

Варіант №1.

1. Знайти центр S і радіус R сферичної поверхні, яка проходить через точку $P(4; -1; -1)$ і дотикається всіх трьох координатних площин.

2. Дослідити і зобразити в системі координат фігуру: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

3. Точка $P(2; -1; -1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

4. Встановити взаємне положення прямих $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$ і

$$\begin{cases} x = 9t; \\ y = 5t; \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

Варіант №2.

№1. Відомі три вершини $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ і $C(1; 2; -3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D , протилежну до B . Виконати малюнок в системі координат.

№2. Дослідити і зобразити в системі координат фігуру: $3y^2 - 4z^2 + 2x = 1$.

№3. Дані вершини тетраедра $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(0; 2; -3)$, $D(-1; -2; 1)$. Знайти координати точки D' , симетричної точці D відносно площини грані ABC .

№4. Встановити взаємне положення прямих і якщо вони перетинаються, то написати рівняння площини, яка їх містить

$$x = -1 + t, y = -2 + t, z = 1 - t, \begin{cases} 2y - z + 2 = 0; \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$$

Варіант №3.

№1. Вершини трикутника $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ і $C(-4; 7; 5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B .

№2. Дослідити і зобразити в системі координат фігуру: $yz + z^2 = 1$.

№3. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(5; 1; 2)$ і перпендикулярна площині $\Pi: x - y - z - 1 = 0$.

№4. Скласти рівняння прямої, яка лежить в площині $y + z = 1$ і перетинає прямі $x = -t, y = t, z = t$, і $x = 1-t, y = 1+t, z = t$. Система координат афінна.

Варіант №4.

№1. Вершинами трикутника є точки $A(-1; 3; 2)$, $B(0; 1; 4)$, $C(5; 3; -10)$. Обчислити довжину бісектриси зовнішнього кута трикутника при вершині B .

№2. Визначити тип поверхні і зобразити в системі координат при $\lambda = 1, \lambda > 1, \lambda < 1$, $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$.

№3. В кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дані рівняння площини $(ABC): 2x - y + 2z + 15 = 0$, $(A_1 B_1 C_1): x - 2y - 2z + 6 = 0$ і центр грані $A_1 B_1 C_1 D_1$ $M_0(1; -1; 0)$. Написати рівняння площин інших граней куба.

№4. Скласти параметричне рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 4z = 0; \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$

Варіант №5.

№1. Дані дві вершини трикутника : $A(-4; -1; 2)$, $B(3; 5; -16)$. Знайти третю вершину C , знаючи, що середина сторони AC лежить на OY , а середина BC – в площині XOZ . Виконати малюнок в системі координат.

№2. Визначити тип і зобразити в системі координат поверхню $x^2 - y^2 = \lambda$ (при $\lambda = 1, \lambda > 1, \lambda < 1$).

№3. Знайти рівняння сфери радіуса $R=6$, яка дотикається до площини $\Pi: x+2y-2z+1=0$ в точці $M_0(3; 0; 2)$.

№4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(3; -1; -4)$, перетинає вісь OY і паралельна площині $y+2z=0$.

Варіант №6.

№1. Знайти відношення, в якому кожна з площин координат ділить відрізок AB : $A(2; -1; 7)$, $B(4; 5; -2)$. Виконати малюнок в системі координат.

№2. Визначити тип поверхні і зобразити в системі координат $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$ (при $\lambda = 1, \lambda > 1, \lambda < 1$)

№3. Знайти площину, яка розміщена між площинами $x-2y+z-2=0$ і $x-2y+z-6=0$ і ділить відстань між ними у відношенні 1:3.

№4. Скласти рівняння прямої, паралельної прямій $x-3y+z=0$, $x+y-z+4=0$ і перетинаючи дві прямі $x=3+t, y=-1+2t, z=4t$, $x=-2+3t, y=-1, z=4-t$.

Варіант №7.

№1. Дані дві точки $A(8; -6; 7)$ і $B(-20; 15; 10)$. Встановити, чи перетинає пряма AB , яку-небудь з осей координат. Якщо це так, то знайти координати точки перетину і виконати малюнок в системі координат.

№2. Зобразити поверхню $x^2 + z^2 + x = 1$ в системі координат.

№3. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Обчислити об'єм цього куба.

