УДК 517.9, 681.3

А.В. Чичурин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ *Mathematica* ПРИ ПОИСКЕ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

В данной работе развиваются два метода интегрирования уравнений Абеля с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*, а также приводится новый метод исследования этих уравнений, связанный с построением системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Последняя система эквивалентна нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, которое обладает двумя однопараметрическими семействами решений в форме общих решений двух уравнений Абеля первого рода.

1. Краткий обзор уравнений Абеля и постановка задачи

Простейшими с точки зрения структуры правой части нормального дифференциального уравнения первого порядка, после уравнения Риккати [1], являются уравнения вида

$$y' = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3, \tag{1}$$

$$(a_0 y + a_1) y' = b_0 y^2 + b_1 y + b_2, \tag{2}$$

коэффициенты которых $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, p, q$ являются функциями независимого переменного x. Уравнения (1), (2) называют соответственно *уравнениями Абеля первого и второго рода* [2]. Посредством элементарных преобразований эти уравнения можно привести к уравнениям вида

$$y' = y^3 + q(x), \tag{3}$$

$$yy' - y = r(x). \tag{4}$$

Уравнение (3) называют *уравнением Абеля первого рода в канонической форме*, а уравнение (4) – *уравнением Абеля второго рода в канонической форме*. Соотношение межу уравнениями (1) и (2) следующее: если известно одно частное решение уравнения (1), то его можно записать в форме (2).

Уравнения (1), (2) очень часто встречаются в самой теории дифференциальных уравнений и в ее приложениях. Некоторые примеры уравнений высших порядков, сводящихся к уравнениям (1), (2) приведены в работах [3-5].

В качестве примера дифференциального уравнения третьего порядка, сводящегося к уравнению Абеля, приведем уравнение

$$y^2 y''' = b\, yy' y'' + d\, y'^3 + h\, y^3 y'' + p\, y^2 y'^2 + q\, y^4 y' + f\, y^6, \tag{5}$$

где коэффициенты b, d, h, p, q, f - постоянные величины. Уравнение (5) возникает при решении задачи о нахождении уравнений *P*-типа среди нормальных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальными правыми частями по y', y'' и рациональными правыми частями по y [6]. В статье [4] показано, что уравнение (5) можно свести к уравнению Абеля, для чего введем замену

$$\frac{dy}{dx} = u\, y^2, \quad \frac{du}{dx} = y\, v,$$

где v – новая неизвестная функция. В результате получим уравнение

$$v\frac{dv}{du}=[(7-b)u+h]v+(2b+d-6)u^3+(2h+p)u^2+qu+f$$

или

$$w'=-\alpha(u)w^3-\beta(u)w^2, \qquad (6)$$

где

$$vw=1,\quad \alpha(u)\equiv(7-b)u+h,\quad \beta(u)\equiv(2b+d-6)u^3+(2h+p)u^2+qu+f\,. \qquad (7)$$

Уравнение (6)-(7) является уравнением Абеля вида (1).

Таким образом, появляется надежда, что новые подходы в исследовании уравнений Абеля помогут продвинуть, в том числе, и исследование уравнения (5). Кроме того, в теории нелинейных уравнений третьего порядка уравнение Абеля возникает и при отыскании коэффициентов уравнения Шази с шестью особыми точками [7].

Аналитические свойства решений уравнений (1), (2) существенно отличаются от свойств решений уравнений Риккати. Это объясняется двумя причинами:

1) решения уравнений (1), (2) обладают подвижными алгебраическими точками ветвления второго порядка в то время, как решения уравнений Риккати могут иметь только подвижные полюсы первого порядка [4];

2) уравнение Риккати всегда сводится к однородному линейному уравнению второго порядка, в то время как для уравнений (1)-(2) это возможно только в исключительных случаях.

Для отыскания общего решения уравнения Риккати достаточно знать его одно частное решение, в то время как для уравнений (1), (2) в общем случае вообще не известен факт возможного построения его общего решения по известным частным решениям. С другой стороны очевидно и то, что для построения уравнения вида (1) всегда достаточно знать его четыре различные частные решения [4].

Уравнение Абеля будем называть *разрешимым*, если оно интегрируется в квадратурах в замкнутом виде или сводится к уравнению Риккати. Наиболее полный список разрешимых уравнений Абеля приведен в справочнике [8]. В.Ф.Зайцев и его ученики на основе дискретно-группового метода получили ряд новых разрешимых случаев уравнения Абеля [1, 9]. Метод непрерывного группового анализа для исследования уравнения Абеля (1) приведен в работе [10].

В данной работе мы развиваем два метода интегрирования уравнений Абеля с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*, а также приводим новый метод исследования этих уравнений, связанный с построением системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Метод интегрирующего множителя с двумя известными частными решениями.

Нашей целью является отыскание интегрирующего множителя специальной формы для уравнения Абеля

$$\frac{dv}{dx}=a_0(x)v^3+a_1(x)v^2+a_2(x)v+a_3(x) \qquad (8)$$

($a_i(x)$ $(i=0,1,2,3)-$ непрерывно дифференцируемые функции от x), у которого известны два частных решения.

Введем замену

$$v=\frac{\alpha(x)\,y+\beta(x)}{\gamma(x)\,y+\delta(x)}\,, \qquad (9)$$

которая позволяет преобразовать уравнение (8) в уравнение

$$\Delta\ (\gamma\ y+\delta)\ y' = b_0(x)y^3 + b_1(x)y^2 + b_2(x)y + b_3(x)\,, \tag{10}$$

где

$$\Delta \equiv \alpha\delta - \beta\gamma\,, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} b_0 &\equiv \gamma(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2\gamma + a_2\alpha\gamma^2 + a_3\gamma^3\,,\\ b_1 &\equiv \delta(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + \gamma(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta\gamma' - \beta'\gamma) + 3a_0\alpha^2\beta +\\ &\quad + a_1(2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta) + a_2(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + 3a_3\gamma^2\delta\,,\\ b_2 &\equiv \gamma(\beta\delta' - \delta\beta') + \delta(\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta\gamma' - \beta'\gamma) + 3a_0\alpha\beta^2 +\\ &\quad + a_1(2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma) + a_2(2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2) + 3a_3\gamma\delta^2\,,\\ b_3 &\equiv \delta(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + a_0\beta^3 + a_1\beta^2\delta + a_2\beta\delta^2 + a_3\delta^3\,. \end{aligned} \tag{12_k}$$

