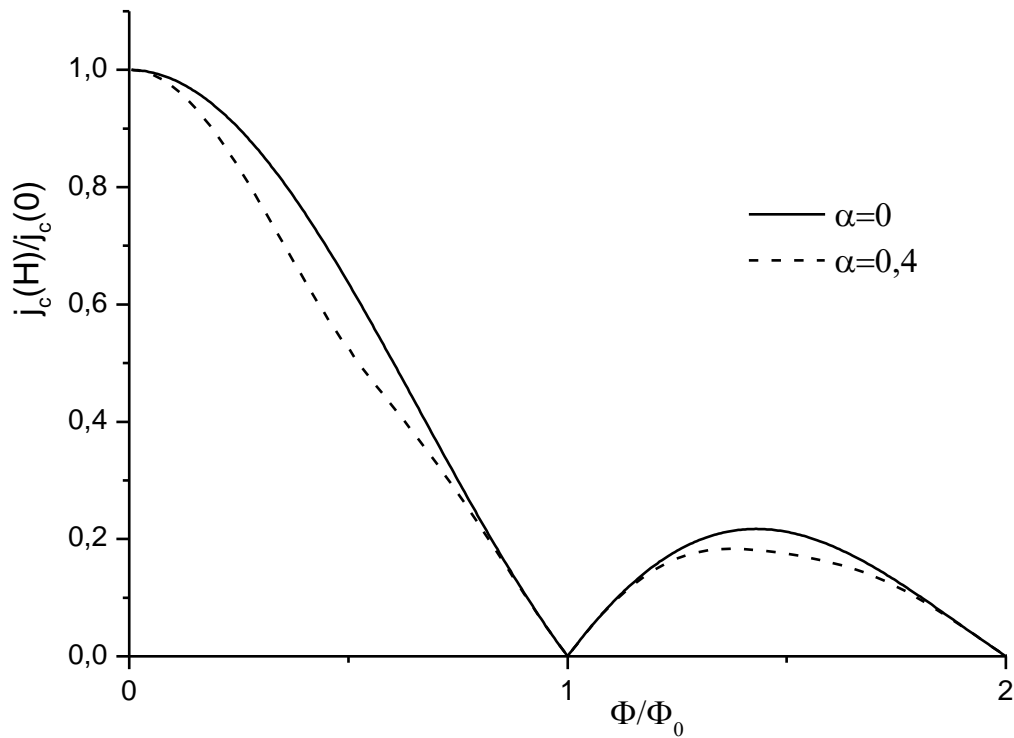


Рис. 3.4. Збільшена частина залежності критичного струму від магнітного потоку зображеної на рис.3.3.

3.3. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах з другою гармонією в струм-фазовій залежності

Дослідимо еволюцію різниці фаз в одновимірному випадку для контакту з несинусоїдною залежністю струму від різниці фаз (наявність другої гармоніки) (3.1). Для цього розглядаємо модифіковане рівняння sin-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} (\sin \varphi + \alpha \sin 2\varphi). \quad (3.10)$$

Запроваджуючи нові змінні: $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_J}$, $\tilde{t} = \frac{ct}{\lambda_J}$ одержимо рівняння sin-Гордона в безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} + \sin \varphi + \alpha \sin 2\varphi = 0. \quad (3.11)$$

Розв'язок (3.11) шукаємо у вигляді $\varphi = \varphi(x - Vt)$, де V – безрозмірна швидкість флюксона. Запроваджуючи нову змінну $\xi = x - Vt$ розглядатимемо різницю фаз $\varphi = \varphi(\xi)$ як функцію однієї змінної. Для других похідних використовуємо співвідношення (2.21).