№4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і перетинає дві прямі: $x=t, y=1-t, z=3+t$ і $x=2+2t, y=3-t, z=4+3t$.

Варіант №8.

№1. Перевірити, що три дані точки $A(1; -5; 3)$, $B(5; -1; 7)$ і $C(6; 0; 8)$ лежать на одній прямій. Виконати малюнок в системі координат.

№2. Дослідити вигляд ліній перетину поверхонь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8; \end{cases}$ і зобразити в системі координат.

№3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$ і віддалена від початку координат на $\frac{2}{\sqrt{3}}$ лінійних одиниць.

№4. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і через пряму $x=3-2t, y=1+t, z=t$.

Варіант №9.

№1. Дані дві прямі: одна з них проходить через точки $A(-3; 5; 15)$ і $B(0; 0; 7)$, а друга – через точки $C(2; -1; 4)$ і $D(4; -3; 0)$. Встановити чи перетинаються ці прямі, і якщо перетинаються, то знайти точку перетину. Виконати малюнок в системі координат.

№2. Знайти рівняння проекції лінії перетину поверхонь $x^2 + 2y^2 = 2z$, $x + 2y + z = 1$ на площину $ХОУ$. Встановити що це за крива і накреслити її в площині $ХОУ$.

№3. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$ перпендикулярно площинам $\Pi_1: x+3y-z+3=0$; $\Pi_2: 2x+y-2z+1=0$.

№4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $(-3; 1; 0)$ і через пряму $\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0; \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

Варіант №10.

№1. Як перетвориться рівняння $z=xy$, якщо не змінюючи осі OZ , прийняти бісектриси кута $ХОУ$ за нові осі абсцис і ординат (система координат декартова).

№2. Знайти рівняння проекції лінії перетину поверхонь $x^2 - y^2 = 2z$ і $x + y + z = 1$ на площину $ХОУ$. Встановити що це за крива і накреслити її в площині $ХОУ$.

№3. Написати рівняння сфери, яка дотикається до площини $3x-6y-2z+14=0$ в точці $(2; 1; 7)$, якщо її радіус рівний 7.

№4. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x=2+3t, y=-1+6t, z=4t$ і паралельна прямій $x=-1+2t, y=3t, z=-t$.

Варіант №11.

№1. Знайти центр ваги тетраедра, який має вершини $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. Центр ваги тетраедра лежить на прямій, що сполучає будь-яку його вершину з центром ваги протилежної грані і ділить відрізок між цими точками у відношенні 3:1.

№2. В системі координат зобразити поверхню $x^2 + 4y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.

№3. Дано дві площини $\Pi_1: x-y-z-7=0$, $\Pi_2: 2x+y-3z+3=0$. Скласти систему лінійних нерівностей, які визначають той двогранний кут, утворений площинами Π_1 і Π_2 , якому належить точка $M_0(3; -4; 3)$.

№4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $(-2; 3; 0)$ і через пряму $x=1, y=2+t, z=2-t$.

Варіант №12.

№1. Вершини тетраедра співпадали з точками $A(-7; 3; -2)$, $B(0; 2; 1)$, $C(4; -1; 0)$, $D(-1; 0; -3)$. В результаті деякого поступального руху центр ваги тетраедра виявився в точці $M(6; -2; 1)$. Які будуть координати вершин тетраедра після цього переміщення? Виконати малюнок в системі координат.

№2. Побудувати поверхню $x^2 + z^2 + 2y - 1 = 0$.

№3. Дані точки $A(5; -1; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(2; 1; -2)$. Скласти лінійну нерівність, яка задає той із півпросторів, що визначається площиною ABC , якому належить точка $E(1; 1; 1)$.

№4. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь OY і паралельна лінії перетину двох площин $x+4y-2z+7=0$, $3x+7y-2z=0$.

Варіант №13.

№1. За одиничні вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ системи координат взяті ребра $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ паралелепіпеда. За одиничні вектори $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}$ другої системи- відповідно діагоналі граней ВОС, СОА, АОВ. Знайти координати центрів граней паралелепіпеда в обох системах.

№2. Знайти геометричне місце середин хорд сфери $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, які проходять через точку $S(x_0; y_0; z_0)$.

№3. Через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ провести площину паралельну площині ОУ.

