Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Ольга Мусіївна Кравчук

Аналітична геометрія та лінійна алгебра

Частина II

Аналітична геометрія

методичні рекомендації
до вивчення навчальної дисципліни
«Аналітична геометрія та лінійна алгебра»

для студентів спеціальності 104 Фізика та астрономія

Луцьк-2023

УДК 514.122(072)
К 77

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 9 від 22 травня 2023 року)

Рецензенти:

Тимощук В.М. кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету
Мартинюк О.С. доктор пед. наук, професор кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій Волинського національногоуніверситету імені Лесі Українки

К 77

Кравчук О.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Частина ІІ. Аналітична геометрія: методичні рекомендації до вивчення навчальної дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» / Ольга Мусіївна Кравчук. Луцьк, 2023. 80 с.

У методичних рекомендаціях подано матеріал до вивчення тем: «Елементи векторноїалгебри у просторі», «Лінії на площині», «Площина і пряма у просторі». Видання призначене для студентів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності 104 Фізика та астрономія.

УДК 514.122(072)

Зміст

Передмова

Основна мета вивчення курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» для бакалаврів спеціальності 104 Фізика та астрономія - сформувати у студентів знання, уміння і навички необхідні для успішного вивчення інших профільних дисциплін, підготувати до продовження навчання за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр, сприяти забезпеченню суспільства спеціалістами різного рівня і профілю, а також створювати умови для розвитку кожної особистості з урахуванням її можливостей і потреб. Вивчення математики пов'язане із опануванням інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін і з подальшою діяльністю випускників університету.

Частина 2 «Аналітична геометрія» присвячена вивченню, передбачених навчальною програмою питань курсу аналітичної геометрії.

Програма навчальної дисципліни складається з таких змістових модулів:

1. Елементи векторної алгебри.
2. Аналітична геометрія на площині.
3. Аналітична геометрія у просторі.

У першому модулі вивчаються такі питання: геометричні вектори, лінійні операції над ними, координати вектора; скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, їх властивості та застосування; умови колінеарності та компланарності векторів.

Другий модуль передбачає вивчення таких питань: різні види рівняння прямої на площині: загальне, з кутовим коефіцієнтом, нормальне, канонічне; взаємне розміщення прямих на площині; кут між прямими; умови паралельності та перпендикулярності прямих; відстань від точки до прямої; канонічні рівняння кривих другого порядку, ексцентриситет, фокальні радіуси та директриси, рівняння асимптот для гіперболи.

У третьому вивчається загальне та нормальне рівняння площини, відстань від точки до площини, взаємне розміщення площин, кут між площинами, умови паралельності та перпендикулярності площин; канонічні рівняння прямої у просторі; задання прямої у просторі як лінії перетину двох площин; взаємне розміщення прямих у просторі; кут між прямими; кут між прямою і площиною, умови паралельності та перпендикулярності прямих і площин.

Аналітична геометрія − частина математики, яка, застосовуючи координатний метод, досліджує геометричні об'єкти засобами алгебри. Метод координат пов'язує геометрію з алгеброю й математичним аналізом, так як створює можливість перекладу геометричних задач мовою алгебри і аналізу. З іншого боку, цей метод дозволяє висвітлювати з геометричної точки зору задачі інших галузей, надаючи їм властиву геометричним поняттям наочність.

Методи лінійної алгебри та аналітичної геометрії широко використовуються як у теоретичні та прикладній математиці, так і за її межами, зокрема, у фізиці та механіці.

Розроблені методичні рекомендації містять теми практичних занять, перелік типових задач для аудиторної та домашньої робіт. Основне завдання практичних занять - активне засвоєння понятійного апарату курсу аналітичної геометрії, набуття вмінь використання цих понять та оволодіння деякими спеціальними методами розв'язування задач. Особлива увага звертається на розв'язання простих змістовних задач. Кількість задач, що розв'язуються в аудиторії, залежить від підготовки студентів академгрупи. Пропонований перелік задач зовсім не містить яких - небудь складних задач, що розраховані на «сильних» студентів. Передбачається, що такі задачі будуть пропонуватися викладачем індивідуально за умови повного виконання обов'язкової частини. До кожної теми підібрані завдання для самостійного розв'язання, а також індивідуальні домашні завдання.

Розділ 1. Елементи векторної алгебри у просторі

1.1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами, їх властивості. Лінійна залежність та незалежність векторів, властивості

Теоретичні відомості

1. Означення вектора.
2. Довжина вектора.
3. Ознака рівності двох векторів
4. Протилежні вектори.
5. Операція додавання векторів (правило трикутника та правило паралелограма).
6. Властивості операція додавання векторів
7. Віднцімання векторів.
8. Модуль суми і різниці векторів.
9. Добуток вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ.
10. Властивості операції множення вектора на число
11. Ознака колінеарності двох векторів
12. Означення лінійно залежної системи векторів.
13. Означення лінійно незалежної системи векторів.
14. Означення лінійної комбінації векторів.
15. Властивості лінійної залежності векторів

Зразки розв'язання типових задач

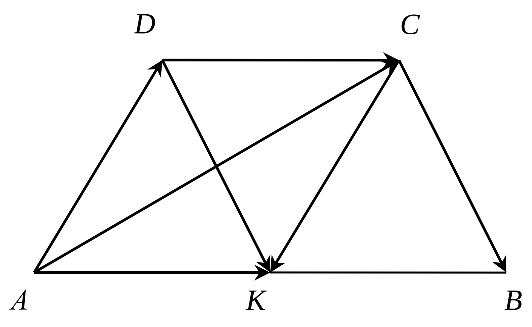

Рис.1.

1. *Дано рівнобічну трапецію ABCD, точка К середина основи АВ. Знайти вектори:*

а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;*б)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DK}$;

в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AK}$; *г)* $\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{CK}$;

д) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}$; *е)* $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$;

Розв'язання

Проведемо $DK \parallel CB$ (рис.1.), тоді $DCBK$ – паралелограм, а отже, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DK},\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{KB}$. Враховуючи це, маємо:

а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{DK}-\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KB}$; д) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{KC}$;

е) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}$;

2. *У трикутнику ABC проведені медіани $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CF}$. Знайти й побудувати суму векторів $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.*

Розв'язання.

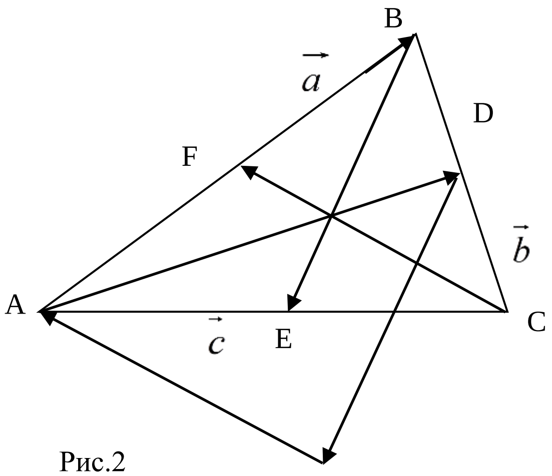

Рис.2

Введемо вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\quad \overrightarrow{BC}=\vec{b},\quad \overrightarrow{CA}=\vec{c}$ (рис.2). Тоді $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Виразимо вектори $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CF}$ через $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

Знайдемо їх суму:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{3}{2}\cdot\vec{0}=\vec{0}\quad .$$

3. *У чотирикутнику $ABCD$ сторони задані векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Точки K,M – середини діагоналей AC і BD відповідно. Виразити вектор $\overrightarrow{KM}$ через дані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.*

Розв'язання

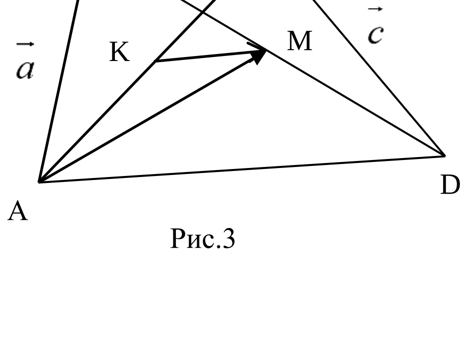

Рис.3

Вектор $\overrightarrow{KM}$ можемо знайти як різницю векторів $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{AK}$ (рис.3), тобто $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AK}$. Вектор $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Знайдемо вектор

$\overrightarrow{AM}$ з ΔAMB:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Тоді $\overrightarrow{KM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

Отже, $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right).$

4. *Дано правильну шестикутну піраміду SABCDEF. Точка O – центр основи піраміди. Чи є лінійно залежними вектори: а) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{FS}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}$; д) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{SD}$; е) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}$?*

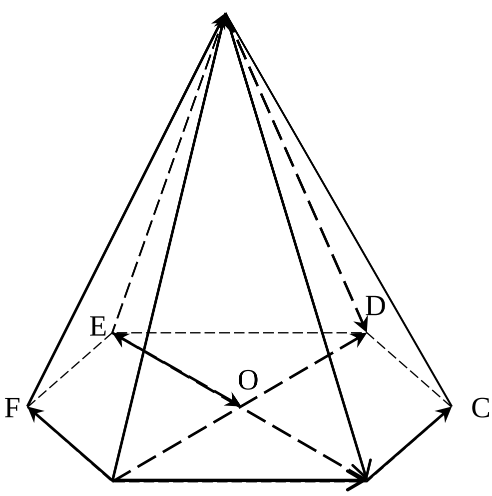

Рис.4

Розв'язання

а) Вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ - колінеарні (рис.4), тому (за теоремою 1) вони лінійно залежні;

б) Вектори $\overrightarrow{FS}$ і $\overrightarrow{AB}$ не колінеарні, тому вони не є лінійно залежні;

в) Вектори $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{BE}$ колінеарні, а значить лінійно залежні, тому система трьох векторів $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}$ - лінійно залежна;

г) Вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}$ - компланарні, тому є лінійно залежними;

д) Вектори $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{SD}$ не є компланарними, а отже е є лінійно залежними;

е) Вектори $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ - не компланарні, значить лінійно незалежні. За теоремою про розклад довільного вектора простору за трьома некомпланарними векторами вектор $\overrightarrow{BS}$ є лінійною комбінацією цих векторів. Тоді (за властивістю 1), система векторів $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}$ є лінійно залежною.

5. *Вияснити чи колінеарні вектори* $\vec{p}_1 = \vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c}$ *і*

$\vec{p}_2 = \sqrt{2}\vec{a} - 4\vec{b} + 2\sqrt{3}\vec{c}$, *якщо* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ *– некомпланарні.*

Розв'язання

Встановити колінеарність векторів можна кількома способами. Розглянемо два з них.

І спосіб. $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \exists\lambda : \vec{p}_1 = \lambda\vec{p}_2$ тобто $\vec{p}_1 - \lambda\vec{p}_2 = 0$,

або $\vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c} - \lambda(\sqrt{2}\vec{a} - 4\vec{b} + 2\sqrt{3}\vec{c}) = 0$

або $(1 - \lambda\sqrt{2})\vec{a} + (-2\sqrt{2} + 4\lambda)\vec{b} + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\lambda)\vec{c} = 0$

Так як вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – некомпланарні, то остання рівність виконується тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ рівні нулю, тобто:

$$\begin{cases} 1 - \lambda\sqrt{2} = 0, \\ -2\sqrt{2} + 4\lambda = 0, \\ \sqrt{6} - 2\sqrt{3}\lambda = 0. \end{cases}$$

Звідки $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ задовольняє кожне рівняння системи.

Отже, існує таке $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, що $\vec{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{p}_2$, тобто вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ – колінеарні.

ІІ спосіб. Візьмемо дані некомпланарні вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ за базисні. Тоді коефіцієнти при цих векторах у розкладах векторів $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ є координатами, тобто $\vec{p}_1\left(1; -2\sqrt{2}; \sqrt{6}\right)$, $\vec{p}_2\left(\sqrt{2}; -4; 2\sqrt{3}\right)$.

Перевіримо, чи відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{-2\sqrt{2}}{-4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так як координати пропорційні, то вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ – колінеарні.

Завдання для самостійного розв'язання

1. За заданими векторами $\vec{a}$ і $\vec{в}$ побудувати вектори $2(\vec{a} + \vec{в})$, $2\vec{в} - \vec{a}$, $-\vec{в} - \vec{a}$.

2. У трикутнику *ABC* проведено медіани *AO, BM, CK*. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Показати, що $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

3. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ побудовано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виразити вектори-діагоналі через задані вектори.

4. Чи правильне твердження, що співвідношення $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ виконується при будь-якому розташуванні точок *A, B* і *C*?

5. Дано *ABCDEF*- правильний шестикутник, *O* - його центр. Вважаючи, що $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ *і* $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, виразити $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$,, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

6. За даними векторами *a* і *b* побудувати кожен з наступних векторів: $4\vec{a}$; $-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; $2\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$; $3\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$; $\vec{a}+\sqrt{3\vec{b}}$.

7. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Побудуйте вектори:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+2\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{c}$; $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{c}$; $\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

4) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$; $-\vec{a}+(2\vec{b}-\vec{c})$; $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$.

8. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ пов’язані співвідношеннями:

1) $\begin{cases} 3\vec{c}+3\vec{d}=\vec{a}, \\ 2\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4\vec{c}-\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}, \\ -3\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}, \\ \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}-2\vec{d}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -\vec{a}+\vec{c}=2\vec{b}-\vec{d}, \\ \vec{b}+\vec{d}=3\vec{a}-\vec{c}, (\vec{b}\neq\vec{0}). \end{cases}$

Виразіть вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і побудуйте їх.

9. Дано неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$. Довести, що система векторів

$\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b},\ \vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ лінійно залежна. Розкласти вектор $\vec{m}$ за векторами $\vec{n}, \vec{p}$.

10. Точка М – центр ваги трикутника ABC. Розкласти: 1) $\overrightarrow{MA}$ за векторами $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ за векторами $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$; 3) $\overrightarrow{OA}$ за векторами $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}$, де точка O – довільна точка простору.

11. Нехай $ABCD$ – паралелограм, а O – точка перетину його діагоналей. Покладемо $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ *і* $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ *і* $\overrightarrow{DA}$

16. З'ясувати, чи вектори $\overrightarrow{a_1} = (1;-2;0)$, $\overrightarrow{a_2} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1;-6;2)$ є лінійно залежними, і якщо це так, то виразити один із векторів через інші.

17. Чи можуть вектори $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1)$ і $\overrightarrow{a_2} = (1;-1;2)$ і $\overrightarrow{a_3} = (4;1;4)$ утворювати базис?

18. В паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$, де О- точка перетину діагоналей паралелограма.

19. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Доведіть, що $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

20. Дано трикутник ABC, AL- бісектриса кута *А*. Знайти $\overrightarrow{AL}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

21. В паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ має розклад $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$. Побудувати точки *M* і *N*, якщо відомо, що вони лежать на сторонах паралелограма.

22. З'ясувати, чи вектори $\overrightarrow{a_1} = (1;1;1)$ і $\overrightarrow{a_2} = (1;-1;2)$ є лінійно залежними.

1.2. Векторний простір. Координати вектора в заданому базисі. Лінійні операції над векторами в координатах

Теоретичні відомості

1, Означення векторного простору.

2. Базис векторного простору.

3. Базис тривимірного простору.

4. Координати вектора в даному базисі.

5. Ортонормований базис простору

6. Координати вектора в ортонормованому базисі.

7. Довжина вектора, заданогог координатами в ортонормованому базисі.

8. Ознака рівності векторів.

9. Координати лінійної комбінації векторів:

- координати суми векторів;
- координати різниці векторів;
- координати добутку вектора на число.

10. Необхідна і достатня умови колінеарності та компланарності векторів

Найпростіші типи задач

І тип

Розклад вектора за двома неколінеарними або трьома некомпланарними даними векторами, які не ортогональні і мають різні довжини.

Нехай дано вектор $\vec{a}$. Розкласти його за базисними векторами. Можна рекомендувати такий спосіб розв'язування цих задач:

Перш за все потрібно визначити векторний базис.

а) для *двомирірного* простору (рис.5)

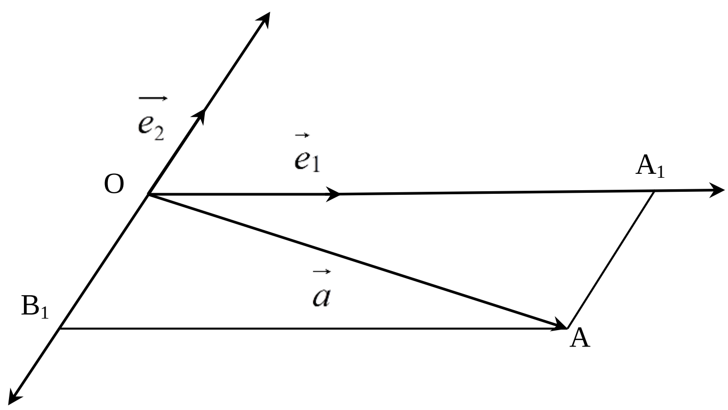

Рис.5

Провести через кінці вектора $\vec{a}$ дві прямі, паралельні відповідно базисним векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Утвориться паралелограм OA_1AB_1, діагоналлю якого є вектор $\vec{a}$, який можна подати у вигляді $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$.

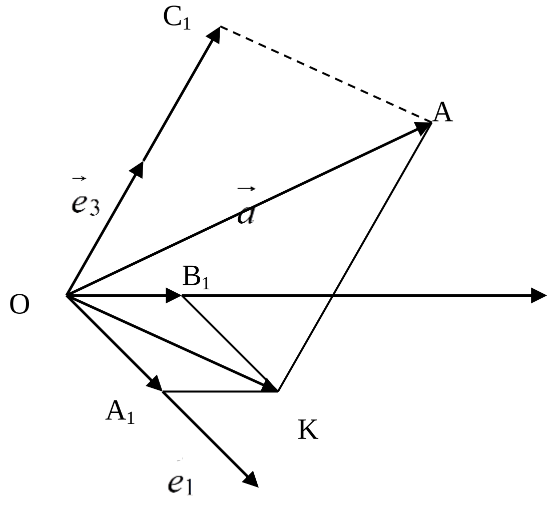

Рис.6

2. Виходячи із даних умови конкретної задачі, знайти α, β.

б) для *тривимірного* простору (рис.6). Через кінець вектора $\vec{a}$ провести пряму *AK*, паралельну вектору $\vec{e}_3$ до перетину з площиною векторів ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$).

Отримаємо вектор $\overrightarrow{OK}$, з яким поступаємо, як в пункті а).

Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$$

де α, β, γ визначимо, враховуючи дані умови задачі).

1. *Дано базисні вектори* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ *на площині. Побудувати вектори* $\vec{a}(-2;1)$, $\vec{в}(1;3)$, $\vec{c}(2;-2)$.

