Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2011, Т.8, №1, 1-17

УДК 517.5

К. В. Соліч (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain the exact-order estimates of the bilinear approximations of classes $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ of periodic functions of $2d$ variables in the space L_q by the linear combinations of products of functions of d variables.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\,\theta}$ періодичних функцій $2d$ змінних у просторі L_q лінійними комбінаціями добутків функцій d змінних.

Вступ. В роботі розглядається найкраще білінійне наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які є узагальненням (за гладкісним) параметром відомих класів Нікольського–Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$. Одержано точні за порядком оцінки наближення відповідних апроксимативних характеристик у просторі $L_q(\pi_{2d})$ при різних співвідношеннях між параметрами p і q. Робота складається з трьох частин. У вступі дається означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, а також вводиться поняття найкращого білінійного наближення. Друга частина роботи відводиться для викладу історії питання і додаткових позначень та допоміжних тверджень, які будуть потрібні для отримання результату. Третя частина є основною. Саме тут подаються основні результати — формулюється і доводиться теорема, а також робляться певні зауваження щодо одержаних оцінок.

Наведемо спочатку необхідні означення та позначення для класів, що розглядаються, а також досліджуваних апроксимативних характеристик.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, означає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi;\pi)$,— простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$.

Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Означимо простори $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — мажорантної функції для модуля неперервності l –го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \le p, \theta \le \infty$.

Для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h| \le t} \| \Delta^l_h f(\cdot) \|_p$$

— модуль неперервності порядку l ($l \in \mathbb{N}$) функції f, де $\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x)$, $h = (h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R}^d$, — кратна l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, яку можна записати і в такий спосіб:

$$\Delta^l_h f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C^n_l f(x + nh).$$

Вважаємо також, що $\Delta^0_h f(x) = f(x)$.

Нехай далі $\Omega(t)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, визначена на $[0; \infty)$, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t > 0$; $\Omega(t) = 0$, $t = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна;

3) $\Omega(t)$ не спадає на $[0; \infty)$;

3) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \le Cn^l \Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить ні від n, ні від t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_l$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, введених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0;\infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leq C_1\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geq C_2\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ належить множинам S^{α} і S_l. Умови належності до цих множин часто в літературі називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає таке:

i) $\Omega \in S^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^{\alpha}}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^{\gamma}}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

Варто зазначити, що функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ можуть мати, наприклад, такий вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+ \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{\beta}, & t > 0, \\ 0 & , t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β — фіксоване дійсне число.

Для $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1 - 4$, простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \{ f \in L_p(\pi_d) : \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} \leq \infty \},$$

де напівнорма $|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \qquad (1)$$

Означимо норму в просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в такий спосіб:

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}, \quad 1 \leq p, \theta \leq \infty.$$

Зауважимо, що зі збільшенням параметра θ простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_{p}. \qquad (2)$$

Якщо покласти $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з просторами О.В. Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ $B^{r}_{p,\infty} = H^{r}_{p}$, де H^{r}_{p} — простори, введені С.М. Нікольським [4]. Таким чином, простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих просторів Нікольського – Бєсова. З точки зору теорем вкладення, ці простори розглядалися в роботах М.Л. Гольдмана [5] і Г.А. Калябіна [6]. Пізніше їх апроксимативні характеристики досліджувались в роботах Li Yongping та Xu Guiqiao [7], Xu Guiqiao [8], С.А. Стасюка [9], С.П. Войтенка [10, 11] та інших.

Що стосується початкового означення норм в просторах $B^{\Omega}_{p,\theta}$, то зауважимо, що має місце еквівалентне (в поданому нижче сенсі) означення з використанням розкладів функцій із $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt$$

(при $m = 1$ другу суму покладаємо рівною нулю). Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо за формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbf{V}_m : L_p(\pi_d) \longrightarrow L_1(\pi_d)$ — оператор, який задає згортку функцій $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$:

$$\mathbf{V}_m f(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(y) V_m(y-x) dy.$$

Таким чином, за допомогою оператора $\mathbf{V}_m$ визначаються кратні середні Валле Пуссена функції $f \in L_p(\pi_d)$, а саме:

$$V_m(f,x) :\stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{V}_m f(x),$$