Пусть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ $(v_1 \neq v_2)$ – любые частные решения уравнения (8). Величины α и β в преобразовании (9) выберем так, чтобы

$$\alpha = \gamma\, v_1, \qquad \beta = \delta\, v_2\,. \tag{13}$$

Легко видеть, что если функции α и β выбраны согласно условиям (13), то коэффициенты $b_0 \equiv 0$, $b_3 \equiv 0$, а $\Delta = \gamma\delta(v_1 - v_2)$. Чтобы получить тождество $\Delta \equiv 1$, положим

$$\gamma\delta = \frac{1}{v_1 - v_2}\,. \tag{14}$$

Подставляя величины (13) в уравнения (9), (12_2) и (12_3) и учитывая (14), найдем

$$b_1 \equiv \gamma\left[\frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma} - (v_1 - v_2)(a_0(2v_1 + v_2) + a_1)\right],\ \ b_2 \equiv \delta\left[\frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma} - (v_1 - v_2)(a_0(2v_2 + v_1) + a_1)\right],$$

и тогда уравнение (10) примет вид

$$\begin{aligned} (\gamma\ y + \delta)y' = [\gamma&\left(\frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma} - (v_1 - v_2)\,(a_0(2v_1 + v_2) + a_1)\right)y +\\ + \delta&\left(\frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma} - (v_1 - v_2)\,(a_0(2v_2 + v_1) + a_1)\right)\ ]\,y\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Простейший случай уравнения (15) – это случай $\gamma = \delta$. Тогда уравнение (15) примет вид

$$(y+1)y' = [-(v_1 - v_2)(3a_0(v_1 + v_2) + 2a_1)y + (v_1 - v_2)(a_0(2v_2 + v_1) + a_1)(y-1)]\,y\,. \tag{16}$$

Если положить в уравнении (16)

$$3a_0(v_1 + v_2) + 2a_1 \equiv 0\,, \tag{17}$$

то получим уравнение с разделяющимися переменными вида

$$2(y+1)\,y' = -a_0(v_2 - v_1)^2\,y(y-1)\,,$$

из которого найдем

$$y^{-2}\,(y-1)^4 = C_1 \exp\,[-\int a_0(v_2 - v_1)^2\,dx]\,, \tag{18}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Отсюда следует

Теорема 1. *Если два частных решения v_1 и v_2 $(v_1 \neq v_2)$ уравнения Абеля (8) удовлетворяют тождеству (17), то уравнение (8) разрешимо.*

Доказать теорему 1 можно и другим способом. Так как v_1 и v_2 частные решения уравнения (8) и последнее удовлетворяет тождеству (17), то из (17) найдем

$$v_2 = -v_1 - \frac{2a_1}{3a_0}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (8) и, учитывая, что v_1 и v_2 его частные решения, получим

$$v_1' + \left(\frac{2a_1}{3a_0}\right)' - a_0\left(v_1 + \frac{2a_1}{3a_0}\right)^3 + a_1\left(v_1 + \frac{2a_1}{3a_0}\right)^2 - a_2\left(v_1 + \frac{2a_1}{3a_0}\right) + a_3 \equiv 2\,I(x) \equiv 0,$$

где $I(x)$ – *инвариант Лиувилля* [4, с.169] $(I(x) \equiv a_0{}^2 a_3 + \frac{2}{27}a_1{}^3 - \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0' a_1 - a_1' a_0}{3})$, равенство нулю которого гарантирует разрешимость уравнения Абеля. ■

Пример 1. Рассмотрим уравнение Абеля

$$v' = \frac{1}{x^3(x^2-1)}v^3 + \frac{3}{x(x^2-1)}v^2 + \frac{4x^3-2x}{x^2(x^2-1)}v. \tag{20}$$

Двумя частными решениями уравнения (20) являются функции

$$v_1 = -x - x^2, \qquad v_2 = x - x^2,$$

которые вместе с коэффициентами этого уравнения удовлетворяют тождеству (17). Общее решение уравнения (20), согласно замене (9) и соотношению (18), имеет вид

$$v = -\frac{x(x-1+(1+x)y)}{y+1},$$

где $y = 1 + \frac{x(x \pm \sqrt{x^2 + 4C_1(x^2-1)})}{2C_1(x^2-1)}$, C_1 – произвольная постоянная.

Далее мы будем решать задачу нахождения для уравнения Абеля (15) интегрирующего множителя вида

$$\mu = f(x)e^{\frac{k(x)y+h(x)}{p(x)y+q(x)}}\left(y-\phi_1(x)\right)^{\alpha}\left(y-\phi_2(x)\right)^{\beta}\left(y-\phi_3(x)\right)^{\gamma}. \tag{21}$$

где $u = u(x),\ h = h(x),\ p = p(x), q = q(x)$ – аналитические функции от x; α, β, γ – некоторые постоянные, непрерывно дифференцируемые функции $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$ не являются решениями уравнения (15), а показатель экспоненты есть дробно-рациональная функция указанного вида. Не теряя общности полагаем, что $p \neq 0, \quad hp - kq \neq 0$.

Введем обозначения

$$s_1 = (v_1 - v_2)(a_0(2v_1 + v_2) + a_1), \quad s_2 = (v_1 - v_2)(a_0(v_1 + 2v_2) + a_1). \tag{22}$$

Сформулируем теперь следующую теорему [11].