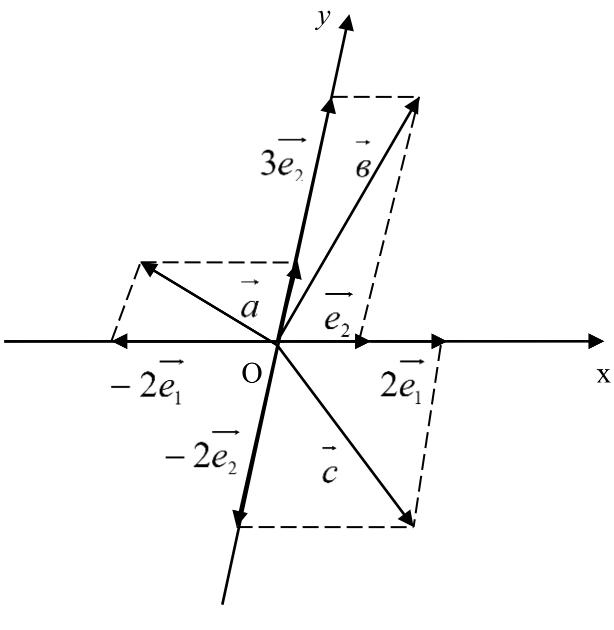

Рис.7

Розв'язання.

Для побудови векторів у заданому базисі з довільної точки *O* площини будуємо базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (рис.7). Вектор $\vec{a}(-2;1)$ можна розкласти за базисними векторами: $\vec{a} = -2\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2$, тому побудуємо його як суму векторів $\overrightarrow{OA_1} = -2\vec{e}_1$ та $\overrightarrow{OA_2} = \vec{e}_2$ за правилом паралелограма. Аналогічно будуємо вектори $\vec{в}$ і $\vec{c}$: $\vec{в} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2}$, де $\overrightarrow{OB_1} = \vec{e}_1$; $\overrightarrow{OB_2} = 3\cdot\vec{e}_2$ і $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}$, де $\overrightarrow{OC_1} = 2\cdot\vec{e}_1$; $\overrightarrow{OC_2} = -2\cdot\vec{e}_2$.

2. *Вектори* $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ *задані координатами в деякому базисі:* $\vec{a}(-3;4;1)$, $\vec{в}(1;0;5)$, $\vec{c}(3;2;-1)$. *Знайти координати вектора* $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{в}+\frac{1}{2}\vec{c}$ *в цьому ж базисі.*

Розв'язання.

Вектор $\vec{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$, тому його координати обчислюємо за формулою: $\vec{d}=2(-3;4;1)-3(1;0;5)+$

$$\frac{1}{2}(3;2;-1)=(-6;8;2)-(3;0;15)+\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)=(-7{,}5;9;-13{,}5).$$

Отже, $\vec{d}(-7{,}5;9;-13{,}5)$.

3. *При яких значеннях* λ *вектори* $\vec{a}(\lambda;9;-1)$ *та* $\vec{в}(1;\lambda;\frac{1}{3})$ *колінеарні*?

Розв'язання

З необхідної і достатньої умови колінеарності векторів маємо: $\vec{a} \parallel \vec{в} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1}=\frac{9}{\lambda}=\frac{-1}{1/3}$. З рівності перших двох відношень випливає, що $\lambda^2=9$, звідки $\lambda_1=3$ або $\lambda_2=-3$. Враховуючи третє відношення, робимо висновок, що $\lambda=-3$. Справді, підставивши у записані відношення це значення λ, отримаємо в кожному з них одне число -3.

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{в}$ колінеарні, коли $\lambda=-3$.

4. *Вантаж вагою 60 кг підтримується двома стержнями АВ і СВ (рис.8). Визначити сили, які виникають в стержнях, якщо* $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$.

Розв'язання

Силу $\vec{F}$ необхідно розкласти за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$. Так як вони неколінеарні, то можна вважати, що вони утворюють базис. Проведемо через кінець вектора $\vec{F}$ прямі, паралельні відповідним

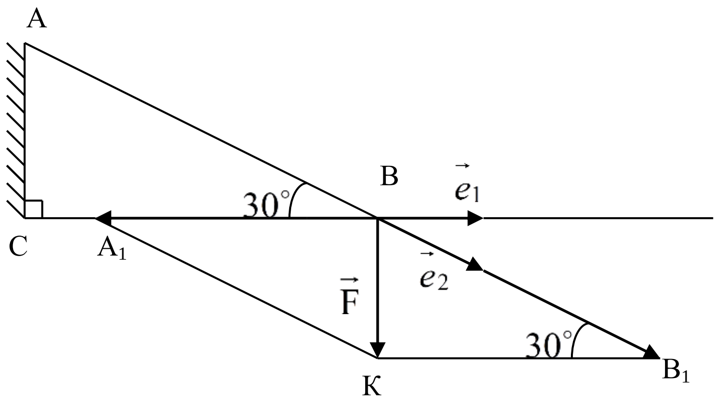

Рис8

базисним векторам.

Отримаємо паралелограм A_1BB_1K: $\overrightarrow{KB_1}$ ll $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{KA_1}$ ll $\overrightarrow{AB}$.

Тоді $\vec{F} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{KB_1} + \overrightarrow{BB_1} = -\left|\overrightarrow{KB_1}\right|\vec{e}_1 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|\vec{e}_2$.

Коефіцієнти при базисних векторах обчислюємо з прямокутного трикутника *ВКВ₁*, у якого за умовою $\left|\vec{F}\right| = \left|\overrightarrow{BK}\right| = 60$.

Маємо $KB_1 = \left|\vec{F}\right| tg60^\circ = 60\sqrt{3}$. та $BB_1 = \sqrt{BK^2 + KB_1^2} = \sqrt{60^2 + 3\cdot 60^2} = 120$.

Звідси, $\vec{F} = -60\sqrt{3}\vec{e}_1 + 120\vec{e}_2$.

Отже, на стержень *АВ* діє розтягуюча сила 120 *кг*, а на стержень *СВ* – стискуюча сила $60\sqrt{3}$ *кг*.

5. *Вантаж вагою 30 кг підвішено до точки О опори, яка складається із трьох стержнів ОА, ОВ, ОС (рис. 9).*

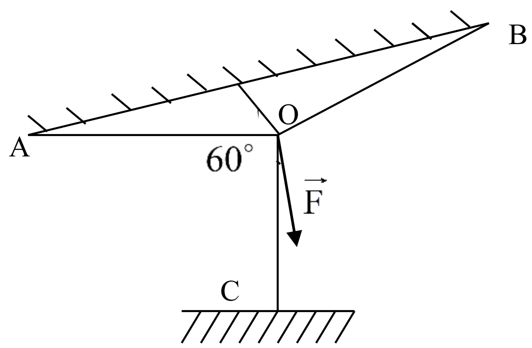

Рис. 9

Два горизонтальні стержні ОА і ОВ рівні за довжиною і взаємноперпендикулярні.

Стержень ОС утворює рівні кути із стержнями ОА і ОВ, а кут рівний 60° *із горизонтальною площиною АОВ. Знайти сили, які виникають у стержнях.*

Розв'язання.

Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ приймемо за базисні: $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_3$. Щоб краще розуміти задачу, зобразимо цей базис і силу $\vec{F}$ у зручному для нас вигляді (рис. 10).

Через точку *D* проведемо пряму

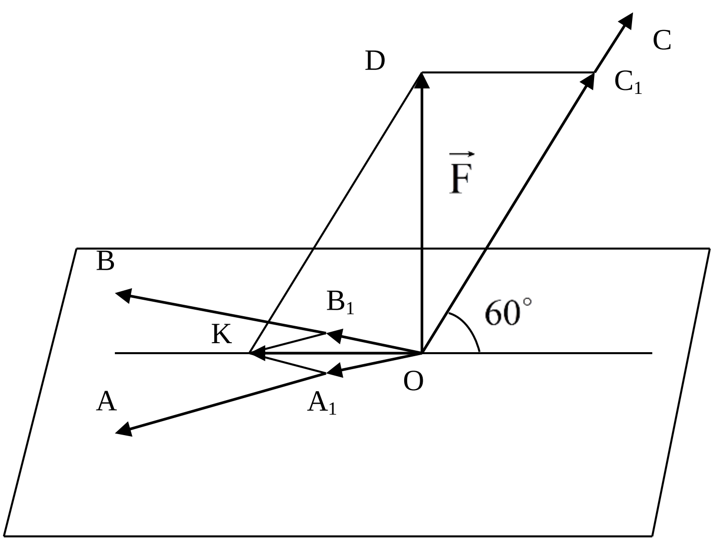

Рис. 10

$DK \parallel OC$, де K – точка перетину її з площиною векторів $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ Вектор $\overrightarrow{OK}$ розкладемо за векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ Отримаємо: $\vec{F} = \overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{CO} =$

$= \left|\overrightarrow{OA_1}\right|\vec{e}_1 + \left|\overrightarrow{OB_1}\right|\vec{e}_2 - \left|\overrightarrow{OC_1}\right|\vec{e}_3$

Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OB_1}$, $\vec{e}_3$ – протилежно напрямлений з вектором $\overrightarrow{C_1O}$.

Абсолютні величини сил $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}$ *і* $\overrightarrow{OC_1}$ знайдемо, розглядаючи прямокутний трикутник $\Delta\, DOK$ і квадрат OA_1KB_1.

Із трикутника $\Delta\, DOK$: $OK = OD \cdot tg30^\circ = \dfrac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$:

$KD = OC_1 = \sqrt{OK^2 + OD^2} = = \sqrt{300 + 900} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$.

Оскільки OK – діагональ квадрата, то $OA_1^2 + OB_1^2 = OK^2 = 300.$ Так як $OA_1 = OB_1$, то $OA_1 = OB_1 = 5\sqrt{6}$.

Отже, на стержні OA і OB діють сили розтягу, рівні $5\sqrt{6}$ *кг*, а на стержень CO – стискуюча сила, рівна $20\sqrt{3}$ *кг*.

Задачі на розклад вектора за елементами геометричної фігури

Суть цих задач така*: дано геометричну фігуру (плоску або просторову), сторони якої задано як вектори. Потрібно виразити елементи цієї фігури через два її фіксовані вектори для плоского випадку і через три – для просторового.*

6. *Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E, F, G – середини сторін AA_1, AD, CC_1 відповідно. Покладаючи $\overrightarrow{AD_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_3$, виразити через них вектори: $\overrightarrow{FG}$ та $\overrightarrow{EC_1}$.*

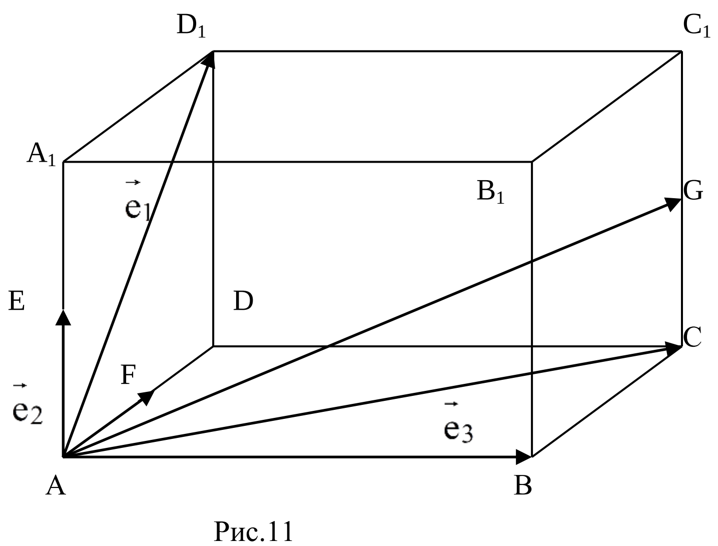

Рис.11

Розв'язання

На основі методики, розглянутої вище, подамо вектор

$\overrightarrow{FG}$ (рис.11) як суму векторів – складових фігури. Як вже було зауважено, такі суми можуть бути записані

по-різному. Наприклад, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1G}$, або $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$,

або $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$, або $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1G}$,

або $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$. (рис.1.20)

Можна взяти будь-яку із них, результат отримаємо той самий.

Візьмемо останню суму $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$ і виразимо кожен із векторів-доданків через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{1}{2}(-2\vec{e}_2 + \vec{e}_1) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2.\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AE} = \vec{e}_2 .$$

Підставляючи ці вирази у суму, отримаємо:

$$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

Аналогічно, $\overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = -\vec{e}_2 + (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + 2\vec{e}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Отже, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \overrightarrow{EC_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Дано трапецію $ABCD$ ($\overrightarrow{DC} = \kappa\overrightarrow{AB}$). Точки M і N – середини основ AB і DC, точка P - точка перетину діагоналей.

1). Прийнявши вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ за базисні, знайти координати векторів $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$.

2). Прийнявши вектори $\overrightarrow{PA}$ і $\overrightarrow{PB}$ за базисні, знайти розклад векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

2. На площині задано три вектори своїми координатами відносно деякого базису: $\vec{a}(4;-2), \vec{b}(3;5), \vec{c}(-2;-12)$. Виразити вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3. Відносно базису $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ має координати $(2;1)$. Знайти координати вектора $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e_1}', \vec{e_2}'$, якщо:

$$1)\ \vec{e_1}' = 4\vec{e}_1, \vec{e_2}' = -\frac{2}{3}\vec{e}_2;\ \ 2)\ \vec{e_1}' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e_2}' = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

4. Точка M – центр ваги трикутника ABC. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{BC}, \ \overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{AM}$ у базисі $\overrightarrow{MB}, \ \overrightarrow{MC}$.

5. Серед векторів

$\vec{a}_1(0;-3;0), \ \vec{a}_2(-2;0;5), \ \vec{a}_3(0;2;-1), \ \vec{a}_4(0;0;4), \ \vec{a}_5(1;0;0), \ \vec{a}_6(0;1;-3), \ \vec{a}_7(1;-2;3), \ \vec{a}_8(0;0;0)$ заданих у базисі $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ \vec{e}_3$, вказати вектори: 1) колінеарні $\vec{e}_2$; 2) компланарні з векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$.

6. У базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дано вектори $\vec{p}(-3,6,-13), \vec{a}(1,0,-2), \ \vec{b}(1,-1,3), \ \vec{c}(-2,3,0)$. Подати вектор $\vec{p}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \ \vec{c}$.

7. Дано трикутна призма $ABCA_1B_1C_1$. Прийнявши вектори $\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC}, \ \overrightarrow{AA_1}$ за базисні, знайти координати вектора $\overrightarrow{MN}$, де M – центр паралелограма $BCC_1B_1, \ N$ - центр ваги трикутника $A_1B_1C_1$.

8. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Прийнявши вектори $\overrightarrow{SA}, \ \overrightarrow{SB}, \ \overrightarrow{SC}$ за базисні, знайти координати векторів $\overrightarrow{SD}, \ \overrightarrow{SM}, \ \overrightarrow{MB}, \ \overrightarrow{SP}, \ \overrightarrow{AP}$, де M – середина відрізка $AD, \ (BCP) = 2.$

9. Нехай BB_0 - висота трикутника ABC. Розкласти вектор $\overrightarrow{BB_0}$ за базисними векторами $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}.$

10. Дано вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$ відносно ортонормованого базису $\vec{i}, \ \vec{j}$. Знайти координати вектора $\vec{x}$, такого, що $\vec{x} \perp \vec{a}, |\vec{x}| = |\vec{a}|.$

11. В ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}$ знайти координати вектора $\vec{c}$, що визначає напрям бісектриси кута, утвореного ненульовими векторами $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \ \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}.$

12. Який геометричний зміст розв’язку рівняння $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$, де $\vec{a}$ - даний ненульовий вектор, k – дане число, $\vec{x}$ - шуканий вектор.

13. Дано три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти вектор $\vec{p}$, перпендикулярний до площини, яка паралельна векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

14. На площині дано два вектори $\vec{u}$ (2;1) і $\vec{v}$(1;0). Найти знайти коефіцієнти розкладу вектора $\vec{a}$ (9;1) за векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$.

15. Дано три вектора $\vec{u}$ (3;-2), $\vec{v}$ (-2;1), $\vec{w}$ (7;-4). Визначити коефіцієнти розкладу кожного з цих трьох векторів, приймаючи в якості базису два інші.

16. Дано вектори $\vec{a}$(1;-2), $\vec{b}$ ($\frac{1}{2}$;1), $\vec{c}$(2;0). Визначити координати векторів

$\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\frac{3\vec{a}-5\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{c}-2\vec{b}}{3}$.

17. Дано вектори $\vec{a}$ (-1;-2), $\vec{b}$ (3;-5), $\vec{c}$(4;-3). Чи існує трикутник *ABC*, сторони *AB, BC, CA* в якого відповідно паралельні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і для якого $\overrightarrow{AB} = |\vec{a}|$, $\overrightarrow{BC} = |\vec{b}|$, $\overrightarrow{AC} = |\vec{c}|$?

18. Дано вектори $\vec{a}$ (1;-2), $\vec{b}$ (-1;0), $\vec{c}(-\frac{3}{2};3)$, $\vec{d}$ $(-\frac{3}{2};1)$. Чи існує трапеція *ABCD*, сторони якої відповідно паралельні даним векторам і для якої $\overrightarrow{AB} = |\vec{a}|$, $\overrightarrow{BC} = |\vec{b}|$, $\overrightarrow{CD} = |\vec{c}|$, $\overrightarrow{AD} = |\vec{d}|$

19. В паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано координати чотирьох вершин A(2;-1;1), B(1;3;4), A_1(4;2;0), D(6;0;1). Знайти координати решти вершин.

20. Дано точки A(1;2), B(-2;3). Знайти: 1) координати $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BA}$.

21. Визначити координати точки *A,* з якою співпадає кінець вектора $\vec{a} = (5;6;1)$, якщо його початок співпадає з точкою B(-1;6;3).

22. Дано точки M(x; 2; 3) і N(1; 3; z). Знайти x і z, якщо:1) $\overrightarrow{MN}$ =(3; 1; 5);
2) $\overrightarrow{NM}$ =(4; -1; -3).

2.3. Скалярний добуток векторів

Теоретичні відомості

1. Означення скалярного добутку двох векторів.

2. Геометричні властивості скалярного добутку

3. Алгебраїчні властивості скалярного добутку

4. Скалярний добуток двох векторів у координатах відносно ортонормованого базису.

5. Необхідна і достатня умови *ортогональності* двох векторів.

Розв'язання задач

1. *Дано два вектори* $\vec{a}(-1;2;3)$, $\vec{в}(4;0;1)$. *Знайти косинус кута між векторами* $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{в}$ *і* $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{в}$.

Розв'язання

Знайдемо спочатку координати векторів $\vec{m}$ та $\vec{n}$, застосовуючи теорему 1.9 про координати лінійної комбінації векторів та наслідки з неї:

$\vec{m}$=2(-1;2;3)+(4;0;1)=$(-2\cdot 1;2\cdot 2;2\cdot 3)$+(4;0;1)=(-2+4; 4+0; 6+1)=(2; 4; 7);

$\vec{n} = -\vec{a} + \vec{в}$=-(-1; 2; 3) + (4; 0; 1) = (1; -2; -3) + (4; 0; 1) = (5; -2; -2)

Тепер за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ можемо обчислити довжини векторів $\vec{m}$ та $\vec{n}$: $|\vec{m}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{69}$; $|\vec{n}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{33}$

Скалярний добуток $\vec{m}\cdot\vec{n}$ - за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$:

$\vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot 5 + 4\cdot(-2) + 7\cdot(-2) = -12$

Отримаємо $\cos\left(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{253}} = \dfrac{-4\sqrt{253}}{253}$.

Отже , $\cos(\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}) = \dfrac{-4\sqrt{253}}{253}$.