В результаті рівняння (3.11) переписеться у вигляді

$$-(1 - V^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \sin \varphi + \alpha \sin 2\varphi = 0. \quad (3.12)$$

Домножаючи рівняння (3.12) на $\frac{d\varphi}{d\xi}$ знаходимо перший інтеграл

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{2(1 - \cos \varphi + \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \varphi))}{(1 - V^2)}. \quad (3.13)$$

Або

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{(1 - V^2)^{1/2}} \left[1 + 2\alpha \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

Інтегруючи останнє рівняння остаточно одержимо

$$\varphi(\xi) = 2 \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha}} \operatorname{sh} \left[-\frac{\sqrt{1 + 2\alpha}}{(1 - V^2)^{1/2}} (\xi - \xi_0) \right]. \quad (3.15)$$

На рис.3.5 зображено зміну різниці фаз в області флюксона, яка задається формулою (3.15), розподіл магнітного поля в області флюксона та струм, що циркулює у флюксоні. Для порівняння також наведені відповідні залежності для синусоїдної залежності струму від різниці фаз. Як бачимо, область основного потоку магнітного поля через флюксон розширюється – поле повільніше зменшується, коли ми віддаляємося від серцевини флюксона. Область зміни різниці фаз звужується.

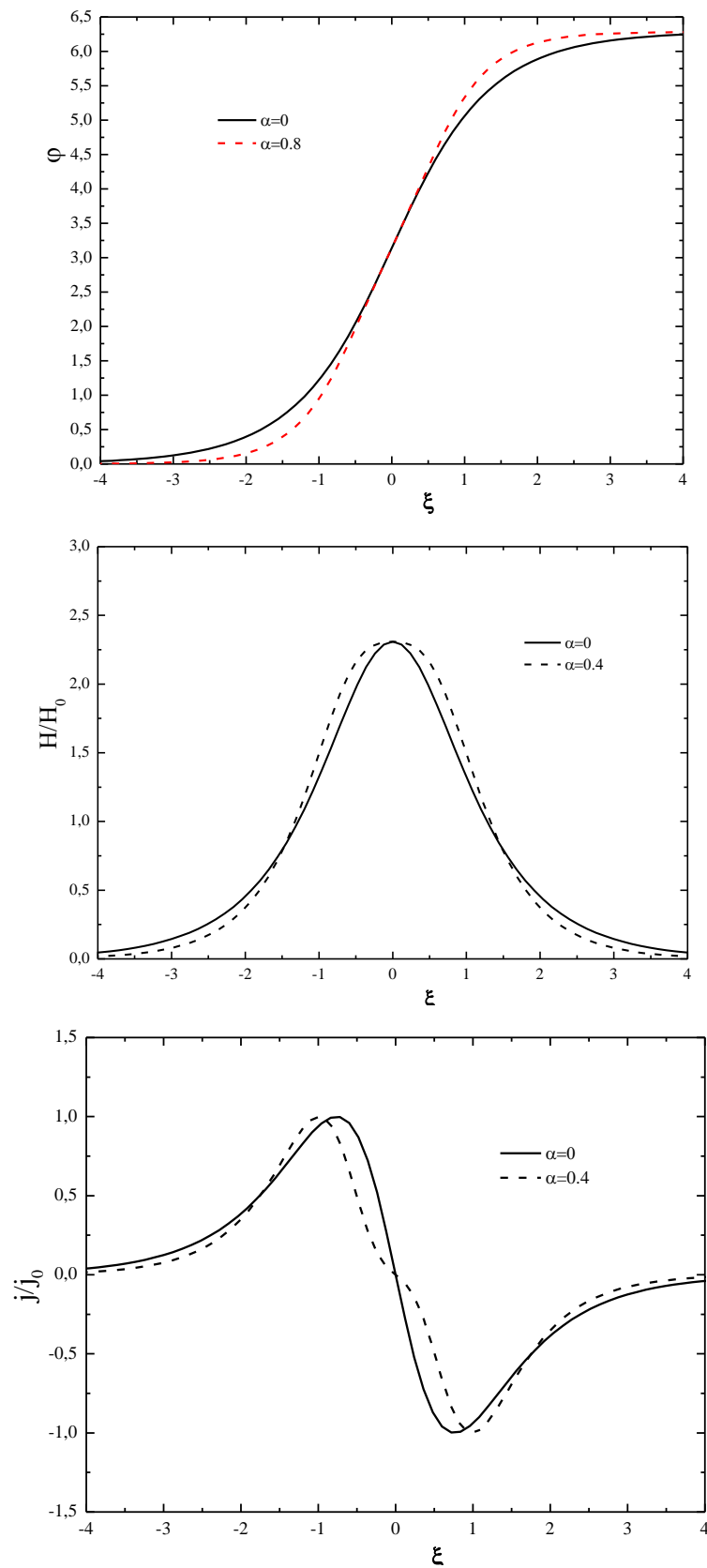


Рис.3.5. Розподіл фази, поля та струму в області флюксона. Суцільна лінія для синусоїдної струм-фазової залежності, а пунктирна – для залежності з другою гармонікою.

3.4. Магнітні властивості тунельних надпровідних контактів для температур, близьких до критичної, з врахуванням ефектів розпаровування.

Розглянемо вплив зовнішнього магнітного поля на критичний струм в тунельних джозефсонівських контактах для області температур, близьких до критичної та широкого інтервалу значень коефіцієнта проходження електронів. Також з'ясуємо просторову зміну різниці фаз, спричинену наявністю магнітного поля.

У випадку довільних значень коефіцієнти проходження електронів струм – фазова залежність є складнішою. Це питання досліджувалось в роботах [29–31].