які можна записати і у вигляді тригонометричного полінома, що утворюється із розкладу функції f в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Далі, для $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Phi_0(f,x) = V_1(f,x),\ \Phi_s(f,x) = V_{2^s}(f,x) - V_{2^{s-1}}(f,x),\ \ s \in \mathbb{N},$$

і

$$\begin{aligned} \|f\|'_{B^{\Omega}_{p,\theta}} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty, \\ \|f\|'_{B^{\Omega}_{p,\infty}} &= \sup_s \frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Тоді $\forall\ f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$: $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \|f\|'_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$, і простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, можна означити наступним чином (див., наприклад, [8]):

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|'_{B^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty\}, \quad 1 \le \theta \le \infty.$$

Надалі, для одиничної кулі в просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $B^{\Omega}_{p,\theta}$, тобто

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}\ :\ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\}.$$

В подальших міркуваннях будемо користуватись порядковими співвідношеннями. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3 B \le A \le C_4 B$, де $C_3,\ C_4 > 0$ — сталі, і їх значення можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \le C_5 B$, $C_5 > 0$, чи $A \ge C_6 B$, $C_6 > 0$, то будемо писати $A \ll B$ або $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів "$\asymp$", "$\ll$", "$\gg$".

Перейдемо тепер безпосередньо до означення апроксимативної характеристики, що буде досліджуватись.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ — множина функцій $f(x,y)$, $x,y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} := \| \, \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма функції f обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \pi_d$, а потім від результату — по змінній $y \in \pi_d$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ означимо величину найкращого білінійного наближення порядку M, ($M \in \mathbb{N}$):

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x),v_j(y)} \|f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,d}$. Також зауважимо, що $\tau_0(f(x,y))_{q_1,q_2} := \|f(x,y)\|_{q_1,q_2}$.

Якщо $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{4}$$

Мета даної роботи — отримати точні за порядком оцінки величин $\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ при умові $q_1 = q_2 = q$. В цьому випадку ми будемо писати $\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$.

1. Історія питання. У цьому пункті дамо коротку історичну довідку щодо дослідження білінійних наближень та їх застосувань, а також сформулюємо допоміжні твердження, які будуть використовуватись при доведенні отриманих оцінок.

Питання наближення функцій багатьох змінних комбінаціями функцій від меншої кількості змінних мають як самостійний інтерес, так і важливі застосування.

У 1907 р. E. Schmidt [12] довів теорему про наближення періодичних функцій двох змінних $f(x,y)$ в L_2 білінійними формами $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$, де, зокрема, вказав спосіб побудови найкращих білінійних форм.

C.A. Micchelli та A. Pinkus [13] в 1977–1978 рр. досліджуючи білінійні наближення деяких функцій двох змінних, заданих на квадраті $[0,1] \times [0,1]$, застосували отримані результати до знаходження точних значень поперечників класів диференційовних функцій.

М.–Б.А. Бабаєв [14, 15] розглянув питання білінійних наближень неперіодичних функцій.

Поведінка величини $\tau_M(P)_{2,2}$ для функцій P з класів, аналогічних до класів Соболєва, вивчались в роботі М.В. Мірошина і В.В. Хромова [16].

Пізніше Р.С. Ісмагілов [17] встановив зв'язок між найкращими білінійними наближеннями функцій вигляду $f(x-y)$, $f(x) \in F$, і поперечниками за Колмогоровим класів F.

Дослідженню білінійних наближень функцій з класів $W^r_{p,\alpha}$ і H^r_p, які є аналогами класів С.Л. Соболєва та С.М. Нікольського, присвячено цикл робіт В.М.Темлякова [18–21].

Також відзначимо роботи А.С. Романюка [22, 23] і А.С. Романюка, В.С. Романюка [24, 25], які присвячені дослідженню білінійних наближень функцій з класів О.В. Бєсова та їх аналогів. В згаданих роботах можна ознайомитись з більш детальною бібліографією з цього напряму.

2. Основні результати. Для формулювання допоміжних тверджень введемо такі позначення.