2. *Для яких значень* λ *вектори* $\vec{a} + \vec{в}$ *та* $\lambda\vec{a} - \vec{в}$ *перпендикулярні, якщо* $\vec{a}(1;-1;2)$, $\vec{в}(2;1;-3)$*?*

Розв'язання

Знайдемо координати вектора $\lambda\vec{a}-\vec{в}$, скориставшись теоремою 1.9 про координати лінійної комбінації векторів та наслідками з неї. $\lambda\vec{a}-\vec{в}=$ $(\lambda;-\lambda;2\lambda)-(2;1;-3)=(\lambda-2;-\lambda 11;2\lambda+3)$.

За наслідком 1: $\vec{a}+\vec{в}$ = (1+2; -1+1; 2-3)=(3; 0; - 1).

За умовою перпендикулярності, скалярний добуток цих векторів рівний нулю, тобто:

$$(3;\ 0\ ;-1)(\lambda-2;-\lambda-1;\ 2\lambda+3)=0.\ 3(\lambda-2)+0(-\lambda-1)-1(2\lambda+3)=0,$$

звідси $\lambda=3$.

3. *Знайти вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b}(4;1;3)$ і такий, що $\vec{a}\cdot\vec{c}=12$, де $\vec{c}(1;2;-1)$.*

Розв'язання. Так як шуканий вектор $\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{b}$, то їх координати пропорційні, тобто вектор $\vec{a}$ має координати $(4k;k;3k)$. Тоді скалярний добуток цього вектора на вектор $\vec{c}$ рівний $4k\cdot 1+k\cdot 2+3k\cdot(-1)=3k$. За умовою $\vec{a}\cdot\vec{c}=12$, тобто $3k=12$. Звідки $k=4$.

Отже, $\vec{a}(16;4;12)$.

4. *Із вершини прямокутника із сторонами 12 і 8 проведено дві прямі, що ділять протилежні цій вершині сторони прямокутника навпіл. Обчислити кут між цими прямими.*

Розв'язання. Введемо прямокутну декартову систему координат, осі якої містять дві суміжні сторони прямокутника, а початком координат є та із його вершин, з якої проведені дві прямі (рис.12). В такому випадку можемо знайти координати точок K та M. Оскільки вони є серединами сторін прямокутника, то $K(12;4)$ і $M(6;8)$. Тоді можна знайти косинус шуканого кута α, утвореного векторами $\overrightarrow{OK}$ та

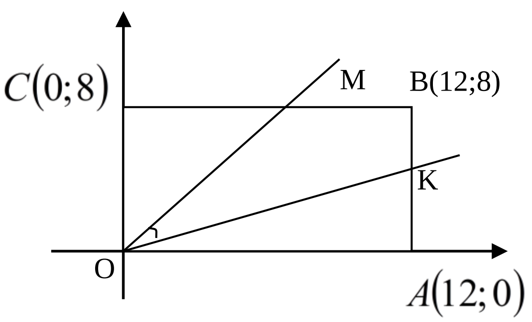

Рис.12

$\overrightarrow{OM}$, що є радіус-векторами точок K і M відповідно і мають такі ж координати: $\overrightarrow{OK}=(12;4)$, $\overrightarrow{OM}=(6;8)$.

За формулами (1.28):

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OK}\right|\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\frac{12\cdot 6+4\cdot 8}{\sqrt{12^2+4^2}\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{104}{\sqrt{160}\sqrt{100}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти косинуси кутів між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}$ = (2,5,-3), $\vec{b}$ = (-4,2,0);

б) $\vec{a}$ = (1,-2,3), $\vec{b}$ = (-1,-3,0).

2. Обчислити кути трикутника *ABC*, якщо:

а) *A* (2; 3; 1), *B* (4; 0; 7), *C* (8; 5; -2);

б) *A* (-1;2; 0), *B* (3; 2; 5), *C* (5; -3; 2).

3. Обчислити довжину діагоналей паралелограма $ABCD$, якщо відомо, що $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b},$ де $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=2;\ \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}.$

4. Знайти кут α між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданими своїми координатами в кожному із нижче наведених випадків: 1) $\vec{a}(4;3)$, $\vec{b}(1;7)$**;** 2) $\vec{a}(6;-8)$, $\vec{b}(12;9)$; 3) $\vec{a}(8;4;1)$, $\vec{b}(2;-2;1)$; 4) $\vec{a}(2;5;4)$, $\vec{b}(6;0;-3)$.

5. Дано два вектори $\vec{a}(5;2)$, $\vec{b}(7;-3)$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє одночасно дві рівності: $\vec{a}\vec{x}=38$ і $\vec{b}\vec{x}=30$.

6. Дано три вектори $\vec{a}(3;-2)$, $\vec{b}(-5;1)$, $\vec{c}(0;4)$. Знайти:

1) $3\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+5\vec{b}^2-6\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}^2$; 2) $2\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}-3\vec{b}^2\vec{a}+\left(\vec{a}\vec{c}\right)\vec{b}$.

3) $3\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+2\vec{c}^2$; 4) $2\vec{a}^2+4\vec{b}^2-5\vec{c}^2$;

7. Дано три вектори: $\vec{a}(3;1;2)$, $\vec{b}(2;7;4)$, $\vec{c}(1;2;1)$. Знайти:

1) $\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}$; 2) $\vec{a}^2\left(\vec{b}\vec{c}\right)$; 3) $\vec{a}^2\vec{b}+\vec{b}^2\vec{c}+\vec{c}^2\vec{a}$.

8. Обчислити модуль вектора $\vec{b}$:

1) $\vec{b}=(3;-4)$; 2) $\vec{b}=(-12;5)$; 3) $\vec{b}=(-2;-6;3)$; 4) $\vec{b}=(10;15;-20)$.

9. .Знайти орт вектора $\vec{c}$: 1) $\vec{c}=(1;\ -2;\ 2)$; 2) $\vec{c}=(0;\ -8;\ 15)$.

10. Вектори $\vec{k}$ і $\vec{l}$ утворюють кут $\varphi=\frac{3}{4}\pi$. Знаючи, що $\left|\vec{k}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{l}\right|=4$, знайти:

1) $\vec{k}\cdot\vec{l}$; 2) $\vec{k}^2$; 3) $\vec{l}^2$; 4) $\left(\vec{k}-\vec{l}\right)^2$; 5) $\left(2\vec{k}-\vec{l}\right)\left(2\vec{k}+\vec{l}\right)$; 6) $\left(\vec{k}+\vec{l}\right)\left(\vec{k}-2\vec{l}\right)$; 7) $\left(2\vec{k}-5\vec{l}\right)^2$.

11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{\pi}{6}$ і $|\vec{a}|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Знайти:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; 5) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$; 6) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; 7) $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)^2$.

12. Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{l}$ утворює з ними кути, рівні φ. Обчислити: 1) $(5\vec{c}-2\vec{d})(\vec{c}+3\vec{d})$; 2) $\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{l}\right)^2$; 3) $\left(\vec{c}-2\vec{d}+3\vec{l}\right)^2$, якщо:

а) $|\vec{c}|=2, \left|\vec{d}\right|=4, \left|\vec{l}\right|=8, \varphi=\frac{\pi}{3}$; б) $|\vec{c}|=1, \left|\vec{d}\right|=3, \left|\vec{l}\right|=5, \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

13. Вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ утворюють кут φ. Обчислити кут α між векторами $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, якщо: 1) $|\vec{p}|=\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=1$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$: 2) $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$

.

14. Обчислити: 1) $(3\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC})\ (3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $\overrightarrow{AC}\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$, якщо: а) $A(1;\ 0;\ -4\ )$, $B(2;\ 1;\ 3)$, $C(-1;\ -1;\ -1)$; б) А$(-2;\ 3;\ -4)$; $B(-2;\ 0;\ 5\ )$; $C(2;\ -3;\ 4)$.

15. При якому значенні x вектори $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярні, якщо:

1) $A(x;\ 1;\ 2)$, $B(0;\ 3;\ 4;)$, $C(1;\ 2;\ 5)$, $D=(2;\ -1;\ 4)$;

2) $A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(x;\ 4;\ 5)$, $C(3;\ 2;\ -3)$, $D=(7;\ 8;\ 9)$?

16. Дано вершини трикутника ABC: $A(0;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 8;\ 12)$, $C(6;\ 3;\ 7)$. Знайти величини внутрішніх кутів A, B і C.

17. Вектори $\vec{x}$ і $\vec{a}$ колінеарні і утворюють з віссю oy гострий кут. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо: 1) $\vec{a}=(3;\ -2;\ 5)$, $|\vec{x}|=3\sqrt{38}$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $|\vec{x}|=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

18. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{x}\vec{b}=-12$; 2) $\vec{b}=(1;\ 0;\ 5)$, $\vec{x}\vec{b}=-26$.

19. Знайти вектор $\vec{y}$, який утворює тупий кут з віссю oz і перпендикулярний до векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{b}$ =(6; -2; 0), $\vec{c}$ =(2; 3; 11), $|\vec{y}| = \sqrt{11}$;

2) $\vec{b}$ =(2; 3; 4), $\vec{c}$ =(4; 4; 7), $|\vec{y}| = 3\sqrt{5}$.

20. Задані три точки *A*(1;1;1), *B*(4;5;-3) і *C*(2;3;4). Обчислити скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

21. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$, і $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5,\ |\vec{c}| = 8$. Обчислити: а) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{b} + 3\vec{c}\right)$; б) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$; в) $\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)^2$.

22. Два вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють кут φ = 60°. Обчислити модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо | *a* | = 4, | *b* | = 2.

23. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = (3;-5;2)$ при прямолінійному визначити, який кут (гострий, прямий, чи тупий) вони утворюють.

24. Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(6;-8;-7;5)$, утворює гострий кут γ з віссю *oz* і $|\vec{b}|$ = 50.

25. Знайти вектор $\vec{d}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2;3;-1)$, $\vec{b}(1;-2;3)$ та задовольняє умову $(\vec{d}\vec{c}) = -6$, де $\vec{c}(2;-1;1)$.

26. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(3;2;2)$ і $\vec{b}(18;-22;-5)$, утворює з віссю *oy* тупий кут β та | *c* | = 14.

27. Дано трикутник *ABC*: *A*(4;0;-2), *B*(-2;-6;4), *C*(4;3;2). Знайти кут φ між стороною *AB* і медіаною *CD*.

28. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (3;m;4)$ і $\vec{b} = (m;4;-7)$ перпендикулярні?

29. Дано вершини чотирикутника *A*(1;2;3), *B*(7;-3;2), *C*(3;0;6) і *D*(9;2;4). Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

30. Довести, що чотирикутник з вершинами *A*(-3;5;6), *B*(5;2;-1), *C*(8;-3;-1) і *D*(4;7;-2) – квадрат.

2. 4. Векторний добуток векторів

Теоретичні відомості

1. Поняття орієнтованого репера.

2. Означення векторного добутку двох векторів.

3. Геометричні властивості векторного добутку

4. Алгебраїчні властивості векторного добутку

5. Векторний добуток двох векторів у координатах відносно ортонормованого базису.

6. Необхідна і достатня умову *колінеарності* двох векторів (через векторний добуток):

$$\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Зразок розв'язання задач

1. *Трикутник* ABC *заданий координатами своїх вершин:* $A(2;1;0)$, $B(-3;-6;4)$, $C(-2;4;1)$. *Обчислити площу трикутника.*

Розв'язання

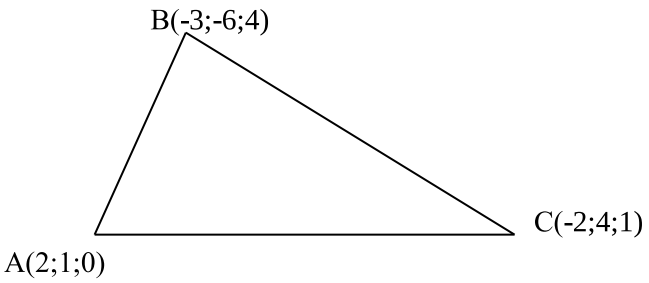

Рис.13

Площу трикутника знайдемо, скориставшись тим, що

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{паралелограма}$, тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \mathrm{mod}\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AC}$ (рис.13)

$\overrightarrow{AB}(-5;-7;4);\quad \overrightarrow{AC}(-4;3;1).$

Запишемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ у координатах . Тоді,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -7 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-19)^2 + (-11)^2 + (-43)^2} = 24{,}1.$$

2. *Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах*

$\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ *і* $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, *де* $|\vec{m}| = 5,\quad |\vec{n}| = 3,\quad (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \dfrac{\pi}{6}.$

Розв'язання

Площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AD}$, обчислимо за формулою $S_{ABCD} = \operatorname{mod}\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right]$. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AD}$, використовуючи його алгебраїчні властивості:

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right] = \left[(\vec{m} + 2\vec{n})(\vec{m} - 3\vec{n})\right] = [\vec{m}\vec{m}] - 3[\vec{m}\vec{n}] + 2[\vec{n}\vec{m}] - 6[\vec{n}\vec{n}].$$

Так як $[\vec{m}\vec{m}] = [\vec{n}\vec{n}] = 0$ і $[\vec{n}\vec{m}] = -[\vec{m}\vec{n}]$, то $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right] = 5[\vec{n}\vec{m}].$

Тоді, за означенням векторного добутку:

$$\operatorname{mod}\left[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}\right] = 5\operatorname{mod}\left[\vec{n}\vec{m}\right] = 5|\vec{n}||\vec{m}|\sin(\vec{n},\vec{m}) = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{2}.$$

Отже, $S_{\square ABCD} = 37{,}5$ кв. одиниць.

3. *У прямокутній декартовій системі координат задано дві точки* $A(1;\ 2;\ -3)$ *і* $B(0;\ -4;\ 5)$. *Знайти на осі ох таку точку* $C(x;\ 0;\ 0)$, *щоб площа трикутника* ABC *була рівна 1,5 кв. од*.

Розв'язання

Площу трикутника ABC можна обчислити як $\dfrac{1}{2}\operatorname{mod}\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]$.

Так як $\overrightarrow{AB} = (-1;\ -6;\ 8)$ і $\overrightarrow{AC} = (x-1;\ -2;\ 3)$, то вектор $\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right]$ має координати:

$$x = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -2,\quad y = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 8x - 5,\quad z = \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 6x - 4.$$

Отже, $\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4 + (8x-5)^2 + (6x-4)^2} = \sqrt{100x^2 - 128x + 45}.$

Згідно з умовою задачі $\dfrac{1}{2}\sqrt{100x^2 - 128x + 45} = \dfrac{3}{2}.$

Звідси знаходимо, що $x = \dfrac{1}{25}(16 \pm \sqrt{31})$, і, відповідно, задача має два розв'язки:

$$\left(\frac{1}{25}(16 + \sqrt{31});\ 0;\ 0\right) \text{ і } \left(\frac{1}{25}(16 - \sqrt{31});\ 0;\ 0\right).$$

4. *До точки* $A(5;-1;2)$ *прикладені три сили* $\vec{F}_1(1;2;-3)$, $\vec{F}_2(-5;4;0)$,

$\vec{F}_3(-2;3;-1)$. *Знайти момент рівнодійної цих сил відносно точки* $B(-2;7;6)$.

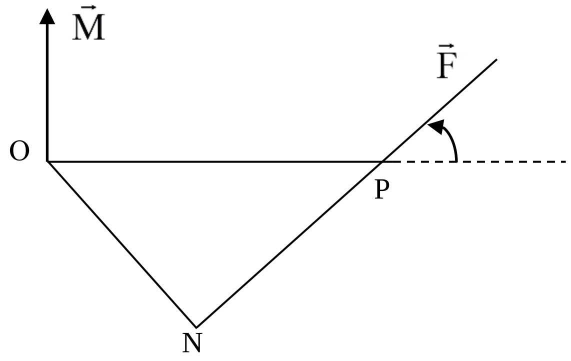

Рис.14

Розв'язання

Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки P (рис.14), то ***моментом сили*** відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, який є векторним добутком векторів $\overrightarrow{OP}$ (радіус-вектор точки Р відносно O) і вектора $\vec{F}$.

У нашому випадку сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, а радіус-вектор точки A відносно точки B - це вектор $\overrightarrow{BA}$. Тому знайдемо рівнодійну цих сил $\vec{F}(-6,9,-4)$, та координати вектора $\overrightarrow{BA}(7,-8,-4)$. Тоді, момент рівнодійної цих сил знайдемо як векторний добуток $\overrightarrow{BA}$ та $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{BA}\,\vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -8 & -4 \\ -6 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 68\vec{i} + 4\vec{j} + 15\vec{k}.$$

Отже, момент рівнодійної даних сил відносно точки B є вектор $\overrightarrow{M}$ (68;52;15).

5. *Знаючи вершину* $A(1;1;1)$ *квадрата* $ABCD$*, його центр* $O(0;0;0)$ *і вектор* $\vec{a} = (2;-1;-1)$*, перпендикулярний площині квадрата, знайти решту його вершин.*

Розв'язання

Так як вектор $\overline{OD}$ перпендикулярний як вектору $\overline{OA}$, так і вектору $\vec{a}$, то $\overline{OD}$ колінеарний вектору $[\overline{OA}, \vec{a}]$. Крім того, $[|\overline{OA}, \vec{a}|] = |\overline{OA}||\vec{a}|$ і $|\overline{OD}| = |\overline{OA}|$.

Відповідно, $\overline{OD} = \pm \dfrac{[\overrightarrow{OA}, \vec{a}]}{|\vec{a}|}$.

Знаючи координати вектора $\overrightarrow{OA} = (1;1;1)$, знайдемо добуток

$\left[\overrightarrow{OA},\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=(0;4;-4)$. Так як $|\vec{a}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$, то

$\overrightarrow{OD}\left(\pm 0;\pm\frac{2\sqrt{6}}{3};\mp\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Тому вершини D і B квадрата відповідно мають координати $\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}};-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ і

$\left(0;-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Оскільки точка C симетрична точці A відносно початку

координат O, то $C(-1;-1;-1)$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти координати векторного добутку $[a\cdot b]$, якщо;

а) $\vec{a}$ (2; 4; 5), $\vec{b}$ (0; 1;-2); б) $\vec{a}$ (0; -2; 5), $\vec{b}$ (1;1;3);

в) $\vec{a}$ (3;-1;2), $\vec{b}$ (-2; 1; 2); г) $\vec{a}$ (1;-1;0), $\vec{b}$ (0; -1; -2).

2. Обчислити площу трикутника з вершинами, A(7;3;0), B(2:0;5) і C(3;3;-1).

3. Для векторів $\vec{a}$ (2;0; -1) і $\vec{b}$ (1; 2; -1) знайти координати векторних добутків, якщо: а) $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$; б) $[(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}]$; в) $[(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})]$.

4. Знайти площу трикутника, з вершинами у точках A(4; 2), B(9; 4) і C(7; 6).

5. Знайти площу п'ятикутника, вершинами якого є точки A(–2; 0), B(0; –1), C(2; 0), D(3; 2), E(–1; 3).

6. Знайти площу трикутника ABC в кожному із наступних випадків:

1) A(2; 1), B(3; 4), C(1; 6); 2) A(–2; 4), B(0; –3), C(1; 7);

7. Дві вершини трикутника знаходяться в точках (5; 1) і (–2; 2), третя вершина – на осі ox. Знаючи, що площа трикутника дорівнює 10, знайти третю вершину.

