УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ І ВИГЛЯД ТОЧОК ПОРЯДКУ ШАРКОВСЬКОГО

В. В. Собчук, І.В. Хітько

Волинський державний університет імені Лесі Українки,

Україна, 43013, м. Луцьк, пр. Волі,13

e-mail: ***sobchuk@lab.univer.lutsk.ua***

hitko@univer.lutsk.ua

В зв'язку з розвитком сучасного природознавства та техніки виникає необхідність дослідження нелінійних динамічних систем, у яких мають місце короткотривалі процеси або які знаходяться під дією зовнішніх сил, тривалістю яких можна знехтувати при складанні відповідних математичних моделей.

Такі системи зустрічаються, наприклад, в механіці, хімічній технології, медицині та біології, динаміці літальних апаратів, математичній економіці, теорії керування та в інших галузях науки та техніки, де доводиться вивчати системи, що перебувають під впливом короткотривалих (імпульсних) зовнішніх сил, які називають системами з імпульсною дією.

Як виявилось, наявність імпульсної дії може суттєво ускладнити поведінку траєкторій таких систем навіть для випадків порівняно простих диференціальних рівнянь. В загальному випадку, за наявності імпульсної дії поведінка розв'язків диференціальних рівнянь (навіть лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами) може бути суттєво нелінійною і значно відрізнятися від поведінки таких систем за відсутності імпульсної дії.

Розглянемо динамічну систему, рух у якій описується диференціальним рівнянням Льєнара вигляду:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0\,, \qquad (1)$$

($x \in M \subset R^3$, $M-$ фазовий простір системи (1), $t \in R-$ час) і яка зазнає впливу миттєвих сил, які визначаються деяким оператором A_t, що у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$ діє згідно з правилом $(x, t) \to (t, A_t x)$. Імпульсна дія в такій системі відбувається у нефіксовані моменти часу та збільшує кількість руху в системі на деяку величину $I(\dot{x})$, що залежить від швидкості рухомої точки в момент проходження нею положення $x = x_*$. Далі вважатимемо, що $I(y)$, де $y = \dot{x}$, як функція свого аргументу є неперервною.

Якщо t_* деякий момент часу, в який рухома точка досягає положення $x = x_*$, коли відбувається імпульсна дія, то імпульсні збурення рухомої точки записують [1]:

$$\Delta \left.\frac{d\,x}{d\,t}\right|_{x=x_*} = \left.\frac{d\,x}{d\,t}\right|_{t=t_*+0} - \left.\frac{d\,x}{d\,t}\right|_{t=t_*-0} = A_t x - x = I(\dot{x})\,. \qquad (2)$$

Опис фізичної інтерпретації рівняння Льєнара та характеристика його фазового портрету детально вивчено в [3].

Рівняння (1) записується еквівалентним чином у вигляді системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \qquad (3)$$

В подальшому використовується позначення

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \qquad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds.$$

Означення. *Диференціальне рівняння* (1), *що задовольняє умови*

$$x\,g(x) > 0 \quad \textit{для} \quad x \neq 0 \qquad (4)$$

та

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x) \tag{5}$$

називається за Опялем диференціальним рівнянням типу ***S***.

Позначимо $y_* = \sqrt{2G(x_*)}$.

Припустимо, що

1^0. Диференціальне рівняння Льєнара (1) є рівнянням типу ***S*** і задовольняє умови існування та єдиності розв'язку.

2^0. Пряма $x = x_*$ — трансверсальна потоку (1) всюди, крім траєкторії, для якої пряма $x = x_*$ є дотичною. В цьому випадку вважаємо, що $I(0) = 0$.

3^0. Оператор імпульсної дії є неперервним стосовно своїх змінних.

Припустимо також, що $|\min G(x)| > 1$.

За допомогою вивчення руху фазової точки системи (1), (2) у [3] побудовано відображення Пуанкаре для прямої $x = x_*$, яке використовується для дослідження питання про існування періодичних розв'язків задачі (1), (2). Також показано, що задача про існування періодичних розв'язків системи (1), (2) зводиться до задачі про існування періодичних та нерухомих точок деякого відображення відрізка в цей самий відрізок, яке визначається формулою

$$f(y) = -y + I(-y), \tag{6}$$

де $I(-y) < y, \quad y \neq 0, \quad y = \dot{x}$.

Розглянемо задачу про існування періодичних розв’язків задачі (1), (2), коли функція імпульсної дії має вигляд:

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda - 1)y - \lambda\, y_*, & y \geq 0, \\ -(\lambda + 1)y - \lambda\, y_*, & y < 0, \end{cases} \tag{7}$$

де $y = \dot{x}, \quad \lambda$ — деякий параметр, причому $0 < \lambda \leq |\min G(x)|$.