Відповідна формула для залежності густини струму від різниці фаз має вигляд:

$$j(\varphi) = j_c \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\sin \varphi}{1 - \alpha \cos \varphi}. \quad (3.16)$$

Тут

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2}}, \quad (3.17)$$

де $\tau = \sqrt{\frac{12}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}$, $\zeta(3)$ – дзета-функція Рімана, T – температура, T_c –

критична температура;

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 x^3 R(x) dx + \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left(\int_0^1 x^2 R(x) dx\right)^2}{\int_0^1 x D(x) dx},$$

де $D(x)$ та $R(x)$ – коефіцієнти проходження та відбиття електронів, відповідно (детальніше див. в [29,36]).

У формулі (3.16) параметр α є мірою відхилення струм-фазової залежності від синусоїдної, а числове значення цього параметра цілком визначається температурою та коефіцієнтом проходження електронів крізь плівку

діелектрика, яка розділяє надпровідники в контакті. Значення параметра α належать інтервалу $[0; 1]$.

Основна наша мета з'ясувати, спираючись на результат (3.16), як величина коефіцієнта проходження D впливає на залежність критичного струму тунельного контакту від магнітного потоку, що пронизує контакт.

Підставляючи (2.9) в (3.16), знаходимо густину струму, що протікає через контакт

$$j(H, x, \varphi) = j_c \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \frac{\sin(4e\delta Hx + \varphi)}{\frac{1}{\alpha} - \cos(4e\delta Hx + \varphi)}, \quad (3.18)$$

як функцію напруженості поля, координати та різниці фаз.

Для знаходження повного струму через контакт інтегруємо (3.18) по x від 0 до l , та по y від 0 до 1:

$$\begin{aligned} I(H, \varphi) &= \int_0^l dx \int_0^1 dy j_c \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \frac{\sin(4e\delta Hx + \varphi)}{\frac{1}{\alpha} - \cos(4e\delta Hx + \varphi)} = \\ &= \frac{j_c \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}}{4e\delta H} \ln \frac{\frac{1}{\alpha} - \cos(4eH\delta l + \varphi)}{\frac{1}{\alpha} - \cos \varphi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