8. Площа трикутника S=3, дві його вершини точки A(3; 1) і B(1; –3), центр ваги цього трикутника лежить на осі ox. Знайти координати третьої вершини C.

5.9. Знайти векторний добуток $[\vec{a}\vec{b}]$ у кожному із нижче наведених випадків:

1) $\vec{a}(2;3;1),\vec{b}(5;6;4)$; 2) $\vec{a}(5;-2;1)$, $\vec{b}(4;0;6)$; 3) $\vec{a}(-2;6;-4),\vec{b}(3;-9;6)$.

10. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(8;4;1)$,

$\vec{b}(2;-2;1)$

11. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F}$, коли її точка прикладання змінює положення із початку в кінець вектора $\vec{r}$:

1) $\vec{F}=(1;5;-3),\ \vec{r}=(0;2;6)$; 2) $\vec{F}=(-2;-3;1),\ \vec{r}=(1;2;3)$

12. Обчислити, яку роботу здійснює сила $\vec{F}$, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, змінює положення із положення M в положення N:

1) $\vec{F}=(5;-1;2),\ M(1;3;4),\ N(0;-2;-5)$;

2) $\vec{F}=(-1;3;-1),\ M(-1;0;2),\ N(0;12;1)$.

13. Дано три сили $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3$. Обчислити, яку роботу рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається із положення A в положення B:

1) $\vec{F}_1=(1;2;3),\ \vec{F}_2=(2;-1;-3),\ \vec{F}_3=(0;5;4)$, $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 6)$

2) $\vec{F}_1=(-1;3;-2),\ \vec{F}_2=(1;3;-4),\ \vec{F}_3=(1;-4;5)$, $A(0;\ 2;\ 6)$, $B(1;\ 1;\ 1)$

14. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо

1) $\vec{p}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=\vec{j}-\vec{k}$; 2) $\vec{p}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}-\vec{j}$.

15. Вектори $\vec{l}$ і $\vec{m}$ утворюють кут φ. Обчислити: *1*) $[\vec{l}\,\vec{m}]^2$; *2*) $[(3\vec{l}+\vec{m})(\vec{l}+3\vec{m})]^2$, якщо: *а*) $|\vec{l}|=2$, $|\vec{m}|=3$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; *б*) $|\vec{l}|=3, |\vec{m}|=1, \varphi=\frac{\pi}{6}$.

16. Знайти координати векторів 1) $\vec{m}=[\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{BC}]$; 2) $\vec{l}=[(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CA})\overrightarrow{CB}]$, якщо

а) $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(-3;\ 1;\ 4)$, $C(2;\ 7;\ 1)$; б) $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(4;\ 2;\ 0)$, $C(3;\ 1;\ 1)$.

17. Сила $\vec{F}$ прикладена до точки A. Знайти момент $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ цієї сили відносно початку координат, якщо: 1) $\vec{F}$=(1; 0; 3), A(-1; 2; 0); 2) $\vec{F}$=(0; 2; -1), A(2; 0; -1).

18. Дано точки *K, L, M*. Знайти площу трикутника *KLM*, якщо

1) $K(1;\ -3;\ 1)$, $L(2;\ 0;\ 7)$, $M(3;\ 4;\ -1)$; 2) $K(2;\ 5;\ 0)$, $L(1;\ 0;\ 0)$, $M(2;\ -1;\ 1)$.

19. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут φ. Знайти $|[\vec{a}\vec{b}]|$, якщо: 1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$;

2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 3) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 4) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2.5. Мішаний добуток векторів

Теоретичні відомості

1 . Означення мішаного добутку трьох векторів.

2. Властивості мішаного добутку.

3. Геометричний зміст мішаного добутку):

4. Мішаний добуток в координатах відносно ортонормованого базису

5. Умова компланарності трьох векторів у координатах відносно ортонормованого базису

Розв’язання задач

1. *Виходячи з умови компланарності трьох векторів* $\overrightarrow{AB}(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{AC}(a_2;b_2;c_2)$, $\overrightarrow{AD}(a_3;b_3;c_3)$, *записати умову компланарності чотирьох точок* $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$.

Розв’язання

*З*апишемо умову компланарності даних векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0 \quad \text{або} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Знаючи координати кінців векторів, знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, $\overrightarrow{AD}(x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)$.

Враховуючи умову (*), маємо:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це умова компланарності чотирьох даних точок A, B, C, D.

2. *Дано паралелепіпед* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *побудований на векторах* $\overrightarrow{AB}(4,3,0)$, $\overrightarrow{AD}(2,1,2)$ *і* $\overrightarrow{AA_1}(-3,-2,5)$.

Знайти:

а) об'єм паралелепіпеда; б) площі граней ABCD і ADD_1A_1*; в) довжину висоти, проведеної із вершини* A_1 *на грань ABCD; г) косинус кута* φ, *між ребром AB і* *діагоналлю B_1D; д) косинус кута φ_2 між гранями ABCD і ADD_1A_1) (рис.15).*

Розв'язання

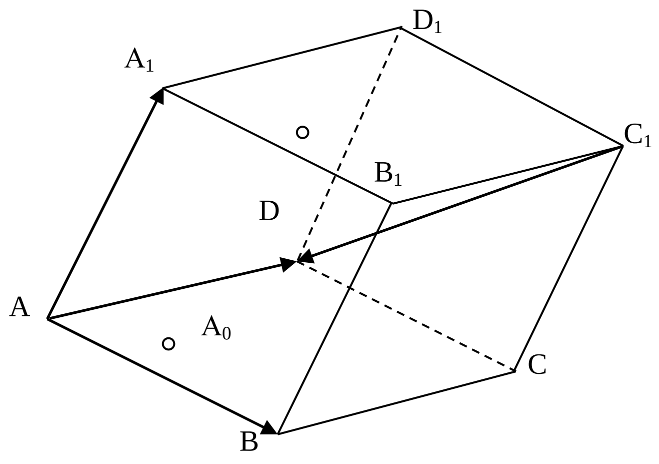

Рис.15

а) $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}\right|$. Знайдемо $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1}$. Використаємо формулу обчислення мішаного добутку векторів:

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -44,$$

$V = 44$ куб. од.

б) Для знаходження площі грані ABCD використаємо формулу

$S_{ABCD} = \mathrm{mod}\left[\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right]$.

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k} \qquad (\alpha)$$

$$\mathrm{mod}\left[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right] = \sqrt{36 + 64 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Отже, $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$ кв. одиниць.

Аналогічно знаходимо площу грані ADD_1A_1: $S_{ADD_1A_1} = \mathrm{mod}\left[\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right]$

$$\left[\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AA_1}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 16\vec{j} - \vec{k}, \qquad (\beta)$$

$\mathrm{mod}\left[\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1}\right] = \sqrt{81 + 256 + 1} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}, \quad S_{ADD_1A_1} = 13\sqrt{2}$ кв. од.

в) Для знаходження довжини висоти, проведеної з вершини A_1 на грань *ABCD*, скористаємось формулою для знаходження об'єму паралелепіпеда $V = h \cdot S_{ABCD}$.

Звідси $$h = \frac{V}{S_{ABCD}} = \frac{44}{2\sqrt{26}} = \frac{22\sqrt{26}}{26} = \frac{11\sqrt{26}}{13}.$$

Отже, $h = \dfrac{11\sqrt{26}}{13}$ лін. од.

г) Для знаходження $\cos\varphi_1$, скористаємось формулою $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

$\cos\varphi_1 = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1D}) = \frac{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{B_1D}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{B_1D}|}$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{B_1D}$:

$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{B_1D}(1,0,-3).$

Отримаємо: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1D} = 4\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\cdot(-3) = 4,$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+9+0} = 5, \quad |\overrightarrow{B_1D}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{4}{5\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{25}.$

д) Для знаходження косинуса кута між гранями *ABCD* і ADD_1A_1 скористаємось тим, що кут між двома площинами дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. Позначимо вектор, перпендикулярний до грані ADD_1A_1 через $\vec{n}_2$, а до грані *ABCD* через $\vec{n}_1$, тоді $\cos\varphi_2 = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

В ролі $\vec{n}_1$ можна взяти векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AD}$, тобто $\vec{n}_1(6,-8,-2)$ (враховуючи (α)), а в ролі $\vec{n}_2$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{AD}$ *і* $\overrightarrow{AA_1}$, тобто $\vec{n}_2(9;-16;-1)$, враховуючи (β).

Тоді, $\cos\varphi_2 = \frac{6\cdot 9 + (-8)\cdot(-16) + (-2)\cdot(-1)}{2\sqrt{26}\cdot 13\sqrt{2}} = \frac{46\sqrt{13}}{169}.$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Дано вектори $\vec{a}(3;1;2), \vec{b}(2;7;4)$, $\vec{c}(1;2;1)$. Знайти:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 2) $[[\vec{a}\cdot\vec{b}]\vec{c}]$; 3) $[\vec{a}[\vec{b}\cdot\vec{c}]]$.

2. З'ясувати, які з даних чотирьох точок лежать в одній площині

а) A_1 (0;0;-1), B_1 (-3;0;2), C_1(0;1;2), D_1 (1;1;1);

б) A_1 (2;0;-3), B_1 (-5;2;2), C_1(0;-1;4), D_1 (1;-1;-2).

3. Знайти мішаний добуток і визначити орієнтацію трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в кожному з наступних випадків: а) $\vec{a}$ (2;-3;1), $\vec{b}$ (1;1;2), $\vec{c}$ (3;1;-1);

б) $\vec{a}$ (-2;1;5), $\vec{b}$ (3;0;2), $\vec{c}$ (-1;4;2); в) $\vec{a}$ (1;-1;1), $\vec{b}$ (5;2;-3), $\vec{c}$ (1;4;-2).

4. Визначити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ і $\vec{b}\left[\vec{a}\vec{c}\right]$, якщо $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(1;1;2)$ $\vec{c}(3;1;-1)$

5. Обчислити об'єм тетраедра , вершини якого знаходяться в точках:

а) $A(2;-1;-1)$, $B(5;-1;2)$, $C(3;0;-3)$, $D(6;0;-1)$;

б) $A(0;0;0)$, $B(3;4;-1)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$.

6. Дано тетраедр, побудований на векторах $\overrightarrow{AB}(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}(3;4;0)$ і $\overrightarrow{AD}(3;4;2)$. Знайти: а) об'єм тетраедра; б) площу граней; в) довжину висоти h, проведеної із вершини D; г) косинус кута φ_1 між ребрами AB і BC; д) косинус кута φ_2 між гранями ABC і ADC.

7. Дано трикутник координатами вершин: $A(-1;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(2;6;-2)$. Знайти: а) площу трикутника; косинуси внутрішніх кутів; в) довжину висоти ВН і координати вектора $\overrightarrow{BH}$; г) вектор $\vec{a}$ колінеарний бісектрисі кута.

8. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Знайти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо

1) $\vec{a}=(-1;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}=(3;\ 1;\ 4)$ $\vec{c}=(5;\ 6;\ -1)$;

2) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$;

9. Об'єм тетраедра рівний V, три його вершини знаходяться в точках K, L, M. Визначити координати вершини N, якщо вона знаходиться на осі oz:

1) $V=\dfrac{11}{3}$, $K(-2;\ 1;\ 4)$, $L(-1;\ 5;\ 5)$, $M(2;\ 3;\ 4$;

2) $V=10$, $K(-3;\ 2;\ 5)$, $L(-3;\ 4;\ 4)$, $M(6;\ 0;\ 2)$.

10. Дано вершини тетраедра: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ і $D(-5;-4;8)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D.

16. Об'єм тетраедра $V=5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ і $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі oy.

11. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, $|m|=\dfrac{1}{2}$, $|n|=3$, $(m,n)=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(3;2;-5)$, $\vec{b}=(1;-1;4)$, $\vec{c}=(1;-3;1)$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах a та b.

Розділ II. Лінії на площині

2.1. Пряма у афінній системі координат

Теоретичні відомості

1. Як записати рівняння прямої, заданої координатами точки $M_0(x_0; y_0)$, через яку вона проходить, та напрямного вектора $\vec{p}(l; m)$, якому вона паралельна?
2. Який вигляд має канонічне рівняння прямої?
3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Параметричне рівняння прямої?
5. Як записати рівняння прямої, заданої двома точками?
6. У випадку, коли відомо “відрізки”, які пряма відтинає на координатних осях, то рівняння прямої записуємо у вигляді…?
7. Загальне рівняння прямої?
8. Якщо $\mathcal{L}_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \mathcal{L}_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ то:

   а) умова паралельності цих прямих?

   б) прямі перетинаються ?

   в) прямі співпадають?

9. Якщо прямі задані рівняннями $\mathcal{L}_1: y = k_1x + b_1$ і $\mathcal{L}_2: y = k_2x + b_2$, то:

   а) паралельні?

   б) перетинаються?

   в) співпадають?

Розв’язання типових задач

1. *Записати рівняння прямої, яка :*

а) проходить через точку $M_0(-1;5)$ *і паралельна вектору* $\vec{p}(3;-4)$.

б) проходить через точку $M_0(4;-2)$ *і паралельна осі ох.*

Розв’язання

Скориставшись канонічним рівнянням прямої запишемо:

а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{-4}$ (*)

або -4(x+1)=3(y-5),

звідки $4x+3y-11=0$ (**)

Рівняння (*) – канонічне, а рівняння (**) – загальне рівняння шуканої прямої.

б) Пряма паралельна осі ох, значить її напрямним вектором може бути будь-який вектор $\vec{p}(l;0)$, зокрема $\vec{p}(1;0)$, тоді рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{0} \Leftrightarrow y+2 \Leftrightarrow y=-2.$$

Отже, рівняння шуканої прямої, паралельної осі ox: $y=-2$.

Зауваження. Якщо пряма паралельна координатній осі, то в її рівнянні відсутня та змінна, що відповідає цій осі.

2. *Записати параметричне рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(5;1), M_2(0;-3)$.

Розв'язання

Для написання параметричного рівняння потрібно знати координати напрямного вектора: $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}=(0-5;-3-1)$, $\vec{p}=(-5;-4)$ і координати точки M_0. В ролі точки M_0 можемо взяти довільну із двох даних точок. Нехай, для означеності, $M_0=M_1(5;1)$. Тоді запишемо рівняння:

$$\begin{cases} x=5-5t; \\ y=1-4t. \end{cases} \text{ де, } t\in R$$

3. *Записати рівняння прямої , яка проходить через точку K(-2;1) і має кутовий коефіцієнт k=3;*

Розв'язання

Скористаємося рівнянням прямої, записаним у вигляді з кутовим коефіцієнтом : $y-y_0=k(x-x_0)$.

В нашому випадку: *y-1=3(x+2)* або *y=3x+7* або *3x-y+7=0.*

Отже, рівняння шуканої прямої *3x+y+7=0.*

4. *Вияснити взаємне розміщення двох прямих:*

а) $\mathcal{L}_1$*: 3x+4y-7=0,* $\mathcal{L}_2$ *: 6x+8y-9=0; б)* $\mathcal{L}_1$*: 2x-y+4=0,* $\mathcal{L}_2$ *: x+y+2=0;*

в) $\mathcal{L}_1$: *5x+y-3=0,* $\mathcal{L}_2$ *: 10x+2y-6=0.*

Розв'язання

а) $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, так як $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\neq\frac{-7}{-9}$, тобто виконується умова паралельності двох прямих;

б) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, тому що виконується умова перетину прямих, тобто $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$.

Точку перетину цих прямих знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ x+y+2=0. \end{cases}$$

Звідси $x=-2,\ y=0$. Отже, прямі перетинаються в точці $K(-2;0)$.

в) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, адже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}$, тобто виконується умова співпадання прямих.

5. *Пряма перетинає осі координат в точках A(3;0) та B(0;-2). Записати її рівняння.*

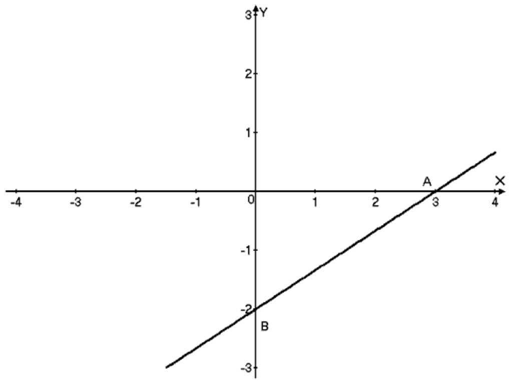

Рис. 16

Розв'язання.

Можемо записати рівняння у "відрізках" на осях, адже $a=3,\ b=-2$, (Рис.16).

Тоді $$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$$

або

-2*x*+3*y*+6=0 – загальне рівняння прямої.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Довести, що три точки $A,\ B$ і C належать одній прямій:

1) $A(2;1),\quad B(0;5),\quad C(4;-3)$; 2) $A(-1;0),\ B(1;-2),\ C(3;-4)$

Виявити, яка із трьох точок лежить між двома іншими.

2. Задана афінна система координати. Написати рівняння прямої:

а) яка проходить через точки $A(2;\ -1)$, $B(3;\ 0)$;

б) яка проходить через точку $A(3;\ 5)$ і паралельна вектору $\vec{p}$ (3; -2);

в) яка проходить через точку $A(3;\ 6)$ і паралельна вектору $\vec{e}_1\ (1;0)$.

3. Задана афінна система координати. Написати рівняння прямої:

а) яка проходить через точки $A(-1;\ 1)$ і $B(2;\ 5)$;

б) яка проходить через початок координат і точку $A(2;\ 5)$;

в) яка проходить через точку $A(2;\ -6)$ і паралельна вектору $\vec{p}\ (1;-1)$;

г) відтинає на осях координат відрізки $a = 3$, $в = -2$;

д) яка проходить через точку $A(3;\ 5)$ і паралельна вісь *ox*;

е) яка проходить через точку $B(-1;\ 2)$ і паралельна вісь *oy*.

4. Встановити, які із наступних трьох точок лежать на одній прямій:

а) (2; 1), (-1; 4), (-7; 10);

б) (0; 5), (7;1), (-2; 3);

в) (1; 0), (0; 1), (-2;3);

г) (2; 1), (10; 3), (5; 2).

5. Задана пряма, паралельна осі *oy*. Чи можна написати рівняння цієї прямої:

а) у «відрізках» на осях,

б) з кутовими коефіцієнтом?

6. Через середину відрізка, заданого точками (2; 5) і (4; -1), провести пряму:

а) паралельну осі *ox;*

б) кутовий коефіцієнт якої $k = 2$.

7. Пряма задана параметрично:

$$x = 2 + 3t,$$

$$y = 3 - t.$$

Визначити:

а) координати напрямного вектора;

б) координати точок, що відповідають параметрам $t_1 = 1,\ \ t_2 = -1,\ \ t_3 = \sqrt{3},\ \ t_4 = 4.$

8. Чи належать точки $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(-3;\ 8)$, $D\ (11;\ 5)$, $E\ (-1;\ 4)$ прямій, заданій параметрично:

$$x = -1 + t\,,\quad y = 4 - 2t\ ?$$

9.. Записати рівняння прямої, яка проходить через дані дві точки M_1 і M_2:

1) $M_1(-1; 3)$, $M_2(4; 5)$; 2) $M_1(6; 2)$, $M_2(7; -1)$;

3) $M_1(3; -2)$, $M_2(-3; 5)$; 4) $M_1(6; 0)$, $M_2(6; 1)$.