Теорема 2. *Если имеют место соотношения*

$$k' = 2s_1 - f'/f, \tag{23}$$

$$h = \frac{1}{s_1 - s_2}((-2 + (4+k)q - 2q^2)s_1 + (1 - (2+k)q + q^2)s_2), \tag{24}$$

$$q' = \frac{q(s_2 - q s_1)}{q-1}, \tag{25}$$

$$-2s_1^2 s_2 - s_2^3 + s_2 s_1' + q^2(2s_1^3 - 3s_1^2 s_2 + s_2 s_1' + s_1(s_2^2 - s_2')) +$$
$$+ s_1(3s_2^2 - s_2') + 2q(2s_1^3 - 5s_1^2 s_2 - s_2(s_2^2 + s_1') + s_1(4s_2^2 + s_2')) = 0, \tag{26}$$

то дифференциальное уравнение

$$(y+1)y' = -(s_1 y^2 + s_2 y) \tag{27}$$

имеет интегрирующий множитель вида

$$\mu = f(x)\, Exp\left[\frac{k(x)y + h(x)}{y + q(x)}\right]. \qquad (28)$$

Доказательство. Условие того, что (21) есть интегрирующий множитель уравнения (27) имеет вид

$$\frac{\partial(\mu(y+1))}{\partial x} \equiv \frac{\partial(\mu(s_1 y^2 + s_2 y))}{\partial y}. \qquad (29)$$

Подставим (21) в тождество (29) и после преобразований приведем полученное выражение к полиномиальному уравнению шестой степени

$$(m_0 y^3 + m_1 y^2 + m_2 y + m_3)(y^3 - \sigma_1 y^2 + \sigma_2 y - \sigma_3) +$$
$$+ (p^2 y^2 + 2pqy + q^2)(n_0 y^4 + n_1 y^3 + n_2 y^2 + n_3 y + n_4) = 0, \qquad (30)$$

где

$$m_0 = 2p^2 s_1 - (pk' - kp'),$$
$$m_1 = s_2 p^2 + 4s_1 pq + s_1(kq - hp) - (k'q - kq' + h'p - hp') + kp' - k'p,$$
$$m_2 = 2s_1 q^2 + 2s_2 pq + s_2(kq - hp) - (k'q - kq' + h'q - hq') + hp' - h'p,$$
$$m_3 = s_2 q^2 - h'q + hq', \qquad n_0 = \lambda s_1,$$
$$n_1 = \lambda s_2 - \lambda s_1 \sigma_1 + s_1 \psi_1 + \psi_1', \; n_2 = s_1 \psi_2 - s_2(\lambda\sigma_1 - \psi_1) + \psi_1' + \psi_3 - \sigma_1 \psi_1',$$
$$n_3 = s_2 \psi_2 - \sigma_1 \psi_1' + \psi_3 - \psi_4, \quad n_4 = \psi_4, \qquad (30')$$
$$\lambda \equiv \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_1 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \quad \sigma_2 \equiv \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3, \quad \sigma_3 \equiv \varphi_1\varphi_2\varphi_3,$$
$$\psi_1 \equiv \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3, \qquad \psi_2 \equiv \gamma\varphi_1\varphi_2 + \beta\varphi_1\varphi_3 + \alpha\varphi_2\varphi_3,$$
$$\psi_3 \equiv \alpha\varphi_1\varphi_1' + \beta\varphi_2\varphi_2' + \gamma\varphi_3\varphi_3' = \frac{1}{2}(\sigma_1\psi_1 - \lambda\sigma_2 + \psi_2'),$$
$$\psi_4 \equiv \alpha\varphi_1'\varphi_2\varphi_3 + \beta\varphi_1\varphi_2'\varphi_3 + \gamma\varphi_1\varphi_2\varphi_3'.$$

Многочлен из левой части уравнения (30) с коэффициентами (30’) представляет собой весьма громоздкую аналитическую конструкцию в которой неизвестными функциями являются *h, k, p, q*. Приравнивая коэффициенты многочлена (30) нулю, получим систему семи уравнений. Приведем здесь процедуру [11], реализованную в системе кодов СКА *Mathematica 4.0*, которая позволяет решить эту систему относительно функций *h, k, p, q*.

```
Clear[“Global`*”];
eq = (y[x]+1)y’[x] == -(s1[x]y[x]^2 + s2[x]y[x]);
```

$$\mu = f[x]Exp[\frac{k[x]y[x] + h[x]}{p[x]y[x] + q[x]}](y[x] - \phi_1[x])^{\alpha}(y[x] - \phi_2[x])^{\beta}(y[x] - \phi_3[x])^{\gamma};$$

Соответствующее условие для интегрирующего множителя есть eq1

```
eq1 = ∂x(μ Coefficient[eq[[1]],y’[x]/.y[x]→y) == -∂y(μ eq[[2]] /.
        y[x] → y)/.Exp[ _ ]→1 // Simplify;
```

Левую часть уравнения eq1 запишем как многочлен из левой части (30).

```
eq2=Numerator[Together[eq1[[1,4]] ] ] //Collect[#, y, Simplify]&
```

Степень этого многочлена равна 6

```
Exponent[eq2, y]
6
```

Приравняем к нулю коэффициент при y^6 и найдем $k'(x)$ из полученного уравнения.

```
eq3 = Coefficient[eq2, y, 6] == 0;
sol3 = Solve[eq3, k’[x]] [[1]];
```

Затем приравняем к нулю коэффициент при y^5 и, учитывая найденное значение $k'(x)$, из полученного уравнения найдем $h'(x)$.

```
eq4=Coefficient[eq2, y, 5] == 0 /.sol3 //Simplify;
sol4=Solve[eq4, h'[x]] [[1]] //Simplify;
```

Приравнивая коэффициент при y^4 к нулю и, учитывая найденные значения $k'(x)$ и $h'(x)$, найдем $q'(x)$.

```
eq5=Numerator[Together[Coefficient[eq2, y, 4]/.sol3/.sol4]]==0//Simplify;
sol5=Solve[eq5, q'[x]][[1]] //Simplify;
```

Повторим те же самые вычисления для коэффициента при y^3 и найдем значение $h(x)$.

```
eq6=Numerator[Together[Coefficient[eq2, y, 3]/.sol3/.sol4 /.sol5]] == 0 //Simplify;
sol6=Solve[eq6, h[x]] [[1]];
```

Приравнивая коэффициенты при y^2, y, y^0 к нулю и принимая во внимание найденные выше значения $k'(x),\ h'(x), q'(x)$ и $h(x)$, получим систему из трех уравнений, которые обозначим через eq7, eq8 и eq9.

```
eq7 = Numerator[Together[Coefficient[eq2, y,2] /. sol3 /. sol4 /.
        sol5 /. sol6]] == 0 // Simplify
eq8 = Numerator[Together[Coefficient[eq2, y,1] /. sol3 /. sol4 /.
        sol5 /. sol6]] == 0 // Simplify
eq9 = Numerator[Together[Coefficient[eq2, y, 0] /. sol3 /. sol4 /. sol5 /.
          sol6]] == 0 // Simplify
```