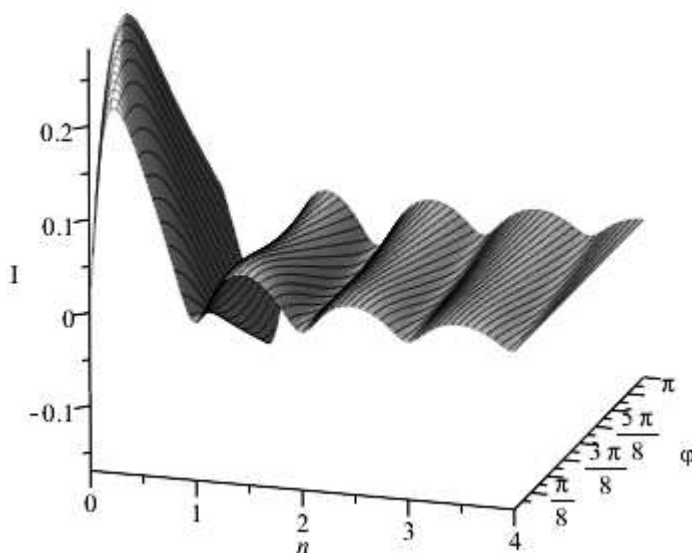


Рис.3.6. Залежність струму джозефсонівського тунельного контакту від величини потоку магнітного поля та різниці фази. На рисунку $n = \frac{\Phi}{\Phi_0}$.

Як бачимо з рис.3.6, струм осцилює зі зміною величини потоку магнітного поля, яке пронизує надпровідний контакт. Однак ці осциляції зменшуються із збільшенням величини потоку.

Запровадимо позначення $\Phi = 2Hl\delta$ повного потоку магнітного поля, що пронизує контакт та використаємо позначення кванту магнітного потоку $\Phi_0 = \frac{\pi}{e}$. Тоді, на основі (3.19), усереднена по площі контакту густина струму

$$I(\Phi, \varphi) = \frac{j_c \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}}{\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}} \ln \frac{\frac{1}{\alpha} - \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi\right)}{\frac{1}{\alpha} - \cos \varphi}. \quad (3.20)$$

Знайдемо максимальний струм через контакт. Очевидно, він реалізується при значенні фази φ_c , яка відповідає умові максимуму виразу (3.20).

Прирівнюючи похідну від (3.20) по φ до 0, для φ_c одержимо такий результат:

$$\varphi_c = \arccos\left(\alpha \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (3.21)$$

Тоді критичний струм контакту, як функція магнітного потоку:

$$I_c(\Phi) = \frac{j_c \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}}{\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}} \ln \frac{\frac{1}{\alpha} - \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \arccos\left(\alpha \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right)}{\frac{1}{\alpha} - \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} - \arccos\left(\alpha \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\right)}. \quad (3.22)$$

Нижче на рис.3.7 побудовані графіки для залежності критичного струму від величини зовнішнього поля, яка визначається формулою (3.22).