10. На площині задано дві прямі $2x - y - 2 = 0$ та $2x - 5y + 6 = 0$, які перетинаються. Записати умову, якій задовольняють координати внутрішніх точок того кута, в якому знаходиться початок координат.

11. Визначити, як розміщені прямі відносно системи координат:

а) $2x - 3y = 0$; б) $3x - y + 1 = 0$; в) $5x - 1 = 0$; г) $3y + 1 = 0$; д) $x + 2y = 0$;

е) $6x = 0$.

12. Задати на площині афінну систему координат і побудувати прямі:

а) $y = 3x + 1$; б) $x - 4y + 1 = 0$; в) $x - 3y = 0$; г) $5y + 1 = 0$; д) $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = 4 - 4t; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = 5t, \\ y = -4t; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5. \end{cases}$

13. Вияснити, як розміщена пряма $3x - y + 5 = 0$ відносно системи координат.

14. Записати параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $K(-1; 2)$, $M(3; -4)$

15. Звести до рівнянь з кутовим коефіцієнтом та у «відрізках» на осях задані рівняння прямих і побудувати їх:

а) $6x + 4y - 12 = 0$;

б) $5x - 2y + 10 = 0$;

в) $2x + 3y - 1 = 0$.

16. Записати рівняння сторін трикутника, якщо його вершинами є точки A (2; 1), B (0;3), C(-2; 1).

17. Записати рівняння прямої, що проходить через точку M (2; 3), і вона:

а) паралельна осі ox;

б) проходить через початок координат;

в) відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини;

д) паралельна прямій $2x - y - 5 = 0$.

18. Через точку M (3; 5) провести пряму так, щоб розміщений між осями координат, її відрізок ділився цією точкою навпіл.

19. Обчислити, при якому значенні параметра *a* пряма

$(a + 2)x + (a^2-9)y + 3a^2-8a + 5 = 0$:

а) паралельна осі абсцис;

б) паралельна осі ординат;

в) проходить через початок координат.

В кожному з цих випадків написати рівняння прямої.

20. Знайти "відрізки" a і b прямої 3х - 4у + 12 = 0.

21. Вершини трикутника розміщені в точках $A(1;-2)$, $B(0;3)$ і $C(1;1)$. Через кожну з вершин проведені прямі, паралельні до протилежних сторін. Написати рівняння цих прямих.

22. Знайти кутовий коефіцієнт k і відрізок b, який відтинає на осі oy кожна з даних прямих:

а) $2x + y + 5 = 0$;

б) $x - 3y + 6 = 0$;

в) $x + y = 0$.

23. Дано чотири точки $A(2;4;3)$, $B(0;0;5)$, $C(4;1;6)$ і $D(6;0;1)$. Довести, що прямі AB і CD перетинаються. І знайти координати точки перетину.

24. Записати рівняння прямої, що проходить через точку A і паралельна прямій, яка проходить через точки M_1 і M_2 :

1) $A(-3; 2)$, $M_1(1; 5)$, $M_2(2; 6)$;

2) $A(1; -7)$, $M_1(0; 4)$, $M_2(-3; 2)$.

2.2. Пряма у прямокутній декартовій системі координат

Теоретичні відомості

Оскільки декартова система координат є частинним випадком афінної, то всі рівняння прямої з афінної системи координат можна використовувати і в прямокутній декартовій системі координат. Крім всіх видів рівнянь прямої в афінній системі координат, в декартовій системі координат є ще інші.

1. Як має бути задана пряма, щоб скористатися її нормальним рівнянням?

2. Який вигляд має нормальне рівняння прямої?
3. Як записати нормоване рівняння прямої?
4. Який вектор називається нормальним вектором або вектором нормалі прямої?
5. Як записати рівняння прямої, якщо вона задана точкою $M_0(x_0;y_0)$ і нормальним вектором $\vec{n}\,(\alpha;\beta)$?
6. Як знайти відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої $\mathscr{L}$: $Ax+By+C=0$?
7. Як обчислюємо кут між прямими $y=k_1x+b_1$, і $y=k_2x+b_2$?
8. Якщо прямі задані загальними рівняннями, то кут між ними знаходимо як..?
9. Яка умова перпендикулярності двох прямих?

Розв'язання основних задач

Розв'язання будь-якої задачі на пряму лінію можна звести до застосування таких 9 ***елементарних задач***, які *необхідно знати і вміти розв'язувати.*

1. *Через дві дані точки провести пряму.*

Розв'язання.

Тут безпосередньо використовуємо відповідне рівняння .

Наприклад, записати рівняння прямої, що проходить через точки A(1;-2) та B(-3;7).

За рівнянням прямої, заданої двома точками отримаємо:

$$\mathscr{L}:\quad \frac{x-1}{-3-1}=\frac{y+2}{7+2}\Leftrightarrow 9x+4y-1=0.$$

2. *Через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ провести пряму, паралельну даній прямій* $Ax_1+By_1+C=0.$

Розв'язання.

Використовуємо рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$ Щоб знайти коефіцієнти, скористуємось умовою паралельності прямих, тобто: $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\lambda\Rightarrow A=\lambda A_1,\quad B=\lambda B_1,$ Підставимо ці значення в шукане рівняння, отримаємо $\lambda A_1(x-x_0)+\lambda B_1(y-y_0)=0 \Leftrightarrow A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)=0.$

Висновок 1. Щоб записати рівняння прямої, паралельної заданій, досить в ролі коефіцієнтів при змінних взяти відповідні коефіцієнти заданої прямої і скористатись рівнянням (3.8)

Наприклад. Пряма $\mathcal{L}$, яка проходить через точку А(-3,1) і паралельна прямій 3х-7у-1=0, має рівняння:

$$3(x+3)-7(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-7y+16=0.$$

3. *Через точку $M_0(x_0;y_0)$ провести пряму, перпендикулярну прямій* $Ax_1+By_1+C=0.$

Розв'язання.

Знову скористаємось рівнянням прямої та умовою перпендикулярності, отримаємо: $AA_1-BB_1=0 \Rightarrow A=-\dfrac{BB_1}{A_1}$, підставимо це значення в (3.8) отримаємо:

$$-\frac{BB_1}{A_1}(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow -B_1(x-x_0)+A_1(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B_1(x-x_0)-A_1(y-y_0)=0.$$

Висновок 2. Щоб записати рівняння прямої, перпендикулярної заданій, достатньо поміняти місцями коефіцієнти при x і y рівняння заданої прямої, змінивши знак одного з коефіцієнтів на протилежний, а вільний член знайти з другої умови задачі.

Наприклад. Пряма $\mathcal{L}$, яка проходить через точку A(-3;7), перпендикулярно до прямої $4x+3y+7=0$, має рівняння:

$$-3(x+3)+4(y-7)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+37=0.$$

4. *Знайти точку перетину двох прямих, заданих рівняннями*

$$Ax_1+By_1+C_1=0 \quad \text{та} \quad Ax_2+By_2+C_2=0.$$

Розв'язання.

Щоб знайти точку перетину двох прямих, необхідно розв'язати систему двох рівнянь $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$

Наприклад. ***З***найти точку перетину двох прямих, заданих рівняннями $\pounds_1:\ 3x+2y+4$ та $\pounds_2:2x-y+5=0.$

Щоб знайти точку перетину даних прямих, розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}3x+2y+4=0\\2x-y+5=0\end{cases}.$$

Звідки $x=-2$, $y=1$.

Отже, точкою перетину цих прямих є точка $A(-2;1)$.

5. *Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(x_0;y_0)$ на пряму* $Ax+By+C=0.$

Розв'язання.

Довжина перпендикуляра **—** це відстань від точки до прямої.

Наприклад. Довжина перпендикуляра, опущеного з точки А(4;-1) на пряму

$12x$-$5y$-27=0, дорівнює $d=\dfrac{|12\cdot 4-5\cdot(-1)-27|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=2.$

6. *Знайти відстань між паралельними прямими* $Ax+By+C_1=0$ *і* $Ax+By+C_2=0.$

Розв'язання.

Відстань між паралельними прямими рівна відстані від будь-якої точки однієї прямої до другої. Візьмемо на першій прямій точку $M(-\dfrac{C_1}{A};0)$ і знайдемо її відстань до другої прямої.

Тоді $d=\dfrac{\left|A\cdot\left(-\dfrac{C_1}{A}\right)+C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, або остаточно

$$\rho(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отже, ***відстань між паралельними прямими*** обчислюється за цією формулою .

Наприклад. Обчислити відстань між прямими $\mathcal{L}_1$: $9x$-$12y$+2=0 і

$\mathcal{L}_2$: $3x$-$4y$+10=0. Так як коефіцієнти при змінних у цих рівняннях пропорційні, то $\mathcal{L}_1$ІІ $\mathcal{L}_2$, але щоб використати формулою, необхідно, щоб коефіцієнти при змінних були однакові, тому запишемо рівняння $\mathcal{L}_1$ у вигляді $3x-4y+\frac{2}{3}=0$,

тоді $\rho(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)=\dfrac{\left|-10+\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{28}{15}$.

9. *Знайти точку, симетричну заданій $M_0(x_0,y_0)$ відносно заданої прямої* $Ax+By+C=0$.

Розв'язання.

Шукану точку позначимо через $M(x;y)$ (рис. 17).

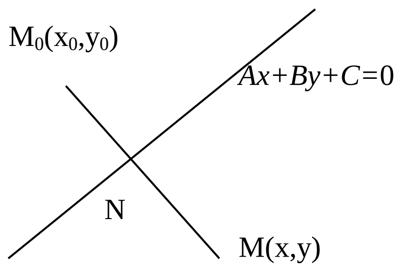

Рис.17.

1. Через M_0 проведемо пряму, перпендикулярну даній (задача 3).
2. Знайдемо точку N перетину прямих (задача 4).
3. Знаючи координати кінця і середини відрізка M_0M, знайдемо координати другого кінця відрізка – точки М.

Проведемо відповідні обчислення:

1. $M_0M: -B(x-x_0)+A(y-y_0)=0 \Leftrightarrow Bx-Ay+\underbrace{Ay_0-Bx_0}_{C_1}=0.$

2. $N:\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Bx-Ay+C_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_N=\dfrac{-AC-ABy_0+B^2x_0}{A^2+B^2} \\ y_N=\dfrac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}. \end{matrix}$

3. $\dfrac{x_0+x}{2}=\dfrac{-AC-ABy_0+B^2x_0}{A^2+B^2} \Rightarrow x=\dfrac{(B^2-A^2)x_0-2ABy_0-2AC}{A^2+B^2},$

$$\frac{y_0+y}{2}=\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2} \Rightarrow y=\frac{(A^2-B^2)y_0-2ABx_0-2BC}{A^2+B^2}.$$

Наприклад. *Знайти точку, симетричну точці К* $(-1;2)$ *відносно прямої* $\mathcal{L}: x-3y+5=0$.

Розв’язання.

Через точку K (рис. 18) проведемо пряму $\mathcal{L}_1$, перпендикулярну даній прямій $\mathcal{L}$. Ця пряма має рівняння: $3(x+1)+(y-2)=0$ або $3x+y+1=0$.

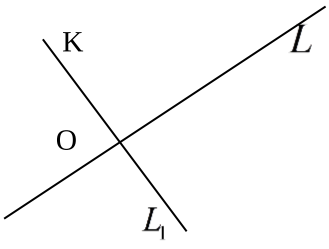

Рис.18

Знайдемо точку О перетину двох прямих, розв’язавши систему $\begin{cases}3x+y+1=0\\ x-3y+5=0\end{cases}$.

Звідки $x=-0.8$, $y=1.4$, тобто точка $O(-0{,}8;1{,}4)$ – середина відрізка KK'.

За координатами кінця K і середини O знаходимо координати точки K': $x_{\kappa'}=2(-0.8)+1=-0.6$; $y_{K'}=2\cdot 1.4-2=0.8$.

Отже, $K'(-0.6;0.8)$.

10. *Дано рівняння сторін трикутника:* $\mathcal{L}_1$: $x+2y-1=0$, $\mathcal{L}_2$: $5x+4y-17=0$, $\mathcal{L}_3$: $x-4y+11=0$. *Записати рівняння його висот.*

Розв’язання.

Запишемо рівняння висоти AH (рис.19) у вигляді пучка прямих $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$:

AH: $x+2y-1+\lambda(5x+4y-17)=0$ або $(1+5\lambda)x+(2+4\lambda)y-1-17\lambda=0.$

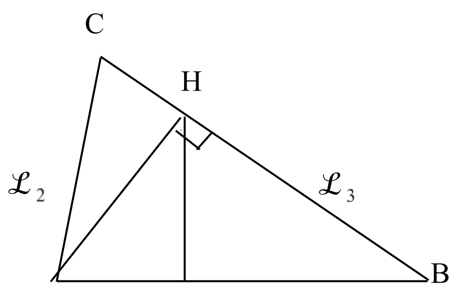

Рис.19.

Скористаємось умовою перпендикулярності AH і $\mathcal{L}_3$:

$(1+5\lambda)-4(2+4\lambda)=0$ $\quad 1+5\lambda-8-16\lambda=0;$

звідки $\lambda=-\dfrac{7}{11}.$

Підставимо у рівняння

$$AH\colon \left(1-\frac{35}{11}\right)x+\left(2-\frac{28}{11}\right)y-1+\frac{119}{11}=0.$$

Виконавши спрощення, отримаємо AH: $4x+y-18=0.$

Аналогічно записуємо рівняння двох інших висот даного трикутника.

Завдання для самостійного розв’язання

1. Дано прямокутну декартову систему координат. Написати рівняння прямої, яка:

а) проходить через точку A (2; 5) і кутовий коефіцієнт її k =3;

б) проходить через точку A (-1; -7) і перпендикулярна вектору $\vec{n}(1;-3)$;

в) є бісектрисою першого і третього координатних кутів;

г) проходить через початок координат і утворює з віссю ox кут $\varphi = 30^0$;

д) проходить через точку A (2; 5) і паралельна бісектрисі другого і четвертого координатних кутів;

е) проходить через точку A (-3; 1) і перпендикулярна прямій $x - 3y + 1 = 0$.

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку К і перпендикулярна вектору $\vec{b}$:

1) $K(0; 2)$, $\vec{b}$ =(-1; 4); 2) $K(2; -1)$, $\vec{b}$ =(4; -3);

3) $K(3; -2)$, $\vec{b}$ =(0; 1); 4) $K(-1; -2)$, $\vec{b}$ =(2; 0).

3. В прямокутній декартовій системі координат дано пряму $2x - 3y + 1 = 0$. Визначити її напрямний вектор $\vec{\rho}$**,** нормальний вектор $\vec{n}$**,** кутовий коефіцієнт і відрізки, які відтинає вона на осях координат. Побудувати дану пряму і вектори $\vec{\rho}$ *і* $\vec{n}$**.**

4. В прямокутній декартовій системі координат дано точки A (2; -3) і B (3; 5). Через середину відрізка AB провести пряму, перпендикулярну AB.

5. В прямокутній декартовій системі координат задано координати вершин трикутника ABC: A (1; 5) B (-1; 2), C (3; 2). Записати рівняння:

а) висоти трикутника;

б) прямих, які проходять через вершини трикутника паралельно протилежним сторонам.

6. Звести рівняння наступних прямих до нормального виду:

а) $3x - 4y + 1 = 0$; б) $2x + \sqrt{5}y = 0$; в) $\sqrt{11}x + 5y - 3 = 0$; г) $x + y - 15 = 0$.

7. Задано дві прямі своїми рівняннями:

$$3x + 4y - 18 = 0 \text{ і } 3x - 43 = 0.$$

Впевнитися в тому, що вони паралельні, і визначити відстань між ними.

8. На прямій $x + 2y - 12 = 0$ знайти точки, рівновіддалені від прямих

$x + y - 5 = 0$ та $7x - y + 11 = 0$.

9. Пряма задана точкою $M_0(-1;2)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(3,-1)$. Записати :

а) канонічне рівняння прямої ;

б) загальне рівняння прямої і звести його до нормального вигляду;

в) довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму.

11. Обчислити площу прямокутника, якщо відомі рівняння двох його сторін $3x-2y-5=0$ і $2x+3y+7=0$, а одна з вершин знаходиться в точці $A(-2,1)$.

12. Дві сторони квадрата лежать на прямих $x-2y+2=0$ і $x-2y-5=0$. Обчислити його площу.

13. Дві сторони квадрата лежать на прямих $4x-3y+3=0$ і $4x-3y-17=0$. Одна з його вершин знаходиться в точці $A(2;-3)$. Записати рівняння двох інших сторін квадрата.

14. Точка $M_1(-2;5)$ є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму. Написати рівняння цієї прямої.

15. Точка $M_1(3;2)$ є основою перпендикуляра, проведеного з точки $M_2(1;-1)$ на пряму. Написати рівняння цієї прямої.

16. Знайти кути, які утворюють з віссю ox прямі:

а) $x+y-7=0$;

б) $x-y+2=0$;

в) $x+\sqrt{3}y-4=0$.

17. Вершини трикутника містяться в точках $A(1;5)$, $B(-1;2)$ і $C(3;2)$. Написати рівняння висот цього трикутника.

18. Задані дві вершини $A(-1;5)$, $B(3;2)$ трикутника ABC і точка $O_1(5;-3)$ перетину його висот. Написати рівняння сторін цього трикутника.

19. Знайти проекцію точки M_1 (5;-2) на пряму $2x - 3y - 3 = 0$.

20. Знайти точку, яка симетрична початку координат відносно прямої $x - 4y + 17 = 0$.

21. Знайти точку, симетричну точці $P(2;-5)$ відносно прямої $2x + 8y - 15 = 0$.

2.3. Канонічні рівняння ліній другого порядку

Теоретичні відомості

Коло

1. Яке рівняння кола, якщо його центр має координати $(a;b)$, а радіус - r ?

2. Як знайти точки перетину кола з прямою $Ax+By+C=0$?

3. Якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить колу, то яке рівняння дотичної до кола в цій точці ?

Еліпс

1. Що називається еліпсом?
2. Що таке фокуси еліпса?
3. Яке канонічне рівняння еліпса?
4. Які точки називаються вершинами еліпса?
5. Що таке фокальні радіуси еліпса?
6. Що називають ексцентриситетом еліпса?
7. Що таке директриси еліпса?
8. Як записати рівняння директрис?
9. Які властивості еліпса?

Гіпербола

1. Що називається гіперболою?
2. Що таке фокуси гіперболи?
3. Яке канонічне рівняння гіперболи?
4. Які точки називаються вершинами гіперболи?
5. Що таке фокальні радіуси гіперболи?
6. Що називають ексцентриситетом гіперболи?
7. Що таке директриси гіперболи?
8. Як записати рівняння директрис?
9. Що таке асимптоти гіперболи?
10. Яке рівняння асимптот?
11. Які властивості гіперболи?

Парабола

1. Що називається параболою?

2. Що таке фокус параболи?

3. Яке канонічне рівняння параболи?

4. Які точки називаються вершинами параболи?

5. Що таке фокальні радіуси параболи?

6. Як знаходимо фокальні радіуси параболи?

7. Що називають ексцентриситетом параболи?

8. Що таке директриса параболи?

9. Як записати рівняння директриси?

10. Які властивості параболи?