Нехай

$$C^d(N) = \big\{k = (k_1, ..., k_d), |k_j| \le N, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d}\big\}.$$

Позначимо через $T(C^d(N))_q$ підмножину функцій з

$$T(C^d(N)) = \big\{f : f(x) = \sum_{k \in C^d(N)} c_k e^{i(k,x)}\big\},$$

які задовольняють умову $\|f\|_q \le 1$, $1 \le q \le \infty$.

Теорема A [4]. *Нехай* $t \in T(C^d(2^n))$. *Тоді при* $1 \le q < p \le \infty$ *має місце співвідношення*

$$\|t\|_p \le 2^d \cdot 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|t\|_q. \qquad (5)$$

Нерівність (5) було встановлено С.М. Нікольським і вона отримала назву "нерівності різних метрик". У випадку $d=1$ і $p=\infty$ відповідну нерівність довів Джексон [26].

В роботі [25] було доведено таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $f \in T(C^{2d}(2^{n+1}))$. *Тоді*

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-1} 2^{nd} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M}\right)\|f\|_2. \tag{6}$$

Основний результат роботи складає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha(p,q)$, *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} 2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+, & \begin{array}{l} 1 \le p \le q \le 2 \quad \textit{або} \\ 2 \le q \le p \le \infty; \end{array} \\ \\ \max\{\frac{2d}{p}; d\}, & \begin{array}{l} 2 \le p \le q \le \infty \quad \textit{або} \\ 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{array} \end{cases}$$

Тоді для $M \in \mathbb{N}$ *справедливі порядкові співвідношення*

$$\tau_M(B^\Omega_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \\ \Omega(M^{-\frac{1}{d}}), & \begin{array}{l} 2 \le p \le q \le \infty \quad \textit{або} \\ 2 \le q \le p \le \infty, \end{array} \\ \\ \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Зауваження. У випадку $\Omega(t) = t^r$, коли параметр $r > 0$ підпорядкований умовам належності функції Ω до множини $\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha(p,q)$, теорема 1 доведена в роботі [25].

Доведення теореми 1. Спочатку отримаємо в співвідношеннях (7) оцінки зверху. Для цього, при виконанні умов для вкладень (2), нам достатньо розглянути лише випадок $\theta = \infty$, щоб отримати шукані оцінки для величин $\tau_M(H^\Omega_p)_q$.

Нехай задана функція $f(t)$, $t=(t_1,\dots,t_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$, і $f \in H^\Omega_p$. Покладемо

$$A_n(f;z) = f(t) * (V_{2^n}(t) - V_{2^{n-1}}(t)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$A_0(f;z) = f(t) * V_1(t).$$

Відмітимо, що внаслідок збіжності при $n \longrightarrow \infty$ середніх Валле Пуссена до f в просторі $L_p(\pi_{2d})$ функцію f з класу H^{Ω}_p можна представити у вигляді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f;z), \tag{8}$$

в розумінні збіжності ряду в $L_p(\pi_{2d})$.

При цьому справедлива порядкова нерівність

$$\|A_n(f;\cdot)\|_p \ll \Omega(2^{-n}), \quad 1 \le p \le \infty. \tag{9}$$

Розглянемо спочатку випадки $1 \le p = q \le 2$ та $2 \le q \le p \le \infty$. Нехай задане число $m \in \mathbb{N}$. За наближаючий агрегат для f візьмемо функцію

$$g_1(z) = f(t) * V_{2^{m-1}}(t) = \sum_{n=0}^{m-1} A_n(f;z). \tag{10}$$

Зауважимо, що згідно з означенням багатовимірного ядра Валле Пуссена $V_{2^{m-1}}(t)$ функцію g_1 можна подати у вигляді

$$g_1(z) = g_1(x,y) = \sum_{k \in C^d(2^{m-1})} c_k(y) e^{i(k,x)} = \sum_{j=0}^{M_1} u_j(x) v_j(y), \tag{11}$$

де $x = (z_1, \dots, z_d)$, $y = (z_{d+1}, \dots, z_{2d})$, $M_1 = (2^{m+1} - 1)^d \asymp 2^{md}$ і $c_k(y) \in L_q(\pi_d)$, $u_j,\ v_j \in L_q(\pi_d)$.