Система eq7, eq8, eq9 является однородной относительно двух неизвестных функций *p(x)* и *q(x)*. Необходимое условие существования ненулевого решения этой системы есть вырожденность ее матрицы:

```
 mat = {{ Coefficient[eq7[[1]],p[x],2], Coefficient[eq7[[1]], p[x] q[x]],
          Coefficient[eq7[[1]], q[x], 2]}, {Coefficient[eq8[[1]], p[x], 2],
          Coefficient[eq8[[1]], p[x] q[x]], Coefficient[eq8[[1]], q[x], 2]},
         {Coefficient[eq9[[1]], p[x], 2], Coefficient[eq9[[1]], p[x] q[x]],
          Coefficient[eq9[[1]], q[x], 2] }};
```

Определитель матрицы mat легко вычисляется с помощью следующей команды

```
eq10 = Det[mat] // Simplify
```

$$
\begin{gathered}
2\,\alpha\beta\gamma\ f[x]^3(\phi_1[x]-\phi_2[x])^2(\phi_1[x]-\phi_3[x])^2(\phi_2[x]-\phi_3[x])^2(s_2[x]\phi_1[x]+ \\
+s_1[x]\phi_1[x]^2+(1+\phi_1[x])\phi_1'[x])(s_2[x]\phi_2[x]+s_1[x]\phi_2[x]^2+ \\
+(1+\phi_2[x])\phi_2'[x])(s_2[x]\phi_3[x]+s_1[x]\phi_3[x]^2+(1+\phi_3[x]\phi_3'[x])==0.
\end{gathered}
$$

Из последнего уравнения следует (поскольку φ_i $(i=1,2,3)$ различные функции, которые не являются решениями уравнения (27)) существование трех эквивалентных возможностей:

$$\alpha=0 \quad \text{или} \quad \beta=0 \quad \text{или} \quad \gamma=0\,.$$

Рассмотрим, например, случай $\gamma=0$. Не ограничивая общности, положим *f(x)*=1. Повторяя предыдущие вычисления, получим следующее условие

$$
\begin{gathered}
\alpha\beta\, q[\mathrm{x}]\,(\phi_1[x]-\phi_2[x])^2(s_2[x]\phi_1[x]+s_1[x]\phi_1[x]^2+ \\
+(1+\phi_1[x])\phi_1'[x])(s_2[x]\phi_2[x]+s_1[x]\phi_2[x]^2+ \\
+(1+\phi_2[x])\phi_2'[x])(2p[x]\varphi_1[x]\phi_2[x]+q[x](\phi_1[x]+\phi_2[x])=0
\end{gathered}
$$

Это уравнение подобно рассмотренному нами ранее уравнению, поэтому следует исследовать следующий упрощенный случай: $\beta=\gamma=0$. В результате вычислений получим: $\alpha\,(q[x]+p[x]\varphi_1[x])^2(s_2[x]\phi_1[x]+s_1[x]\phi_1[x]^2+(1+\phi_1[x])\phi_1'[x])=0$.

Последнее уравнение обращается в тождество, если $p=-\dfrac{q}{\varphi_1}$. Однако этот случай невозможен, поскольку в процессе решения системы eq5-eq9 при $\beta=\gamma=0$ получим соотношение $h+k\varphi_1=0$. Последнее соотношение и соотношение $p=-\dfrac{q}{\varphi_1}$ приводят к тому, что показатель экспоненты в (28) становится линейной функцией. Поэтому следующий шаг вычислений будет проводиться при условиях $\alpha=\beta=\gamma=0, \quad p[x]=1$. Вновь повторяя проделанные выше вычисления, получаем соотношения (23)-(26). Теорема 2 доказана. ■

Замечание. Рассматривая для уравнения (27) интегрирующий множитель вида

$$f(x)=Exp\left[\frac{k(x)y+h(x)}{p(x)y+q(x)}\right]\prod_{i=1}^{n}(y-\varphi_i(x))^{\lambda_i},$$

где $\varphi_i\ (i=\overline{1,n})$ различные функции, которые не являются решениями уравнения (27)) мы получим тот же результат, что и для интегрирующего множителя (21).

Пример 2. Рассмотрим уравнение (27), если $s_1=ax$, $s_2=2ax$ (a – постоянная). Решая соответствующую систему уравнений (23)- (26), находим, что

$$k=C+ax^2-\ln|f(x)|,\quad q=1\pm e^{-\frac{ax^2}{2}}\sqrt{e^{ax^2}+e^{2C}},\quad h=k(1\mp e^{-\frac{ax^2}{2}}\sqrt{e^{ax^2}+e^{2C}}).$$

Подставляя эти значения функций *k, q* и *h* в (28) находим интегрирующий множитель: $\mu=e^{ax^2+C}$, где C – произвольная постоянная. Тогда общий интеграл уравнения $(y+1)y'=-(ax\,y^2+2ax\,y)$ есть $y=-1\pm e^{-\frac{ax^2}{2}}\sqrt{e^{ax^2}+e^{2C}}$.

Вывод. Уравнение Абеля первого рода (8) с двумя известными решениями $v_1(x)$ и $v_2(x)$ $(v_1\neq v_2)$ всегда можно привести к уравнению вида (27). Если коэффициенты этого уравнения удовлетворяют соотношениям (23)-(26), то это уравнение можно проинтегрировать в квадратурах в замкнутой форме.

3. Метод интегрирующих функций для уравнения Абеля второго рода с известным частным решением

Метод частных решений, предложенный Б. Кояловичем [3] для уравнения Абеля второго рода (4), позволяет искать новые формы общего интеграла в зависимости от формы уравнения Абеля.

