

П. П. ШИГОРІН

МАТЕМАТИЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ  
В ПРОГРАМНОМУ ПАКЕТІ  
MATHEMATICA 5

Волинський національний університет імені Лесі Українки  
Фізичний факультет  
Кафедра теоретичної та математичної фізики

**П. П. ШИГОРІН**

**МАТЕМАТИЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ  
В ПРОГРАМНОМУ ПАКЕТІ  
МАТНЕМАТІСА 5**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Редакційно-видавничий відділ «Вежа»  
Волинського національного університету імені Лесі Українки  
Луцьк – 2009

УДК 519.67: 371.214.114

ББК 22.183.4 я 81

Ш 55

Рекомендовано до друку методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол №7 від 19.03.2009р.).

**Рецензенти:**

**Мамчич Т. І.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент (Волинський національний університет імені Лесі Українки);

**Коровицький А. М.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент (Луцький національний технічний університет).

**Шигорін П. П.**

Ш 55 **Математичні обчислення в програмному пакеті Mathematica 5:** Метод. рек. — Луцьк: РВВ «Вежа» Волин. нац. ун-ту ім. Лесі Українки, 2009. — 48 с.

У методичних рекомендаціях описуються основні команди для розв'язання низки задач математичного аналізу та лінійної алгебри за допомогою комп'ютера в програмному пакеті Mathematica 5. Крім теоретичного матеріалу, посібник містить набір індивідуальних завдань на практику «Обчислювальна практика» для студентів другого курсу фізичного факультету. Теоретичний матеріал методичних рекомендацій також можна розглядати як вступний при вивченні дисципліни «Аналітичні обчислення на комп'ютері».

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519.67: 371.214.114

ББК 22.183.4 я 81

© Шигорін П. П., 2009

© Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2009

# Зміст

<b>Передмова</b> .....	5
<b>Розділ 1 Інтерфейс програми</b> .....	7
<b>Розділ 2 Алгебричні операції</b> .....	9
2.1 Використання пакету Mathematica як калькулятора....	9
2.2 Операції з виразами .....	10
2.3 Дії над комплексними числами .....	12
2.4 Дії над матрицями .....	13
2.5 Розв'язування алгебричних рівнянь .....	18
<b>Розділ 3 Побудова графіків</b> .....	21
<b>Розділ 4 Операції математичного аналізу</b> .....	28
4.1 Обчислення границь .....	28
4.2 Обчислення похідних .....	28
4.3 Обчислення сум .....	29
4.4 Розклад функції в ряд Тейлора .....	30
4.5 Обчислення інтегралів .....	31
4.6 Розв'язування диференціальних рівнянь .....	33

<b>Розділ 5 Завдання</b> .....	35
5.1 Дії над матрицями .....	35
5.2 Розв'язання алгебричних рівнянь .....	36
5.3 Обчислення границь .....	37
5.4 Обчислення похідних .....	38
5.5 Робота з графікою .....	38
5.6 Розклад функції в ряд Тейлора .....	39
5.7 Обчислення сум .....	39
5.8 Обчислення невизначених інтегралів .....	40
5.9 Обчислення визначених інтегралів .....	41
5.10 Розв'язання диференціальних рівнянь .....	42
Додаток 1 .....	44
Додаток 2 .....	45
Література .....	46

## Передмова

Нині важко сперечатися з тим, що інформаційні технології докорінно змінили багато сфер людської діяльності. В наш час за допомогою комп'ютера монтуються відеофільми, робиться аранжування музичних творів, проектуються автомобілі, не говорячи вже про такі буденні речі, як складання фінансових звітів. Однак, не буде перебільшенням сказати, що одним із найбільш вражаючих досягнень інформаційних технологій є математичне програмне забезпечення, яке дозволяє розв'язувати не лише обчислювальні, а й складні наукові задачі.

Розвиток систем комп'ютерної математики триває не одне десятиліття. Спочатку обчислювальна техніка використовувалася саме для прискорення числових розрахунків, що й відбито у назві «комп'ютер» — обчислювач. Потім з'явилися системи, які здатні за невеликий проміжок часу виконувати деякі аналітичні перетворення — знаходити первісні й похідні, розкладати функції в ряд, тощо.

По-справжньому широке розповсюдження і впровадження систем комп'ютерної математики починається з кінця 80-х років. Саме в цей час з'явилися найбільш популярні сьогодні математичні пакети — Mathematica, Maple та Mathcad.

Основи мови Mathematica були закладені фізиком-теоретиком Стівеном Вольфрамом (Stephen Wolfram), який розробив для себе програмні інструменти, здатні виконувати аналітичні та числові розрахунки. Пізніше він заснував фірму Wolfram Research Inc., яка в 1988 році випустила першу версію програми Mathematica.

Найважливішою якістю, яка принесла програмному пакету Mathematica шалений успіх, є універсальність. Ця система ком-

п'ютерної математики в одній оболонці об'єднує:

- \* математичний процесор, який дозволяє проводити як символні (аналітичні), так і чисельні розрахунки;
- \* графічну підсистему для візуалізації даних;
- \* видавничу підсистему для підготовки публікацій;
- \* засоби комунікації з іншими додатками.

За своєю сутністю Mathematica являє собою мову програмування надвисокого рівня, яка дозволяє реалізувати процедурний та функціональний стилі програмування, а також об'єктно-орієнтований стиль. За своїми можливостями мова програмування Mathematica значно перевищує розповсюджені C++, Basic, Java, тощо.

Завдяки такому поєднанню Mathematica протягом останнього десятиліття міцно утримує лідируючу позицію серед аналогічних програм.

Міць системи Mathematica як інструмента для розв'язку математичних задач зумовлена великою кількістю готових процедур, які реалізують різноманітні перетворення та обчислення (як чисельні, так і аналітичні). Серед них — операції математичного аналізу, лінійної алгебри, тощо.

Ще однією важливою особливістю системи комп'ютерної алгебри Mathematica є велика кількість пакетів розширень (стандартних «Add-on» та додаткових) для застосування її у фізиці, хімії, біології, економіці, статистиці та інших науках.

Мета даного методичного посібника — ознайомити студента з основами універсальної мови програмування Mathematica та навчити його використовувати програмний пакет Mathematica для виконання основних операцій математичного аналізу та лінійної алгебри, а також для роботи з графікою.

У посібнику докладно описано команди для виконання відповідних операцій, при цьому кожна команда супроводжується прикладом. В кінці посібника міститься набір задач для індивідуального опрацювання студентом.

# Розділ 1

## Інтерфейс програми

Екранний інтерфейс програми Mathematica 5 складається з наступних елементів: головного меню, робочого поля, палітр шаблонів команд та символів.

Головне меню системи містить наступні елементи:

**File** — робота з файлами;

**Edit** — операції редагування;

**Cell** — робота з комірками;

**Format** — встановлення формату документа;

**Input** — створення елементів введення;

**Kernel** — керування ядром системи;

**Find** — пошук даних;

**Window** — робота з вікнами;

**Help** — довідкова система.

Палітри математичних знаків і функцій, а також шаблонів команд призначені для введення відповідних символів. Вони розроблені для спрощення роботи з підготовки документа. Загальна кількість символів, що можуть бути введені за допомогою палітр, сягає майже 700. Багато знаків мають альтернативний варіант введення — із застосуванням комбінації клавіш, які можна знайти в довідковій базі даних програми. Кількість палітр обирається користувачем (меню **File** → **Palettes**). Найуживанішими палітрами є **BasicInput** та **BasicCalculations**.