Далі з (11), приймаючи до уваги (8) та (10) і користуючись оцінкою (9), за умови $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ отримаємо

$$\tau_{M_1}(f)_q \le \|f - g_1\|_q = \left\| \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f;\cdot) \right\|_q \le \sum_{n=m}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{\infty} \Omega(2^{-n}) \ll \Omega(2^{-m}) \asymp \Omega(M_1^{-\frac{1}{d}}),$$

звідки, очевидно, маємо оцінку

$$\tau_M(f)_q \ll \Omega(M^{-\frac{1}{d}})$$

при довільному $M \in \mathbb{N}$, з якої випливає оцінка зверху величини $\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ в теоремі в зазначених вище випадках $1 \le p = q \le 2$ та $2 \le q \le p \le \infty$.

При встановленні оцінок зверху в інших випадках співвідношень між параметрами p, q за початкові візьмемо співвідношення (8) та (10), з яких отримуємо зображення довільної функції $f \in L_q(\pi_{2d})$, $1 \le q \le \infty$, у вигляді

$$f(z) = g_1(z) + \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f; z) \tag{12}$$

при довільних $m = 2, 3, \ldots$.

Тоді, якщо $M \in \mathbb{N}$ — довільне задане ($M > 2^{(m+1)d}$) і послідовність $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ натуральних чисел така, що $M_1 + \sum\limits_{n=m}^{\infty} M_n \le M$, то

$$\tau_M(f)_q \le \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_q. \tag{13}$$

Приймаючи до уваги співвідношення (13), за заданою послідовністю $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ побудуємо спочатку функції вигляду

$$g_n(z) = g_n(x,y) = \sum_{j=1}^{M_n} u_j^n(x) v_j^n(y), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

де $u_j^n \in L_q(\pi_d)$, $v_j^n \in L_q(\pi_d)$, $j = \overline{1, M_n}$, — певним чином наближаючі в $L_q(\pi_{2d})$ функції $A_n(f;\cdot)$, $f \in L_q(\pi_{2d})$ при $1 \le p \le q \le \infty$.

Нехай $n \ge 2$ — задано. Запишемо поліном $A_n(f;z)$ у вигляді

$$A_n(f;z) = 2^{-2d(n+3)} \sum_{\mu,\nu} A_n(f, x^{\mu}, y^{\nu}) V_{2^{n+1}}(x - x^{\mu}, y - y^{\nu}),$$

де

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d),\ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d),$$

$$x^{\mu}_j = \frac{\mu_j \pi}{2^{n+2}},\ \mu_j = 0, 1, \dots, 2^{n+3}-1,\ j = \overline{1,d},$$

$$y^{\nu}_j = \frac{\nu_j \pi}{2^{n+2}},\ \nu_j = 0, 1, \dots, 2^{n+3}-1,\ j = \overline{1,d}.$$

Позначимо через G_n множину, яка складається з M_n точок (x^{μ}, y^{ν}) з найбільшими числами $|A_n(f, x^{\mu}, y^{\nu})|$. Тоді візьмемо

$$g_n(x,y) = 2^{-2d(n+3)} \sum_{\mu,\nu:(x^{\mu},y^{\nu})\in G_n} A_n(f, x^{\mu}, y^{\nu}) V_{2^{n+1}}(x - x^{\mu}, y - y^{\nu}). \qquad (15)$$

Функції, що визначаються рівностями (15), зображуються, як і сама функція $g_1(x,y)$, у вигляді (14) і згідно оцінки, що отримана в роботі [18, С. 106], можемо записати, що для довільної функції $f \in L_q(\pi_{2d})$ при будь-яких $1 \le p, q \le \infty$ і $n \ge 2$

$$\|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_q \ll \min\{M_n^{-\beta}, 1\} 2^{2nd\beta} \|A_n(f;\cdot)\|_p, \qquad (16)$$

де $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Перейдемо до розгляду випадку $2 \le p \le q \le \infty$. При цьому нам буде достатньо розглянути лише $p = 2$ і $\theta = \infty$, тобто знайти оцінки зверху для величини $\tau_M(H^{\Omega}_2)_q$.