Суть этого метода заключается в следующем. Пусть $\alpha_i=\alpha_i(x)\ (i=\overline{1,n})-$ известные частные решения уравнения (4). Пусть, также $y=y(x)-$ произвольное решение уравнения (4), отличное от α_i. Рассмотрим функцию $f(x,y,\alpha_i)$ как функцию трех аргументов x,y,α_i. Возьмем ее полную производную по x

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y+r}{y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\alpha_i+r}{\alpha_i}. \tag{31}$$

Пусть имеет место тождество

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{y+r}{y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\alpha_i+r}{\alpha_i}=\psi(x,y)\,\omega(x,\alpha_i)\,, \tag{32}$$

где ψ и $\omega-$ функции от указанных аргументов. Тогда уравнение (31) перепишем в виде

$$\frac{df}{dx}=\psi(x,y)\,\omega(x,\alpha_i)\,. \tag{33}$$

Обозначим $f_i = f(x,y,\alpha_i)$ $(i=\overline{1,n})$. Рассмотрим сумму

$$W=\sum_{i=1}^{n} m_i\ f_i\ . \tag{34}$$

Тогда на основании (33), мы получим

$$\frac{dW}{dx}=\psi(x)\sum_{i=1}^{n} m_i\ \omega(x,\alpha_i)\,, \tag{35}$$

где $m_i\ (i=\overline{1,n})-$ постоянные. Если теперь нам удастся подобрать частные решения α_i и постоянные m_i так, чтобы имело место уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ \omega(x,\alpha_i)=0\,, \tag{36}$$

то из уравнения (35) следует, что

$$W=C\quad (C-\text{произвольная постоянная}). \tag{37}$$

Таким образом, если в функции W мы рассматриваем α_i $(i=\overline{1,n})$ как определенные решения уравнения (4), а $y-$ как произвольное решение, отличное от α_i, то равенство (37) определяет общий интеграл уравнения (4).

Чтобы реализовать идею метода частных решений требуется:

1) найти функцию f, удовлетворяющую уравнению (31), причем форму функций ψ и ω можно выбрать по собственному усмотрению;

2) найти, если это возможно, такие частные решения α_i $(i=\overline{1,n})$ и постоянные m_i $(i=\overline{1,n})$, чтобы имело место равенство (36).

Функция $f = f(x,y,\alpha_i)$ называется *интегрирующей* функцией [3] для уравнения (4), если она удовлетворяет уравнению (32).

В общем случае интегрирование уравнения (32) эквивалентно интегрированию уравнения (4), поэтому возникает вопрос о том, нельзя ли подобрать функции ψ и ω так, чтобы можно было найти хотя бы одно решение уравнения (32). В работе [3] найдены три интегрирующие функции вида

$$f=\int^{y-\alpha_i}\frac{\exp(h\,u)}{u}du\,,\ f=\frac{e^{h(y-\alpha_i)}}{hy}-\int^{y-\alpha_i}\frac{\exp(h\,u)}{u}du\,,\ f=-\frac{e^{h(y-\alpha_i)}}{h\alpha_i}-\int^{y-\alpha_i}\frac{\exp(h\,u)}{u}du\,. \tag{38}$$

Там же было показано, что эти интегрирующие функции являются единственными среди интегрирующих функций, явно не зависящих от x (т.е. для них имеет место условие $\frac{\partial f}{\partial x}=0$). Конструктивный момент нахождения интегрирующих функций заключается в том, что из них можно строить новые интегрирующие функции. Если имеется интегрирующая функция $f = f(x,y,\alpha_i)$, то функция

$$F(x,y,\alpha_i) = f(x,y,\alpha_i) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) \frac{\partial^k f(x,y,\alpha_i)}{\partial \alpha_i{}^k}$$

является интегрирующей при специальном определенном выборе функций $\lambda_k(x)$ $(k=\overline{1,n})$. В работе [12] доказано, что при $n=2$ интегрирующая функция $F = F(x,y,\alpha_i)$ имеет вид

$$F = f(x,y,\alpha_i) + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i{}^2}, \tag{39}$$

где $\lambda_2 = C_1 e^{I_1}$, $\lambda_1 = \left(C_2 + 2C_1 \int e^{I_1} \frac{r}{\alpha_i^3} dx \right) e^{I_1}$, $I_1 \equiv -\int \frac{r}{\alpha_i^2} dx$,

а $C_1, C_2 -$ произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть имеется интегрирующая функция $f = -\frac{e^{h(y-\alpha)}}{h\alpha_i} - \int^{y-\alpha} \frac{\exp(hu)}{u} du$,

где $\alpha -$ неизвестное частное решение. Требуется построить уравнение Абеля второго рода, допускающее данную интегрирующую функцию, найти частное решение α и общий интеграл этого уравнения.

Решение: Отметим, что при решении мы будем использовать методы, которые изложены в [13, 14]. Теперь определим исходное уравнение eq и уравнение eq1, которое показывает, что $\alpha(x)$ есть частное решение.

```
Clear[“Global`*”];
eq = y[x]y’[x] - y[x] - r[x]==0;
eq1= α[x] α’[x] - α[x] - r[x]==0;
```

Из уравнений eq и eq1 следует определение дифференциального оператора *d[f]* полной производной для функции $f(x,y,\alpha_i)$

d[f_]:= $\partial_x f + \frac{y+r}{y} \partial_y f + \frac{\alpha+r}{\alpha} \partial_\alpha f$;

Введем интегрирующую функцию f_1

f_1 = - $\frac{1}{h\alpha} e^{h(y-\alpha)} - \left(\int \frac{e^{hu}}{u} du \,/.\, u \to y-\alpha \right)$;

Чтобы функция f_1 была общим интегралом уравнения eq, частное решение $\alpha(x)$ должно удовлетворять следующему условию

eq2=(d[f_1] // Factor) == 0;

Разрешая уравнение eq2 относительно α**,** определим частное решение $\beta[r]$ уравнения eq:

```
β[r_ ]=(α /. Solve[eq2,α] [[1]]);
```

Чтобы установить вид функции $r(x)$, при которой функция $\beta(x)$ будет частным решением, подставляем ее в уравнение eq1

```
eq3=eq1 /. α →(β[r[#] ] &) // Simplify;
```

Полученное уравнение eq3 можно легко разрешить относительно производной $r'[x]$

```
sol3=Solve[eq3, r’[x] ] [[1]]
```

$\{r'[x] \to h\, r[x] + 2h^2\, r[x]^2 + h^3 r[x]^3\}$

Так как производная $r'[x]$ зависит только от r, то из полученного уравнения проще найти обратную функцию $x(r)$.

```
eq4 = x'[r] == (1/ r'[x] /. sol3 /. r[x]→r);
sol4=DSolve[eq4, x[r], r] [[1]]
```

$$\{\, x[r] \to \frac{1}{h(1+hr)} + C[1] + \frac{Log[r]}{h} - \frac{Log[1+h\,r]}{h} \,\}$$

