

УДК 517.51

К.В. Соліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\Omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q .

We obtain exact order estimates for the best bilinear approximations of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of several variables in the space L_q .

Вступ. Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, означає d -вимірний простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p , $1 \leq p < \infty$, (відповідно істотно обмежених при $p = \infty$), функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, \dots, x_d)$ з кроком $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ за формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Кратну різницю $\Delta_h^l f(x)$ можна також записати у вигляді:

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l+n} C_l^n f(x + nh).$$

Модуль неперервності порядку l функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, який позначимо через $\Omega_l(f, t)_p$, означимо за формулою

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_d^2}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t : t \geq 0\}$ та задовольняє наступні умови:

- 1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;
- 2) $\Omega(t)$ є неперервною і зростає;
- 3) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \leq C n^l \Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t .

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l) , які називають умовами Барі – Стєчка [1]. Це означає наступне.

Функція $\Omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція $\Omega(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Варто зазначити, що функції, які задовольняють вказані вище умови 1 – 3, (S) та (S_l) , можуть мати, наприклад, такий вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+ \left(\frac{1}{t} \right) \right)^\beta, & t > 0, \\ 0 & , t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β – фіксоване дійсне число.

Для $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1 – 3, клас $B_{p,\theta}^\Omega$ визначається наступним чином:

$$B_{p,\theta}^\Omega = \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \stackrel{df}{=} \|f\|_p + \|f\|_{b_{p,\theta}^\Omega} \leq 1\},$$

де

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^\Omega} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з класами О.В. Бесова $B_{p,\theta}^r$ [2] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, де H_p^r – класи, введені С.М. Нікольським [3]. Таким чином, вони є узагальненням (за гладкішим параметром) відомих класів Нікольського – Бесова. З точки зору теорем вкладення, ці класи розглядалися в роботах М.Л. Гольдмана

[4] і Г.А. Калябіна [5]. Пізніше їх апроксимативні характеристики досліджувались в роботах Li Yongping та Xu Guiqiao [6], Xu Guiqiao [7], С.П. Войтенка [9], [10], С.А. Стасюка [8] та інших.

Далі будемо використовувати еквівалентне (з точністю до абсолютних сталих) означення норм класів $B_{p,\theta}^\Omega$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^d V_m(x_j).$$

Нехай \mathbf{V}_m — оператор, який задає згортку функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$:

$$\mathbf{V}_m f \stackrel{\text{df}}{=} f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції f .

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Phi_0(f, x) = V_1(f, x), \quad \Phi_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s \in \mathbb{N}.$$

В прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) класи $B_{p,\theta}^\Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, можна означити наступним чином (див, наприклад, [7]):

$$\begin{aligned} B_{p,\theta}^\Omega &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|\Phi_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \\ B_{p,\infty}^\Omega &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|\Phi_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зауважимо, що зі збільшенням параметра θ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ розширюються, тобто при $1 \leq \theta \leq \theta' \leq \infty$ мають місце вкладення

$$B_{p,1}^\Omega \subset B_{p,\theta}^\Omega \subset B_{p,\theta'}^\Omega \subset B_{p,\infty}^\Omega = H_p^\Omega. \quad (2)$$

Нехай $L_q(\mathbb{T}^{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1, q_2} = \| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по змінній $x \in \mathbb{T}^d$, а потім від результату — по змінній $y \in \mathbb{T}^d$ в просторі $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку m :

$$\tau_m(f)_{q_1, q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \|f(x, y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y)\|_{q_1, q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_i \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_m(F)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m(f)_{q_1, q_2}. \quad (3)$$

Класичний результат для білінійних наближень $\tau_M(f)_{2,2}$ належить Шмідту [11].

Дослідженню величини (3), де замість F розглядаються класи $W_{p,\alpha}^r$ і H_p^r , присвячені праці В.М. Темлякова [12 – 14], в яких можна знайти відповідну бібліографію про білінійні наближення в цьому напрямку. Що стосується білінійних наближень для класів Бесова $B_{p,\theta}^r$, то вони досліджувалися у роботах А.С. Романюка [15 – 16].

Мета даної роботи — отримання точних за порядком оцінок величини

$$\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega} \tau_m(f)_{q_1, q_2} \quad (4)$$

в припущенні, що $f \in B_{p,\theta}^\Omega$, а білінійні наближення $\tau_m(f)_{q_1,q_2}$ розглядаються для функцій вигляду $f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$.