Розв'язання задач

Найпростіші типи задач

Так як вирази, що записані зліва в канонічних рівняннях еліпса і гіперболи відрізняються тільки знаком, то аналітичне розв'язання задач для цих кривих формально здебільшого однакове, але результати для кожної кривої будуть свої.

І тип

а) Скласти рівняння геометричного місця точок, сума (модуль різниці) відстаней яких до двох даних точок стала величина.

б) Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої.

Розв'язання.

У першому випадку такою множиною точок є еліпс (гіпербола), у другому — парабола.

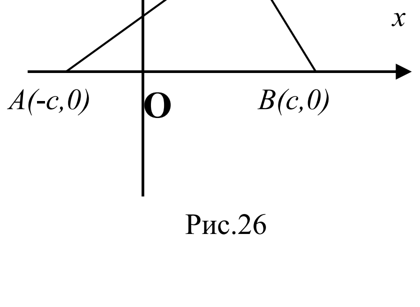

Рис.26

а) Вибираємо систему координат так, щоб вісь ox пройшла через дані точки A і B, до відрізка AB (рис.26.). Із ΔAMB очевидно, що $AB < AM + BM$, тому задача має смисл лише тоді, коли $c<a$.

Якщо $AB=2c$ і

$AM+MB=2a$, то розв'язком задачі є

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{де} \quad a^2\text{-}c^2=b^2.$$

Аналогічно, якщо $|AM - MB| = 2a$, то розв'язком є

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=c^2\text{-}a^2.$$

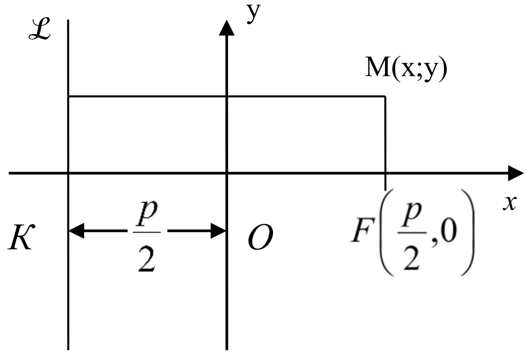

Рис.27.

З ΔAMB, очевидно: задача має сенс лише тоді, коли $AB>2a$,

тобто $c>a$.

б) Вибираємо систему координат так, щоб вісь *ox* проходила через задану точку, а вісь $oy \perp ox$ і ділила відстань *FK* між заданою прямою ℒ і точкою F навпіл (рис.27).

Якщо $FK=p$, то $y^2=2px$.

1. *Записати рівняння геометричного місця точок, модуль різниці відстаней яких до двох даних точок A і B рівний* 6, $AB=10$.

Розв'язання.

Так як $AB>6$, то за пунктом а) розв'язком задачі є рівняння гіперболи, для якої $2c=10 \Rightarrow c=5$, $2a=6 \Rightarrow a=3$, $b^2=25-9=16$.

Отже, шукане геометричне місце точок площини визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \text{ - це гіпербола.}$$

2. *Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки A і прямої* ℓ, *якщо відстань від точки до прямої рівна 10 см.*

Розв'язання.

За пунктом б) розв'язком задачі є парабола, для якої задана точка є фокусом, а задана пряма - директрисою. Відстань між фокусом і директрисою рівна 10, тобто $p=10$. Якщо вибрати вісь *ox* так, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даної прямої, вісь $oy \perp ox$ і ділить відстань між заданою прямою і точкою навпіл, то віссю параболи буде *ox* і рівняння матиме вигляд $y^2=20x$.

(Якщо ж вісь *oy* провести через дану точку, а вісь *ox* – відповідно (як вище), то рівняння параболи матиме вигляд $x^2 = \pm 2py$).

II тип

За двома даними умовами задачі скласти канонічне рівняння кола, еліпса (гіперболи), або за однією умовою – рівняння параболи.

3. *Знайти координати центра і радіус кола, що проходить через точку B(-10;4) і дотикається до осі ox в точці A(-6;0). Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання.

Нехай r – радіус кола, а x, y –координати центра C. Так, як коло дотикається до осі ox в точці A(-6;0), то $x=-6, |y|=r.$ Точки B і C лежать по один бік від осі ox, тому $y=0$ і $y=r$.

Для визначення r скористаємося умовою:

$$BC=\sqrt{(6-10)^2+(4-r)^2}=\sqrt{r^2-8r+32}=r.$$

Звідси виходить: $r=4$ і $C(-6;4)$.

4. *Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між директрисами рівна* $\frac{8}{3}$ *і ексцентриситет* $\frac{3}{2}$.

Розв'язання.

Запишемо умову задачі у вигляді системи, використовуючи пункти 8, 5 з таблиці:

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{\varepsilon}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a^4=16\left(a^2+b^2\right) \\ 9a^2=\ \ 4\left(a^2+b^2\right) \end{cases}.$$

Звідси $a^2=4, \quad b^2=5.$

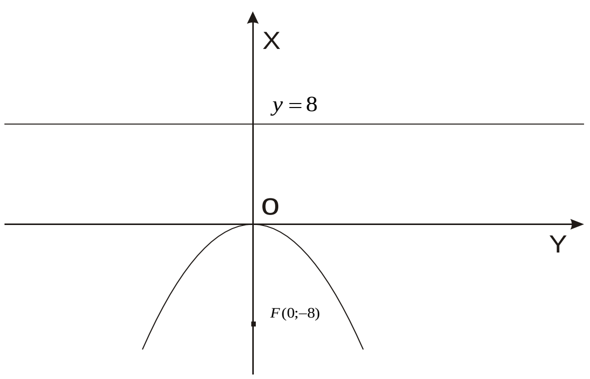

Рис.29

Отже, канонічне рівняння гіперболи має вигляд: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1.$

5. *Записати канонічне рівняння параболи, директриса якої має рівняння*

$y-8=0.$

При розв’язанні таких задач корисно виконати рисунок, який підкаже вибір потрібного канонічного рівняння (рис.29). За даним рівнянням директриси робимо висновок, що вітки параболи напрямлені вниз і так як фокус належить осі параболи, то канонічне рівняння має вигляд $x^2=-2py$, причому, відстань від початку координат (вершини параболи) до директриси рівна $\frac{p}{2}$.

Тоді *p=8+8=16, 2p=32.*

Значить, рівняння параболи $x^2=-32y$.

III тип

Визначити параметри кривої, записати рівняння директрис, асимптот

6. *Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет і директрису еліпса*

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Розв’язання.

Із рівняння еліпса маємо $a=5$, $b=3$, тоді $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Отже, фокуси $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, велика піввісь еліпса дорівнює 5, мала піввісь 3.

За формулою (4.8) ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Директрисами еліпса є прямі $x=\pm\frac{25}{4}$.

7. *Знайти асимптоти та директриси гіперболи* $16x^2-9y^2=144$.

Розв’язання.

Запишемо дане рівняння у канонічному вигляді, поділивши обидві частини на 144: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Звідси: $a=3$, $b=4$.

Тоді рівняння асимптот запишемо у вигляді $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Рівняння директрис (за формулами пункту 8 таблиці) $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, але $\varepsilon = \frac{c}{a}$, тому можемо записати $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Знайдемо $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (пункт 3 таблиці), звідки $c = \sqrt{9+16} = 5$.

Отже, рівняння директрис $x = \pm\frac{9}{5}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Записати в прямокутній декартовій системі координат рівняння кола з центром в точці C і радіусом r в кожному із наступних випадків:

а) $C(2;-5)$, $r = 3$; б) C (0; 0), r =1; в) C (0;-3), r =3.

2. Чи лежить точка M ($\sqrt{21}$; 3) на колі $x^2+y^2=30$?

3. Написати рівняння кола в кожному з таких випадків:

а) центр кола знаходиться в початку координат і його радіус $R = 3$**;**

б) центр кола знаходиться в точці C(2;-3) і його радіус R = 7;

в) коло проходить через точки A(1;2), B(0;-1) і C(-3,0).

4. Написати рівняння лінії центрів двох кіл, заданих рівняннями:

а) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ і $(x + 2)^2 + (y- 1)^2 = 1$;

б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

5. Написати рівняння кіл, які дотикаються до прямої $2x - y - 5 = 0$, проходять через точку M_1(2;3) і мають радіус $R = 2\sqrt{5}$.

6. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ знайти точки, абсциса яких дорівнює - 3**.**

7. Задано еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти відстань від кінців великої осі до однієї з директрис.

8. На еліпсі $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, яка віддалена від малої осі на 5 одиниць.

9. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку M_1, яка знаходиться найближче до прямої $2x - 3y + 25 = 0$, і знайти відстань d від точки M_1 до цієї прямої.

10. Написати рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси містяться в точках F_1(-10;0), F_2(14;0).

11. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти:

а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; д) рівняння директрис.

12. Написати рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$, фокус $F(2;1)$ і рівняння відповідної директриси $x-5=0$.

13. Рівняння гіперболи $16x^2-9y^2=144$. Знайти: а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот; д)рівняння директрис.

14. Обчислити площу трикутника, який обмежений асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ і прямою $9x+2y-24=0$.

15. Визначити кут між асимптотами гіперболи, якщо ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.

16. Написати рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює $\frac{13}{12}$, фокус міститься в точці (0;13), а рівняння відповідної директриси $13y-144=0$.

17. Написати рівняння параболи з віссю симетрії oy, фокусом у точці (0;-3) (парабола містить початок координат).

18. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2=24x$

19. На параболі $y^2=16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.

20. Записати канонічне рівняння параболи, якщо відомо:
а) фокус $F(0;5)$; б) директриса $x+15=0$.

21. Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Знайти координати точок перетину її асимптот з директрисами.

Розділ III. Пряма і площина у просторі

3.1. Площина у афінній системі координат

Теоретичні відомості

Різні види рівнянь площини у афінній системі координат

1. Якщо площина задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і двома напрямними векторами $\overrightarrow{p_1}(l_1;m_1;n_1)$ та $\overrightarrow{p_2}(l_2;m_2;n_2)$, то які її рівняння можемо записати?

2. Який вигляд має канонічне рівняння площини?

3. Як записати параметричне рівняння площини?

4. Яке рівняння площини називається загальним?

5. Який вигляд рівняння площини у *"відрізках" на осях?*

6. Якщо площина задана трьома точками, то як записуємо її рівняння?

7. Яка необхідна і достатня умови паралельності вектора і площини?

8. Які випадки взаємного розміщення двох площин у просторі?

Розв'язання задач

1. *Знайти точки перетину площини* π*:* $2x$-y+$3z$-6=0 *з осями координат.*

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у «відрізках» на осях:

$$\frac{2x}{6}-\frac{y}{6}+\frac{3z}{6}=1,\text{ тобто } \frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1.$$

Бачимо з рівняння, що $\pi\cap ox$ в точці A(3;0;0), $\pi\cap oy$ в точці B(0;-6;0), π $\cap oz$ в точці C(0;0;2).

2. *Записати рівняння площини, яка проходить через точки* $A_1(-3;1;5)$, $A_2(1;-1;2)$ *і паралельна вектору* $\vec{p}$ $(1;0;1)$.

Розв'язання.

Скористаємось канонічним рівнянням площини. Нехай для означеності $M_0=A_1$, $\vec{q}=\overrightarrow{A_1A_2}=(4;-2;2)$, за умовою $\vec{p}=(1;0;1)$, тоді

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0 \text{ або } 2x+7y-2z-9=0.$$

3. *Записати рівняння площини, яка проходить через три точки* $A_1(1;0;1)$, $A_2(-1;1;0)$, $A_3(1;2;-1)$.

Розв'язання.

Скористаємося рівнянням площини через три точки .

Тоді $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1-1 & 1-0 & 0-1 \\ 1-1 & 2-0 & -1-1 \end{vmatrix} = 0$, звідки $x+y+z-1=0$.

4. *Записати параметричні рівняння площини* $3x+2y-z+4=0$.

Розв'язання

І спосіб. Довільні дві із трьох змінних x, y, z можна прийняти за незалежні параметри. Поклавши, наприклад, $x = t_1$, $y = t_2$ з рівняння площини знаходимо, що $z = 3t_1 + 2t_2 + 4$.Шукані параметричні рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2, \\ z = 4 + 3t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

ІІ спосіб. Знайдемо яку-небудь точку на площині, наприклад точку $M_0(-2;\,0;\,-2)$. Знайдемо пару неколінеарних векторів, паралельних даній площині. Для цього запишемо умову паралельності вектора і площини

$$3p_1 + 2p_2 - p_3 = 0.$$

Такими векторами є, наприклад, вектори $\vec{l} = (2;\,-3;\,0)$, $\vec{m} = (1;\,0;\,3)$.

Знаючи точку M_0 і два напрямних вектори $\vec{l}$ і $\vec{m}$, записуємо параметричні рівняння заданої площини:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t_1 + t_2, \\ y = -3t_1, \\ z = -2 + 3t_2. \end{cases}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти координати деяких точок, що лежать в площині 3x – 2y + z -12 = 0.

2. Знайти координати точки, що має абсцису рівну одиниці і лежить у площинах xoy та $2x - y + z - 6 = 0$.

3. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точку $A(0;2;3)$ і паралельної векторам $p_1(1;0;1)$ і $p_2(2;1;3)$;

б) що проходить через точку $A(0;0;1)$ і паралельної векторам $p_1(2;1;5)$ і $p_2(1;0;1)$.

4. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;-1;3)$ і паралельна вектору $p(1;2;2)$;

б) що проходить через точки $M_1(-1, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 1)$ і паралельна вектору $p(2;1;2)$;

в) що проходить через вісь ox і точку $A(1;1;1)$.

5. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$ і $M_3(0;-1;2)$;

б) що проходить через точки $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;2;3)$ і $M_3(0;3;6)$.

6. Дано вершини тетраедра: $A(4; 0; 2)$, $B(0; 5; 1)$, $C(4;-1; 3)$ і $D(3;-1; 5)$.

а) Написати рівняння площини, що проходить через ребро AB і паралельна ребру CD.

б) Написати рівняння площини, що проходить через вершину A і паралельна грані BCD.

7. Написати рівняння площин:

а) що проходять через точку $M_0(1; 2;-1)$ і паралельні кожній із координатних осей;

б) що проходять через дві точки $M_1(1; 2;-4)$ і $M_2(2;0;-3)$ і паралельні кожній із координатних осей;

в) що проходять через точку $M\,(2; 1;-5)$ і через кожну із координатних осей.

8. Записати рівняння площин, кожна з яких проходить через одну із осей координат і паралельна вектору $\vec{p}\,(1;-2; 3)$.

9. Площина проходить через точку $M\,(1;-2;5)$ і відтинає на осі абсцис напрямлений відрізок довжиною $a=-3$, а на осі аплікат відрізок $c = 1$. Записати для цієї площини рівняння «у відрізках» на осях

10. Написати рівняння площини:

а) що паралельна осі oz і відтинає на осі ox напрямлений відрізок довжиною $a = 3$, а на осі oy напрямлений відрізок довжиною $b = -4$;

б) що відтинає на осях oy і oz рівні відрізки довжиною $a=b=4$.

11. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 2; 4)$ і відтинає на осях відрізки однакової довжини.

12. В афінній системі координат площина π задана рівнянням $5x$-$2y$-$3z$+6=0. Знайти координати будь-якого вектора $\vec{a}$, паралельного площині π.

13. Написати параметричні рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;3)$, паралельно площині $2x - y + 3z - 1 = 0$.

14. .В афінній системі задано вершини $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;-1;3)$, $A_1(3;-1;5)$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написати рівняння площин, які містять його грані.

15. Записати рівняння площини, яка проходить через точку A паралельно векторам $\vec{b}_1$ і $\vec{b}_2$:

1) $A(1; 3; 5)$, $\vec{b}_1$=(1; -1; 5), $\vec{b}_2$=(-4; 3; 0); 2) $A(3; -1; -2)$, $\vec{b}_1$=(0; 5; 1), $\vec{b}_2$=(2; -3; 0).

16. Записати рівняння площини, яка проходить через точки K_1, K_2 паралельно вектору $\vec{c}$:

1) $K_1(-3; 7; 1)$, $K_2(-2; 8; 1)$, $\vec{c}$=(1; 0; 5); 2) $K_1(7; -3; -1)$, $K_2(7; 1; 0)$, $\vec{c}$=(0; -5; 1).

17. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до заданої площини, якщо:

а) M_0(-4;3;-7), $6x - 5y + 4z - 15 = 0$; б) M_0(4;1;0), $5x - y - 6z + 2 = 0$.

18. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_0(-2;4;1) паралельно до площини, проведеної через точки M_1(0;-3;2), M_2(4;-6;1) і

19**.** Написати рівняння площини, яка проходить через вісь oz і точку (-3;1;-2;).

20. Знайти відрізки,які відтинають на координатних осях наступні площини:
d) $x - 4z + 6 = 0$; e) $5x - 2y + z = 0$; f) $x - 7 = 0$.

Записати рівняння усіх його граней.

3.2. Площина у прямокутній декартовій системі координат

Теоретичні відомості

Усі рівняння площини, розглянуті в афінній системі координат, можна використовувати при розв’язанні задач у прямокутній декартовій системі координат. Крім того, для прямокутної є ще деякі рівняння площини.

1. Якщо $\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)\perp\pi$ і $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\pi$, то як записати рівняння площини?
2. Сформулюйте теорему про геометричний зміст коефіцієнтів загального рівняння площини.
3. Який вигляд має нормальне рівняння площини?
4. Як отримати нормоване рівняння площини із загального?
5. Як знаходимо відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини π: $Ax+By+Cz+D=0$?

6. Як знайти кут між двома площинами?

7. Яка необхідна і достатня умова перпендикулярності двох площин ?

8 . Як знайти відстань між паралельними площинами?

Розв'язання задач

1. *У кубі* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *дані рівняння площин* (ABC): $3x+2y-6z+8=0$, (ABB_1)**:** $2x+6y-3z-12=0$ *і центр грані* $A_1B_1C_1D_1$ *– точка* $M_0(2,3,1)$. *Написати рівняння площин інших граней куба.*

Розв'язання.

1. Площина $\pi_1=(A_1B_1C_1)\parallel(ABC)$ (рис.20) тому її рівняння

$$\pi_1:\ 3(x-2)+2(y-2)-6(z-1)=0 \Leftrightarrow \pi_1:\ 3x+2y-6z-6=0.$$

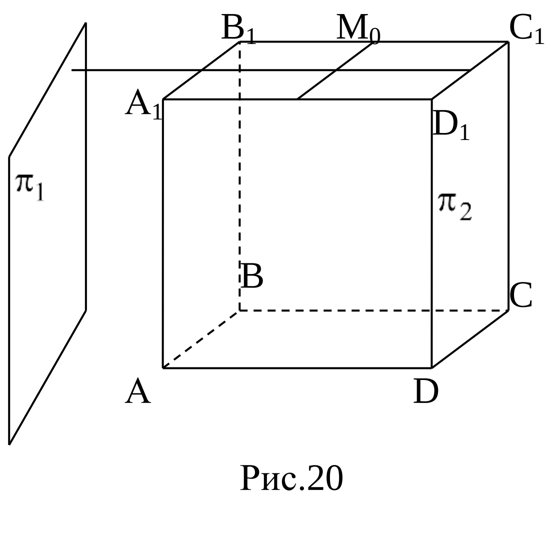

Рис.20

Щоб записати рівняння інших площин, слід скористатися умовою паралельності чи перпендикулярності двох площин та відстанню від точки до площини або відстанню між паралельними площинами:

$$\rho(\pi_1;(ABC))= \frac{|6+8|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{14}{7}=2=\rho((AA_1B_1),(DD_1C_1)).$$

$$\rho(M_0,(AA_1D_1))=\rho(M_0,(BB_1C_1))=1.$$

2. $\pi_2=(DD_1C_1)\parallel(AA_1B_1)\Rightarrow\ \pi_2$: $2x+6y-3z+D=0$

$$2=\frac{|D+12|}{\sqrt{9+4+36}}\Leftrightarrow 14=|D+12|$$

Розкривши модуль, отримаємо $\mathrm{D}+12=14\Rightarrow \mathrm{D}=2;\quad \mathrm{D}+12=-14\Rightarrow \mathrm{D}=-26$

$$\pi_2^1 : 2x+6y-3z+2=0 \text{ і } \pi_2^2 : 2x+6y-3z-26=0.$$

Вияснимо, яке з цих рівнянь задовольняє умову задачі. Необхідно, щоб площині належала грань куба, а це буде тоді, коли точка M_0 лежатиме між (AA_1B_1) і π_2, що буде виконуватися в тому випадку, якщо $\rho(M_0, \pi_2)=1$.