№4. Знайти кути, утворені протилежними ребрами тетраедра з вершинами $A(3; -1; 0)$, $B(0; -7; 3)$, $C(-2; 1; -1)$, $D(3; 2; 6)$.

Варіант №14.

№1. Обчислити координати ортогональної проекції C_1 точки С на пряму АВ; $A(2; -1; 0)$, $B(-1; 3; 1)$, $C(0; 1; -1)$ і площину трикутника АВС.

№2. Знайти рівняння площин, які ділять пополам двогранні кути між площинами.

№3. Знайти геометричне місце середин хорд сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, які проходять через точку $(-R; 0; 0)$.

№4. Скласти рівняння проекції прямої $\begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0; \\ x + y = 0; \end{cases}$ на площину ХОZ.

Варіант № 15.

№1. Трикутник має вершини $A(1; 2; 3)$, $B(3; 1; 4)$ і $C(-1; 1; 0)$. На прямій AB знайти точку P таку, щоб вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CP} були перпендикулярні; визначити площу трикутника ABC .

№2. Визначити як розмещена точка $A(3; 0; 4)$ відносно поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 13 = 0$. Виконати малюнок в системі координат.

№3. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь OY і рівновіддалена від точок $A(2; 7; 3)$, $B(-1; 1; 0)$.

№4. Скласти рівняння проєкції прямої $x = 1 + t$; $y = -1 + t$; $z = 4 + t$ на площину $2x - y + z - 1 = 0$.

Варіант № 16.

№1. Вершинами трикутника є точки $A(-1; 2; 1)$, $B(-6; 2; 5)$, $C(3; -1; 1)$. Обчислити довжину висоти, опущену з вершини B на AC .

№2. Скласти рівняння геометричного місця точок простору, кожна з яких рівновіддалена від даної точки і від даної площини.

№3. Написати рівняння площини, перпендикулярної площині $5x - y + z - 1 = 0$ і яка перетинає цю площину по прямій, що лежить в площині (XY) .

№4. Знайти проєкцію точки $(1; 2; -3)$ на площину $6x - y + z - 1 = 0$.

Варіант № 17.

№1. Дано трикутник ABC; A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6). Знайти кут між стороною AB і медіаною BK. Виконати малюнок в системі координат.

№2. Скласти рівняння ГМТ, які знаходяться в два рази ближче від даної точки, ніж від даної площини.

№3. Через дві точки A(1; 1; -2) і B(-2; 4; 1) провести площину, яка утворює з площиною $x - z = 0$ кут 60° .

№4. Знайти точку, симетричну точці (2; 7; 1) відносно площини $x - y + z + 1 = 0$.

Варіант № 18.

№1. Знайти кут між бісектрисою кута B і медіаною проведеною до сторони BC трикутника, вершинами якого є точки A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3).

№2. Скласти рівняння ГМТ, які знаходяться в три рази далі від заданої точки, ніж від заданої площини.

№3. Задано дві площини $\pi_1: 5x - y + z + 1 = 0$ і $\pi_2: x + y - 2z + 1 = 0$. Скласти систему нерівностей, що визначають внутрішню область того двогранного кута, якому належить точка A(3; 1; 2).

№4. Скласти рівняння прямої, перпендикулярної до площини OXZ, яка перетинає дві прямі $x = 1 + t$, $y = 4 + t$, $z = 3 - t$ і $x = -t$, $y = -3 + t$, $z = 1 - t$.

Варіант № 19.

№1. Знайти кут між бісектрисою і медіаною, що виходять з вершини В трикутника $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

№2. Знайти ГМТ, які знаходяться на відстанні чотирьох одиниць від площини XOY і на відстані трьох одиниць від точки $A(1; 5; 3)$.

№3. Знайти область, яка визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x + y - z + 5 > 0, \\ 2x - 3y + z - 1 < 0, \\ 3x + y - z - 6 < 0. \end{cases}$$

№4. Знайти рівняння і довжину висоти трикутника, який утворюється перетином площини $3x - y + z - 2 = 0$ і трьома координатними площинами, при умові, що вершина трикутника лежить на осі OZ .

Варіант № 20.

№1. Пряма утворює з осями координат кути в 60° . Під яким кутом вона нахилена до третьої осі?

№2. Знайти ГМТ, різниця віддалей яких до двох даних точок $P(c; 0; 0)$ і $Q(-c; 0; 0)$ є величина стала, рівна $2a$.