1. Допоміжні твердження. При доведенні оцінок зверху величин $\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1,q_2}$ нами будуть використовуватись оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$, які отримані С.П. Войтенком в [9]. Наведемо означення цих величин і сформулюємо відповідні результати.

Нехай $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ і $\{k^j\}_{j=1}^m$ — довільний набір d -вимірних векторів $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ з цілочисловими координатами.

Найкращим m -членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ називають величину

$$e_m(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_q,$$

де c_j — довільні числа, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \dots + k_d^j x_d$. Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q.$$

В [9] доведено таке твердження.

Теорема А. *Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$, і $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \alpha(p, q)$, а також умову (S_l), де*

$$\alpha(p, q) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, & 1 \leq p \leq q \leq 2 \quad \text{або} \\ & 1 \leq q \leq p \leq \infty, \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\} & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (5)$$

Тоді для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ має місце оцінка

$$e_m(B_{p,\theta}^\Omega)_q \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p} - \max\{\frac{1}{q}; \frac{1}{2}\})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Тут і надалі співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала C така, що $\mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Зауважимо, що всі сталі C_i , $i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору \mathbb{R}^d .

Нехай

$$C^d(N) = \{k = (k_1, \dots, k_d), |k_j| \leq N, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, d}\}.$$

Має місце лема.

Лема А [13]. *Нехай задано число N і $M = N^d$. Тоді для довільної функції*

$$g(x) = \sum_{k \in C^d(2N)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \leq 1$ і $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $k \in C^d(N)$, виконується співвідношення

$$\tau_M(g(x-y))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{де } \widehat{g}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} g(y) e^{-i(k,y)} dy.$$

Нехай $\mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$ позначає множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини $C^d(2^{n+4})$.

Має місце твердження.

Теорема Б [3]. *Нехай $t \in \mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$. Тоді при $1 \leq q \leq p \leq \infty$ має місце нерівність*

$$\|t\|_p \ll 2^{nd(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|t\|_q. \quad (6)$$

Зауважимо, що ця нерівність була отримана С.М. Нікольським і отримала назву *нерівність різних метрик*. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [17].

2. Основні результати. Перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Нехай

$$\alpha_1(p, q_1) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1})_+, & \begin{array}{l} 1 \leq p \leq q_1 \leq 2 \quad \text{або} \\ 2 \leq q_1 \leq p \leq \infty; \end{array} \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \begin{array}{l} 2 \leq p \leq q_1 \leq \infty \quad \text{або} \\ 1 \leq p < 2 < q_1 \leq \infty. \end{array} \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай $1 \leq q_2, \theta \leq \infty$ і $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > \alpha_1(p, q_1)$, а також умову (S_l). Тоді для $m \in \mathbb{N}$ мають місце оцінки*

$$\begin{aligned} & \tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, q_2} \asymp \\ & \asymp \begin{cases} \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}}, & 1 \leq p \leq q_1 \leq 2, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & \begin{array}{l} 2 \leq p \leq q_1 \leq \infty \quad \text{або} \\ 2 \leq q_1 \leq p \leq \infty, \end{array} \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & 1 \leq p < 2 < q_1 \leq \infty. \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Доведення. Оцінки зверху в (7) можна легко отримати як наслідок відповідних результатів теореми А. Для визначеності розглянемо, наприклад, випадок $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$.

З одного боку, згідно з оцінкою

$$e_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}),$$

для довільної функції f з класу $B_{p,\theta}^\Omega$ знайдеться множина векторів k^1, \dots, k^m , $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $k^j \in \mathbb{Z}^d$, $j = \overline{1, m}$ і чисел c_1, \dots, c_m таких, що

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_{q_1} \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \quad (8)$$

З іншого боку, для лівої частини (8) можна записати

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_{q_1} &= \left\| f(x - y) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, (x-y))} \right\|_{q_1, \infty} = \\ &= \left\| f(x - y) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q_1, \infty}. \end{aligned} \quad (9)$$

З (8) і (9) одержимо

$$\left\| f(x - y) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q_1, \infty} \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \quad (10)$$

Тепер, поклавши в (10) $c_j e^{i(k^j, x)} = u_j(x)$ і $e^{-i(k^j, y)} = v_j(y)$ отримаємо шукану оцінку зверху величини $\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, \infty}$ і, як наслідок, величини $\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, q_2}$.

При інших співвідношеннях між p і q_1 оцінки зверху величин $\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, q_2}$ доводяться аналогічно з використанням відповідних оцінок найкращих m -членних тригонометричних наближень $e_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1}$.