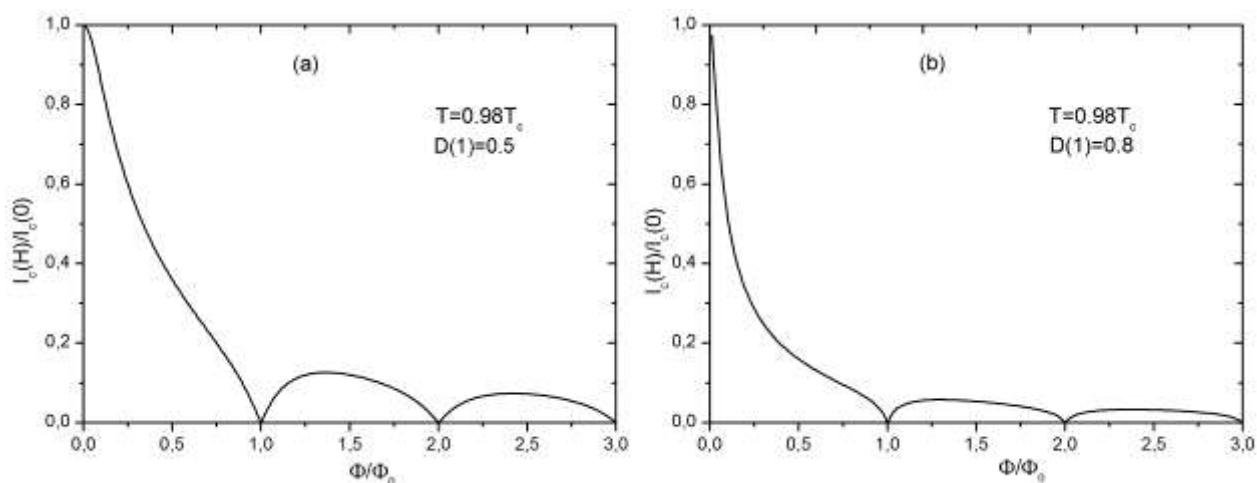


Рис.3.7. Залежність критичного струму джозефсонівського тунельного контакту від величини потоку магнітного поля, яке пронизує контакт.

Порівнюючи графіки (а) та (б) на Рис.3.7 можемо зробити такий висновок: із збільшенням коефіцієнта проходження електронів крізь контакт чутливість критичного струму контакту до зміни магнітного потоку зростає. Особливо різко змінюється критичний струм в області магнітного потоку близького до цілого числа елементарного потоку.

3.5. Динаміка флюксонів у довгих джозефсонівських контактах з несинусоїдною струм-фазовою залежністю

Для дослідження динаміки флюксона у випадку нетривіальної залежності струму від різниці фаз (3.16) використовуватимемо нестационарне рівняння sin-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\lambda_j^2} \frac{\sin \varphi}{1 - \alpha \cos \varphi} = 0. \quad (3.23)$$

Перейдемо до нових змінних:

$$\tilde{x} = \sqrt[4]{1 - \alpha^2} \frac{x}{\lambda_j}, \quad \tilde{t} = \sqrt[4]{1 - \alpha^2} \frac{\bar{c}t}{\lambda_j} \quad (3.23)$$

та виразимо через них другі похідні

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\lambda_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\lambda_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} \quad (3.24)$$

В результаті рівняння (3.23) в безрозмірних нових змінних (які надалі позначаємо старими літерами) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\sin \varphi}{1 - \alpha \cos \varphi} = 0. \quad (3.24)$$

Як і раніше розв'язок (3.24) шукаємо у вигляді $\varphi = \varphi(x - Vt)$ Позначивши $\xi = x - Vt$ розглядатимемо різницю фаз $\varphi = \varphi(\xi)$, як функцію однієї змінної. На основі (3.24) одержимо рівняння для $\varphi = \varphi(\xi)$:

$$-(1 - V^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{\sin \varphi}{1 - \alpha \cos \varphi} = 0. \quad (3.24)$$

Перший інтеграл для (3.24)

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \left[\frac{2}{\alpha(1-V^2)} \ln \frac{1-\alpha\cos\varphi}{1-\alpha} \right]^{1/2}. \quad (3.25)$$

Нажаль, проінтегрувати рівняння (3.25) в елементарних функціях не вдається, тому для його розв'язування використано чисельні методи та реалізовані в системі комп'ютерної математики Maple.