Мы получили соотношение между x и r. Теперь в исходном уравнении eq можно перейти к новой независимой переменной r. В результате получим следующее уравнение Абеля

```
eq5 = eq /. y[x] → y[r] /. r[x]→r /. y'[x] →
        (y'[r] / x'[r] /. Solve[eq4, x'[r] ] [[1]]) // Simplify
eq6 = y[r] (y'[r] == (y'[r] /. Solve[eq5, y'[r] ] [[1]]) ) // Thread[#, Equal] &
```

$$y[r]\, y'[r] == -\frac{-r - y[r]}{h\,r(1+h\,r)^2}$$

Подставляя частное решение $\beta(r)$ в eq6, убеждаемся в том, что оно удовлетворяет найденному уравнению.

```
eq6 /. y → (β[#] &) // Simplify
```

True

С учетом найденного частного решения $\beta(r)$ общий интеграл уравнения eq6 запишется в виде (c – произвольная постоянная):

```
f₂= (f₁ /. α → β[r] /. y → y[r]) == c
```

$$\frac{e^{h(\frac{r}{1+hr}+y[r])}(1+hr)}{hr} - \mathrm{ExpIntegralEi}[h\left(\frac{r}{1+hr}+y[r]\right)] == c$$

Дифференцируя f_2 и подставляя производную $y'(r)$ из уравнения eq6, убеждаемся, что выражение f_2 есть общий интеграл уравнения eq6.

```
D[f₂,r] /. Solve[eq6, y'[r] ] [[1]] // Simplify
```

True

Здесь $\mathrm{ExpIntegralEi}[h\,x]$ есть стандартное обозначение, используемое в системе *Mathematica* для интеграла вида $\int^{x} \frac{\exp(h\,u)}{u} du$. Таким образом, мы получили уравнение Абеля $y(r)\frac{dy}{dr} = \frac{r + y(r)}{h\,r(1+h\,r)^2}$ $(h - const)$, частное решение которого есть $\alpha = -\frac{r}{1+hr}$, а общий интеграл имеет вид

$$\frac{e^{h(\frac{r}{1+hr}+y(r))}(1+hr)}{hr} - \int^{r} \frac{\exp(h\left(\frac{u}{1+hu}+y(u)\right))}{\frac{u}{1+hu}+y(u)} du = C\,.$$

Замечание. При $h = -1$ данный пример рассмотрен в работе [3].

Пример 4. Пусть задана интегрирующая функция $f = \int^{y-\alpha} \frac{\exp(h\,u)}{u} du$, где α – неизвестное частное решение, h $-const$. Требуется построить уравнение Абеля второго рода, допускающее данную интегрирующую функцию, найти частное решение α и общий интеграл этого уравнения.

Согласно алгоритму, приведенному в работе [12], частное решение искомого уравнения Абеля есть $\alpha = -\dfrac{3r}{1+h\,r}$, само уравнение имеет вид

$$y(r)\ \ y'(r) = \frac{9(r+y(r))}{(hr-2)(hr+1)^2}\,,\quad x(r) = C_1 + \frac{3}{h(hr+1)} + \frac{\ln(hr-2)-\ln(hr+1)}{h}\,,$$

а его общий интеграл есть $\quad \mathrm{ExpIntegralEi}\left[h\left(\dfrac{3r}{hr+1}+y(r)\right)\right]-$

$$-\frac{\exp\left(h(\frac{3r}{1+hr}+y(r))\right)(1+hr)(6r(hr-1)+3r+(hr-2)(hr+1)y(r))}{h(hr-2)(y(r)+r(3+h\,y(r)))^2} = C\,,$$

где $C-$ произвольная постоянная. При этом из заданной функции f мы строим новую интегрирующую функцию F вида (39).

4. Специальное уравнение второго порядка и эквивалентная ему система

В работе [15] построено дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}(3a_0\gamma + a_1)\gamma'' &= 5a_0\gamma'^2 + (20a_0{}^2\gamma^3 + 20a_0a_1\gamma^2 + (3a_0' + 6a_1{}^2 + 2a_0a_2)\gamma + a_1' - 7a_0a_3 + 3a_1a_2)\gamma' - \\ &-16a_0{}^3\gamma^6 - 32a_0{}^2a_1\gamma^5 - 20a_0(a_0a_2 + a_1{}^2)\gamma^4 - (2(11a_0a_1a_2 + 7a_0{}^2a_3 + 2a_1{}^3) - 2(a_0a_1' - a_0'a_1))\gamma^3 - \\ &-(2(7a_0a_1a_3 + 2a_0a_2{}^2 + 3a_1{}^2a_2) - 3(a_0a_2' - a_0'a_2))\gamma^2 - (2(a_1a_2{}^2 + a_0a_2a_3 + 2a_1{}^2a_3) - \\ &-3(a_0a_3' - a_0'a_3) - (a_1a_2' - a_1'a_2))\gamma - 2a_3(a_1a_2 - a_0a_3) + a_1a_3' - a_1'a_3\,, \qquad (40)\end{aligned}$$

которое имеет два однопараметрических семейства решений в форме общих решений уравнений Абеля первого рода. А именно, для уравнения (40) имеет место

Теорема 3. *Уравнение (40) имеет однопараметрические семейства решений в виде общих решений уравнений Абеля*

$$\gamma' = c_0\gamma^3 + c_1\gamma^2 + c_2\gamma + c_3 \qquad (41)$$

($c_i\ \ (i=\overline{0,3})-$ *некоторые аналитические функции* x) *тогда и только тогда, когда* $c_i = a_i\ (i=\overline{0,3})$ или $c_0 = 4a_0$, $c_2 = a_2 + \dfrac{c_1{}^2 - 4a_1{}^2}{12a_0}$ *и имеют место соотношения*

$$c_3 = a_3 + \frac{a_1}{36a_0{}^2}(c_1 - 2a_1)^2\,,$$

$$c_1' = \frac{1}{36a_0}(c_1{}^3 - 12a_1c_1{}^2 + 36(a_1{}^2 + a_0' + a_0a_2)c_1 - 32a_1{}^3 - 72a_0a_1a_2 - 216a_0{}^2a_3 + 72a_0a_1' - 72a_0'a_1)$$