Нехай $f \in H^{\Omega}_2$ і $m \in \mathbb{N}$ — довільне задане число. Приймаючи до уваги співвідношення (13), покладемо

$$M_1 = (2^{m+1}-1)^d \asymp 2^{md},$$

$$M_n = [M_1 2^{-\kappa(n-m)}],\quad n \ge m,$$

де $\kappa > 0$ — число, що буде вибране пізніше, $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$. Нехай $M = C(\kappa) 2^{md}$, де $C(\kappa) > 0$ — достатньо велике число.

Тоді $M_0 := M_1 + \sum\limits_{n=m}^{\infty} M_n < M$ і $M_0 \asymp 2^{md}$, причому існує $n_0 = n_0(\kappa) \ge m$ таке, що $M_n \ge 1$ при $m \le n \le n_0$ і $M_n = 0$ при $n > n_0$.

Використовуючи лему 1, можна записати

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_{\infty} \ll M_n^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) \|A_n(f,x,y)\|_2, n \le n_0,$$

звідки з врахуванням нерівності (9) отримаємо

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1} 2^{nd} \Omega(2^{-n}) \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right)$$

і

$$\tau_M(f)_q \leq \tau_M(f)_\infty \leq \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll$$

$$\ll M_1^{-1} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{\kappa(n-m)} \Omega(2^{-n}) 2^{nd} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}) =$$

$$= M^{-1} 2^{-\kappa m} \sum_{n=m}^{n_0} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n(\alpha-d-\kappa)} \times$$

$$\times \log(1+2^{(n+1)d+\kappa(n-m)+1} M^{-1}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}). \qquad (17)$$

Вибравши $\kappa > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $\alpha - d - \kappa > 0$, із (17), приймаючи до уваги умову $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, будемо мати

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-1} 2^{-\kappa m} \Omega(2^{-m}) 2^{n(d+\kappa)} + \Omega(2^{-n_0}) \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-m}) \asymp \Omega(M^{-\frac{1}{d}}).$$

Далі, з врахуванням попередньо зроблених зауважень, приходимо до висновку, що

$$\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ll \Omega(M^{-\frac{1}{d}})$$

при $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

У випадку $1 \leq p < q \leq 2$, $\alpha > 2d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ зі співвідношення (13), враховуючи (16), для $f \in H_p^{\Omega}$ при заданих вище n, n_0, m і $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ отримаємо

$$\tau_M(f)_q \leq \sum_{n=m}^{n_0} \|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \|A_n(f;\cdot)\|_q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \Omega(2^{-n}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}) \ll$$

$$\ll M_1^{-\beta} 2^{-\kappa\beta m} \sum_{n=m}^{n_0} \Omega(2^{-n}) 2^{n\beta(2d+\kappa)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}) =$$

$$= M_1^{-\beta} 2^{-\kappa\beta m} \sum_{n=m}^{n_0} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{\alpha n}} 2^{-n(\alpha-\beta(2d+\kappa))} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}).$$

Далі, вибираючи $\kappa > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $\alpha - \beta(2d+\kappa) > 0$, з попереднього порядкового співвідношення знаходимо

$$\tau_M(f)_q \ll M_1^{-\beta} 2^{-\kappa\beta m} \frac{\Omega(2^{-m})}{2^{\alpha m}} 2^{-m(\alpha-\beta(2d+\kappa))} + \Omega(2^{-n_0}) \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-m}) 2^{md\beta} + \Omega(2^{-m}) \asymp \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Звідси отримаємо

$$\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ll \Omega(M^{-\frac{1}{d}}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Залишилося записати оцінку зверху для випадку $1 \le p < 2 < q \le \infty$. Будемо користуватись міркуваннями, аналогічними попереднім, при цьому досить обмежитись двома значеннями параметрів $\theta = \infty$ і $q = \infty$.

Для оцінки зверху величини $\tau_M(H^{\Omega}_p)_\infty$, $1 \le p < 2$, використаємо (13) зі значеннями m, M, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, які встановлені в попередніх випадках.