Тому обчислимо: $\rho(M_0, \pi_2^1)=\dfrac{|4+18-3+2|}{7}=3\Rightarrow$ π_2^1 не задовольняє умову задачі.

$\rho(M_0, \pi_2^2)=\dfrac{|4+18-3-26|}{7}=1;$ $\pi_2^2=\pi_2$ – задовольняє умову.

Отже, площина π_2 має рівняння $: 2x+6y-3z-26=0$.

3. $\pi_3=(AA_1D)$: $Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} \pi_3\perp\pi_1, \\ \pi_3\perp\pi_1, \\ \rho(\mathrm{M}_0,\pi_3)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+6B-3C=0, \\ 3A+2B-6C=0, \\ \dfrac{|2A+3B-3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, вважаючи C відомим. Із перших двох рівнянь отримаємо: $A=\dfrac{15}{7}C;\quad B=-\dfrac{3}{14}C.$ Підставимо ці значення в трете рівняння системи. Отримаємо: $\dfrac{|9C+14D|}{\sqrt{1105C^2}}=1\Rightarrow |9C+14D|=C\sqrt{1105}.$

Розкриємо модуль: $\begin{matrix} 9C+14D=C\sqrt{1105} \\ 9C+14D=-C\sqrt{1105} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D=C\sqrt{1105}-9C \\ D=-C\sqrt{1105}-9C \end{matrix}$

$$\pi_3: \frac{15}{7}Cx-\frac{3}{14}Cy+Cz+C\sqrt{1105}-9C=0\Leftrightarrow 30x-3y+14z+\sqrt{1105}-9=0$$

$$\pi_4: \frac{15}{7}Cx-\frac{3}{14}Cy+Cz-C\sqrt{1105}-9C=0\Leftrightarrow 30x-3y+14z-\sqrt{1105}-9=0$$

$$\rho(\pi_3, \pi_4)=\frac{\left|\sqrt{1105}-9+\sqrt{1105}+9\right|}{\sqrt{1105}}=2;$$

І так як $\rho(M_0, \pi_3)=\rho(M_0, \pi_4)$ = 1, то одна з цих площин – (AA_1D), друга – (BB_1C_1).

Отже, рівняння площин граней куба такі: $A_1B_1C_1$: $3x+2y-6z-6=0$; DCC_1: $2x+6y-3z-26=0$; AA_1D_1: $30x-3y+14z+\sqrt{1105}-9=0$; BB_1C_1: $30x-3y+14z-\sqrt{1105}-9=0$.

2. *Знайти координати точки* A', *симетричної точці* $A(2;-10)$ *відносно площини* $\pi: x-5y+2z+8=0$.

Розв'язання.

Запишемо параметричне рівняння прямої AA' (рис.21), напрямний вектор якої $\vec{p}(1;-5;2)$ і яка проходить через точку A: $x=2+t$, $y=-1-5t$, $z=2t$

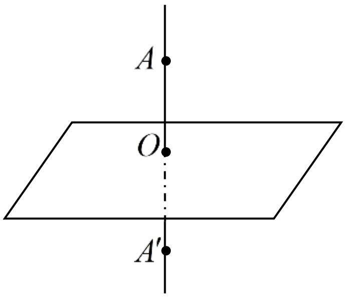

Рис.21

Знайдемо точку перетину цієї прямої з даною площиною $(2+t)-5(-1-5t)+2\cdot 2t+8=0$.

Звідси $t=-\frac{1}{2}$, а $x=1.5$, $y=1.5$, $z=-1$, тобто $O(1.5;1.5;-1)$.

Координати точки A' знайдемо за координатами кінця та середини відрізка AA': $1.5=\frac{2+x}{2}$; $1.5=\frac{-1+y}{2}$; $-1=\frac{0+z}{2}$. Звідси, $x=1$, $y=4$, $z=-2$.

Отже, $A'(1;4;-2)$.

3. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $N(-1;3;0)$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}(2;-1;1)$, *і знайти кут між нею та площиною* $x-2y+3z-4=0$.

Розв'язання.

Скористаємося рівнянням площини, що задана точкою і вектором нормалі. Тоді рівняння набере вигляду:

$$2(x+1)-1(y-3)+1(z-0)=0 \text{ або } 2x-y+z+5=0.$$

Кут між площинами знайдемо як кут між їх векторами нормалей. Вектор нормалі даної площини $\vec{n}_1(1;-2;3)$. За формулою косинуса кута між векторами знаходимо

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 1-2\cdot(-1)+3\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

4. *Серед площин знайти пару паралельних і обчислити відстань між ними:*

$$\pi_1 : 3x-2y+4z-3=0,$$

$$\pi_2 : 6x+2y-3z+5=0,$$

$$\pi_3 : 6x-4y+8z-10=0.$$

Розв'язання.

Очевидно, $\pi_1 \| \pi_3$ - коефіцієнти при змінних пропорційні. Відстань між ними знайдемо за формулою :

$$\rho(\pi_1;\pi_3) = \frac{|D_1-D_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Запишемо рівняння площини так, щоб коефіцієнти при змінних були однакові (або π_1 помножити на 2 або π_3 – розділити на 2). Рівняння π_3 можна записати: $3x-2y+4z-5=0$.

Тоді $\rho(\pi_1;\pi_3) = \dfrac{|-3+5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}} = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Записати рівняння $r = 6$, яка дотинається до площини $\pi : x+2y-2z+1=0$ у точці $M_0(3;0;2)$ і розташована по однин бік з точкою $P(0;1;2)$ відносно π. $(R = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ $M_2(5,1,2)$, і перпендикулярна до площини π **:** $x-3y-2z-3=0$ $(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;3;1)$ і перпендикулярна до площин π_1 **:** $x+3y-z+3=0$, π_2 **:** $3x+y-2z+1=0$ *(R*

$=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

4. Дано рівняння площин двох граней куба: $x-2y-2z+4=0$, $2x+2y-z-13=0$ і координати його центра $M_0(1;1;-2)$. Знайти рівняння площин останніх граней куба. *(* $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

5. В кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано рівняння площин (ABC)*:* $2x-y+2z+15=0$, *(ABB*$_1$*):* $x-2y-2z+6=0$ і центр $M_0(1;-1;0)$ грані $A_1B_1C_1D_1$ в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Записати рівняння площин всіх останніх граней куба.

6. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M і її нормальний вектор $\vec{n}$:

1) M(1; -1; 2), $\vec{n}$=(5; 4; -2);
2) M(0; 2; -3), $\vec{n}$=(-1; 2; 0);
3) M(-1; 0; 2), $\vec{n}$=(3; 0; 0);
4) M(0; 0; 1), $\vec{n}$=(0; 0; -3).

7. Дано точки P_1 і P_2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку K перпендикулярно вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$:

1) P_1(0; 2; -5), P_2(3; -1; 8), K(3; 1; 0);
2) P_1(-1; 0; -8), P_2(1; 2; -3), K(-2; 7; 6).

8. Записати рівняння площини, яка проходить через точку N паралельно площині α :

1) N(4; 0; -1), α : $3x-y+5z-1=0$;
2) N(-4; 2; 0), α : $x+y-8z+1=0$;

9. Записати рівняння площини, яка проходить через точку L перпендикулярно двом площинам α і β:

1) L (2; 0; -3), α: $5x-y+z-1=05$, β: $x+2z-1=0$;
2) L (-1; 1; 0), α: $y-4z+2=0$, β: $x-3y+z-1=0$.

10. Знайти відстань від точки P до площини α:

1) P(1; 2; 1), α : $3x-4y-12z+26=0$;
2) P(0; 3; 1), α : $2x-y+2z-9=0$.

11. Знайти відстань між паралельними площинами α і β:

1) $\alpha: \ 6x-3y-2z-14=0$, $\beta: \ 6x-3y-2z+4=0$;

2) $\alpha: \ x+2y+2z-27=0$, $\beta: \ x+2y+2z-10=0$.

12. Визначити величину кута між площинами α і β:

1) $\alpha: \ 2x-y+5z-3=0$, $\beta: \ x-3y+4z+20=0$;

2) $\alpha: \ 3x+2y-z=0$, $\beta: \ x-4z+1=0$.

13. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат і паралельна :

а) площині $2x-4y+5z-3=0$;

б) площині $2y-7z+6=0$;

в) площині $3x+5=0$.

14. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M(1;-3; 5) і паралельна : а) площині $3x-y+z+4=0$; б) площині $x-3y+7=0$;

в) площині $3z-4=0$.

15. Дано дві площини, що перетинаються :

$x-3y+2z+1=0$, $2x-y+z=0$.

Записати : а) координати деякої точки, яка лежить на лінії перетину даних площин; б) координати вектора p, паралельного цим площинам.

16. Звести до нормального виду рівняння площини $10x+2y-11z+60=0$.

17. Знайти напрямні косинуси прямої, яка перпендикулярна до площини $2x-y-2z+9=0$.

18. Знайти відстань:

а) від точки (3;1;-1) до площини $22x-4y-20z-45=0$;

b) від точки (4;3;-2) до площини $3x-y-5z+1=0$.

19. Знайти кут між площинами: $3x-y+2z+15=0$ і $5x+9y-3z-1=0$.

20. Перевірити чи мають спільну точку наступні чотири площини:

$5x+2y-6=0$; $x+y-3z=0$; $2x-3y+z+8=0$; $3x+2z-1=0$.

3.3. Пряма лінія у просторі

Теоретичні відомості

1. Як записати рівняння прямої, яка проходить через $M_0(x_0;y_0;z_0)$, паралельна вектору $\vec{p}(l;m;n)$?
2. Який вигляд має канонічне рівняння прямої?
3. Який вигляд має параметричне рівняння прямої?
4. Як записати рівняння прямої, якщо вона проходить *через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$?
5. Як ще може визначатися пряма в просторі?
6. Як записати рівняння прямої, що задана перетином двох площин?
7. Які координати напрямного вектора прямої, що задана перетином двох площин?
8. Які випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі?
9. Яка умова паралельності двох прямих?
10. Яка умова перетину двох прямих?
11. Коли дві прямі співпадають?
12. Як знайти кут між двома прямими?
13. Яка умова перпендикулярності двох прямих?

Розв'язання основних типів задач

I. Записати рівняння прямої, заданої певними умовами

1. *Записати канонічне рівняння прямої:* $\mathcal{L}:\begin{cases}2x-y+z-3=0\\ x+3y-z-1=0\end{cases}.$

Розв'язання.

Знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)\text{тобто}\quad \vec{p}(-2;3;7).$$

Знайдемо координати деякої точки $M_0\in\mathcal{L}$.

Покладемо, наприклад, y=0, підставимо у дане рівняння прямої. Будемо мати $\begin{cases} 2x+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$. Звідки $x=\frac{4}{3}; \quad z=\frac{1}{3}.$

Отже, точка $M_0(\frac{4}{3}; 0; \frac{1}{3})$.

Запишемо канонічне рівняння прямої $\frac{x-\frac{4}{3}}{-2}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-\frac{1}{3}}{7}$.

II. Вияснити взаємне розміщення прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$. *Якщо вони* ***перетинаються, то написати рівняння площини, що їх містить.***

2. *Дослідити взаємне розміщення прямих, заданих системами рівнянь:*

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ x+2y-z+1=0 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x+y+z+1=0, \\ y-3z=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо напрямні вектори даних прямих:

$$\overrightarrow{p_1}=\left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)=(-4;4;4); \ \overrightarrow{p_2}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-4;3;1)$$

Оскільки координати векторів $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ не пропорційні, то прямі не паралельні, тобто вони перетинаються або мимобіжні. Для відповіді на питання задачі потрібно обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_0-x_0' & l_1 & l_1' \\ y_0-y_0' & l_2 & l_2' \\ z_0-z_0' & l_3 & l_3' \end{vmatrix},$$

де $(x_0; y_0; z_0)$ і $(x_0'; y_0'; z_0')$ – довільно вибрані точки даних прямих. В ролі таких точок зручно взяти, наприклад, точки перетину цих прямих з площиною Oxy.

Покладаючи $z_0=0$ з рівнянь першої прямої знайдемо, що

$$\begin{cases} x_0-2y_0=4, \\ x_0+2y_0=-1, \end{cases}$$

звідси $x_0=\frac{3}{2}$, $y_0=-\frac{5}{4}$. Таким же способом для другої прямої отримаємо, що $x_0'=-1, \ y_0'=0, \ z_0'=0.$

Отже, $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -4 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10$

Оскільки, $\Delta \neq 0$, то дані прямі мимобіжні.

3. *Знайти кут між прямими* $£_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{1}$ *та* $y = 2 + t,\ z = 4 - 5t$, $£_2 : x = 3 - t,$

Розв'язання.

Кут між прямими знайдемо як кут між напрямними векторами $\vec{p}_1(2;-3;1)$ та $\vec{p}_2(-1;1;-5)$.

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-1) - 3\cdot 1 + 1\cdot(-5)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{-5\sqrt{42}}{63}.$$

Отже, кут між мимобіжними прямими $\alpha = \pi - \arccos\left(\frac{5\sqrt{42}}{63}\right)$

III. Відстань від точки до прямої

4. *Знайти відстань від точки* $M_1(2;-1;1)$ *до прямої* $\mathcal{L}$*:* $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Розв'язання.

I спосіб. За формулою

$$\rho(M_0;L) = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2-0 & -1-1 & 1-2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 + 3^3 + 2^2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{29}{6}};$$

II спосіб. Через точку M_1 проведемо площину π , перпендикулярну до даної прямої $\mathcal{L}$, напрямний вектор якої є вектором нормалі площини. Тому за рівнянням площини: $1(x-2)-2(y+1)+1(z-1)=0$.

Звідки $x-2y+z-5=0$.

Знайдемо точку перетину даної прямої $\mathcal{L}$ з площиною π , розв'язавши систему

рівнянь $\begin{cases} x-2y+z-5=0, \\ x=t, \\ y=1-2t, \\ z=2+t. \end{cases}$

Звідки, $x=\frac{5}{6};\ y=-\frac{2}{3};\ z=\frac{17}{6}$, тобто точка $O(\frac{5}{6};-\frac{2}{3};\frac{17}{6})$. Відстань від точки M_1 до площини π рівна відстані від точки M_1 то O , яку знайдемо за формулою (2.13) $\rho(M_1;O)=M_1O=\sqrt{\left(2-\frac{5}{6}\right)^2+(-1+\frac{5}{3})^2+\left(1-\frac{17}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{6}}$.

Отже, відстань від точки M_1 до прямої $\mathcal{L}$ рівна $\sqrt{\frac{29}{6}}$.

IV тип

Знайти точку, симетричну точці $M(x_0;y_0;z_0)$ відносно прямої $\mathcal{L}$: $x=x_0+\ell t$, $y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt.$

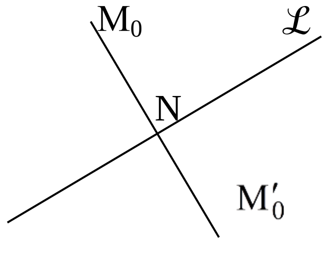

Рис.24

Розв'язання.

I-й спосіб.

Запишемо рівняння прямої (M_0, M_0'), що проходить через точку *M₀*, перпендикулярної до прямої $\mathcal{L}$ і такої, що перетинає $\mathcal{L}$ (рис.24). Знайдемо точку перетину цих прямих *N*. Далі, як у попередній задачі.

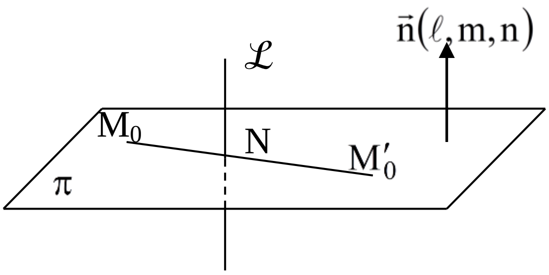

Рис.25

II-ий спосіб.

Через M_0 проведемо площину $\pi\perp\mathcal{L}$ і знайдемо точку $N=\pi\cap\mathcal{L}$ (рис.25).

Далі, як у попередньому випадку.

5. *Знайти точку* A*, симетричну точці* $B(2;-5;7)$ *відносно прямої*

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0; \\ 2x+y-2z+3=0, \end{cases}$$

Розв'язання.

Точки $A(x;y;z)$ та $B(2;-5;7)$ лежать на прямій, перпендикулярній до заданої, і відрізок AB ділиться цією прямою навпіл.

Знайдемо середину відрізка AB, координати якої позначимо через $x_0;y_0;z_0;C(x_0;y_0;z_0)$. Через точку B проведемо площину, перпендикулярну до осі симетрії, тобто до заданої прямої. Рівняння цієї площини має вигляд:

$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0,$ де ℓ, т, п — координати вектора-напряму прямої, до якої дана площина є перпендикулярною.

Якщо пряма задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

то за її напрямним вектором можна взяти вектор $\vec{p}$:

$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$. Тоді рівняння площини запишемо так:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}(x-2)+\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}(y+5)+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(z-7)=0 \text{ або } 2x-2y+z-21=0$$

Знайдемо точку перетину цієї площини з віссю симетрії. Ця точка і буде точкою *С*. Розв'яжемо спочатку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0; \\ 2x+y-2z+3=0; \\ 2x-2y+z-21=0; \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є: $x_0=5,\ y_0=-3,\ z_0=5$ тобто С (5; —3; 5).

Визначимо тепер точку A, якщо середина відрізка AB і точка B відомі;

$$5=\frac{2+x}{2};-3=\frac{-5+y}{2};5=\frac{7+z}{2}$$

Звідки $x=8,\ y=-1,\ z=3$.

Отже, $A(8;-1;3)$.

Завдання для самостійного розв'язання

1.Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1;-1)$ паралельно вектору $\vec{s}(1;-2;3)$.

2. Написати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (5;3;4) і паралельна вектору $\vec{s}(2;5;-8)$.

3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1;-1;-3) паралельно до прямої $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{5}$.

4.Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1;1;1) паралельно осі oz .

5. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки M_1 та M_2, якщо: 1) M_1 (3;4;0), M_2 (2;3;-1); 2) M_1 (1;2;4), M_2 (-1;2;-4);
3) M_1 (2;4;5), M_2 (-1;-2;3); 4) M_1 (7;8;-9), M_2 (3;1;-5);

6. Дані вершини трикутника *A*(3;6;-7), *B*(5;2;3) і *C*(4;-7;-2). Написати параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини *C*.

7. Дані три вершини паралелограма: *A*(3;0;-1), *B*(1;2;-4) і *C*(0;7;2). Написати рівняння сторін *AD* і *CD*.

8. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат та середину відрізка *AB* , якщо *A*(4;0;2), *B*(2;6;-4).

9. Знайти кут між прямими: $x=3t-2,\ y=0,\ z=-t+3$ і $x=2t-1,\ y=o,\ z=t-3$.

10. Знайти тупий кут між прямими: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}};\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{\sqrt{2}}$.

11. Довести паралельність прямих:

1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}\ i \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5,\ \ y=-t+2,\ \ z=t-7,\ \ i \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

12. Довести перпендикулярність прямих:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ *і* $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

2) $x=2t+1,\ \ y=3t-2z=-6t+1,$ *і* $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0.\end{cases}$

13. Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M (2;0;-3) паралельно прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$..

14. Знайти кут між прямими:

1) $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y+2z+2=0;\end{cases}$ *і* $\begin{cases}x-z+4=0,\\y+2z-1=0;\end{cases}$

2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+5}{-1}$ *і* $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+3}{-4}$.

15. При якому значенні $\mathcal{L}$ прямі $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4},\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$.

перетинаються?

16. Знайти координати точки M_2, симетричної точці M_1 (3;1;-4) відносно прямої $\mathcal{L}$, заданої рівняннями: $x=-1+2t,\ \ y=-4-t,\ \ z=-1-t.$

17. Визначити взаємне розміщення прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, заданих рівняннями:

1) $\begin{cases}x=1+2t,\\y=7+t,\\z=3+4t,\end{cases}$ $\begin{cases}x=6+3t,\\y=-1-2t,\\z=-2+t,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=1+2t,\\y=2-2t,\\z=-t,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2t,\\y=-5+3t,\\z=4,\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-3y=0,\\x+z-8=0,\end{cases}$

18. Написати рівняння прямої, яка містить висоту *AH* трикутника *ABC,* якщо *A*(-1;1;2), *B*(1;1;0), *C*(2;6;-2) в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

19. Визначити величину кута між прямими $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1\ \begin{cases}3x-y+5z-4=0,\\2x+y-3=0,\end{cases},\quad \mathcal{L}_2\ \ \frac{x-8}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1};$$

3.4. Пряма і площина у просторі

Теоретичні відомості

1. Які випадки взаємного розміщення прямої і площини?

2. Яка умова паралельності прямої і площини у просторі?
3. Коли пряма належить площині?
4. Яка умова перетину прямої і площини у просторі?
5. Яка умова перпендикулярності прямої і площини у просторі?
6. Як знайти точку перетину прямої з площиною?
7. Як знайти кут між прямою і площиною?
8. Як знайти точки перетину прямої з площиною?

Розв'язання задач

І. Записати рівняння прямої чи площини, які пов'язані спільними умовами

1. *Записати рівняння прямої, яка лежить у площині*

$\pi: x - y + z - 2 = 0$, *перетинає пряму* $\mathcal{L}_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+1}{1}$ *і перпендикулярна до пряміої* $\mathcal{L}_2: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

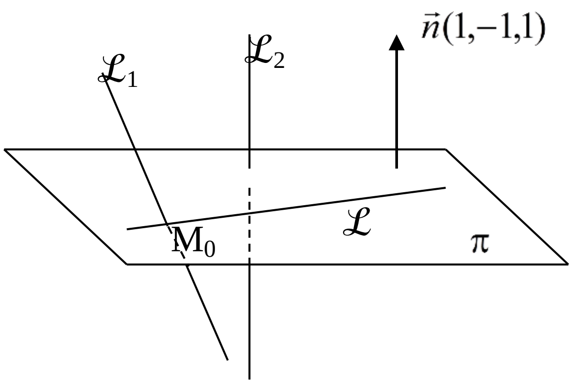

Рис.36.

Розв'язання.

Знайдемо точку M_0 перетину прямої $\mathcal{L}_1$ з площиною π (рис.36). $M_0 = \mathcal{L}_1 \cap \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x = t + 1, y = 0, z = t - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t + 1 - 0 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 2, y = 0, z = 0; \quad M_0(2,0,0).$$

Запишемо систему рівнянь, з якої знайдемо координати напрямного вектора прямої $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} \mathcal{L} \parallel \pi \\ \mathcal{L} \perp \mathcal{L} \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} \ell - m + n = 0 \\ \ell\ell_2 + mm_2 + nn_2 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо $\overrightarrow{p_2}\,(l_2; m_2; n_2)$ - напрямний вектор прямої $\mathcal{L}_2$:

$$\vec{p}_2\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right)=\left(-1;-1-1\right);\left(-1;-1;-3\right)\parallel\left(1;1;3\right).$$

Тоді система матиме вигляд

$$\begin{cases}\ell - m + n = 0\\ \ell + m + 3n = 0\end{cases}.$$

Так як $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, то виразимо ℓ і m через n: $2\ell=-4n \Rightarrow \ell=-2n, m=-n$;

Тепер можемо записати рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;0)$, напрямний вектор якої $\vec{p}(-2n;-n;n)$:

$$\mathcal{L}:\ \frac{x-2}{-2n}=\frac{y}{-n}=\frac{z}{n}\Leftrightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Отже, пряма має рівняння: $\mathcal{L}$: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

II . *Перпендикулярність прямої і площини*

2. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $M_0\left(-3;2;2\right)$ *перпендикулярно до прямої* $\begin{cases}x+3y+z+1=0,\\ 2x-y-z+2=0.\end{cases}$

Розв'язання.

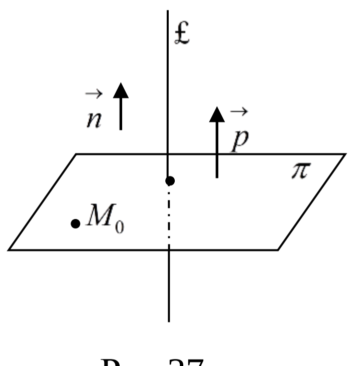

Рис.37

Скористаємося рівнянням площини, що визначається точкою і вектором нормалі, який колінеарний напрямному вектору даної прямої (рис.37)

Знайдемо координати цього вектора за формулою

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=\left(-2;3;-7\right).$$

Тоді рівняння площини запишемо у вигляді $-2(x+3)+3(y-2)-7(z-2)=0$.

Звідки рівняння шуканої площини $-2x+3y-7z+2=0$.

Знайти точку, симетричну точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ ***відносно площини***

π ***: Ax+By+Cz+D=0.***

Розв'язання.

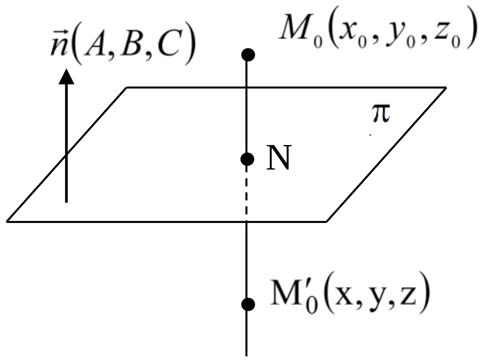

Рис.38

1) Запишемо рівняння прямої $M_0M_0' \perp \pi$, тобто $\overrightarrow{M_0M_0'} \parallel \vec{n}$ (рис.38), скориставшись $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

2) Знаходимо точку $N = M_0M_0' \cap \pi$.

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+At,\ y=y_0+Bt,\ z=z_0+Ct, \end{cases}$$

знайдемо *t*. Підставимо це значення *t* в параметричне рівняння M_0M_0'.

Нехай $N(x_1,y_1,z_1)$.

3) Знаючи N – середину відрізка і один з його кінець, знайдемо координати точки M_0'.

$$\frac{x+x_0}{2}=x_1,\quad \frac{y+y_0}{2}=y_1,\quad \frac{x+x_0}{2}=z_1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=2x_1-x_0 \\ y=2y_1-y_0 \\ z=2z_1-z_0 \end{array}.$$

3. *Знайти точку, симетричну точці* $N(7;-1;2)$ *відносно площини* $x+2y-2z+5=0$.

Розв'язання.

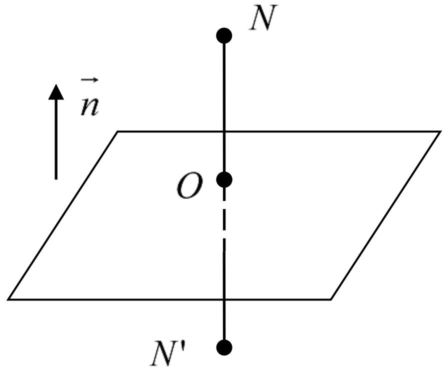

Рис. 39

Запишемо рівняння прямої NO, перпендикулярної до даної площини, скориставшись канонічним її рівнянням (2.20). За напрямний вектор прямої візьмемо вектор нормалі $\vec{n}$ площини (рис.39), коефіцієнтами якого є коефіцієнти при змінних у рівнянні площини тобто $\vec{n}(1;2;-2)$. Тоді рівняння прямої

$NO:\ \frac{x-7}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$. Запишемо параметричні рівняння прямої $x=7+t$, $y=-1+2t$, $z=2-2t$ і знайдемо точку O перетину цієї прямої з даною площиною, розв'язавши систему: $\begin{cases} x+2y-2z+5=0, \\ x=7+t, \\ y=-1+2t, \\ z=2-2t. \end{cases}$ Звідки $x=\frac{19}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$,

$z=\frac{10}{3}$, тобто точка $O\left(\frac{19}{3};-\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$. Точку N' знайдемо як кінець відрізка NN' за початком N та серединою O, скориставшись формулами (2.10) координат середини відрізка. Позначимо координати точки $N'(x';y';z')$, тоді

$\frac{19}{3}=\frac{7+x'}{2}; -\frac{7}{3}=\frac{-1+y'}{2};\ \frac{10}{3}=\frac{2+z'}{2}$. Звідки $x'=\frac{17}{3}$; $y'=-\frac{11}{3}$; $z'=\frac{14}{3}$. Отже, точка N' симетрична точці N відносно даної площини, має координати $\left(\frac{17}{3};-\frac{11}{3};\frac{14}{3}\right)$.

III . *Взаємне розміщення прямих і площин*

Якщо пряма задана канонічним рівнянням, а площина загальним, то взаємне розміщення прямої і площини встановлюємо, використавши формули (2.34) – (2.37).

4. *Показати, що дані прямі і площини перетинаються, і знайти точку їх перетину:*

а) $\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2-t, \\ z=4-t \end{cases}$ *і* $4x+3y+2z+18=0;$

б) $\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{5}$ *і* $x+4y-z+6=0;$

в) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 3y+z+4=0 \end{cases}$ і $x-z+3=0.$

Розв'язання.

Площина і пряма перетинаються тоді і тільки тоді, коли

$$Al+Bm+Cn\neq 0 \text{ - умова (2.37),}$$

де A, B, C – коефіцієнти при невідомих в рівнянні площини, l,m,n – координати напрямного вектора прямої.

В розглядуваному випадку $A=4,\ B=3,\ C=2,\quad l=3, m=-1, n=-1$, а отже,

$4\cdot 3+3(-1)+2(-1)=7\neq 0.$ Значить, пряма і площина перетинаються.

Для знаходження точки перетину, підставимо в рівняння площини замість x; y; z їх вирази через параметр t:

$$4(-1+3t)+3(2-t)+2(4-t)+18=0$$

або

$$7t=-28.$$

Звідси $t=-4$, і точка перетину має координати $x=-13,\ y=6,\ z=8.$

Зауважимо, що для відповіді на перше питання можна відразу шукати значення параметра t; якщо це значення визначається однозначно, то пряма і площина перетинаються.

б) *Вказівка.* Спочатку потрібно перейти до параметричних рівнянь даної прямої, потім розв'язати задачу так само як і а). Другий спосіб розв'язання аналогічний розв'язанню задачі в).

в) Площина і пряма перетинаються тоді і лише тоді, коли система рівнянь:

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 3y+z-4=0, \\ x-z+3=0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Розв'язавши цю систему, отримаємо: $x=-19,\ y=4,\ z=-16.$

5. *Показати, що дані прямі і площини не мають спільних точок:*

а) $\begin{cases} x=t-3, \\ y=-4t+5, \\ z=3t \end{cases}$ *і* $x+y+z-1=0;$

б) $\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-6}{4}$ *і* $4x+2z-3=0;$

в) $\begin{cases} 2x-y-2z-3=0, \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$ *і* $2x+7y-2=0.$

Розв'язання.

Площина $Ax+By+Cz+D=0$ і пряма $\begin{cases} x=x_0+l_1t, \\ y=y_0+l_2t, \\ z=z_0+l_3t \end{cases}$

не мають спільних точок тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.35): $Al + Bm + Cn = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

В розглядуваному випадку $A = B = C = 1$, $D = -1, l_1 = 1, l_2 = -4, l_3 = 3$, $x_0 = -3,\ y_0 = 5,\ z_0 = 0,$ тому $1\cdot 1 - 1\cdot 4 + 1\cdot 3 = 0$, а $1\cdot(-3) + 1\cdot 5 + 1\cdot 0 - 1 \neq 0.$

Отже, дані пряма і площина не мають спільних точок.

б) Розв’язується так само, як і задача а).

в) Площина і пряма не мають спільних точок тоді і тільки тоді, коли система рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y - z = 0, \\ 2x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

не має розв’язків. Знайдемо ранги r і r' основної і розширеної матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}:$$

$r = 2$ і $r' = 3$. Так як $r \neq r'$, то система несумісна, тому пряма і площина не мають спільних точок.

Завдання для самостійного розв’язання

1. Знайти кут між прямою і площиною, якщо пряма і площина задані відповідно рівняннями: а) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z-1}{3}$, *та* $2x + y + z - 5 = 0$;

б) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-8}{3}$, *та* $2x + 4y - 6z + 7 = 0.$

в) $x = 4 - t,\ \ y = 5 - 2t,\ \ z = 3t,$ *та* $2x + 4y - 6z + 7 = 0.$

г) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2. \end{cases}$, *та* $2x + y + z - 4 = 0.$

2. При яких значеннях B і t пряма $x = 5 - 3t,\ y = 9 + 4t,\ \ z = -2 + pt$ перпендикулярна до площини $6x + By - 10z + 9 = 0$?

3. Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$, *і* $2x + 3y + z - 1 = 0;$

б) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}, i \;\; x-2y+z-15=0;$

в) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}, \;\; i \;\; x+2y-2z+6=0;$

г) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}, i \;\; 3x-3y+2z-5=0;$

д) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{14}=\frac{z-5}{4}, i \;\; 3x-y+2z-5=0.$

4. Перевірити, чи належить пряма:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ площині $4x+3y-z+3=0$;

б) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$ площині $5x-8y-2z-1=0$;

в) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$ площині $3x-2y-z+15=0$.

5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 (1;-3;5) перпендикулярно до площини $x + 6y - 5z - 17 = 0$.

6. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 (3;-6;7) перпендикулярно до площини $x+4y-8z-4=0$, і знайти точку їх перетину.

7. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярна до прямої, якщо:

а) M_1 (5;7;-1), $\mathcal{L}: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

б) M_1 (1;-2;1), $\mathcal{L}: \begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0; \end{cases}$

в) M_1 (1;-1;-1), $\mathcal{L}: x=-3+2t, \;\; y=1-3t, \;\; z=-2+4t$.

8. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 та пряму $\mathcal{L}$, якщо:

а) M_1 (3;1;-2), $\mathcal{L}: \frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$;

б) $M_1(1;1;1)$, $\mathcal{L}:\begin{cases}4x-y+3z-1=0,\\ x+5y-z+2=0;\end{cases}$

в) $M_1(2;\text{-}2;1)$, $\mathcal{L}: x=1+2t,\ \ y=2-3t,\ \ z=-3+2t.$

9. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму

$x=3t+1,\ \ y=2t+3,\ \ z=-t-2$ паралельно прямій $\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+2y-z-5=0.\end{cases}$

паралельно прямій $x=2-t,\ \ y=1+3t,\ \ z=-2+4t$.

11. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\mathcal{L}$ перпендикулярно до заданої площини, якщо:

а) $\mathcal{L}:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1},$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}: 3x+4y-z-z=0$;

б) $\mathcal{L}:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2},$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}$: $x+4y-3z+7=0$.

12. Записати рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі:

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ $\ i\ $ $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{2};$

б) $x=2t+5,\ \ y=-t+2,\ \ z=t-7$ і $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x-y-3z-2=0;\end{cases}$

в) $x=3-4t,\ \ y=5+3t,\ \ z=-2+12t$ і $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{12};$

г) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ $\ i\ $ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}.$

13. Знайти проекцію точки $M_1(3;\text{-}4;\text{-}2)$ на площину, яка проходить через дві прямі $\dfrac{x-5}{13}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+3}{-4},$ $\dfrac{x-2}{13}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{-4}.$

14. Обчислити відстань *d* від точки M_1 до прямих:

а) $M_1(1;\text{-}1;\text{-}2)$, $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2};$

б) $M_1(2;3;\text{-}1)$, $\quad x=t+1, y=t+2,\ \ z=4t+13$;

в) $M_1(2;3;\text{-}1)$, $\quad\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\ 3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$

15. Обчисліть відстань між двома паралельними прямими:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1},\ \ \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

16. Переконавшись, що прямі $\begin{cases}2x+2y-z-10=0,\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ і $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$

паралельні, обчислити відстань d між ними.

17. Знайти точку Q, яка симетрична точці M_0(1;3;-4) відносно площини

$3x+y-2z=0$.

18. Знайти точку Q, яка симетрична точці M_0(3;-4;-6) відносно площини, що проходить через точки M_1(-6;1;-5), M_2(7;-2;-1) і M_3(10;-7;1).

19. Знайти точку Q, яка симетрична точці M_0(4;1;6) відносно прямої

$$\begin{cases}x-y-4z+12=0,\\ 2x+y-2z+3=0.\end{cases}$$

20. Знайти точку Q, яка симетрична точці M_0(1;1;1) відносно прямої

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

21. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно до площини α :

1) D(-8; 0; 5) α : $4x - y + 8z - 3 = 0$;

2) D(1; 7; 15) α : $-x + y - 10z = 0$.

Рекомендована література

1. Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. для студ. спец. «інформатика». Луцьк. Волин. нац. ун-т імені Лесі Українки. 2010. 116 с.
2. Ілляшенко В.Я., Кремінь В.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Ч.1. Луцьк. РВВ «Вежа».2010. 95 с.
3. Кравчук О. М. Практикум з аналітичної геометрії: навч. посіб. для вищ. навч. закл. У 2-х ч. Ч.1. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2012. 228 с.
4. Кравчук О. М. Практикум з аналітичної геометрії: навч. посіб. для вищ. навч. закл. У 2-х ч. Ч.2. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2014. 228 с.
5. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Львів. Бескид Біт. 2002. 256 с.
6. Рудавський Ю.К. та ін. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Л. : Бескид Біт, 2002. 262 с.