или

$$c_3 = \frac{1}{180a_0{}^2}(12a_1{}^3 - 20a_1{}^2c_1 + a_1(36a_0a_2 + 5c_1{}^2 + 36a_0') + 36a_0(2a_0a_3 - a_1'))\,,$$

$$\begin{aligned}c_1' = \frac{1}{36a_0}(c_1{}^3 - 20a_1c_1{}^2 + 4(17a_1{}^2 + 9a_0' + 9a_0a_2)c_1 - 64a_1{}^3 - \\ -72a_0{}^2(7a_3 - 4c_3) - 72(a_0a_1a_2 + a_0'a_1 - a_0a_1'))\,,\end{aligned}$$

$$(14a_1^3+63(3a_0^2a_3-a_0a_1a_2-a_0'a_1+a_0a_1'))\,c_1^2+(504(a_0a_1^2a_2-3a_0^2a_1a_3+a_0'a_1^2-a_0a_1a_1')-$$
$$-112a_1^4)\,c_1+152a_1^5-468a_0a_1^3a_2-972a_0^2a_1a_2^2+2052a_0^2a_1^2a_3-468a_1^3a_0'-$$
$$-1620a_0a_1a_2a_0'+972a_0^2a_0'a_3-972a_0'^2a_1+468a_0a_1^2a_1'+1296a_0^2a_2a_1'+$$
$$+972a_0a_0'a_1'+324(a_0^2a_1a_2'+3a_0^3(3a_2a_3-a_3')+a_0a_1a_0''-a_0^2a_1'')=0.$$

Используя эту теорему, можно получить новые условия интегрируемости [15] уравнения Абеля (41).

Перейдем к решению следующей задачи: найти аналитическую форму эквивалентной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений первого порядка, для уравнения (40).

Будем искать систему, эквивалентную уравнению (40), в виде

$$\begin{aligned} w' &= k_0+k_1w+k_2w^2+k_3w^3+(3a_0w+a_1)u, \\ u' &= \alpha\,u^2+(p_0w^2+p_1w+p_2)u+q_0w^3+q_1w^2+q_2w+q_3, \end{aligned} \qquad (42)$$

где $\gamma\equiv w$. Из первого уравнения системы (42) находим

$$u=\frac{w'-(k_0+k_1w+k_2w^2+k_3w^3)}{3a_0w+a_1}. \qquad (43)$$

Дифференцируя уравнение (43) и подставляя результат во второе уравнение системы (42), получим некоторое уравнение. Приравнивая коэффициенты этого уравнения к соответствующим коэффициентам уравнения (40), будем иметь систему

при w'^2: $$\alpha=2a_0; \qquad (44)$$

при $w'w^3$: $$-20a_0^2-2\alpha k_3+6a_0k_3+3a_0p_0=0.$$

Откуда, учитывая (44), получим

$$k_3=10a_0-\frac{3}{2}p_0. \qquad (45)$$

При $w'w^2$: $$-20a_0a_1-2\alpha k_2+3a_0k_2+3a_1k_3+a_1p_0+3a_0p_1=0.$$

Отсюда находим k_2:

$$k_2=10a_1+3p_1-\frac{7a_1p_0}{2a_0}. \qquad (46)$$

При $w'w$: $$-6a_1^2-2a_0a_2-2\alpha k_1+2a_1k_2+a_1p_1+3a_0p_2=0.$$

Учитывая (46), найдем k_1:

$$k_1=\frac{7a_0a_1(2a_1+p_1)-7a_1^2p_0+a_0^2(3p_2-2a_2)}{4a_0^2}. \qquad (47)$$

При w': $$-3a_1a_2+7a_0a_3-2\alpha k_0-3a_0k_0+a_1k_1+a_1p_2=0.$$

Отсюда, учитывая (47), получим

$$k_0=\frac{7a_0a_1(2a_1+p_1)-7a_1^2p_0+a_0^2(3p_2-2a_2)}{4a_0^2}. \qquad (48)$$

При w^6: $$16a_0^3+\alpha k_3^2-3a_0k_3p_0=0, \qquad (49)$$

при w^5: $$32a_0^2a_1+2\alpha k_2k_3-3a_0k_2p_0-a_1k_3p_0-3a_0k_3p_1+9a_0^2q_0=0, \qquad (50)$$

при w^4: $$20a_0a_1^2+20a_0^2a_2+\alpha k_2^2+2\alpha k_1k_3-3a_0k_1p_0-a_1k_2p_0-3a_0k_2p_1-a_1k_3p_1-$$

$$-3a_0k_3p_2+6a_0a_1q_0+9a_0{}^2q_1-3k_3a_0'+3a_0k_3'=0, \qquad (51)$$

при w^3: $4a_1{}^3+22a_0a_1a_2+14a_0{}^2a_3+2\alpha k_1k_2+2\alpha k_0k_3-3a_0k_0p_0-a_1k_1p_0-3a_0k_1p_1-a_1k_2p_1-$
$-3a_0k_2p_2-a_1k_3p_2+a_1{}^2q_0+6a_0a_1q_1+9a_0{}^2q_2+2a_1a_0'-3k_2a_0'-2a_0a_1'-k_3a_1'+3a_0k_2'+a_1k_3'=0,$ (52)

при w^2: $6a_1{}^2a_2+4a_0a_2{}^2+14a_0a_1a_3+\alpha k_1{}^2+2\alpha k_0k_2-a_1k_0p_0-3a_0k_0p_1-a_1k_1p_1-3a_0k_1p_2-$
$-a_1k_2p_2+a_1{}^2q_1+6a_0a_1q_2+9a_0{}^2q_3+3a_2a_0'-3k_1a_0'-k_2a_1'-3a_0a_2'+3a_0k_1'+a_1k_2'=0,$ (53)

при w: $2a_1a_2{}^2+4a_1{}^2a_3+2a_0a_2a_3+2\alpha k_0k_1-a_1k_0p_1-3a_0k_0p_2-a_1k_1p_2+a_1{}^2q_2+6a_0a_1q_3+$
$+3a_3a_0'-3k_0a_0'+a_2a_1'-k_1a_1'-a_1a_2'-3a_0a_3'+3a_0k_0'+a_1k_1'=0,$ (54)