№3. Дані дві точки $A(3; 5; 1)$ і $B(2; -6; 3)$. Знайти відношення, в якому ділить відрізок AB точка C перетину прямої AB з площиною $2x - y + z = 1$.

№4. Знайти точку, симетричну даній $(4; 3; 10)$ відносно прямої $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$.

Варіант № 21.

№1. Визначити відстань точки $A(12; -3; 4)$ від початку координат і від осей координат.

№2. Знайти ГМТ, різниця квадратів віддалей яких до двох даних точок є величина стала, рівна c .

№3. Скласти рівняння множини точок, віддалених від площини $6x - y + (z - 4) = 0$ на відстань, рівну 3 .

№4. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(-1; 0; 4)$ на пряму $x = 1 + t$, $y = t$, $z = t - 1$.

Варіант № 22.

№1. Методом координат перевірити, що прямі, які з'єднують середини суміжних сторін косоного чотирикутника утворюють паралелограм, вершини якого не лежать в одній площині.

№2. Дослідити і побудувати поверхню $x^2 - y^2 - (y - z) = 0$.

№3. Встановити розміщення площини $2x - y - z + 1 = 0$ відносно середини $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 21 = 0$ і виконати малюнок в системі координат.

№4. Через точку перетину площини $x + y + z - 1 = 0$ з прямою $y = z + 1$ провести пряму, яка лежить в цій площині і перпендикулярна до даної прямої.

Варіант № 23.

№1. Довести, що прямі, які з'єднують середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці і діляться нею пополам.

№2. Зобразити в системі координат область:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z < 0, \\ z < 4. \end{cases}$$

№3. Знайти рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 4z - 4 = 0$ і паралельна площині $6x + 2y + z = 1$.

№4. Знайти відстань від точки $(1; 3; 5)$ до прямої, по якій перетинаються площини $2x + y + z - 1 = 0$, $3x + y + z - 1 = 0$.

Варіант № 24.

№1. Через середину кожного ребра тетраедра проведена площина, що містить протилежне ребро. Довести, що ці площини перетинаються в одній точці.

№2. Зобразити в системі координат область:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \leq 0, \\ |z| \leq 4. \end{cases}$$

№3. Довести, що чотири площини $5x - z + 1 = 0$, $3y + z - 1 = 0$, $22x + 11y - 4z + 5 = 0$, $3x + 11y + z - 1 = 0$ перетинаються в одній точці. Знайти координати цієї точки.

№4. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих

$$l_1 : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

Варіант № 25.

№1. Діагональ ОД прямокутного паралелепіпеда утворює кути 60° з ребрами ОА і ОВ. Який кут вона утворює з ребром ОС?

№2. Зобразити в системі координат фігуру:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - 4y \leq 0, \\ |z| \leq 4. \end{cases}$$

№3. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z = 38$ в точці $M_0(0; 1; 3)$.

№4. Написати рівняння прямої, на якій лежить висота АН трикутника АВС, якщо $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 6; -2)$.

Варіант № 26.

№1. Обчислити координати ортогональної проекції точки А на сторону ВС і площу трикутника, вершинами якого є точки: $A(6; 2; 4)$, $B(1; 0; -1)$, $C(-1; 4; 3)$.

№2. Зобразити в системі координат фігуру:

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 4 \leq 0, \\ |z| \leq 2. \end{cases}$$

№3. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x - y + z - 2 = 0$ і координатними площинами.

№4. Знайти найкоротшу віддаль між діагоналлю куба і діагоналлю грані, яка її не перетинає, якщо ребро куба рівне 1.

Варіант № 27.

№1. Обчислити координати проекції H точки A на сторону BC і площу трикутника, вершинами якого є точки: $A(4; 6; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; -1; 4)$.

№2. Скласти рівняння ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.

№3. Написати рівняння площини паралельної осі OZ , яка відтинає на осі OX напрумлениий відрізок $a = 3$, а на осі OY напрумлениий відрізок $b = -2$. Виконати малюнок в системі координат.

№4. Дані дві прямі $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{-1}$. Довести, що вони мимобіжні, написати рівняння площини, що проходить через кожную з них паралельно другій прямій. Знайти відстань між прямими і відстань між паралельними площинами.