Для виконання якогось обчислення потрібно в робочому полі ввести відповідну команду і натиснути комбінацію клавіш **Shift+Enter** або клавішу **Enter** на додатковій цифровій панелі.

Перед першим розрахунком система завантажує своє ядро



(**Kernel**). Це ядро функціонує як універсальний математичний процесор.

При наборі на робочому полі математичного виразу автоматично створюється комірка (**Cell**). Наступний математичний вираз можна набирати в цій же комірці або в новій. Для створення нової комірки необхідно клацнути мишкою за межами існуючої (вище чи нижче неї), при цьому з'явиться горизонтальна лінія на всю ширину робочого поля, а наступний вираз буде вводиться в нову комірку.

Комірки є двох типів: програмні, які розраховуються (**Evaluatable**) і текстові, які містять коментарі (**Text**).

Комірки, які створюються користувачем при наборі команди називаються вхідними (позначаються **In**). Комірки, в яких виводиться результат обчислення, називаються вихідними (позначаються **Out**).

Сукупність комірок утворює документ у формі записника (блокнота) — **Notebook**. Такому документу відповідає файл текстового формату з розширенням **nb**. Цей файл може редагуватися будь-яким текстовим редактором, що підтримує формат ASCII.

Для коректного запису команд і математичних функцій в пакеті Mathematica слід дотримуватися кількох правил: 1) усі команди і функції пишуться з великої літери; 2) команди, що складаються із двох і більше слів пишуться разом, причому усі слова починаються з великої літери (наприклад **LinearSolve**); 3) аргументи функцій пишуться в квадратних дужках (формат запису основних математичних функцій в пакеті Mathematica можна знайти в Додатку 1).

Докладну інформацію про форматування документа у формі notebook, роботу з комірками, опис елементів головного меню, роботу з пакетами розширень, тощо можна отримати з добре організованої довідкової системи **Help Browser (F1)** або з книг [1, 3, 5] зі списку літератури.

## Розділ 2

### Алгебричні операції

#### 2.1 Використання пакету Mathematica як калькулятора

Розпочнемо вивчення команд пакету Mathematica 5 з операцій елементарної алгебри. Проілюструємо, як можна використати дане програмне забезпечення в якості калькулятора.

Розглянемо елементарні алгебричні операції:

1) Для того, щоб додати дві величин  $a$  і  $b$  потрібно в робочому полі записати команду  $a + b$  і дати системі команду обчислювати — натиснути одночасно клавіші Shift та Enter (див. попередній розділ).

2) Віднімання двох величин  $a$  і  $b$  задається командою  $a - b$ .

3) Множення двох величин  $a$  і  $b$  задається командою  $a * b$  або  $a \times b$ , а найзручніше множення задається шляхом запису множників через пробіл (пробіл сприймається системою як знак множення).

4) Ділення двох величин  $a$  і  $b$  задається командою  $a/b$  або  $\frac{a}{b}$ . Риска дроби можна ввести за допомогою «гарячої клавіші» **Ctrl+ /**.

5) Квадратний корінь із величини  $a$  задається командою  $\sqrt{a}$ . Знак квадратного кореня можна ввести натисканням клавіш **Ctrl+2**.

6) Для піднесення величини  $a$  до степеня  $b$  слід записати команду  $a^b$  або скористатися готовим шаблоном із палітри Basic Input.

## 2.2 Операції з виразами

Розглянемо деякі операції з виразами в елементарній алгебрі.

1). Команда `Expand[expr]` розкладає множники та цілі додатні степені виразу  $expr$  на доданки.

*Приклад.* Розкладемо на доданки вираз  $(a + b)^4$ .

```
In[1]:= Expand[(a + b)^4]
```

```
Out[1]:= a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4
```

2). Команда `PowerExpand[expr]` розкладає на множники степені добутків у виразі  $expr$ .

*Приклад.* Розкладемо на множники вираз  $\sqrt{ab^3}b^{-5/2}$ .

```
In[3]:= Expand[Sqrt[a b^3] b^(-5/2)]
```

```
Out[3]:= Sqrt[a b^3] / b^(5/2)
```

```
In[4]:= PowerExpand[Sqrt[a b^3] b^(-5/2)]
```

```
Out[4]:= Sqrt[a] / b
```

3). Команда `TrigExpand[expr]` розкладає тригонометричні функції у виразі  $expr$ .

*Приклад.* Розкладемо вираз  $\cos(a + b)$ .

```
In[2]:= TrigExpand[Cos[a + b]]
```

```
Out[2]:= Cos[a] Cos[b] - Sin[a] Sin[b]
```

4). Команда `Factor[poly]` розкладає многочлен  $poly$  із цілими степенями на множники з цілими коренями.

Приклад. Факторизуємо многочлен  $(x^{16} - 1)$ .

```
In[5]:= Factor[x16 - 1]
Out[5]:= (-1 + x) (1 + x) (1 + x2) (1 + x4) (1 + x8)
```

Опція `GaussianIntegers`  $\rightarrow$  `True` дозволяє розкласти многочлен на множники над полем комплексних чисел, а опція `Extension`  $\rightarrow$   $\{a\}$  — розкласти многочлен за раціональними коренями  $a$ .

5). Команда `Simplify[expr]` за допомогою алгебричних перетворень, спрощує заданий вираз  $expr$ .

Приклад. Спростимо вираз  $\frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a + 13}$ .

```
In[6]:= Simplify[ $\frac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a + 13}$ ]
Out[6]:=  $\frac{2 + a}{-1 + a}$ 
```

6). Команда `ReplaceAll[expr, rules]` (те саме  $expr /. rules$ ) проводить заміну змінної або частини виразу  $expr$  згідно з правилом  $rules$ .

Приклад. Замінімо у виразі  $\cos x + \sin 2x$  змінну  $x$  на  $\alpha$ , а потім  $\cos$  на  $\sin$ .

```
In[7]:= ReplaceAll[Cos[x] + Sin[2 x], x  $\rightarrow$   $\alpha$ ]
Out[7]:= Cos[ $\alpha$ ] + Sin[2  $\alpha$ ]

In[8]:= Cos[x] + Sin[2 x] /. Cos  $\rightarrow$  Sin
Out[8]:= Sin[x] + Sin[2 x]
```

## 2.3 Дії над комплексними числами

Розглянемо основні операції над комплексними числами.<sup>1</sup>

1). Команда `Re[z]` знаходить дійсну частину комплексного числа  $z$ .

2). Команда `Im[z]` знаходить уявну частину комплексного числа  $z$ .

3). Команда `Abs[z]` знаходить модуль комплексного числа  $z$ .

4). Команда `Arg[z]` знаходить аргумент комплексного числа  $z$ .

5). Команда `Conjugate[z]` знаходить спряжене до комплексного числа  $z$ .