Відображення

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda\ (y_* - y), & y \ge 0, \\ \lambda\ (y_* + y), & y < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

є неперервним для всіх $y \in R$ і має такі властивості: при $0 < \lambda < 1$ існує лише одна нерухома точка, яка є стійкою; при $1 < \lambda \le |\min G(x)|$ — дві нерухомі точки

$$\left\{\frac{\lambda}{1-\lambda} y_*\right\} \text{ та } \left\{\frac{\lambda}{1+\lambda} y_*\right\},$$

та періодичну точку періоду 2:

$$\left\{\frac{\lambda - \lambda^2}{1+\lambda^2} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2}{1+\lambda^2} y_*\right\}.$$

Точки періоду 3 для відображення (8) утворюють два цикли

$$\left\{\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1+\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1+\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1+\lambda^3} y_*\right\},$$
$$\left\{\frac{\lambda - \lambda^2 + \lambda^3}{1-\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1-\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1-\lambda^3} y_*\right\}.$$

Таким чином, диференціальне рівняння (1) з імпульсною дією (2), (7), де $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \le |\min G(x)|$, має $T(n)$–періодичні розв'язки такі, що фазова точка даної системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає рівно n імпульсних дій за період, де n — довільне натуральне число (див. [2,3]). Точки, що задають цикли, які відповідлають періодичним розв’язкам задачі (1), (7) задовольняють порядку Шарковського.

Показажемо, що точки, які утворюють періодичні цикли для відображення (8) слід шукати серед дробів вигляду

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \qquad (9)$$

де $P^n(\lambda)$ — многочлен, вигляду $P^n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + \lambda,\quad a_i = \pm 1,\ i = \overline{2,\ n}$.

Доводимо рівність (9), використовуючи метод математичної індукції. Зокрема, при $n = 2$ отримуємо:

$$y=\lambda(y_*\pm\lambda(y_*\pm y))=(\lambda\pm\lambda^2)y_*\pm\lambda^2 y,$$

$$(\lambda^2\pm\lambda)y_*=(1\pm\lambda^2)y,$$

$$y=\frac{\lambda\pm\lambda^2}{1\pm\lambda^2}y_*=\frac{P^2(\lambda)}{1\pm\lambda^2}y_*.$$

Припустимо, що (9) виконується для $n=k$, тобто справедлива така рівність:

$$y=\frac{P^k(\lambda)}{1\pm\lambda^k}y_*. \tag{10}$$

Використовуючи (10) доведемо, що рівність (9) виконується для $n=k+1$. Запишемо (10) у вигляді $(1\pm\lambda^k)y=P^k(\lambda)y_*$, або, що те саме,

$$y=P^k(\lambda)y_*\pm\lambda^k y. \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (8) отримаємо:

$$y=\lambda(y_*\pm(P^k(\lambda)y_*\pm\lambda^k y))=\lambda y_*\pm\lambda P^k(\lambda)y_*\pm\lambda^{k+1}y=$$
$$=\lambda y_*\pm P^{k+1}(\lambda)y_*\pm\lambda^{k+1}y=P^{k+1}(\lambda)y_*\pm\lambda^{k+1}y,$$

$$y=\frac{P^{k+1}(\lambda)}{1\pm\lambda^{k+1}}y_*.$$

Таким чином доведено таке твердження.

Твердження 1. *Диференціальне рівняння* (1) *з імпульсною дією* (2), (7)*, де* $y=\dot{x}$*, при* $1<\lambda\le|\min G(x)|$*, має* $T(n)$*–періодичні розв'язки такі, що фазова точка даної системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає рівно* n *імпульсних дій за період, де* n *— довільне натуральне число. При чому точки дії імпульсних сил, що відповідають* $T(n)$*–періодичним розв'язкам слід шукати серед дробів вигляду*

$$y=\frac{P^n(\lambda)}{1\pm\lambda^n}y_*, \tag{9}$$

де $P^n(\lambda)$ — *многочлен, вигляду* $P^n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + \lambda, \quad a_i = \pm 1, \; i = \overline{2, \; n}$.

Вивчимо детальніше задачу про вигляд періодичних точок відображення (8), які . відповідають $T(n)$–періодичним розв'язкам задачі (1), (7).

Побудуємо многочлени $P^n(\lambda)$ в явному вигляді. Побудову почнемо з точки $y = \dfrac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_*$. Подіємо на цю точку відображенням (8).

$$f(y) = \lambda\,(y_* \pm \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_*)\,, \tag{12}$$

або

$$f(y) = \lambda\, y_* \frac{1+\lambda^n \pm (\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n)}{1+\lambda^n}\,.$$

Згідно твердження 1, многочлен у знаменнику дробу повинен мати степінь n, а тому знак перед дробом у (12) буде "+", а $y<0$.