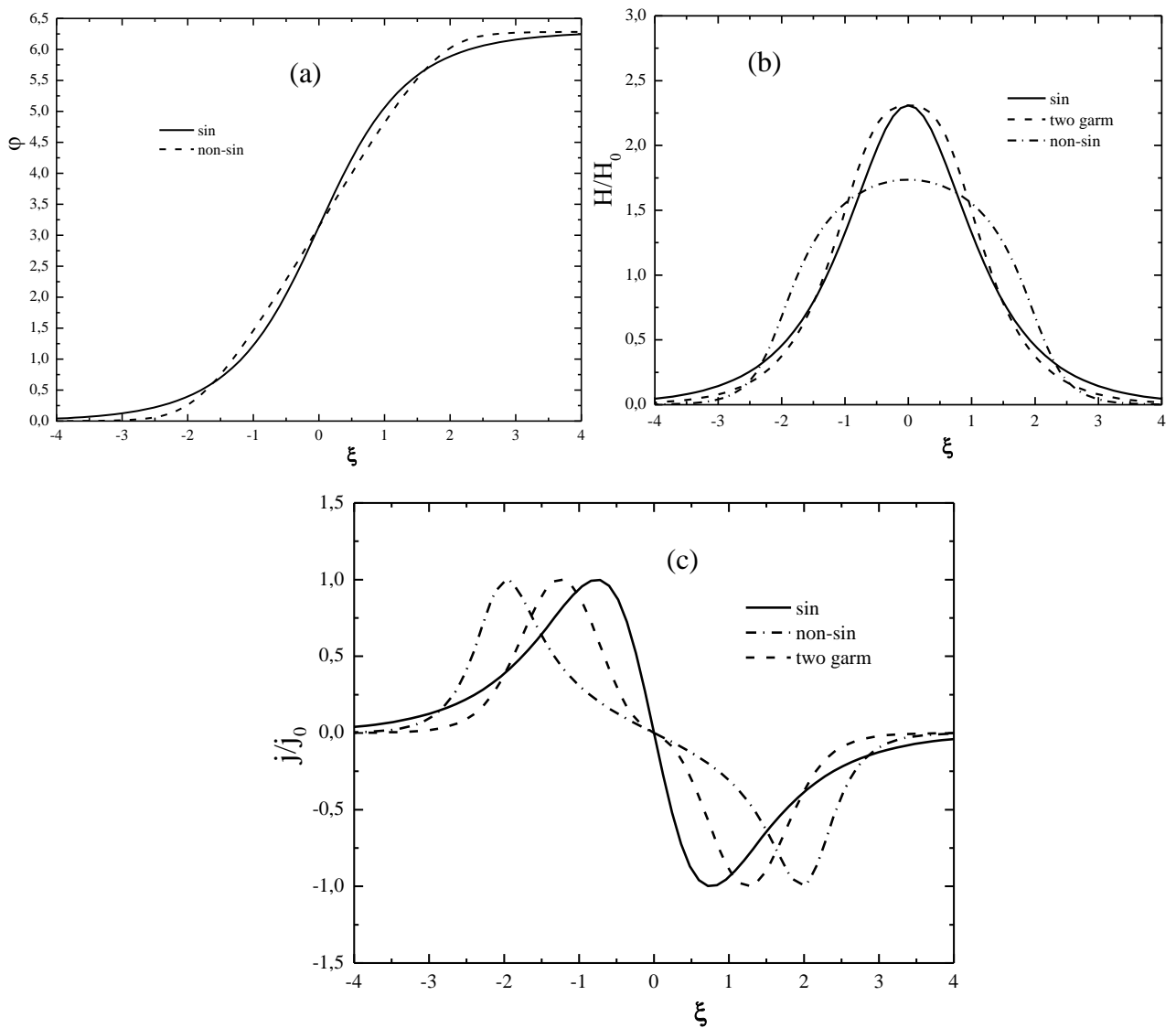


Рис. 3.8. Розподіл різниці фаз, магнітного поля та струму в області флюксона як функцій координати x ($\xi = x - Vt$).

На рис.3.8 для порівняння представлені результати для трьох випадків залежності струму від різниці фаз: 1) синусоїдної; 2) з врахуванням другої гармоніки (3.1); 3) несинусоїдної (3.16).