*Приклад.* Виконаємо перелічені операції над комплексним числом  $z = \frac{1+i}{1-i}$ .

```
In[1]:= z =  $\frac{1 + i}{1 - i}$  ;
In[2]:= Re [ z ]
Out[2]= 0
```

---

<sup>1</sup>У програмі Mathematica уявна одиниця ототожнюється з `I`, а не `i`! З клавіатури її можна ввести натискаючи послідовність клавіш `Esc, I, Esc`.

In[3]:=	<b>Im [ z ]</b>
Out[3]=	<b>1</b>
In[4]:=	<b>Abs [ z ]</b>
Out[4]=	<b>1</b>
In[5]:=	<b>Arg [ z ]</b>
Out[5]=	$\frac{\pi}{2}$
In[6]:=	<b>Conjugate [ z ]</b>
Out[6]=	<b>- i</b>
In[7]:=	<b>Simplify [ z ]</b>
Out[7]=	<b>i</b>

Після спрощення бачимо, що ми мали справу із комплексним числом  $z = i$ .

б). Команда `ComplexExpand[z]` виділяє дійсну і уявну частину комплексного числа  $z$ , тобто перетворює формат числа  $z$  до вигляду  $\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ .

## 2.4 Дії над матрицями

За допомогою програмного пакету Mathematica 5.0 можна легко виконувати різноманітні дії над матрицями: додавання, множення, обчислення детермінанта, мінорів, знаходження транспонованої та оберненої матриць, відшукування власних значень та власних векторів.

Спершу з'ясуємо, яким чином можна побудувати матрицю довільної розмірності.

Перший спосіб заснований на використанні головного меню `Input`  $\rightarrow$  `Create Table/Matrix/Palette` (гаряча клавіша `Ctrl+Shift+C`). У вікні, що з'явилося зі списку об'єктів вибираємо `Matrix`. Далі встановлюємо необхідну кількість стовпців (`Number of columns`) та рядків (`Number of rows`) і натискаємо `OK`.

Другий спосіб дозволяє будувати матрицю безпосередньо з клавіатури. Елементи матриці записуються у фігурних дужках  $\{\dots\}$ .

Щоб побудувати матрицю, що складається з одного рядка (вектор) з елементами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , потрібно записати команду  $\{\{a, b, c\}\}$ . Матриця, що складається з одного стовпця з елементами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  задається командою  $\{a, b, c\}$ .

Узагальнюючи даний спосіб можна побудувати матрицю довільної розмірності:

$$\{\{\text{рядок 1}\}, \{\text{рядок 2}\}, \{\text{рядок 3}\}, \dots\}$$

Наприклад, матриця розмірності  $3 \times 3$ , елементами якої є послідовність натуральних чисел, що починається з 1, задається командою

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\}.$$

При потребі, завжди можна звести вигляд матриці до звичної форми — таблиці, взятої у круглі дужки. Для цього потрібно після побудованої матриці дописати команду `//MatrixForm`.

```
In[1]:= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}} //  
MatrixForm
```

Out[1]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Розглянемо основні дії над матрицями.

1). Команда `Dot[A, B]` знаходить добуток матриць  $A$  і  $B$  (те саме  $A \cdot B$ ).

2). Команда `A + B` знаходить суму матриць  $A$  і  $B$ .

3). Команда `Det[A]` знаходить детермінант квадратної матриці  $A$ .

4). Команда `Inverse[A]` знаходить обернену матрицю до  $A$ .

5). Команда `Transpose[A]` знаходить транспоновану матрицю до  $A$ .

6). Команда `Tr[A]` знаходить суму діагональних елементів (слід) матриці  $A$ .

7). Команда `Eigenvalues[A]` знаходить власні значення квадратної матриці  $A$ .

8). Команда `Eigenvectors[A]` знаходить власні вектори квадратної матриці  $A$ .

9). Команда `Eigensystem[A]` знаходить власні значення і відповідні власні вектори квадратної матриці  $A$ .

*Приклад.* Проілюструємо деякі дії над матрицею  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Задамо матрицю  $A$ :

```
In[2]:= A = {{2, -3, 1},  
           {6, -6, 2}, {2, -1, 2}};
```

```
In[3]:= A // MatrixForm
```

Out[3]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



b) Обчислимо детермінант матриці  $A$ :

```
In[4]:= Det[A]
```

```
Out[4]= 10
```

c) Знайдемо обернену матрицю до  $A$  (нагадаємо, що для матриці  $A$  існує обернена, якщо детермінант матриці  $A$  відмінний від нуля):

```
In[5]:= Inverse[A] // MatrixForm
```

```
Out[5]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

d) Переконаємося, що добуток даної невиродженої матриці і оберненої до неї дорівнює одиничній матриці:

```
In[6]:= Dot[A, Inverse[A]] // MatrixForm
```

```
Out[6]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Знайдемо різницю матриці  $A$  і транспонованої до неї:

```
In[8]:= A - Transpose[A] // MatrixForm
```

```
Out[8]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -1 \\ 9 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Знайдемо власні значення матриці  $A$ :

```
In[10]:= Eigenvalues[A]
```

```
Out[10]= {Root[-10 - 2 #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, 3],  
          Root[-10 - 2 #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, 2],  
          Root[-10 - 2 #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, 1]}
```

```
In[11]:= N[%]
```

```
Out[11]= {-1.94144 + 1.2417 i,  
          -1.94144 - 1.2417 i, 1.88288}
```

Зауважимо, що власні значення матриці  $A$ , знайдені за допомогою команди `Eigenvalues` виявилися «закодованими» у форматі `Root`.

10). Команда `Root[-10 - 2 #1 + 2 #1^2 + #1^3 &, i]` відповідає  $i$ -му кореневі рівняння  $-10 - 2x + 2x^2 + x^3 = 0$ .

Щоб знайти чисельне значення даного кореня, використовується команда `N` (від англ. numerical — числовий).

11). Команда `N[expr]` дає чисельне значення виразу `expr`. Для даної команди можна додати опцію — натуральне число, яке вказатиме точність обчислення чисельного значення виразу `expr` (кількість знаків після коми).

Для обчислення чисельного значення виразу `expr`, який є виписаний на робочому полі, достатньо в наступному рядкові записати команду `N[%]`. При цьому символу `%` присвоюється значення виразу із попереднього рядка.

## 2.5 Розв'язування алгебричних рівнянь

Розв'язування різноманітних алгебричних рівнянь (поліноміальних, ірраціональних, трансцендентних, логарифмічних, тощо) в програмному пакеті Mathematica 5.0 здійснюється за допомогою команди `Solve`.

Зауважимо, що рівняння `equat` в даному програмному середовищі задається наступним чином:

$$\text{ліва частина } equat == \text{права частина } equat,$$

тобто ліва і права частини рівняння розділяються подвійним знаком дорівнює. Формат команди `Solve` для розв'язування рівняння `equat` за змінною  $x$  має вигляд:

$$\text{Solve}[equat, x].$$

*Приклад.* Розв'яжемо кілька алгебричних рівнянь різного типу:

a)  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

In[1]:=	<code>Solve[a x^2 + b x + c == 0, x]</code>
Out[1]=	$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \right\}, \right.$ $\left. \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \right\} \right\}$

b)  $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$ ,

In[2]:=	<code>Solve[Sin[x] + Sqrt[2 - Sin[x]^2] + Sin[x] Sqrt[2 - Sin[x]^2] == 3, x]</code>
Out[2]=	$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\} \right\}$

c)  $2 \log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$ .