Провівши відповідні перетворення (12), отримуємо наступну точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_*, \tag{13}$$

при чому

$$\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_* < 0,$$

або, що те саме

$$\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n < 0\,. \tag{14}$$

Повторивши аналогічні міркування для (13) отримуємо точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_*\,, \tag{15}$$

де знову ж $\dfrac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - \ldots - \lambda^n}{1+\lambda^n} y_* < 0$, або

$$\lambda+\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n}<0. \tag{16}$$

Продовжуючи аналогічні міркування отримуємо, що якщо чисельник дробу (9) буде рівним $1+\lambda^{n}$, то многочлени $P^{n}(\lambda)$ у знаменнику відповідних точок циклу матимуть вигляд:

$$\begin{array}{l} \lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}, \\ \lambda+\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n}. \end{array} \tag{17}$$

Крім того, для λ повинна виконуватися система нерівностей

$$\begin{cases} \lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0, \\ \lambda+\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0, \\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n}>0. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що для того, щоб число λ задовольняло систему нерівностей (18) достатньо, щоб воно задовольняло передостанній нерівності системи (18), тобто $\lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0$. Таким чином можна показати, що при збільшенні n звужується інтервал з якого можна вибирати значення параметра λ.

Повторивши вищенаведені міркування для випадку, коли чисельник дробу (9) рівний $1-\lambda^{n}$, тобто коли початкова точка має вигляд $y=\dfrac{\lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n}}{1-\lambda^{n}}y_{*}$, отримаємо вигляд відповідних многочленів $P^{n}(\lambda)$ у його знаменнику. Ці многочлени матимуть вигляд:

$$\begin{array}{l} \lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n, \\ \lambda-\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n, \\ \lambda+\lambda^2-\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots-\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n, \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}+\lambda^n, \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n. \end{array} \qquad (19)$$

У цьому випадку система нерівностей, які визначають проміжок існування параметра λ матиме вигляд:

$$\begin{cases} \lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n<0, \\ \lambda-\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n>0, \\ \lambda+\lambda^2-\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n>0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots-\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n>0, \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}+\lambda^n>0, \\ \lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n<0. \end{cases} \qquad (20)$$

Аналогічно як і для системи (18), для того, щоб число λ задовольняло систему нерівностей (20) достатньо, щоб воно задовольняло передостанній нерівності системи (20), тобто $\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n<0$.

Отже ми отримали для обох розглянутих випадків однакову нерівність, що визначає проміжок для параметра λ.

Таким чином для всіх $n \geq 3$ $\lambda \in \left(\alpha, |\min G(x)|\right]$, де α є розв'язком рівняння

$$r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}-r^n=0,$$

на проміжку $\left(1, |\min G(x)|\right]$. Зокрема, при $n=3$ $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}61803$, при $n=4$ $\alpha=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}+\frac{\sqrt{33}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}-\frac{\sqrt{33}}{9}}\approx 1{,}83928$.

Зауважимо, що всі міркування проводились для випадку, коли в якості початкової точки відображення (8) вибирали точки $y=\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^n}{1\pm\lambda^n}y_*$. Якщо ж в якості початкової точки вибрати іншу точку, то отримаємо набір точок, які визначають періодичний цикл відображення (8) відмінний від наведених вище.

Отже, з (17) та (19) помічаємо, що серед точок періодичних циклів періоду n відображення (8), коли фазова точка при русі фазовою траєкторією рівняння (1) зазнає імпульсної дії (7) рівно n разів за період обов'язково будуть точки вигляду:

$$\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n} \text{ та } \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n}. \quad (21)$$

Використовуючи співвідношення (21), можна визначити набір відповідних точок для відображення (8), які визначатимуть відповідний $T(n)$–періодичний розв'язок задачі (1), (7).

Слід зауважити, що з огляду на (17) точка $\frac{\lambda-\lambda^2}{1-\lambda^2}$, яка є точкою періоду 2, співпадає з нерухомою точкою $\frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Таким чином справедливе таке твердження:

Твердження 2. *Точки, що визначають періодичний цикл періоду* n *на проміжку* $(1, |\min G(x)|]$ *для відображення* (8)*, коли фазова точка при русі фазовою траєкторією рівняння* (1) *зазнає імпульсної дії* (7) *рівно* n *разів за період матимуть вигляд:*

$$\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n} \text{ та } \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n}.$$

При цьому із збільшенням n *буде звужуватись інтервал з якого вибириються значеня параметра* λ*, а саме* $\lambda \in (\alpha, |\min G(x)|]$*, де* α *є розв'язком рівняння* $r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1} - r^n = 0$*, на проміжку* $(1, |\min G(x)|]$.

Проведений аналіз якісної поведінки системи (1), (2), (8), демонструє складний характер поведінки траєкторій систем, визначених диференціальними рівняннями та умовами імпульсної дії, причому в таких системах можуть проявлятись певні специфічні ефекти (зміна асимптотичних властивостей розв'язку (при $t \to \infty$), співіснування періодичних розв'язків), спричинені саме умовами імпульсної дії.

1. Самойленко А. М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействиум. – К.: Вищ., шк. 1987. – 252 с.
2. Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Собчук В. В. Про періодичні розв’язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №6. – С. 827 – 834.
3. Самойленко В. Г., Собчук В. В. Періодичні розв’язки рівняння Льєнара з імпульсною дією // Нелінійні коливання. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 256 – 265.