Як загальний висновок маємо: зі збільшенням відмінності в струм-фазовій залежності від синусоїдної інтервал по осі Ox , на якому різниця фаз в області флюксона змінюється від 0 до 2π , звужується. Щодо розподілу магнітного поля у флюксоні то, на відміну від синусоїдної залежності, коли основний потік зосереджений в околі серцевини флюксона і з віддаленням від серцевини магнітне поле швидко зменшується, для залежностей відмінних від синусоїдної магнітне поле більш рівномірно розподілене по області флюксонаю. Особливо добре це виражено на рис.3.8(b) – максимум магнітного поля в серцевині флюксона зменшується і з віддаленням від серцевини поле зменшується повільно, тобто маємо більш рівномірний його розподіл у флюксоні.

ВИСНОВКИ

В результаті дослідження за темою кваліфікаційної роботи, основний акцент в якій зроблено на з'ясуванні впливу відмінності від синусоїдної в залежності струму від різниці фаз можемо зробити наступні висновки:

1. Врахування другої гармоніки в струм-фазовій залежності збільшує чутливість критичного струму до зміни зовнішнього магнітного поля.
2. При збільшенні коефіцієнта проходження електронів крізь контакт чутливість критичного струму контакту до зміни магнітного потоку зростає. Особливо різко змінюється критичний струм в області магнітного потоку близького до цілого числа елементарного потоку.
3. Збільшення внеску другої гармоніки у струм-фазову залежність, як і збільшення коефіцієнта проходження електронів крізь контакт розширює область навколо серцевини флюксона з основним потоком магнітного поля.

Підсумовуючи, маємо: зі збільшенням відмінності в струм-фазовій залежності від синусоїдної, інтервал по осі Ox , на якому різниця фаз в області флюксона змінюється від 0 до 2π , звужується. Щодо розподілу магнітного поля у флюксоні то, на відміну від синусоїдної залежності, коли основний потік зосереджений в околі серцевини флюксона і з віддаленням від неї магнітне поле швидко зменшується, для залежностей, відмінних від синусоїдної, магнітне поле більш рівномірно розподілене по області флюксона.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Golubov A.A., Kupriyanov M. Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.* 2004. Vol. 6, p. 411.
2. Свідзинський А.В.. Мікроскопічна теорія надпровідності : монографія. Луцьк : Волин. нац ун-т ім. Лесі Українки, 2011. 420 с.
3. Локтєв В.М. Лекції з фізики надпровідності. Київ, 2011. 276 с.
http://bitp.kiev.ua/files/doc/lectures/lecture_01.pdf
4. Bardeen J., Cooper J., Schrieffer J. Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.* 1957. 108. P.1175-1204.
5. Bednorz, J.G., Possible high- T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system, *Zeitschrift fur physik B-condensed matter* 64: 189 (1986).
6. Wu MK, Ashburn JR, Torng CJ, Hor PH, Meng RL, Gao L, Huang ZJ, Wang YQ, Chu CW. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Yb-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure. *Phys Rev Lett.* 1987 Mar 2;58(9):908-910. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.908. PMID: 10035069.
7. Chu, C., Gao, L., Chen, F. et al. Superconductivity above 150 K in HgBa₂Ca₂Cu₃O_{8+δ} at high pressures. *Nature.* 1993. 365, P. 323–325.
<https://doi.org/10.1038/365323a0>.
8. Nagamatsu J. Nakagawa N., Muranaka T., Zenitani Y., Akimitsu J. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. *Nature.* 2001 Vol.410, P.63-64.
9. Moskalenko V.A. *Fiz. Met. Metallov. Phys. Met. and Metallog.* 1959. Vol.8 P.503.
10. Suhl H., Matthias B. T., Walker L. R. Bardeen-Cooper-Schrieffer Theory of Superconductivity in the Case of Overlapping Bands. *Physical Review Letters.* 1959 Vol. 3, p.552.
11. Larbalestier D.C., Cooley L.D., Rikel M.O., Squiteri A.A., Naus M.T. Strongly linked current flow in polycrystalline forms of the superconductor MgB₂. *Nature.* 2001. Vol.410 P. 186.