```
In[3]:= Solve[2 Log[9, x]^2 ==
           Log[3, x] Log[3, Sqrt[2 x + 1] - 1], x]
```

```
Out[3]:= {{x -> 1}}
```

За допомогою команди `Solve` можна також розв'язувати системи рівнянь.

Наприклад, якщо потрібно розв'язати систему трьох рівнянь `equat1`, `equat2` та `equat3` з невідомими змінними  $x$ ,  $y$  та  $z$ , то необхідно записати команду

```
Solve[{equat1, equat2, equat3}, {x, y, z}].
```

*Приклад.* Розв'яжемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = 0, \\ y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

```
In[4]:= Solve[
           { (1 + x) / (-1 + y) == 0, 2 - 3 y + y^2 == 0 }, {x, y}]
```

```
Out[4]:= {{x -> -1, y -> 2}}
```

Розв'язання матричних рівнянь здійснюється за допомогою команди `LinearSolve`.

Команда

```
LinearSolve[A, B]
```

знаходить розв'язок матричного рівняння  $AX = B$ .

*Приклад.* Розв'яжемо матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

```
In[5]:= LinearSolve[  
  {{1, 2, -1}, {2, -3, 2}, {3, 1, 1}},  
  {2, 2, 8}]
```

```
Out[5]= {1, 2, 3}
```

Таким чином, ми отримали наступний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Розділ 3

### Побудова графіків

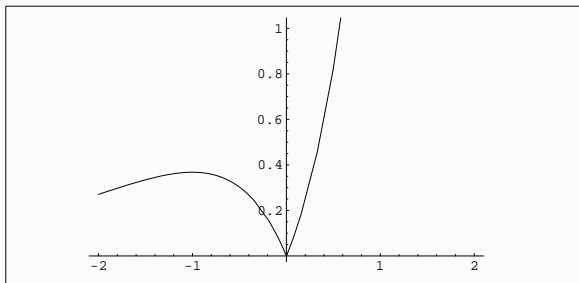
Графік функції  $y = f(x)$  будується за допомогою команди `Plot`. Ця команда дозволяє побудувати частину графіка функції  $y = f(x)$ , яка відповідає області значень аргументу від  $x_1$  до  $x_2$ .

Формат команди `Plot` має вигляд:

$$\text{Plot}[f(x), \{x, x_1, x_2\}].$$

*Приклад.* Проілюструємо дію команди `Plot` на прикладі побудови графіка функції  $y = e^x|x|$

```
In[2]:= Plot[e^x Abs[x], {x, -2, 2}]
```



```
Out[2]:= - Graphics -
```

Для побудови графіків кількох функцій  $(y_1(x), y_2(x), \dots)$  на спільній координатній сітці використовується наступний формат команди `Plot`:

$$\text{Plot}[\{y_1(x), y_2(x), \dots\}, \{x, x_1, x_2\}].$$

Команда `Plot` має багато опцій, які задають оформлення графіка, наприклад товщину, тип та колір ліній, підписи на осях, тощо.

Наведемо декілька опцій, які найчастіше використовуються при побудові графіків:

`Axes` — задає наявність (`Axes`  $\rightarrow$  `True`), або відсутність (`Axes`  $\rightarrow$  `False`) на графіку осей координат. По замовчуванні дана опція набуває значення `True`.

Підписи на осях задаються за допомогою опції `AxesLabel`. Наприклад `AxesLabel`  $\rightarrow$   $\{x, y(x)\}$ .

`Frame` — будує навколо графіка рамку (`True`). По замовчуванні рамка не будується, тобто виконується опція `Frame`  $\rightarrow$  `False`.

`AspectRatio` — задає відношення висоти графіка до його ширини. По замовчуванні опції присвоюється значення  $1/\text{GoldenRatio} \approx 0.618$ , інший параметр опції — `Automatic` при якому відношення висоти графіка до його ширини підбирається в залежності від фактичних значень координат.

`PlotRange` — задає частину графіка по осі ординат, яку потрібно будувати. По замовчуванні виконується опція `PlotRange`  $\rightarrow$  `Automatic` — при цьому не будуються точки, які далеко віддалені від основної частини графіка; опція `PlotRange`  $\rightarrow$  `All` включає в графік усі його точки із заданого інтервалу зміни абсциси; опція `PlotRange`  $\rightarrow$   $\{y_{\min}, y_{\max}\}$  будує частину графіка по осі ординат в межах від  $y_{\min}$  до  $y_{\max}$ .

`Background` — задає колір фону. Наприклад, якщо потрібно зобразити графік на жовтому фоні, то до команди `Plot` потрібно додати опцію `Background`  $\rightarrow$  `RGBColor[1, 1, 0]`. Таблиця кольорів наведена в Додатку 2.

`PlotStyle` — задає параметри ліній графіка:

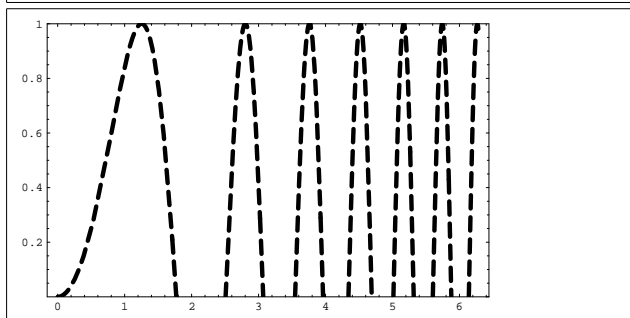
- тип лінії (неперервну — по замовчуванні, пунктирну — `Dashing[{довжина штриха, довжина проміжку}]`);

- товщину лінії `Thickness[r]` (`r` — частка від ширини графіка, наприклад 0.01, 0.05, тощо);
- колір лінії `RGBColor[red, green, blue]` (наприклад, `RGBColor[1, 0, 0]` — червоний, `RGBColor[0, 1, 0]` — зелений, тощо). Колір лінії також задається параметрами `Hue[h]` (тут число  $h$  лежить в межах  $0 < h < 1$ ) або `CMYKColor[cyam, magenta, yellow, black]` (наприклад жовтий колір відповідає параметру `CMYKColor[0, 0, 1, 0]`, пурпуровий — `CMYKColor[0, 1, 0, 0]`).

Якщо одночасно задається декілька параметрів опції `PlotStyle`, то їх слід перелічити через кому і взяти у фігурні дужки `PlotStyle`  $\rightarrow$  {парам.1, парам.2, ...}

*Приклад.* Описані щойно опції проілюструємо на наступному прикладі: побудуємо графік функції  $y(x) = \sin x^2$  при зміні абсциси в межах від 0 до  $2\pi$ . При цьому будемо відображати лише ту частину графіка, яка знаходиться в першій чверті, його лінії зробимо пунктирними товщиною 0.01 від горизонтальних розмірів графіка, а весь графік помістимо в рамку. Відповідна команда `Plot` з опціями матиме вигляд:

```
In[7]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 2 π},
  PlotRange -> {0, 1}, Frame -> True,
  PlotStyle ->
  {Thickness[0.01], Dashing[{0.03, 0.02}]}
```



Out[7]= - Graphics -



Інший тип графіків — точкові. На такому графікові відображається заданий набір точок, розміри і колір яких може задавати користувач.

Для побудови точкових графіків використовується команда `ListPlot`, яка може бути двох форматів:

$$\text{ListPlot}\{y_1, y_2, \dots\}$$

— буде набір точок з координатами  $(1, y_1)$ ,  $(2, y_2)$ ,  $(3, y_3)$  і т.д.

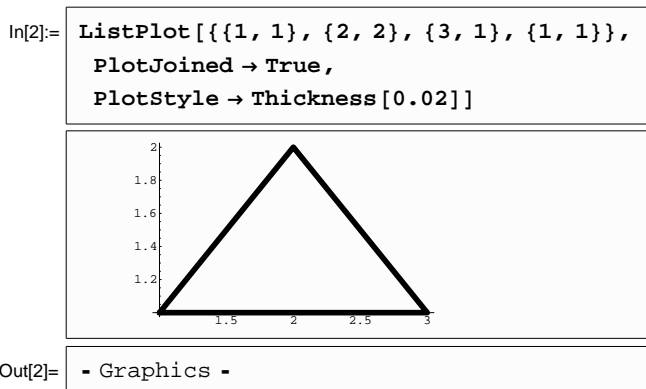
$$\text{ListPlot}\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots\}$$

— буде набір точок з координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ...

Розміри і колір точок задаються параметрами опції `PlotStyle: PointSize[r]` та `RGBColor[red, green, blue]` відповідно.

Якщо виникає потреба з'єднати точки графіка прямими, то слід зробити активною опцію `PlotJoined`, тобто присвоїти їй значення `True`.

*Приклад.* Побудуємо рівносторонній трикутник із вершинами в точках  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$ :



Для побудови графіків функцій заданих параметрично використовується команда `ParametricPlot`. Графік функції заданої законом  $x(t)$ ,  $y(t)$  при зміні параметру  $t$  в межах від  $t_1$  до  $t_2$  будується за допомогою команди

`ParametricPlot[{x(t), y(t)}, {t, t1, t2}]`.

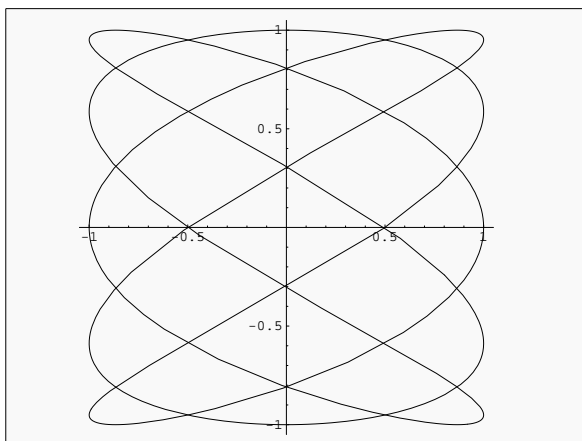
Якщо будемо графіки кількох функцій, то користуємося командою

`ParametricPlot[{{x1(t), y1(t)}, {x2(t), y2(t)}, ...}, {t, t1, t2}]`.

Проілюструємо використання команди `ParametricPlot` для побудови фігур Ліссажу (фігури, які утворюються при накладанні двох перепендикулярних коливань).

Нехай  $x(t) = \cos 5t$ ,  $y(t) = \sin 3t$ .

```
In[2]:= ParametricPlot[{Cos[5 t], Sin[3 t]},  
  {t, 0, 2 π}, AspectRatio → Automatic]
```



```
Out[2]= - Graphics -
```

Надзвичайно корисною є команда `Show[pic]`, яка відображає графік *pic*.

Цю команду використовують для відображення побудованого раніше графіка з новими параметрами, об'єднання кількох графіків в один, тощо.

Для відображення кількох графіків *pic1*, *pic2*, ... потрібно

записати команду:

```
Show[pic1, pic2, ...].
```

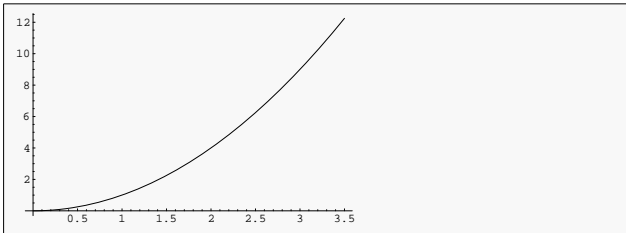
Команда `Show` має ті ж опції, що й `Plot`.

*Приклад.*

Нехай нам потрібно на параболі  $y = x^2$  відмітити три точки з координатами  $(1, 1)$ ,  $(2, 3)$  та  $(3, 9)$ .

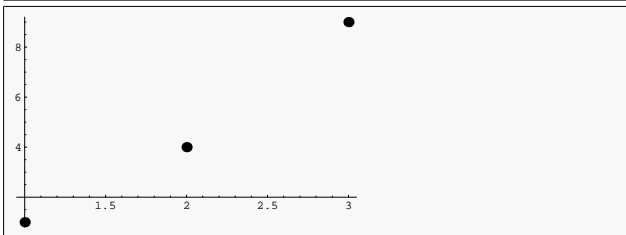
Утворимо таку картинку шляхом накладання графіку параболі  $y = x^2$  (див. `pic1`) та точкового графіка, на якому зображені вказані точки (див. `pic2`).

```
In[5]:= pic1 = Plot[x^2, {x, 0, 3.5}]
```



```
Out[5]= - Graphics -
```

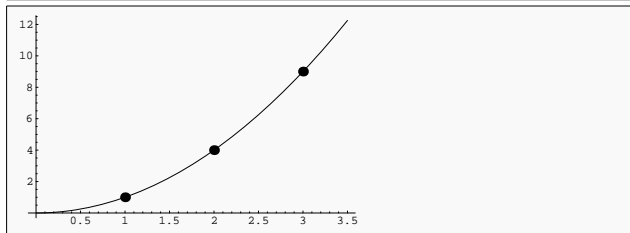
```
In[6]:= pic2 =  
ListPlot[{1, 4, 9}, PlotStyle -> PointSize[0.03]]
```



```
Out[6]= - Graphics -
```

Накладання графіків `pic1` та `pic2` виконаємо за допомогою команди `Show`:

```
In[7]:= Show[pic1, pic2]
```



```
Out[7]:= - Graphics -
```

## Розділ 4

### Операції математичного аналізу

#### 4.1 Обчислення границь

Для обчислення границі від функції  $f(x)$ , коли змінна  $x$  прямує до значення  $x_0$ , використовується команда `Limit`. Формат команди має наступний вигляд:

$$\text{Limit}[f(x), x \rightarrow x_0].$$

Команда `Limit` має одну опцію `Direction`, яка може набувати двох значень: 1 та  $-1$ .

Опція `Direction`  $\rightarrow 1$  дозволяє обчислити лівосторонню границю ( $x \rightarrow x_0 - 0$ ), а опція `Direction`  $\rightarrow -1$  — правосторонню ( $x \rightarrow x_0 + 0$ ).

*Приклад.* Обчислимо одну з «чудових границь», а саме границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ :

```
In[4]:= Limit[ $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ , x  $\rightarrow$  0]
```