Переходячи до доведення в (7) оцінок знизу зауважимо, що, внаслідок вкладень (2), їх достатньо отримати у випадку $\theta = 1$, тобто для класів $B_{p,1}^\Omega$.

Нехай спочатку має місце співвідношення $1 \leq p \leq q_1 \leq 2$. В такому випадку для отримання оцінки знизу величини $\tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1, q_2}$ будемо використовувати лему А.

За числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо $n(m) \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{(n-1)d} \leq m < 2^{nd}$, тобто $m \asymp 2^{nd}$, і розглянемо білінійне наближення функції $V_{2^{n+2}}(x-y)$. Нехай системи функцій $\{u_i(x)\}_{i=1}^m$ і $\{v_i(y)\}_{i=1}^m$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, такі, що

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \leq 2\tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}.$$

Оскільки

$$V_{2^{n+4}} * V_{2^{n+2}} = V_{2^{n+2}}$$

і для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|\mathbf{V}_{2^{n+4}}f\|_q \leq 3^d \|f\|_q,$$

то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функції $u_i(x)$ і $v_i(y)$ є тригонометричними поліномами з множини $\mathcal{T}(C^d(2^{n+4}))$ і при цьому має місце оцінка

$$\left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}. \quad (11)$$

Тепер, скориставшись нерівністю різних метрик Нікольського (6) і (11), можемо записати

$$\begin{aligned} & \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \ll \\ & \ll 2^{nd(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \\ & \ll 2^{nd(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2})} \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи співвідношення між m і n та лему А, з (12) отримаємо

$$\begin{aligned} & \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1} \gg \\ & \gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \gg \\ & \gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} m^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_1 \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} V_{2^{n+2}}(x), C_1 > 0.$$

Враховуючи, що (див., наприклад, [18, с. 28])

$$\|V_{2^{n+2}}\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (14)$$

та (1) можемо записати

$$\begin{aligned} \|V_{2^{n+2}}\|_{B_{p,1}^\Omega} &= \sum_s \frac{\|\Phi_s(V_{2^{n+2}}, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|\Phi_s(V_{2^{n+2}}, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} = \\ &= \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|(V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) * V_{2^{n+2}}\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq \sum_{s=0}^{n+3} \frac{\|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_p \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^{n+3} \frac{(\|V_{2^s}\|_p + \|V_{2^{s-1}}\|_p) \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \asymp \\ &\asymp \sum_{s=0}^{n+3} \frac{(2^{(s-2)d(1-\frac{1}{p})} + 2^{(s-3)d(1-\frac{1}{p})}) \cdot \|V_{2^{n+2}}\|_1}{\Omega(2^{-s})} \ll \\ &\ll \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})} (2^{-2d(1-\frac{1}{p})} + 2^{-3d(1-\frac{1}{p})})}{\Omega(2^{-s})} \ll \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-s})} = I_1. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n \Omega^{-1}(2^{-s}) &= \sum_{s=0}^n \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll \frac{\Omega^{-1}(2^{-n})}{2^{\alpha n}} \sum_{s=0}^n 2^{\alpha s} \asymp \\ &\asymp \frac{\Omega^{-1}(2^{-n})}{2^{\alpha n}} \cdot 2^{\alpha n} = \Omega^{-1}(2^{-n}) \end{aligned} \quad (15)$$

та оцінку (14) матимемо

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{s=0}^{n+3} \frac{2^{sd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-s})} \asymp \Omega^{-1}(2^{-(n+3)}) \sum_{s=0}^{n+3} 2^{sd(1-\frac{1}{p})} \asymp \\ &\asymp \Omega^{-1}(2^{-(n+3)}) 2^{(n+3)d(1-\frac{1}{p})} \asymp \frac{2^{nd(1-\frac{1}{p})}}{\Omega(2^{-n})}. \end{aligned}$$

Отже, при певному виборі сталої $C_1 > 0$ функція f_1 належить класу $B_{p,1}^\Omega$.

Таким чином, використавши (13), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \tau_m(B_{p,1}^\Omega)_{q_1, q_2} &\geq \tau_m(f_1(x-y))_{q_1, q_2} \gg \\ &\gg \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} \tau_m(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1, 1} \gg \\ &\gg \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} \cdot 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}}. \end{aligned}$$

З доведеної вище оцінки при $q_1 = 2$ впливає оцінка знизу величини $\tau_m(B_{p,1}^\Omega)_{q_1, q_2}$ у випадку $1 \leq p < 2 < q_1 < \infty$.