12. Barone A. Paterno G. Physics and Applications of the Josephson Effect. New York. Wiley. 1982. 549 p.
13. B.D.Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. Physics Letters Volume 1, Issue 7, 1 July 1962, Pages 251-253, [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0).
14. Anderson P.W., Rowell J.M. Phys. Rev. Lett. 10, 230, 1963 <http://users.df.uba.ar/giribet/f4/joseph2.pdf>.
15. Likharev K. K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. New York. Gordon and Breach. 1986. 614 p.
16. Van Duzer T. and Turner C. W. Principles of Superconductive Devices and Circuits. New York : Elsevier North Holland, 1981.
17. Gallop J. C. SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics. Bristol : Adam Hilger, 1991.
18. Orlando T. P. and Delin K. A. Foundations of Applied Superconductivity. New York : Addison-Wesley, 1991.
19. Tinkham M. Introduction to Superconductivity. 2 ed. New York : McGraw-Hill, 1996.
20. Kadin A. M. Introduction to Superconducting Circuits. New York : John Wiley & Sons, 1999.
21. Rowell J. M. Magnetic Field Dependence of the Josephson Tunnel Current / J. M. Rowell. Phys. Rev. Lett. **11**. 1963. pp. 200–202.
22. Solymar L. Superconducting Tunneling and Applications. London. Chapman and Hall. 1972. 197 p.
23. *Sols, F.* Ferrer J. Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow. *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49. p.15913.
24. Tsuei, C.C., Kirtley, J.R. Pairing symmetry in cuprate superconductors. Review of Modern Physics. 2000. 72. P.969.
25. Askerzade, I. (2012). Unconventional Superconductors: anisotropy and multiband effects. Springer, Berlin, 177 p.
26. V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950).

27. A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, (North Holland, UK, 1988).
28. Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., and Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.* 2004. Vol. 76, no. 2. P. 411-469.
29. В. Сахнюк, В.Є Головій В.М. Вплив прозорості діелектричного прошарку на форму залежності струму від різниці фаз у контактах типу SIS. *Журнал фізичних досліджень*, 2011, Т. 15, Ч. 2, С. 2702-8.
30. Sakhnyuk V. Pastukh O. Yu., Shutowskii A. M., Sakhnyuk V. E. The effects of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration. *Low Temperature Physics*. 2017. v. 43. №6. p. 664-669.
31. Сахнюк В. Є., Головій В. М. Залежність струму від різниці фаз у тунельних контактах. *Науковий вісник ВНУ*. 2010. Т. 6. С. 45–48.
32. Kupriyanov M. Yu. Effect of a finite transmission of the insulating layer on the properties of SIS tunnel junctions. *JETP Letters*. 1992. Vol. 56, no. 8. P. 399.
33. Barash Yu. S. Anharmonic Josephson current in junctions with an interface pair breaking. *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 85, no. 10. P. 100503.
34. Gotz M., Grajcar M., Il'ichev E., Khanin V. V., Zorin A. B., Niemeyer J., and Meyer H.-G. Supercurrent-phase relation of an Nb/AlO_x/Al/AlO_x/Nb-based Josephson junction at the superconducting transition of the Al Interlayer. *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, no. 22. P. R14645–R14648.
35. Bulaevskii L. N., Kuzii V. V., and Sobyenin A. A. Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state. *JETP Letters*. 1977. Vol. 25, no. 7. P. 290.
36. Сахнюк В.Є. Дослідження впливу зовнішнього магнітного поля на критичний струм джозефсонівських контактів для температур, близьких до критичної. *Науковий вісник СНУ імені Лесі Українки. Фізичні науки*. Луцьк, 2013. № 26 (275). С. 50-54.