```
Out[4]= 1
```

#### 4.2 Обчислення похідних

Для обчислення першої похідної від функції  $f(x)$  використовується команда `D`. Формат команди має наступний вигляд:

$$D[f(x), x].$$

*Приклад.* Обчислимо похідну функції  $\ln[\arctan(\sqrt{x^2 + 1})]$  :

$$\text{In[1]:= } \mathbf{D[\text{Log}[\text{ArcTan}[\sqrt{x^2 + 1}]], x]}$$

$$\text{Out[1]= } \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} (2 + x^2) \text{ArcTan}[\sqrt{1 + x^2}]}$$

Команда  $D$  має інший формат запису:  $\partial_x f(x)$ .

Для обчислення похідної  $n$ -го порядку запишемо команду  $D$  в наступному форматі:

$$D[f(x), \{x, n\}].$$

У випадку функції багатьох змінних частинні похідні шукаються за правилом:

$$D[f, x_1, x_2, \dots, x_n], \quad \text{або} \quad \partial_{x_1, x_2, \dots, x_n} f.$$

*Приклад.* Нехай маємо функцію двох змінних

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Обчислимо мішану похідну третього порядку  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ . Відповідна команда для обчислення буде мати вигляд:

$$\text{In[2]:= } \mathbf{D[\text{Sin}[x y], x, y, x]}$$

$$\text{Out[2]= } \mathbf{-x y^2 \text{Cos}[x y] - 2 y \text{Sin}[x y]}$$

### 4.3 Обчислення сум

Програмний пакет Mathematica 5.0 дозволяє обчислювати різноманітні суми числових та функціональних рядів. Для цього використовується команда  $Sum$ .

Для обчислення суми виду  $\sum_{i=1}^{i_{\max}} f(i)$  маємо записати наступну команду:

$$\text{Sum}[f(i), \{i, i_{\max}\}].$$

Якщо нижня межа суми починається не з одиниці, а з  $i_{\min}$ , то обчислення суми виконується за правилом

$$\text{Sum}[f(i), \{i, i_{\min}, i_{\max}\}].$$

Іноді виникає потреба рахувати суму, в якій крок сумації не рівний одиниці, а, наприклад  $d$ , тоді використовуємо наступний запис:

$$\text{Sum}[f(i), \{i, i_{\min}, i_{\max}, d\}].$$

*Приклад.* Обчислимо суму першої тисячі натуральних чисел  $\sum_{i=1}^{1000} i$ :

In[1]:= `Sum[i, {i, 1, 1000}]`

Out[1]= `500500`

## 4.4 Розклад функції в ряд Тейлора

В математичному аналізі розклад функції  $f(x)$  в ряд Тейлора поблизу точки  $x_0$  з точністю до  $n$ -го степеня задається співвідношенням:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Mathematica 5.0 розкладає функцію в ряд Тейлора за допомогою команди `Series`. Її формат має наступний вигляд:

$$\text{Series}[f(x), \{x, x_0, n\}].$$

*Приклад.* Розкладемо функцію  $\ln(1 + x)$  в ряд Тейлора поблизу точки  $x_0 = 0$  з точністю до 5-го степеня:

```
In[1]:= Series[Log[1 + x], {x, 0, 5}]
```

```
Out[1]= x -  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{3}$  -  $\frac{x^4}{4}$  +  $\frac{x^5}{5}$  + O[x]6
```

## 4.5 Обчислення інтегралів

Невизначений інтеграл (первісна) від функції  $f$  знаходиться за допомогою команди `Integrate`. Команда

```
Integrate[f, x]
```

дає первісну від функції  $f$  за змінною  $x$ .

Для обчислення визначеного інтеграла потрібно трохи змінити формат команди, а саме вказати верхню  $b$  та нижню  $a$  межі інтегрування. Відповідна команда має наступний формат:

```
Integrate[f, {x, a, b}].
```

*Приклад.* Обчислимо інтеграли  $\int \sqrt{1+x^2} dx$  та  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  :

```
In[1]:= Integrate[ $\sqrt{1+x^2}$ , x]
```

```
Out[1]=  $\frac{1}{2}$  (x  $\sqrt{1+x^2}$  + ArcSinh[x])
```

```
In[2]:= Integrate[e-x2, {x, - $\infty$ ,  $\infty$ }]
```

```
Out[2]=  $\sqrt{\pi}$ 
```

У випадку, коли визначений інтеграл не обчислюється аналітично, слід вдатись до чисельних методів. Відповідна команда має вигляд:



`NIntegrate[f, {x, a, b}]`.

При потребі можна вказати комп'ютеру яким саме методом виконувати чисельне інтегрування. Для цього команда `NIntegrate` має опцію `Method`, якій можуть присвоюватись наступні значення (методи): `GaussKronrod`, `DoubleExponential`, `Trapezoidal`, `Oscillatory`, `MonteCarlo`, `QuasiMonteCarlo`.

Коли не потрібна велика точність обчислень, аналітичне інтегрування визначених інтегралів варто замінити на чисельне, оскільки останнє виконується значно швидше.

Тривалість певної операції, що виконується в `Mathematica` можна визначати за допомогою команди `Timing`.

*Приклад.* Визначимо час, потрібний програмі для обчислення інтегралу  $\int_0^{\infty} \cos^2 x e^{-x^2} dx$  двома методами — аналітично та чисельно з використанням алгоритму Монте-Карло.

```
In[1]:= Timing [ Integrate [
      Cos [x] ^ 2 Exp [-x ^ 2] , {x, 0, ∞} ] ]
```

```
Out[1]:= {0.297 Second,  $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \sqrt{\pi}$ }
```

```
In[2]:= N [  $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \sqrt{\pi}$  ]
```

```
Out[2]:= 0.606126
```

```
In[4]:= Timing [
      NIntegrate [ Cos [x] ^ 2 Exp [-x ^ 2] ,
      {x, 0, ∞} , Method → MonteCarlo ] ]
```

```
Out[4]:= {0.062 Second, 0.605943}
```

Як бачимо, результати відрізняються на дві десятитисячних, а час чисельного інтегрування в п'ять разів менший часу аналітичного інтегрування.

## 4.6 Розв'язування диференціальних рівнянь

Розв'язування диференціальних рівнянь здійснюється за допомогою команди `DSolve`. Для розв'язку диференціального рівняння *equation*, в якому невідомою функцією є  $y$ , а змінною  $x$  запишемо наступну команду

```
DSolve[equation,  $y$ ,  $x$ ].
```

Відповідь буде містити невідомі константи інтегрування, які позначаються  $C[1]$ ,  $C[2]$ , ...

*Приклад.* Для прикладу, розв'яжемо основне диференціальне рівняння теорії вільних коливань осцилятора з тертям:

$$y''(x) + 2\lambda y'(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

```
In[1]:= DSolve[
  y''[x] + 2 λ y'[x] + ω^2 y[x] == 0, y, x]
Out[1]= {{y -> Function[{x},
  e^x (-λ - √λ^2 - ω^2) C[1] + e^x (-λ + √λ^2 - ω^2) C[2]]}}
```

За допомогою команди `DSolve` можна також розв'язувати системи диференціальних рівнянь. Якщо потрібно розв'язати систему двох рівнянь *equation1* та *equation2*, то запишемо команду