при w^0: $2a_1a_2a_3-2a_0a_3{}^2+\alpha k_0{}^2-a_1k_0p_2+a_1{}^2q_3+a_3a_1'-k_0a_1'-a_1a_3'+a_1k_0'=0.$ (55)

Подставляя значение $\alpha=2a_0$ и k_3 из (45) в уравнение (49), получим

$$24a_0{}^2-10a_0p_0+p_0{}^2=0 \qquad \text{или} \qquad (p_0-6a_0)(p_0-4a_0)=0.$$

Возможны два случая:

Случай 1) $p_0=6a_0.$ (56)

Подставляя в уравнения (45)-(48) это значение p_0, соответственно получим

$$k_3=a_0, \quad k_2=3p_1-11a_1, \quad k_1=\frac{3}{4}p_2-\frac{1}{2}a_2+\frac{7a_1}{4a_0}(p_1-4a_1), \qquad (57)$$

$$k_0=a_3+\frac{a_0a_1(p_2-2a_2)-4a_1{}^3+4a_1{}^2p_1}{4a_0{}^2}. \qquad (58)$$

Тогда из уравнения (50) найдем

$$q_0=5p_1-20a_1, \qquad (59)$$

из уравнения (51) –

$$q_1=\frac{3}{2}p_2-3a_2+\frac{25a_1p_1-68a_1{}^2-2p_1{}^2}{2a_0}, \qquad (60)$$

из уравнения (52) –

$$q_2=\frac{28a_1{}^2p_1-64a_1{}^3+4p_1a_0'-a_1(16a_0a_2+3p_1{}^2+16a_0')+a_0(2a_2p_1+p_1p_2+16a_1'-4p_1')}{4a_0{}^2}, \qquad (61)$$

из уравнения (1.127) –

$$q_3=[8a_1{}^3p_1-16a_1{}^4-a_1{}^2(16a_0a_2+p_1{}^2+16a_0')+a_1(32a_0{}^2a_3+4p_1a_0'+a_0(4a_2p_1+16a_1'-2p_1'))+$$
$$+a_0(2p_2a_0'-4a_2a_0'-2p_1a_1'+a_0(p_2{}^2-4a_2{}^2-8a_3p_1+4a_2'-2p_2'))]/(8a_0{}^3). \qquad (62)$$

Непосредственной подстановкой $p_0,\ k_i,\ q_i\ \ (i=\overline{0,3})$ из уравнений (56)-(62) в уравнения (54), (55) убеждаемся, что эти уравнения обращаются в тождества.

Случай 2) $p_0=4a_0.$ (63)

Подставляя (63) последовательно в соотношения (45)-(48), а затем в (50)-(55), найдем

$$k_3=4a_0, \quad k_2=3p_1-4a_1, \quad k_1=\frac{3}{4}p_2-\frac{1}{2}a_2+\frac{7a_1}{4a_0}(p_1-2a_1),$$

$$k_0=a_3+\frac{a_1{}^2p_1-2a_1{}^3+a_0a_1(p_2-2a_2)}{4a_0{}^2}, \qquad (64)$$

и $$q_0 = 0, \qquad q_1 = p_2 - 2a_2 + \frac{5a_1 p_1 - 6a_1^2 - p_1^2}{a_0},$$

$$q_2 = \frac{14a_1^2 p_1 - 16a_1^3 - 8a_0^2 a_3 + 4p_1 a_0' - a_1(8a_0 a_2 + 3p_1^2 + 8a_0') + a_0(2a_2 p_1 + p_1 p_2 + 8a_1' - 4p_1')}{4a_0^2}$$

$$q_3 = [4a_1^3 p_1 - 4a_1^4 - a_1^2(8a_0 a_2 + p_1^2 + 8a_0') + 2a_1(8a_0^2 a_3 + 2p_1 a_0' + a_0(2a_2 p_1 + 4a_1' - p_1')) +$$
$$+ a_0(2p_2 a_0' - 4a_2 a_0' - 2p_1 a_1' + a_0(p_2^2 - 4a_2^2 - 8a_3 p_1 + 4a_2' - 2p_2'))]/(8a_0^3). \qquad (65)$$

Из вышеизложенного следует

Теорема 4. *Система (42) эквивалентна уравнению (40), если выполняется условие (44) и одна из систем коэффициентных условий: (56)-(62) или (63)-(65).*

Замечание. Решаемая задача тесно связана с поиском преобразований А. Бэклунда (Backlund) для уравнения второго порядка (40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. –Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
3. Коялович Б.М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$. – СПб.: Типограф. Академии наук, 1894. – 261 с.
4. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Мн.: БГУ, 1999. – 210 с.
5. Полянин А.Д. Уравнения Абеля и связанные с ними уравнения нелинейной механики, интегрируемые в квадратурах. – М., 1986. – 68 с. (Препринт / ИПМех АН СССР; № 271).
6. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Элементы аналитической теории уравнений III и IV порядков // Нелинейный анализ и гомографическая динамика: Сб. стат./ Под ред. Е.А. Гребеникова. – М.:ВЦ РАН, 1999.– С.49-59.
7. Чичурин А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография. – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 462 с.
10. Schwarz F. Symmetry analysis of Abel’s equation // Studies in Applied mathematics, 1998, t. 100, p.269-294.
11. Prokopenya A.N., Chichurin A.V. On Some Methods of Studying Abel’s Equation with CAS *Mathematica* // The Third International Workshop on *Mathematica* System in Teaching and Research: Proceedings of the International Conference, Siedlce, Poland, 5-7.09.2001./ – Siedlce, WAP, 2001. – P. 136-144.
12. Chichurin A.V. Kojalovich method and studying Abel’s equation with the one known solution // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. – 2004. – № 2 (44). – P. 62-66.
13. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: БГУ, 1999. –265 с.

14. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Классы интегрирующих функций уравнения Абеля // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: Труды межд. конф., Брест, 19.09-22.09.2000 г. – Брест: Изд.-во С. Лаврова, 2001. – С. 91-101.
15. Чичурин А.В. О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1, Математика. – 2003. – № 3. – С. 17 - 22.