Нехай $f \in H^{\Omega}_p$ і $g_n(z) = g(x,y)$ — функції, що визначені за формулою (15). Згідно з лемою 1

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot))_\infty \ll M_n^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) \times$$

$$\times \|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_2, \qquad (18)$$

і внаслідок нерівності (16), з врахуванням (9),

$$\|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_2 \ll M_n^{-\gamma} 2^{nd\gamma} \|A_n(f,x,y)\|_p \ll$$
$$\ll M_n^{-\gamma} \Omega(2^{-n}) 2^{nd\gamma}, \tag{19}$$

де $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.

Із порядкових нерівностей (18) і (19) будемо мати

$$\tau_{2M_n}(A_n(f;\cdot)) \ll M_n^{-1-\gamma} \Omega(2^{-n}) 2^{n(2d\gamma+d)} \cdot \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right). \tag{20}$$

Така ж оцінка, очевидно, зберігається і для $\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty$. Враховуючи це, підставляючи праву частину (20) в (13) замість $\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty$, будемо мати

$$\tau_M(f)_\infty \ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-1-\gamma} \Omega(2^{-n}) 2^{n(d+2d\gamma)} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) +$$
$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}) \ll M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\kappa m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \times$$
$$\times \sum_{n=m}^{n_0} \Omega(2^{-n}) 2^{\kappa n(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})+nd+2nd\gamma} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) +$$
$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}) \asymp M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\kappa m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \times$$
$$\times \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-n\alpha}} 2^{-n(\alpha - \frac{2d}{p} - \kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}))} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-n}). \tag{21}$$

Підібравши $\kappa > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $\alpha - \frac{2d}{p} - \kappa(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}) > 0$, із співвідношення (21) одержуємо

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\kappa m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \Omega(2^{-m}) 2^{m(\frac{2d}{p}+\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}))} +$$
$$+ \Omega(2^{-m}) \asymp M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \Omega(2^{-m}) 2^{\frac{2md}{p}} + \Omega(2^{-m}) \asymp$$

$$\asymp \Omega(M^{-\frac{1}{d}})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Із співвідношення (22) отримаємо оцінку

$$\tau_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ll \Omega(M^{-\frac{1}{d}})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

при $1 \le p < 2 < q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Отже, оцінки зверху в теоремі доведено.

Для того, щоб записати оцінки знизу, достатньо їх записати для функцій $2d$ змінних $g(x,y)$ вигляду $g(x,y) = f(x-y)$, де $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. Відповідні результати було встановлено автором в роботі [27].

1. *Бернштейн С.Н.* Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений. — М.: Изд–во АН СССР. — 1954. — Т.2. — 626 с.
2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
3. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163–1165.
4. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
5. *Гольдман М.Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1984. — **170**. — С. 84–106.
6. *Калябин Г.А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1977. — **232**, №6. — С. 1245–1248.
7. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. — 2002. — **18**, №4. — P. 815–832.
8. *Xu Guiqiao.* The n-wigths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. — 2005. — **25B**, №4. — P. 663–671.
9. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студії. — 2011. — **35**, №1. — С. 66–73.
10. *Войтенко С.П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №9. — С. 1189–1199.
11. *Войтенко С.П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. —**61**, 11. — С. 1473–1484.

12. *Schmidt E.* Zur Theoric der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — P. 433–476.
13. *Micchelli C.A., Pinkus A.* Some problem in the approximation of functions of two variables and n–widths of integral operators // J. Appr. Theory. — 1978. — 24. — P. 51–77.
14. *Бабаев М.–Б.А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. — 1990. —**48**, №6. — С. 10–21.
15. *Бабаев М.–Б.А.* О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами // Мат. сб. — 1991. — **182**, №1. — С. 122–129.
16. *Мирошин Н.В., Хромов В.В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. — 1982. —**32**, №5. — С. 721–727.
17. *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161–178.
18. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.
19. *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1986. — **173**. — С. 243–252.
20. *Темляков В.Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. — 1987. — **176**, №1. — С. 16–33.
21. *Темляков В.М.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1992. — **194**. — С. 229–248.
22. *Романюк А.С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2009. — **6**, №1. — С. 222–236.
23. *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, №2. — С. 69–98.
24. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 4. — С. 536–551.
25. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского–Бесова // Укр. мат. журн. — 2011. —В друці.
26. *Jakson D.* Certain problem of closet approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — **39**, №12. — P. 889–906.

27. *Соліч К.В.* Білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 325–337.