Тепер знайдемо необхідну оцінку у випадку $q_1 = 2$ і $q_2 = 1$.

За даним $m \in \mathbb{N}$ підберемо число $n(m) \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувались співвідношення $2^{nd} \geq 2m$ і $2^{nd} \asymp m$ і розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_2 \Omega(2^{-n}) 2^{-\frac{nd}{2}} R_n(x), C_2 > 0,$$

де

$$R_n(x) = \prod_{j=1}^d \sum_{l_j=2^n}^{2^{n+1}-1} \varepsilon_{l_j} e^{il_j x_j}, \varepsilon_{l_j} = \pm 1,$$

— поліноми Рудіна – Шапіро. Добре відомо (див., наприклад, [19, с.155]), що

$$\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{nd}{2}}. \quad (16)$$

Враховуючи (1), (14), (15) та (16), одержуємо

$$\begin{aligned} \|R_n\|_{B_{p,1}^\Omega} &= \sum_s \frac{\|\Phi_s(R_n, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \asymp \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|\Phi_s(R_n, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} = \\ &= \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|(V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) * R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq \sum_{s=0}^{n+1} \frac{\|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \cdot \|R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^{n+1} \frac{(\|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1) \cdot \|R_n\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ll \|R_n\|_p \sum_{s=0}^{n+1} \Omega^{-1}(2^{-s}) \ll \\ &\ll \frac{\|R_n\|_p}{\Omega(2^{-(n+1)})} \leq \frac{\|R_n\|_\infty}{\Omega(2^{-(n+1)})} \ll \frac{2^{\frac{nd}{2}}}{\Omega(2^{-n})}. \end{aligned}$$

Тому функція f_2 належить класу $B_{p,1}^\Omega$ при відповідному виборі сталої $C_2 > 0$.

Внаслідок леми А для $R_n(x)$ можемо записати

$$\tau_m(R_n(x-y))_{2,1} \gg m^{\frac{1}{2}}.$$

Скориставшись останньою оцінкою отримаємо

$$\tau_m(f_2(x-y))_{2,1} \gg \Omega(2^{-n}) 2^{-\frac{nd}{2}} \tau_m(R_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n})2^{-\frac{nd}{2}}m^{\frac{1}{2}} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}} = \Omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Для завершения доведення у випадках $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$ і $2 \leq q_1 \leq p \leq \infty$ запишемо

$$\begin{aligned} \tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1,q_2} &\geq \tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{q_1,1} \geq \\ &\geq \tau_m(B_{p,\theta}^\Omega)_{2,1} \geq \tau_m(f_2)_{2,1} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \end{aligned}$$

Отже, оцінки знизу встановлені.

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо покласти $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, і при певних обмеженнях на r з (7) отримаємо відповідні оцінки для величини $\tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2}$, які встановлені в [16].

- 1) *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
- 2) *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163–1165.
- 3) *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
- 4) *Гольдман М.Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида / М.Л. Гольдман // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1984. — **170**. — С. 84–106.
- 5) *Калябин Г.А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1977. — **232**, №6. — С. 1245–1248.
- 6) *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. — 2002. — **18**, №4. — P. 815–832.
- 7) *Xu Guiqiao.* The n -widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. — 2005. — **25B**, №4. — P. 663–671.

- 8) *Стасюк С.А.* Приближение классов $B_{p,\theta}^\omega$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях // *Мат. студії.* — В друці.
- 9) *Войтенко С.П.* Найкращі M -членні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // *Укр. мат. журн.* — 2009. — **61**, №9. — С. 1189–1199.
- 10) *Войтенко С.П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // *Укр. мат. журн.* — 2009. — **61**, 11. — С. 1473–1484.
- 11) *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // *Math. Ann.* — 1907. — **63**. — P. 433–476.
- 12) *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // *Тр.Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР.* — 1986. — **178**. — С. 1–112.
- 13) *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // *Тр.Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР.* — 1986. — **173**. — С. 243–252.
- 14) *Темляков В.М.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // *Тр. Мат. ин-та РАН.* — 1991. — **194**. — С. 229–248.
- 15) *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2006. — **70**, №2. — С. 69–98.
- 16) *Романюк А.С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // *Зб. праць Ін-ту матем. НАН України.* — 2009. — **6**, №1. — С. 222–236.
- 17) *Jakson D.* Certain problem of closet approximation // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1993. — **39**, №12. — С. 889–906.
- 18) *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.
- 19) *Кашин С.Б., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 495 с.