```
DSolve[{equation1, equation2},  $y$ ,  $x$ ].
```

Таким чином, при розв'язанні диференціального рівняння, можна одразу врахувати початкові або граничні умови.

Розв'яжемо попереднє диференціальне рівняння при заданих параметрах і початкових умовах.

Нехай  $\omega = 2\pi$  (частота вільних коливань),  $\lambda = 1$  («коефіцієнт тертя»),  $y'(0) = 0$  (початкова швидкість осцилятора),

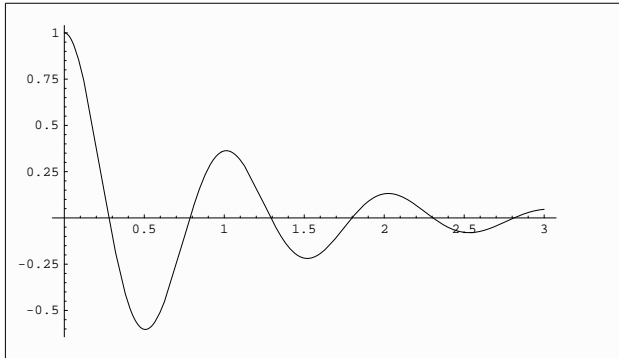
```
In[2]:= DSolve[{y''[x] + 2 y'[x] + 4 π^2 y[x] == 0,
  y'[0] == 0, y[0] == 1}, y, x]
```

```
Out[2]:= {{y -> Function[{x},  $\frac{1}{\sqrt{-1 + 4 \pi^2}}$ 
  (e-x (√(-1 + 4 π2) Cos[√(-1 + 4 π2) x] +
  Sin[√(-1 + 4 π2) x]))]}
```

$y(0) = 1$  (початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги).

Використовуючи отриманий результат, зобразимо затухаючі коливання розглянутого осцилятора, які відбуваються протягом трьох секунд.

```
In[1]:= Plot[
  (e-x (√(-1 + 4 π2) Cos[√(-1 + 4 π2) x] + Sin[
    √(-1 + 4 π2) x])) /
  (√(-1 + 4 π2)), {x, 0, 3}]
```



```
Out[1]= - Graphics -
```

## Розділ 5

### Завдання

#### 5.1 Дії над матрицями

Для даної матриці:

- знайти транспоновану та обернену;
- знайти суму даної матриці і транспонованої до неї;
- обчислити детермінант;
- піднести її до квадрату;
- обчислити слід;
- знайти власні значення і відповідні власні вектори.

При розв'язанні використати наступну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} N_1 & N_1 - N_2 & N_2 \\ -N_2 & N_2 - N_1 & -N_1 \\ 2N_2 - N_1 & N_1 + N_2 - 6 & N_1 - 2 \end{pmatrix}.$$

Тут  $N_1$  та  $N_2$  — перша та друга цифра студента у списку відповідно. Наприклад, для студента під номером 4 у списку  $N_1 = 0$  та  $N_2 = 4$ .

Розв'язати матричне рівняння  $AX = B$ , де

$$B = \begin{pmatrix} N_2 - N_1 \\ N_1 - N_2 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

## 5.2 Розв'язання алгебричних рівнянь

Розв'язати алгебричне рівняння

1.  $\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x+1)^2 - 8x}$ .
2.  $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$ .
3.  $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 3$ .
4.  $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$ .
5.  $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$ .
6.  $(x+1)^5 + (x-1)^5 = 32x$ .
7.  $|x| + |x-1| = 1$ .
8.  $|x|^3 + |x-1|^3 = 9$ .
9.  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$ .
10.  $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$ .
11.  $(x + \sqrt{x^2 - 1})^5 (x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = 1$ .
12.  $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$ .
13.  $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$ .
14.  $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ .
15.  $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$ .
16.  $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$ .
17.  $\sqrt[4]{18+5x} + \sqrt[4]{64-5x} = 4$ .
18.  $x^{4/5} - 7x^{-2/5} + 6x^{-1} = 0$ .
19.  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$ .
20.  $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0$ .
21.  $\sqrt{x^3 + x^2 - 1}\sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$ .
22.  $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ .
23.  $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12$ .
24.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$ .
25.  $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}$ .

### 5.3 Обчислення границь

Обчислити границю функції

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - (1 + x)}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x} \right)$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 2}{2x - 1} \right)^{x^2}$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$ .

## 5.4 Обчислення похідних

Обчислити похідну функції

$$1. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$2. y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$3. y = \ln \left( e^x + \sqrt{1+e^{2x}} \right).$$

$$4. y = \arccos (\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$5. y = x + x^x + x^{x^x}.$$

$$6. y = \sqrt[3]{x}.$$

$$7. y = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$8. y = \arccos \frac{1}{|x|}.$$

$$9. y = \operatorname{arctg} (x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$10. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$11. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$12. y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arctg} x^6.$$

$$13. y = \frac{1}{\arccos^2 x^2}.$$

$$14. y = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

$$15. y = \arcsin (\sin x - \cos x).$$

$$16. y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$17. y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}.$$

$$18. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$19. y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}.$$

$$20. y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}).$$

$$21. y = x e^x.$$

$$22. y = \sin x - x \cos x.$$

$$23. y = e^{-x^2}.$$

$$24. y = x \sqrt{1-x^2}.$$

$$25. y = x^2 e^{2x}.$$

## 5.5 Робота з графікою

а) Побудувати графік функції із завдання 4 (на графіку мають бути вказані осі координат).

б) Побудувати графік похідної функції із завдання 4.

в) Відобразити на спільній сітці координат графік функції та її похідної (графіки повинні бути різного кольору).

г) Побудувати графік функції заданої параметрично в полярних координатах  $\rho = \sin 3\varphi$ .

е) Побувати правильний шестикутник (осі координат мають бути відсутні).

## 5.6 Розклад функції в ряд Тейлора

Розкласти в ряд Тейлора функцію з завдання 4 поблизу довільно вибраної точки з точністю до п'яти членів.

## 5.7 Обчислення сум

Обчислити суму

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{(k+1)^2}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(9k^2-1)}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(36k^2-1)}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)^2}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k-2}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k-1}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k-3}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2}.$$

$$18. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$



19. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

20. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}.$$

21. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}.$$

22. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}.$$

23. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

24. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}.$$

25. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}.$$

## 5.8 Обчислення невизначених інтегралів

Обчислити невизначений інтеграл

1. 
$$\int dx \cos^5 x.$$

2. 
$$\int dx \sin^6 x.$$

3. 
$$\int dx \sqrt{x^3 + x^4}.$$

4. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

5. 
$$\int dx \sqrt[3]{3x-x^3}.$$

6. 
$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^3 + x + 1}}.$$

7. 
$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

8. 
$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

9. 
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

10. 
$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

11. 
$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

12. 
$$\int dx \cos \ln x.$$

13. 
$$\int dx x \sin \sqrt{x}.$$

14. 
$$\int dx \arcsin^2 x.$$

15. 
$$\int dx \sin x \ln(\operatorname{tg} x).$$

16. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

17. 
$$\int dx \sin 5x \cos x.$$

18. 
$$\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \sin^2 x}.$$

19. 
$$\int \frac{dx}{3 + 5 \tan x}.$$

20. 
$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$$

21. 
$$\int dx x^5 \sin 5x.$$

22.  $\int dx x^2 e^{\sqrt{x}}.$

24.  $\int dx x^3 \ln^3 x.$

23.  $\int dx \cos^2 \sqrt{x}.$

25.  $\int dx x \ln(4 + x^4).$

## 5.9 Обчислення визначених інтегралів

Обчислити визначений інтеграл

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

10.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x}.$

2.  $\int_0^1 dx \ln x.$

11.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x e^{-2x} dx}{x}.$

3.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

12.  $\int_0^{\pi/2} dx \ln \sin x.$

4.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$

13.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x}.$

5.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

14.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}.$

6.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}.$

15.  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} 2x}.$

7.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2x^2}.$

16.  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\operatorname{ch} x}.$

8.  $\int_0^{\infty} dx x^2 e^{-x^2}.$

17.  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{x}.$

9.  $\int_0^{\infty} dx \cos 3x e^{-x^2}.$

18.  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$

19. 
$$\int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}.$$

23. 
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2 + 1}.$$

20. 
$$\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\operatorname{tg} x}.$$

24. 
$$\int_0^{\pi/2} dx \cos(2\operatorname{tg} x).$$

21. 
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x}.$$

22. 
$$\int_0^{\infty} dx \cos x^2.$$

25. 
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

## 5.10 Розв'язання диференціальних рівнянь

Розв'язати диференціальне рівняння

1.  $y'' + 5y' = 0.$

2.  $y'' - 2y' - 3y = 0.$

3.  $y' = 2 + y/x.$

4.  $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x).$

5.  $(xy' - y) \sin(y/x) = x.$

6.  $xy' = 5y + x.$

7.  $y' + (y/x)^3 = 0.$

8.  $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}.$

9.  $x^2 y' e^{x/y} = xy e^{x/y} + y^2.$

10.  $xy' = y + x \sqrt[3]{e^y}; y(1/e) = 0.$

11.  $xy' - y = x \cos^2(y/x); y(3) = 0.$

12.  $y' - y/x = 3x.$

13.  $y' - 7y = 8e^{3x}$ .
14.  $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$ .
15.  $xy' \ln x = 5x - y$ .
16.  $y' + 3y = xe^{-3x}$ ;  $y(0) = 0$ .
17.  $y'(1 - x^2) = xy + 1$ ;  $y(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$ .
18.  $xy' \ln x = y + \ln x$ ;  $y(e^2) = 2 \ln 2$ .
19.  $xy' - y = x^2 \sin x$ ;  $y(\pi/2) = \pi$ .
20.  $y'' = \sin 2x$ .
21.  $y''' = e^{-x/4}$ .
22.  $y'' = \ln x$ .
23.  $2yy'' = y'^2$ .
24.  $x^2y'' + xy' = 1$ .
25.  $y''(e^x + 1) + y' = 0$ .

## Додаток 1

### Запис основних математичних функцій в програмі Mathematica 5.0

$ x $	<code>Abs[x]</code>
$\sqrt{x}$	<code>Sqrt[x]</code>
$x^a$	<code>x^a</code>
$\cos x$	<code>Cos[x]</code>
$\sin x$	<code>Sin[x]</code>
$\operatorname{tg} x$	<code>Tan[x]</code>
$\operatorname{ctg} x$	<code>Cot[x]</code>
$\arcsin x$	<code>ArcSin[x]</code>
$\arccos x$	<code>ArcCos[x]</code>
$\operatorname{arctg} x$	<code>ArcTan[x]</code>
$\operatorname{arctg} x$	<code>ArcCot[x]</code>
$\ln x$	<code>Log[x]</code>
$\log_a x$	<code>Log[a, x]</code>
$e^x$	<code>Exp[x]</code>
$\operatorname{sh} x$	<code>Sinh[x]</code>
$\operatorname{ch} x$	<code>Cosh[x]</code>

## Додаток 2

### Таблиця деяких кольорів

<b>Red</b> (червоний)	RGBColor[1, 0, 0]
<b>Green</b> (зелений)	RGBColor[0, 1, 0]
<b>Blue</b> (синій)	RGBColor[0, 0, 1]
<b>Yellow</b> (жовтий)	RGBColor[1, 1, 0]
<b>Orange</b> (помаранчевий)	RGBColor[1, 0.5, 0]
<b>Pink</b> (рожевий)	RGBColor[1, 0.75, 0.8]
<b>Cyan</b> (блакитний)	RGBColor[0, 1, 1]
<b>Gold</b> (золотистий)	RGBColor[1, 0.84, 0]
<b>Violet</b> (фіолетовий)	RGBColor[0.56, 0.37, 0.6]
<b>Gray</b> (сірий)	RGBColor[0.75, 0.75, 0.75]
<b>Indigo</b> (синьо-фіолетовий)	RGBColor[0.03, 0.18, 0.33]
<b>Purple</b> (пурпуровий)	RGBColor[0.63, 0.125, 0.94]
<b>Coral</b> (світло-червоний)	RGBColor[1, 0.5, 0.31]
<b>Maroon</b> (червоно-коричневий)	RGBColor[0.7, 0.188, 0.38]
<b>Carrot</b> (рудий)	RGBColor[0.93, 0.57, 0.13]
<b>Sepia</b> (світло-коричневий)	RGBColor[0.37, 0.15, 0.07]
<b>Peach</b> (персиковий)	RGBColor[0.44, 0.26, 0.26]
<b>Olive</b> (жовто-зелений)	RGBColor[0.23, 0.37, 0.17]

## Література

- [1] *Головацький В. А.* Система комп'ютерної алгебри Mathematica 5: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2008. – 352 с.
- [2] *Васюков О. М., Асельдеров З. М.* Програмування в системі Mathematica: Навчальний посібник. – К.: Вид-поліграф. центр «Київ. ун-тет», 1998. – 55 с.
- [3] *Половко А. М.* Mathematica для студента. – СПб.: ВУН, 2007. – 368 с.
- [4] *Воробьев Е. М.* Введение в систему Mathematica 5. Финансы и статистика. – М.: Диалог–МИФИ, 1998. – 261 с.
- [5] *Wolfram S.* «Mathematica». A System for Doing Mathematics by Computer. Second edition. – Addison–Wesley Publishing Company, 1991. – 1021 p.

Для нотаток



Навчально-методичне видання

**Шигорін Павло Павлович**

**Математичні обчислення  
в програмному пакеті  
Mathematica 5**

*Методичні рекомендації*

Друкується в авторській редакції  
Верстка *П. П. Шигорін*

Підп. до друку 20.03.2009. Формат 60 × 84 1/16. Папір офс. Гарн. Таймс. Друк цифровий. Обсяг 3,18 ум. друк. арк., 2,79 обл.-вид. арк. Наклад 100 пр. Зам. 2167. Редакційно-видавничий відділ «Вежа» Волинського національного університету ім. Лесі Українки (43025, м. Луцьк, просп. Волі, 13). Друк – РВВ «Вежа» ВНУ ім. Лесі Українки (43025, м. Луцьк, просп. Волі, 13). Свідомство Держ. комітету телебачення та радіомовлення України ДК №3156 від 04.04.2008 р.